

استدلال ریاضی‌های

(قسمت ۲)

• میرشهرام صدر

mir_sadr@yahoo.com

برای دانش‌آموزان پایه‌ی سوم متوسطه

اشاره

در شماره‌ی قبل راجع به درک شهودی، استدلال‌های استقرایی و قیاسی و محدودیت‌های آن‌ها صحبت کردیم، اینک در ادامه‌ی آن، استدلال‌های دیگر ریاضی را مطرح می‌کنیم.

استدلال استنتاجی

گزاره: جمله‌ای خبری است که ممکن است درست یا نادرست باشد؛ هر چند درستی یا نادرستی آن هنوز برای ما معلوم نشده باشد. یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد. مثال: «۷ عددی فرد است» و « $\sqrt{2}$ عددی گنگ است»، نمونه‌هایی از گزاره‌های درست هستند. مثال: «۳- عددی طبیعی است» و «۱۴ عددی اول است»، نمونه‌هایی از گزاره‌های نادرست هستند. گزاره‌ی شرطی: فرض کنیم p و q دو گزاره باشند. گزاره‌ی «اگر

p آن گاه q » را یک گزاره‌ی شرطی می‌گوییم و آن را با نماد « $p \Rightarrow q$ » نمایش می‌دهیم. در گزاره‌ی شرطی « $p \Rightarrow q$ »، p را فرض و q را نتیجه یا حکم می‌گوییم.

مثال: گزاره‌ی «اگر x و y دو عدد طبیعی باشند، آن گاه $x + y$ عددی طبیعی است»، یک گزاره‌ی شرطی است و می‌توان آن را به زبان نمادهای ریاضی نوشت:

گزاره‌ی $x : p$ و y دو عدد طبیعی هستند. $(p: x, y \in \mathbb{N})$
گزاره‌ی $q: x + y \in \mathbb{N}$ عددی طبیعی است. $(q: x + y \in \mathbb{N})$
گزاره‌ی $(p \Rightarrow q)$: $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \mathbb{N}$

مثال: گزاره‌ی «اگر باران بیارد، آن گاه زمین مرطوب می‌شود». یک گزاره‌ی شرطی است و می‌توان آن را به زبان نمادهای ریاضی نوشت:

گزاره‌ی p : اگر باران بیارد.

حل: درست است، زیرا می توان عبارت بالا را به صورت زیر نوشت:

(اگر فردی در بانک کار کند، آن گاه تحصیل کرده است) و (پدر محمد در بانک کار می کند)

با زبان ریاضی، عبارت بالا به صورت p و $(p \Rightarrow q)$ است که طبق قانون انتزاع، نتیجه ی q است؛ یعنی:

نتیجه: پدر محمد تحصیل کرده است.
توجه: در این مثال، پدر محمد یکی از افرادی است که در بانک کار می کند، به همین دلیل گزاره ی «پدر محمد در بانک کار می کند» را همان p در نظر گرفتیم.

ب) بعضی از کارمندان بانک دارای مدرک فوق لیسانس هستند. پدر حسن در بانک کار می کند.

نتیجه: پدر حسن دارای مدرک فوق لیسانس است.
حل: نادرست است، زیرا ممکن است پدر حسن جزو کارمندانی نباشد که دارای مدرک فوق لیسانس هستند.
تذکر: به کلمه های «هر» در قسمت الف و «بعضی» در قسمت ب این مثال توجه کنید.

مثال: ثابت کنید که اگر x و y دو عدد مخالف با صفر باشند و

$$x + y = 1, \text{ آن گاه } (1 - \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{y}) = 1$$

حل: $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

$$(1 - \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{y}) = (1 - \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{1-x})$$

$$= (\frac{x-1}{x})(\frac{1-x-1}{1-x}) = 1$$

مثال: ثابت کنید که عدد چهار رقمی $\overline{abcd}$ بر 3 بخش پذیر است، هرگاه $(a + b + c + d)$ بر 3 بخش پذیر باشد.

حل: ابتدا عدد $\overline{abcd}$ را به صورت گسترده می نویسیم. در این عدد d رقم یکان، c رقم دهگان، b رقم صدگان و a رقم هزارگان است. بنابراین داریم:

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$$

$$= (999a + a) + (99b + b) + (9c + c) + d$$

$$= (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d)$$

$$= 3(333a + 33b + 3c) + (a + b + c + d)$$

چون عبارت $(333a + 33b + 3c)$ ، مضرب 3 است، پس بر 3 بخش پذیر خواهد بود. بنابراین، برای آن که $\overline{abcd}$ بر 3 بخش پذیر باشد، باید $(a + b + c + d)$ بر 3 بخش پذیر باشد.

