

تقریح اندیشه

حمید بهادری
دبیر ریاضی خمین

کاربرد دنباله فیبوناتچی

اگر $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ، آنگاه $f^n(x)$ را محاسبه کنید در این جا منظور از $f^n(x)$ عبارت است از n مرتبه ترکیب f با خودش. آیا $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ وجود دارد این حد را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$f^2(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+1} + 1} = \frac{x+1}{x+2}$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \frac{1}{\frac{x+1}{x+2} + 1} = \frac{x+2}{2x+3}$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = f\left(\frac{x+2}{2x+3}\right) = \frac{1}{\frac{x+2}{2x+3} + 1} = \frac{2x+3}{3x+5}$$

با استقراء روی n ثابت می شود $f^n(x) = \frac{u_{n-1}x + u_n}{u_nx + u_{n+1}}$ که $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنباله فیبوناتچی است.

یعنی $u_1 = 1$ ، $u_2 = 1$ ، $u_3 = 1$ ، $u_4 = 2$ ، $u_5 = 3$ ، $u_6 = 5$ ، $u_7 = 8$ ، $u_8 = 13$ ، $u_9 = 21$ ، $u_{10} = 34$ ، $u_{11} = 55$ ، ...
و $u_1 = 1$ و $u_2 = 1$ و برای $n > 2$ $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ می دانیم که هرچه مرتبه جملات دنباله فیبوناتچی بالاتر می رود نسبت بین دو جمله دنباله به عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ نزدیک و نزدیک تر می شود.

یعنی: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha$ در این صورت می توان نوشت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n-1}x + u_n}{u_nx + u_{n+1}} = \frac{\frac{1}{x+1}x + 1}{x + \alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

حل:

$$\begin{aligned}(a \times b) \cdot (a \times c) + (a \cdot b)(a \cdot c) &= |a|^2 (b \cdot c) \\ \Rightarrow |a \times b| |a \times c| \cos \theta + (|a||b| \cos \alpha)(|a||c| \cos \beta) \\ &= |a|^2 (|b||c| \cos \gamma) \\ \Rightarrow |a|^2 |b||c| \sin \alpha \sin \beta \cos \theta + |a|^2 |b||c| \cos \alpha \cos \beta \\ &= |a|^2 |b||c| \cos \gamma \\ \Rightarrow \sin \alpha \sin \beta \cos \theta + \cos \alpha \cos \beta &= \cos \gamma\end{aligned}$$

مسئله ۵: با فرض $\angle(a, b) = 30^\circ$ ، $\angle(a, c) = 45^\circ$ و $\angle(b, c) = 60^\circ$ ، اندازه ی زاویه ی بین دو بردار $(a \times b)$ و $(a \times c)$ را تعیین کنید.

حل: فرض کنیم زاویه ی بین دو بردار $(a \times b)$ و $(a \times c)$ به اندازه ی θ باشد، پس داریم:

$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{6} \times \sin \frac{\pi}{4} \times \cos \theta + \cos \frac{\pi}{6} \times \cos \frac{\pi}{4} &= \cos \frac{\pi}{3} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \theta = \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ \Rightarrow \theta &= \text{Arc cos}(\sqrt{2} - \sqrt{3})\end{aligned}$$

مسئله ۶: با فرض این که دو بردار b و c عمود بر هم باشند و بردار a با آن دو بردار زوایای α و β را ساخته باشد. ثابت کنید $\cos \theta = -\cot \alpha \cot \beta$ که در آن θ اندازه ی زاویه بین دو بردار $(a \times b)$ و $(a \times c)$ است.

حل:

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta \cos \theta + \cos \alpha \cos \beta &= \cos \gamma \\ \Rightarrow \sin \alpha \times \sin \beta \cos \theta + \cos \alpha \cos \beta &= 0 \Rightarrow \cos \theta = -\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \\ \Rightarrow \cos \theta &= -\cot \alpha \cot \beta\end{aligned}$$

مسئله ۷: با فرض این که دو بردار b و c عمود بر هم باشند و بردار a با آن دو بردار زوایای حاده ی α و β را ساخته باشد، ثابت کنید $\alpha + \beta \geq \frac{\pi}{2}$.

حل: فرض کنیم چنین نباشد، یعنی $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ پس

$$\begin{aligned}\alpha < \frac{\pi}{2} - \beta \quad \text{و در نتیجه داریم:} \quad \text{tg} \alpha < \cot \beta \\ \Rightarrow -\text{tg} \alpha > -\cot \beta \Rightarrow -\text{tg} \alpha \cot \alpha > -\cot \beta \cot \beta \\ \Rightarrow -1 > \cos \theta\end{aligned}$$

و این غیر ممکن است. پس فرض خلف، باطل است و

$$\alpha + \beta \geq \frac{\pi}{2} \quad \text{داریم}$$