# کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن

## (حل مسئله‌های لاینحل ۲۳۰۰ ساله)

### قسمت ۵

• سید محمدرضا هاشمی موسوی

hashemi – moosavi@yahoo.com

**اشاره**

در قسمت اول تا چهارم مقاله، با سیر تکاملی کشف فرمول اعداد اول و نتایج آن که از اساسی‌ترین آن‌ها حل معادله‌های سیال مرتبه‌ی nام است، آشنا شدید. اکنون آخرین قسمت مقاله، از کتاب مرجع[۱] به‌صورت چکیده ارائه می‌شود. برای اطلاع بیش‌تر از عناوین و موضوعات کتاب مذکور به سایت کاشف فرمول اعداد اول[۲] مراجعه کنید.

**حل معادله‌های سیال با قوای غیرمتشابه (برابری‌های چندگانه)**

در معادله‌ی عمومی زیر، اگر $p_1$ ، $p_2$ ، ... و $p_k$ عددهایی متمایز باشند، برای معادله می‌توان یک سلسله جواب عمومی با k پارامتر ارائه داد:

$$(p_1 \neq p_2 \neq p_2 \neq \cdots \neq p_k)$$

$$X_1^{p_1} + X_2^{p_1} + \cdots + X_k^{p_1} = Y_1^{p_2} + Y_2^{p_2} + \cdots + Y_k^{p_2} \qquad (1)$$

$$= \cdots = Z_1^{p_k} + Z_2^{p_k} + \cdots + Z_k^{p_k}$$

برای تعیین یک سلسله جواب عمومی برای معادله‌ی ۱ کافی است، آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

(۲)

$$(a_1^{p_2 p_3 \cdots p_k})^{p_1} + (a_2^{p_2 p_3 \cdots p_k})^{p_1} + \cdots + (a_k^{p_2 p_3 \cdots p_k})^{p_1} =$$

$$(a_1^{p_1 p_3 \cdots p_k})^{p_2} + (a_2^{p_1 p_3 \cdots p_k})^{p_2} + \cdots + (a_k^{p_1 p_3 \cdots p_k})^{p_2} = \cdots$$

$$(a_1^{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}})^{p_k} + (a_2^{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}})^{p_k} + \cdots + (a_k^{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}})^{p_k}$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۱ با اتحاد۲، یک سلسله جواب عمومی با k پارامتر دل‌خواه برای معادله‌ی ۱ حاصل می‌شود:

$$(3)\quad \left|\begin{array}{l} X_1 = a_1^{p_2p_3\cdots p_k}, X_2 = a_2^{p_2p_3\cdots p_k}, \cdots, X_k = a_k^{p_2p_3\cdots p_k} \\ Y_1 = a_1^{p_1p_3\cdots p_k}, Y_2 = a_2^{p_1p_3\cdots p_k}, \cdots, Y_k = a_k^{p_1p_3\cdots p_k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_1 = a_1^{p_1p_2\cdots p_{k-1}}, Z_2 = a_2^{p_1p_2\cdots p_{k-1}}, \cdots, Z_k = a_k^{p_1p_2\cdots p_{k-1}} \end{array}\right.$$

**مثال:** یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید: $(m \neq n \neq p \neq q)$

$$X_1^m + X_2^m = Y_1^n + Y_2^n = Z_1^p + Z_2^p = T_1^q + T_2^q \qquad (3)$$

**حل:** برای تعیین یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی۳ کافی است آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$\left(a^{npq}\right)^m + \left(b^{npq}\right)^m = \left(a^{mpq}\right)^n + \left(b^{mpq}\right)^n \qquad (4)$$

$$= \left(a^{mnq}\right)^p + \left(b^{mnq}\right)^p = \left(a^{mnp}\right)^q + \left(b^{mnp}\right)^q$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی۳ با اتحاد۴، بلافاصله یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی۳ نتیجه می‌شود:

$$X_1 = a^{npq},\ X_2 = b^{npq},\ Y_1 = a^{mpq},\ Y_2 = b^{mpq},$$
$$Z_1 = a^{mnq},\ Z_2 = b^{mnq},\ T_1 = a^{mnp},\ T_2 = b^{mnp}$$