مثال: ثابت کنید عدد پنج رقمی $\overline{abcde}$ بر 4 بخش پذیر است، هرگاه عدد دو رقمی $\overline{de}$ بر 4 بخش پذیر باشد.

حل: ابتدا عدد $\overline{abcde}$ را به صورت گسترده می نویسیم:

گزاره ی q : زمین مرطوب می شود.

گزاره ی $(p \Rightarrow q)$: اگر باران بیارد، آن گاه زمین مرطوب می شود.

مثال: گزاره ی «خطوط موازی هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی کنند» معادل گزاره ی «اگر خطوط موازی باشند، آن گاه یکدیگر را قطع نمی کنند» است و به زبان نمادهای ریاضی می توان نوشت:

گزاره ی $(p \Rightarrow q)$:
اگر خطوط موازی باشند، آن گاه یکدیگر را قطع نمی کنند.

تعریف استدلال استنتاجی: هرگاه گزاره ی q از درستی گزاره های p_1 و p_2 و ... و p_n نتیجه شود. به این نوع نتیجه گیری از گزاره ها یا حقایقی که درستی آن ها را پذیرفته ایم، استدلال استنتاجی می گوئیم. به بیان دیگر، روش نتیجه گیری گزاره ی q با استفاده از حقایق یا فرض های درست p_1 و p_2 و ... و p_n را استدلال استنتاجی می نامیم. یکی از قانون های مهم استنتاج، قانون انتزاع است. قانون انتزاع: اگر گزاره های $(p \Rightarrow q)$ و p درست باشند، آن گاه گزاره ی q درست است و به زبان نمادهای ریاضی می توان نوشت:

$$[(p \Rightarrow q) \text{ و } p] \Rightarrow q$$

مثال: نتیجه ی استنتاج زیر را بنویسید.
(اگر m عددی فرد باشد، آن گاه m مضرب 2 نیست.) و (m عددی فرد است).

حل: با فرض این که p و q را به صورت زیر در نظر بگیریم:
 m مضرب 2 نیست: q ; m عددی فرد باشد: p
ملاحظه می کنیم که استنتاج به صورت $(p \Rightarrow q)$ است که طبق قانون انتزاع نتیجه q خواهد بود.

نتیجه: m مضرب 2 نیست.
فعالیت: با استفاده از استدلال استنتاجی نتایج زیر را کامل کنید:
الف) خطوط موازی هیچ گاه یکدیگر را قطع نمی کنند. خطوط L_1 و L_2 موازی هستند.

نتیجه:

ب) اگر مثلثی متساوی الساقین باشد، آن گاه دو زاویه ی مجاور به قاعده برابرند و مثلث ABC متساوی الساقین است.

نتیجه:

مثال: آیا نتایج زیر، از عبارت های داده شده حاصل می شوند؟ جواب خود را توضیح دهید.

الف) تمام افرادی که در بانک کار می کنند، تحصیل کرده هستند. پدر محمد در بانک کار می کند.
نتیجه: پدر محمد تحصیل کرده است.

$$345345 = (10^3 + 1)(3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 5) = 1001 \times 345$$

عدد ۱۰۰۱ بر ۱۳ بخش پذیر است. زیرا $1001 = 13 \times 77$. پس ۳۴۵۳۴۵ بر ۱۳ بخش پذیر است.

ب) عدد شش رقمی دلخواه $\overline{abcabc}$ را که از تکرار عدد سه رقمی $\overline{abc}$ به دست آمده است، در نظر می گیریم و صورت گسترده ی آن را می نویسیم:

$$\overline{abcabc} = \overline{a \times 10^5 + b \times 10^4 + c \times 10^3 + a \times 10^2 + b \times 10 + c} \\ \text{پس از دسته بندی و فاکتورگیری داریم:}$$

$$\overline{abcabc} = (a \times 10^5 + a \times 10^2) + (b \times 10^4 + b \times 10) + (c \times 10^3 + c) \\ = a \times 10^2 (10^3 + 1) + b \times 10 (10^3 + 1) + c (10^3 + 1) \\ = (10^3 + 1)(a \times 10^2 + b \times 10 + c) = 1001 \times \overline{abc}$$

چون $1001 = 13 \times 77$ ، پس ۱۰۰۱ بر ۱۳ بخش پذیر است. در نتیجه عدد دلخواه $\overline{abcabc}$ بر ۱۳ بخش پذیر است.

مثال: ثابت کنید که حاصل ضرب هر دو عدد صحیح متوالی، مضرب ۲ است.