**مثال:** با شرط $m \neq n$، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی زیر را تعیین کنید:

$$X_1^m + X_2^m + X_3^m = Y_1^n + Y_2^n + Y_3^n \qquad (5)$$

**حل:** کافی است معادله‌ی۵ را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$m \neq n:\ (a^n)^m + (b^n)^m + (c^n)^m \qquad (6)$$
$$= (a^m)^n + (b^m)^n + (c^m)^n$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی۵ با اتحاد۶، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله حاصل می‌شود:

$$X_1 = a^n,\ X_2 = b^n,\ X_3 = c^n,\ Y_1 = a^m,$$
$$Y_2 = b^m,\ Y_3 = c^m$$

**مثال:** با شرط $m \neq n \neq p$، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی زیر را بیابید:

$$X_1^m + X_2^m + X_3^m + X_4^m = Y_1^n + Y_2^n + Y_3^n + Y_4^n \qquad (7)$$
$$= Z_1^p + Z_2^p + Z_3^p + Z_4^p$$

**حل:** کافی است معادله‌ی ۷ را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$(a^{np})^m + (b^{np})^m + (c^{np})^m + (d^{np})^m \qquad (8)$$
$$= (a^{mp})^n + (b^{mp})^n + (c^{mp})^n + (d^{mp})^n$$
$$= (a^{mn})^p + (b^{mn})^p + (c^{mn})^p + (d^{mn})^p$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی۷ با اتحاد۸، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله حاصل می‌شود:

$$X_1 = a^{np},\ X_2 = b^{np},\ X_3 = c^{np},\ X_4 = d^{np},$$
$$Y_1 = a^{mp},\ Y_2 = b^{mp},\ Y_3 = c^{mp},\ Y_4 = d^{mp},$$
$$Z_1 = a^{mn},\ Z_2 = b^{mn},\ Z_3 = c^{mn},\ Z_4 = d^{mn}$$

**مثال:** معادله‌ی زیر را از نظر داشتن یا نداشتن جواب بررسی کنید:

$$X_1^{1384} + X_2^{1384} = Y_1^{173} + Y_2^{173} \qquad (9)$$
$$= Z_1^8 + Z_2^8 = T_1^4 + T_2^4 = U_1^2 + U_2^2$$

**حل:** ابتدا کوچک‌ترین مضرب مشترک بین قوای معادله را تعیین می‌کنیم:

$$1384 = 2^3 \times 173 = 4 \times 346 = 2 \times 692$$
$$[1384, 173] = 1384,\ [1384, 8] = 1384$$

با توجه به این‌که کوچک‌ترین مضرب مشترک بین قوای معادله، عدد **۱۳۸۴** است، اتحاد زیر را می‌توان نوشت:

$$(a)^{1384} + (b)^{1384} = (a^8)^{173} + (b^8)^{173} \qquad (10)$$
$$= (a^{173})^8 + (b^{173})^8 = (a^{346})^4 + (b^{346})^4$$
$$= (a^{692})^2 + (b^{692})^2$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۹ با اتحاد ۱۰، یک سلسله جواب عمومی با دو پارامتر دل‌خواه برای معادله‌ی ۹ حاصل می‌شود:

$$X_1 = a,\ X_2 = b,\ Y_1 = a^8,\ Y_2 = b^8,\ Z_1 = a^{173},$$
$$Z_2 = b^{173},\ T_1 = a^{346},\ T_2 = b^{346},\ U_1 = a^{692},$$
$$U_2 = b^{692}$$

**مثال:** معادله‌ی زیر را از نظر داشتن یا نداشتن جواب بررسی کنید:

$$X_1^{30!+1} + X_2^{30!+1} = Y_1^{31} + Y_2^{31} \qquad (13)$$

**حل:** با توجه به قضیه‌ی **ویلسن** و اتحاد H.M، می‌توان نوشت ($[\ ]$: قسمت درست عدد):

$$p = 31:\ (p-1)! + 1 = p\left(1 + 2\left[\frac{(p-1)!+1}{2p}\right]\right)$$
$$= 31\left(1 + 2\left[\frac{30!+1}{62}\right]\right)$$

بنابراین:

$$[30!+1, 31] = 30!+1$$

پس این اتحاد برقرار است:

(۱۴)

$$(a)^{30!+1}+(b)^{30!+1}=\left(a^{1+2\left\lfloor \frac{30!+1}{62}\right\rfloor}\right)^{31}+\left(b^{1+2\left\lfloor \frac{30!+1}{62}\right\rfloor}\right)^{31}$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی۱۳ با اتحاد۱۴ ، یک سلسله جواب عمومی معادله حاصل می‌شود :

$$X_1=a\ ,\ X_2=b\ ,\ Y_1=a^{1+2\left\lfloor \frac{30!+1}{62}\right\rfloor}\ ,\ Y_2=b^{1+2\left\lfloor \frac{30!+1}{62}\right\rfloor}$$

در این‌جا ، قضیه‌ی اساسی H.M را در رابطه با حل معادله‌های سیال با قوای غیرمتشابه (برابری‌های چندگانه) ارائه می‌دهیم .

**قضیه‌ی H.M** : معادله‌ی عمومی زیر ، با فرض این‌که $p_1$ ، $p_2$ ، ... ، $p_k$ عددهایی متمایز باشند ، همیشه دارای جواب است : $(p_1 \neq p_2 \neq p_3 \neq \cdots p_k)$

$$X_1^{p_1}+X_2^{p_1}+\cdots+X_k^{p_1}=Y_1^{p_2}+Y_2^{p_2}+\cdots+Y_k^{p_2}$$
$$=\cdots=Z_1^{p_k}+Z_2^{p_k}+\cdots+Z_k^{p_k}$$

## قانون تحویل‌پذیری H.M برای معادله‌های سیال قوای متشابه

معادله‌ی سیال با قوای متشابه به‌صورت عمومی با اندیس k را در نظر می‌گیریم :

$$X_1^n+X_2^n+\cdots+X_k^n=X_{k+1}^n \qquad (1)$$

این معادله به معادله‌هایی با اندیس $(k-1)N+k$ قابل تحویل است و از نظر داشتن یا نداشتن جواب ، به این‌گونه معادله‌ها وابسته است و هیچ‌گونه استقلالی ندارد . در صورتی‌که یکی از معادله‌ها با اندیس $(k-1)N+k$ جواب نداشته باشد ، معادله‌ی ۱ نیز جواب ندارد .

برای مثال ، معادله‌ی زیر با اندیس $k=2$ را در نظر می‌گیریم :

$$X^n+Y^n=Z^n \qquad (2)$$

نشان می‌دهیم که معادله‌ی۲ در حالت عمومی به معادله‌های ۱ قابل تحویل است و از نظر داشتن یا نداشتن جواب به این معادله‌ها وابسته است .

برای اثبات این مطلب کافی است معادله‌ی ۲ را به‌صورت $Y^n=Z^n-X^n$ بنویسیم ، دو طرف این معادله را در عبارت زیر ضرب کنیم و سپس آن را به‌صورت ۱ بنویسیم :

$$(Z^{k-2})^n+(Z^{k-3}X)^n+\cdots+(ZX^{k-3})^n+(X^{k-2})^n$$

پس از انجام عملیات لازم به برابری زیر می‌رسیم :

$$(X^{k-1})^n+(X^{k-2}Y)^n+(X^{k-3}YZ)^n \qquad (3)$$
$$+(X^{k-4}YZ^2)^n+\cdots+(YZ^{k-2})^n=(Z^{k-1})^n$$

از برابری۳ ، حکم مسلم زیر که حکمی اصلی و اساسی در رابطه با تحویل پذیری معادله‌ی۲ است ، نتیجه می‌شود .

**حکم اساسی H.M** : معادله‌ی۲ در حالت عمومی ، خاصیت تحویل‌پذیری به حالت خاص هر معادله از معادله‌های ۱ را دارد .

**تبصره** : حکم اساسی H.M قابل تعمیم است و به سادگی ، حکم زیر نیز نتیجه می‌شود .

**حکم اساسی تعمیم یافته‌ی H.M** : معادله‌ی ۲ در حالت عمومی ، خاصیت تحویل‌پذیری به حالت خاص هریک از معادله‌های عمومی زیر را دارد :

$$X_1^n+X_2^n+X_3^n+\cdots+X_k^n=Y_1^n+Y_2^n+\cdots+Y_s^n \qquad (4)$$

**توجه** : معادله‌ی۴ در واقع شامل همه ی معادله‌های قوای متشابه می‌شود و بدیهی است که معادله‌ی ۲ از نظر داشتن یا نداشتن جواب ، به معادله‌های عمومی ۴ وابسته است و این واقعیت به قضایای زیر نیز منجر می‌شود .