حل: دو عدد صحیح متوالی به صورت n و $n+1$ هستند. حاصل ضرب آن ها $n(n+1)$ است. برای n دو حالت وجود دارد: یکی این که ممکن است n عددی فرد باشد، یعنی: $n = 2k+1$; $k \in \mathbb{Z}$. دیگر این که ممکن است n عددی زوج باشد، یعنی: $n = 2k$; $k \in \mathbb{Z}$. بنابراین دو حالت زیر را داریم: حالت اول: اگر $n = 2k+1$ ، خواهیم داشت:

$$n(n+1) = (2k+1)(2k+1+1) = (2k+1)(2k+2) \\ = (2k+1) \times 2(k+1) = 2 \left[\frac{(2k+1)(k+1)}{k' \in \mathbb{Z}} \right] = 2k'' \text{ (عددی زوج است.)}$$

حالت دوم: اگر $n = 2k$ ، خواهیم داشت:

$$n(n+1) = 2k(2k+1) = 2 \left[\frac{k(k+1)}{k' \in \mathbb{Z}} \right] = 2k'' \text{ (عددی زوج است.)}$$

مثال: ثابت کنید مربع هر عدد فرد به شکل $8q+1$ است.

حل: عدد فرد $n = 2k+1$ که $k \in \mathbb{Z}$ را در نظر می گیریم. برای محاسبه ی مربع آن، کافی است که آن را به توان ۲ برسانیم:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = (4k^2 + 4k) + 1 \\ = \underbrace{4k(k+1)}_{2q} + 1 = 8q + 1$$

چون $k(k+1)$ حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی است، پس طبق مثال قبل، حاصل آن عددی زوج است که ما آن را $2q$ را نظر گرفتیم. مثال: با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که مجموع سه

$$\overline{abcde} = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$$

$$= 4 \times 2500a + 4 \times 250b + 4 \times 25c + (10d + e)$$

$$= 4(2500a + 250b + 25c) + \overline{de}$$

چون عبارت $4(2500a + 250b + 25c)$ ، مضرب ۴ است، پس بر ۴ بخش پذیر است. بنابراین برای آن که $\overline{abcde}$ بر ۴ بخش پذیر باشد، باید $\overline{de}$ یا $(10d + e)$ بر ۴ بخش پذیر باشد.

مثال: در «پایروس راینده» آمده است: یک عدد دلخواه انتخاب کنید. آن را در ۳ ضرب کنید، به حاصل آن ۶ را بیفزایید و حاصل را بر ۳ تقسیم کنید. سپس عددی را که از ابتدا انتخاب کرده بودید، از این نتیجه ی تقسیم کم کنید. چه عددی به دست می آید؟ آیا همیشه همین عدد به دست می آید؟ با چه نوع استدلالی به این نتیجه رسیدید؟ حل: فرض کنیم n عدد دلخواهی باشد که انتخاب کرده ایم. آن را در ۳ ضرب می کنیم که $3n$ به دست می آید. اکنون به $3n$ ، ۶ واحد اضافه می کنیم که $3n + 6$ حاصل می شود. سپس مقدار به دست آمده را بر ۳ تقسیم می کنیم:

$$\frac{3n+6}{3} = \frac{3(n+2)}{3} = n+2$$

در مرحله ی آخر، از $n+2$ عددی را که اول انتخاب کرده بودیم (یعنی n)، کم می کنیم:

$$(n+2) - n = 2$$

عدد ۲ به دست می آید. هر عددی را انتخاب کنیم و عملیاتی را که در پایروس راینده آمده است درباره ی آن تکرار کنیم، دوباره عدد ۲ به دست می آید. در این جا به کمک استدلال استنتاجی به این نتیجه رسیدیم، زیرا بر اساس درستی عملیات جمع، تفریق، ضرب و تقسیم عبارت های جبری به این نتیجه رسیدیم.

مثال: یک عدد سه رقمی انتخاب کنید و آن را دوباره بنویسید تا یک عدد شش رقمی تشکیل بدهد.

الف) نشان دهید که عدد شش رقمی حاصل بر ۱۳ بخش پذیر است.

ب) نشان دهید، هر عدد شش رقمی که از تکرار یک عدد سه رقمی حاصل می شود، همیشه بر ۱۳ بخش پذیر است. حل:

الف) برای مثال عدد ۳۴۵ را انتخاب می کنیم و آن را دوباره می نویسیم تا عدد ۳۴۵۳۴۵ تشکیل شود. اکنون داریم:

$$345345 = \overline{3 \times 10^5 + 4 \times 10^4 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10 + 5} \\ \text{با دسته بندی و فاکتورگیری داریم:}$$

$$345345 = (3 \times 10^5 + 3 \times 10^2)$$

$$+ (4 \times 10^4 + 4 \times 10) + (5 \times 10^3 + 5)$$

$$= 3 \times 10^2 (10^3 + 1) + 4 \times 10 (10^3 + 1) + 5 (10^3 + 1)$$

با فاکتورگیری از پرانتز مشترک $(10^3 + 1)$ داریم:

$$n = 5; 2^5 + 3 = 35$$

در حالتی که $n = 5$ ، ملاحظه می‌کنیم که ۳۵ عددی اول نیست. پس $n = 5$ یک مثال نقض برای باطل کردن این حکم است.