**قضیه‌ی اساسی اول H.M** : اگر معادله‌ی۲ به ازای هر nطبیعی جواب داشته باشد ، آن‌گاه همه‌ی معادله‌ی قوای متشابه۴ برای همان n دارای جواب هستند .

**قضیه‌ی اساسی دوم H.M** : اگر یکی از معادله‌های عمومی۴ به ازای هر nطبیعی جواب نداشته باشد ، معادله‌ی ۲ نیز برای همان n دارای جواب نیست .

**نکته** : می‌دانیم معادله‌ی ۲ برای هر $n \geq 3$ جوابی به جز صفر ندارد (قضیه یا در اصل حکم بزرگ فرما) . بدیهی است که اگر معادله‌ی ۲ برای هر n طبیعی لااقل یک جواب خاص داشته باشد ، همه‌ی معادلات قوای متشابه ۴ نیز برای همان توان دارای جواب هستند . از آن‌جا که معادله‌ی ۲ به ازای $n=2$ دارای جواب عمومی است ، معادله‌های ۴ نیز به ازای $n=2$ دارای جواب‌اند . در این‌جا معلوم می‌شود که برای حل معادله‌ی۲ بی‌نهایت شرایط لازم وجود دارد ، یعنی همه‌ی معادله‌های قوای متشابه ۴ باید دارای جواب باشند . همین واقعیت امکان وجود جواب برای معادله‌ی۲ را در حالت $n \geq 3$ به صفر می‌رساند .

در این‌جا برای نشان دادن کاربرد قانون تحویل‌پذیری H.M در حل معادله‌های قوای متشابه کافی است به بررسی معادله‌های زیر بپردازیم :

$$\text{I)}\quad X_1^2+X_2^2+\cdots+X_k^2=X_{k+1}^2$$
$$\text{II)}\quad X_1^3+X_2^3+\cdots+X_{2k+1}^3=X_{2k+2}^3$$
$$\text{III)}\quad X_1^3+X_2^3+\cdots+X_{3k+1}=X_{3k+2}^3$$
$$\text{IV)}\quad X_1^4+X_2^4+\cdots+X_{2s+1}^4=X_{2s+2}^4$$
$$\text{V)}\quad X_1^5+X_2^5+\cdots+X_{3t+1}^5=X_{3t+2}^5$$

برای بررسی معادله‌های فوق از نظر وجود یا نبود جواب ، کافی است یک جواب خاص برای هریک از معادله‌ها ارائه دهیم .

$$\text{I)}\quad a_1^2+b_1^2=c_1^2\ ;\ a_1=3\ ,\ b_1=4\ ,\ c_1=5\ :\ 3^2+4^2=5^2$$
$$b_1^2=c_1^2-a_1^2\ ;$$
$$b_1^2\left((c_1^2)^{k-1}+(c_1^2)^{k-2}a_1^2+\cdots(a_1^2)^{k-1}\right)=(c_1^2)^k-(a_1^2)^k$$

با توجه به قانون تحویل پذیری H.M، معادله‌ی $a_1^2+b_1^2=c_1^2$ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

(۱)

$$(a_1^k)^2+(b_1c_1^{k-1})^2+(a_1b_1c_1^{k-2})^2+\dots+(b_1a_1^{k-1})^2=(c_1^k)^2$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی I با اتحاد۱، یک دسته جواب عمومی برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1=a_1^k\ ,\ X_2=b_1c_1^{k-1}\ ,\ X_3=a_1b_1c_1^{k-2}\ ,\dots,$$
$$X_k=b_1a_1^{k-1}\ ,\ X_{k+1}=c_1^k$$

در صورتی که $a_1=u^2-v^2$، $b_1=2uv$ و $c_1=u^2+v^2$ اختیار شوند، یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی I حاصل می‌شود:

$$\left((u^2-v^2)^k\right)^2+\left((2uv)(u^2+v^2)^{k-1}\right)^2$$
$$+\dots+\left((2uv)(u^2-v^2)^{k-1}\right)^2=\left((u^2+v^2)^k\right)^2$$
$$X_1=(u^2-v^2)^k\ ,\ X_2=(2uv)(u^2+v^2)^{k-1},\dots,$$
$$X_k=(2uv)(u^2-v^2)^{k-1}, X_{k+1}=(u^2+v^2)^k$$

یک جواب عددی خاص معادله‌ی I نیز چنین است:

$$X_1=3^k\ ,\ X_2=4\times5^{k-1}\ ,\ X_3=3\times4\times5^{k-2},\dots,$$
$$X_k=4\times3^{k-1}\ ,\ X_{k+1}=5^k$$

$$\text{II)}\ \ a_2^3+b_2^3+c_2^3=d_2^3\ ;\ a_2=3\ ,\ b_2=4\ ,\ c_2=5\ ,$$
$$d_2=6\ :\ 3^3+4^3+5^3=6^3$$
$$b_2^3+c_2^3=d_2^3-a_2^3\ ,$$
$$(b_2^3+c_2^3)\left((d_2^3)^{k-1}+(d_2^3)^{k-2}(a_2^3)+\dots+(a_2^3)^{k-1}\right)$$
$$=(d_2^3)^k-(a_2^3)^k$$

با توجه به قانون تحویل پذیری H.M معادله‌ی $a_2^3+b_2^3+c_2^3=d_2^3$ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$(a_2^k)^3+(b_2d_2^{k-1})^3+(c_2d_2^{k-1})^3+(b_2a_2d_2^{k-2})^3$$
$$+(c_2a_2d_2^{k-2})^3+\dots+(c_2a_2^{k-1})^3=(d_2^k)^3 \qquad (2)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی II و اتحاد۲، یک دسته جواب عمومی برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1=a_2^k\ ,\ X_2=b_2d_2^{k-1}\ ,\ X_3=c_2d_2^{k-1}\ ,\dots,$$
$$X_{2k+1}=c_2a_2^{k-1}\ ,\ X_{2k+2}=d_2^k$$

یک جواب عددی برای معادله‌ی II نیز چنین است:

$$X_1=3^k\ ,\ X_2=4\times6^{k-1}\ ,\ X_3=5\times6^{k-1}\ ,\dots,$$
$$X_{2k+1}=5\times3^{k-1}\ ,\ X_{2k+2}=6^k$$

در صورتی که $a_2$، $b_2$، $c_2$ و $d_2$ را برحسب دو پارامتر دل‌خواه در نظر بگیریم:

$$\begin{cases}a_2=20u^2+10uv-3v^2\\ b_2=12u^2-10uv-5v^2\\ c_2=16u^2+8uv+6v^2\\ d_2=42u^2+7uv+4v^2\end{cases}$$

یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی II حاصل می‌شود:

$$X_1=(20u^2+10uv-3v^2)^k$$
$$X_2=(12u^2-10uv-5v^2)(42u^2+7uv+4v^2)^{k-1},$$
$$\dots,\ X_{2k+1}=(16u^2+8uv+6v^2)(20u^2+10uv-3v^2)^{k-1},$$
$$X_{2k+2}=(42u^2+7uv+4v^2)^k$$

**توجه**: با تعویض متغیرها می‌توان به دسته جواب‌های جدیدتری رسید.

$$\text{III)}\ \ a_3^3+b_3^3+c_3^3+d_3^3=h_3^3\ ;$$
$$a_3=1\ ,\ b_3=5\ ,\ c_3=4\ ,\ d_3=12\ ,\ h_3=13:$$
$$1^3+5^3+4^3+12^3=13^3$$
$$b_3^3+c_3^3+d_3^3=h_3^3-a_3^3\ ;$$
$$(b_3^3+c_3^3+d_3^3)\left((h_3^3)^{k-1}+(h_3^3)^{k-2}(a_3^3)+\dots+(a_3^3)^{k-1}\right)$$
$$=(h_3^3)^k-(a_3^3)^k$$