مثال: آیا ضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ است؟

حل: در صورتی که $x = \sqrt{2}$ و $y = 3\sqrt{2}$ داریم:

$$xy = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 3\sqrt{4} = 6 \notin \mathbb{Q}^c$$

بنابراین $x = \sqrt{2}$ و $y = 3\sqrt{2}$ ، مثال نقض برای باطل کردن این حکم است.

مثال: آیا برای هر $x \geq 0$ ، می‌توان نتیجه گرفت $\sqrt{x} \leq x$ ؟

حل: در صورتی که $x = \frac{1}{4}$ انتخاب کنیم:

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \not\leq \frac{1}{4}$$

بنابراین $x = \frac{1}{4}$ ، مثال نقض برای باطل کردن این حکم است.

مثال: بسیاری از دانش‌آموزانی که با اتحادها کار می‌کنند و هنوز در به کار بردن اتحادها کم‌دقتی دارند، موارد زیر را به اشتباه، جای اتحاد به کار می‌برند:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b} \quad \text{ب)} \quad a + 2a^3 = 3a^4 \quad \text{الف)}$$

$$\frac{x+y}{x^2} = \frac{y}{x} \quad \text{د)} \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2 \quad \text{ج)}$$

با آوردن مثال نقض، به راحتی می‌توان درستی برابری‌های بالا را باطل کرد.

مثال: آیا مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است؟ چرا؟

حل: خیر، دو عدد گنگ به صورت $b = 1 - \sqrt{2}$ و $a = \sqrt{2}$ در نظر می‌گیریم و ملاحظه می‌کنیم که:

$$a + b = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1 \in \mathbb{Q} \quad \text{(عدد گویاست)}$$

تمرین: برای نقض هریک از گزاره‌های زیر، از مثال نقض استفاده کنید.

الف) اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه $p+1$ عددی اول است.

ب) اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه p^2+1 عددی اول است.

ج) اگر $a \leq b$ و $c \leq d$ ، آن‌گاه $ac \leq bd$.

د) اگر عددهای x و y هر دو مثبت باشند، آن‌گاه $\log xy = \log x \times \log y$.

ه) برای دو عدد حقیقی x و y داریم: $|x+y| = |x|+|y|$.

و) برای دو عدد حقیقی x و y داریم: $[x+y] = [x]+[y]$.

ادامه دارد...

عدد زوج متوالی، مضرب ۳ است.

حل: سه عدد زوج متوالی به صورت $2k$ ، $2k+2$ ، $2k+4$ که $k \in \mathbb{Z}$ هستند. اکنون آن‌ها را با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$2k + (2k+2) + (2k+4) = 6k+6 = 3(2k+2) = 3k' \quad (k' \in \mathbb{Z}) \quad \text{(مضرب ۳ است)}$$

قضیه کلی

حکم‌هایی که همیشه و بدون محدودیت برقرارند، قضیه کلی هستند. برای مثال، همه‌ی اتحادهای جبری قضیه کلی هستند، زیرا به ازای همه‌ی مقادیری که جایگزین متغیرهای اتحاد می‌شوند، همواره برقرارند.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2; (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

همچنین قضیه‌های هندسه، قضایای کلی هستند و همواره برقرارند، مانند قضیه‌های زیر:

قضیه: اگر در مثلث $\triangle ABC$ داشته باشیم $MN \parallel BC$ ، آن‌گاه داریم:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

قضیه: در هر مثلث، ضلع مقابل به زاویه بزرگ‌تر، از ضلع مقابل به زاویه کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.

$$\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow AC > AB$$

قضیه فیثاغورس: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

مثال نقض

به مثالی که کلیت یک مطلب یا حدس را باطل می‌کند، مثال نقض گوئیم. وقتی از مثال نقض استفاده می‌کنیم، در جست‌وجوی یک مثال هستیم که درستی حدس را باطل کند؛ یعنی با آوردن یک مثال نقض، ثابت می‌کنیم که حدس یا حکم مسئله درست نیست.

مثال: آیا به ازای هر عدد طبیعی n ، عدد $2^n + 3$ عددی اول است؟

حل: برای باطل کردن این حکم، کافی است یک عدد طبیعی به جای n قرار دهیم و حاصل $2^n + 3$ ، عددی اول نباشد. بنابراین در این فرمول، چند عدد طبیعی به جای n قرار می‌دهیم:

$$n = 1; 2^1 + 3 = 5$$

$$n = 2; 2^2 + 3 = 7$$

$$n = 3; 2^3 + 3 = 11$$

$$n = 4; 2^4 + 3 = 19$$