با توجه به قانون تحویل پذیری H.M، معادله‌ی $a_3^3+b_3^3+c_3^3+d_3^3=h_3^3$ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$(a_3^k)^3+(b_3h_3^{k-1})^3+(c_3h_3^{k-1})^3+(d_3h_3^{k-1})^3$$
$$+\dots+(d_3a_3^{k-1})^3=(h_3^k)^3 \qquad (3)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی III و اتحاد۳، یک دسته جواب عمومی برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1=a_3^k\ ,\ X_2=b_3h_3^{k-1}\ ,\ X_3=c_3h_3^{k-1}\ ,$$
$$X_4=d_3h_3^{k-1}\ ,\dots,\ X_{3k+1}=d_3a_3^{k-1}\ ,\ X_{3k+2}=h_3^k$$

یک جواب عددی برای معادله‌ی III نیز چنین است:

$$X_1=1\ ,\ X_2=5\times13^{k-1}\ ,\ X_3=4\times13^{k-1}\ ,$$
$$X_4=12\times13^{k-1}\ ,\dots,\ X_{3k+1}=12\ ,\ X_{3k+2}=13^k$$

$$\text{IV)}\ \ a_4^4+b_4^4+c_4^4=d_4^4\ ;\ a_4=95800\ ,$$
$$b_4=217519\ ,\ c_4=414560\ ,\ d_4=422481\ :$$
$$(95800)^4+(217519)^4+(414560)^4=(422481)^4$$
$$b_4^4+c_4^4=d_4^4-a_4^4\ ,$$

$$(b_4^4 + c_4^4)\big((d_4^4)^{k-1} + (d_4^4)^{k-2}(a_4^4)+\cdots+(a_4^4)^{k-1}\big)$$
$$= (d_4^4)^k - (a_4^4)^k$$

با توجه به قانون تحویل پذیری H.M، معادله‌ی $a_4^4 + b_4^4 + c_4^4 = d_4^4$ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

(۴)

$$(a_4^k)^4 + (b_4 d_4^{k-1})^4 + (c_4 d_4^{k-1})^4 + \cdots + (c_4 a_4^{k-1})^4 = (d_4^k)^4$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی IV و اتحاد۴، یک دسته جواب عمومی برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1 = a_4^k \ ,\ X_2 = b_4 d_4^{k-1} \ ,\ X_3 = c_4 d_4^{k-1} \ ,\ldots,$$
$$X_{2s+1} = c_4 a_4^{k-1} \ ,\ X_{2s+2} = d_4^k$$

یک جواب عددی برای معادله‌ی IV نیز چنین است:

$$X_1 = (95800)^k \ ,\ X_2 = (217519)(422481)^{k-1} \ ,$$
$$X_3 = (414560)(422481)^{k-1} \ ,\ldots,$$
$$X_{2s+1} = (414560)(95800)^{k-1} \ ,\ X_{2s+2} = (422481)^k$$

V) $a_5^5 + b_5^5 + c_5^5 + d_5^5 = h_5^5 \ ;\ a_5 = 27 \ ,\ b_5 = 84 \ ,\ c_5 = 110 \ ,\ d_5 = 133 \ ,\ h_5 = 144$ :

$$(27)^5 + (84)^5 + (110)^5 + (133)^5 = (144)^5$$
$$b_5^5 + c_5^5 + d_5^5 = h_5^5 - a_5^5 \ ,$$
$$(b_5^5 + c_5^5 + d_5^5)\big((h_5^5)^{k-1} + (h_5^5)^{k-2}(a_5^5)+\cdots+(a_5^5)^{k-1}\big)$$
$$= (h_5^5)^k - (a_5^5)^k$$

با توجه به قانون تحویل پذیری H.M، معادله‌ی $a_5^5 + b_5^5 + c_5^5 + d_5^5 = h_5^5$ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

(۵)

$$(a_5^k)^5 + (b_5 h_5^{k-1})^5 + (c_5 h_5^{k-1})^5 + \cdots + (d_5 a_5^{k-1})^5 = (h_5^k)^5$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی V و اتحاد۵، یک دسته جواب خاص برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1 = (27)^k \ ,\ X_2 = (84)(144)^{k-1} \ ,\ X_3 = (110)(144)^{k-1},$$
$$\ldots,\ X_{3t+1} = (133)(27)^{k-1} \ ,\ X_{3t+2} = (144)^k$$

**قضیه‌ی نهایی H.M**: اگر معادله‌ی زیر دارای یک جواب خاص یا عمومی باشد:

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n + \cdots + x_k^n = x_{k+1}^n \qquad (1)$$

آن‌گاه معادله‌ی زیر (با توجه به قانون تحویل پذیری H.M) دارای دسته جواب‌های خاص یا عمومی است $(k, N \in \mathbb{N} \ ,\ k \geq 2)$ :

$$X_1^n + X_2^n + X_3^n + \cdots + X_{(k-1)N+1}^n = X_{(k-1)N+2}^n \qquad (2)$$

**برهان**: اثبات این قضیه را با استفاده از قانون تحویل پذیری انجام می‌دهیم.

در صورتی که یک دسته جواب معادله‌ی ۱ را خصوصی یا عمومی بدانیم، با در دست داشتن جواب و جای گزینی آن در معادله، به این برابری بدیهی می‌رسیم:

$$a_1^n + a_2^n + a_3^n + \cdots + a_k^n = a_{k+1}^n \qquad (3)$$
$$a_2^n + a_3^n + \cdots + a_k^n = a_{k+1}^n - a_1^n$$
$$(a_2^n + a_3^n + \cdots + a_k^n)\big((a_{k+1}^n)^{k-1} + (a_{k+1}^n)^{k-2}(a_1^n)+\cdots+(a_1^n)^{k-1}\big)$$
$$= (a_{k+1}^n)^k - (a_1^n)^k$$

با توجه به قانون تحویل پذیری H.M، معادله‌ی ۳ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

(۴)

$$(a_1^k)^n + (a_2 a_{k+1}^{k-1})^n + (a_3 a_{k+1}^{k-1})^n + \cdots + (a_k a_1^{k-1})^n = (a_{k+1}^k)^n$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی۲ با اتحاد۴، یک دسته جواب خاص برای آن حاصل می‌شود:

$$X_1 = a_1^k \ ,\ X_2 = a_2 a_{k+1}^{k-1} \ ,\ldots, X_{(k-1)N+1} = a_k a_1^{k-1} \ ,$$
$$X_{(k-1)N+2} = a_{k+1}^k$$

در این جا با دسته جواب فوق، برهان قضیه‌ی نهایی H.M کامل می‌شود.

## تمرین:

با قانون تحویل پذیری H.M نشان دهید، معادله‌های زیر به ازای «$n = 2, 3, 4, 5$» دارای جواب هستند:

$$X_1^n + X_2^n + X_3^n + X_4^n + X_5^n + X_6^n + X_7^n = X_8^n \qquad (1)$$
$$X_1^n + X_2^n + \cdots + X_7^n = Y_1^n + Y_2^n + Y_3^n + \cdots + Y_7^n \qquad (2)$$

**راهنمایی**: برای تعیین جوابی برای معادله‌ی۱ کافی است با قانون تحویل پذیری H.M، اتحادهای عددی زیر را به حالت خاص معادله‌ی۱ تحویل دهیم. (برای تعیین جوابی برای معادله‌ی۲کافی است از تعویض نقش اعداد استفاده کنیم):

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2 \ ,\ 3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$ و

$$(95800)^4 + (217519)^4 + (414560)^4 = (422481)^4$$
$$(27)^5 + (84)^5 + (110)^5 + (133)^5 = (144)^5$$

برای مثال، پس از تحویل، به اتحاد عددی زیر می‌رسیم:

$$(729)^5 + (12096)^5 + (15840)^5$$
$$+(19152)^5 + (2268)^5 + (2970)^5 + (3591)^5 = (20736)^5$$


**منابع**

1. The discovery of prime numbers formula and its results & other top researches (Author: S.M.R.Hashemi Moosavi).

توضیح: این کتاب به زبان انگلیسی و فارسی در دست چاپ است.

۲. سایت کاشف فرمول: www.primenumbersformula.com