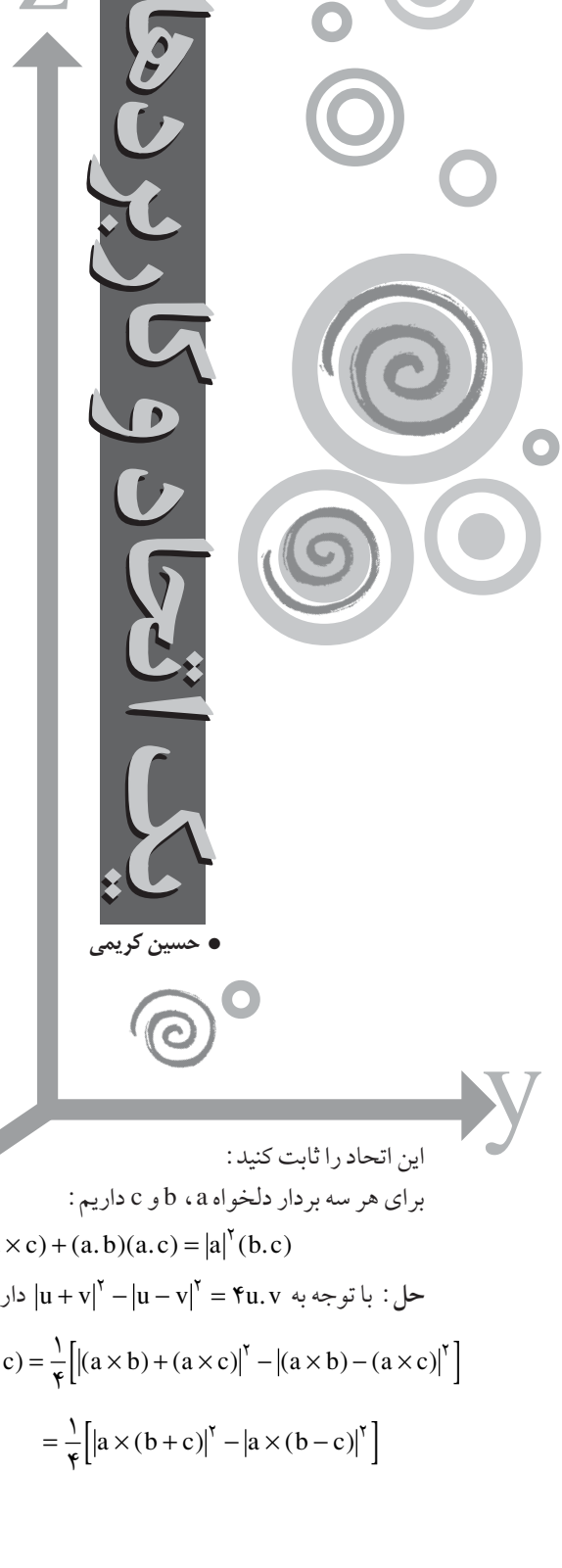
یک اتحاد و کاربردهای آن

● حسین کریمی



این اتحاد را ثابت کنید:

برای هر سه بردار دلخواه a، b و c داریم:

$$(a\times b).(a\times c)+(a.b)(a.c)=|a|^{۲}(b.c)$$

حل: با توجه به $|u+v|^{۲}-|u-v|^{۲}=۴u.v$ داریم:

$$(a\times b).(a\times c)=\frac{۱}{۴}\Big[|(a\times b)+(a\times c)|^{۲}-|(a\times b)-(a\times c)|^{۲}\Big]$$

$$=\frac{۱}{۴}\Big[|a\times(b+c)|^{۲}-|a\times(b-c)|^{۲}\Big]$$

با توجه به $|u\times v|^{۲}=|u|^{۲}|v|^{۲}-(u.v)^{۲}$ داریم:

$$=\frac{۱}{۴}\Big[|a|^{۲}|b+c|^{۲}-(a.(b+c))^{۲}-|a|^{۲}|b-c|^{۲}+(a.(b-c))^{۲}\Big]$$

$$=\frac{۱}{۴}\Big[|a|^{۲}(|b+c|^{۲}-|b-c|^{۲}-((a.b)+(a.c))^{۲}+((a.b)-(a.c))^{۲}\Big]$$

$$=\frac{۱}{۴}\Big[|a|^{۲}(۴b.c)-۴(a.b)(a.c)\Big]=|a|^{۲}(b.c)-(a.b)(a.c)$$

$$\Rightarrow (a\times b).(a\times c)+(a.b)(a.c)=|a|^{۲}(b.c)$$

مسئله‌ی۱: بـا فـرض $|a|=|b|=|c|=۱$ و $\angle(a,b)=\angle(a,c)=۶۰^{\circ}$ و $b\perp c$، مطلوب است، حاصل:

$$(a\times b).(a\times c)$$

حل:

$$a.b=۱\times۱\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\ \text{و}\ a.c=۱\times۱\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\ \text{و}\ b.c=۰$$

$$\Rightarrow (a\times b).(a\times c)=|a|^{۲}(b.c)-(a.b)(a.c)$$

$$=(۱\times۰)-(\frac{۱}{۲})(\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۴}$$

مسئله‌ی۲: بـا فـرض $|a|=۲$ و $|b|=۳$ و $|c|=۴$ و $\angle(a,b)=۳۰^{\circ}$ و $\angle(a,c)=۴۵^{\circ}$ و $\angle(b,c)=۶۰^{\circ}$، مطلوب است $(a\times b).(a\times c)$.

حل:

$$a.b=۲\times۳\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}\ \text{و}\ a.c=۲\times۴\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۴\sqrt{۲}\ \text{و}$$

$$b.c=۳\times۴\times\frac{۱}{۲}=۶$$

$$\Rightarrow (a\times b).(a\times c)=|a|^{۲}(b.c)-(a.b)(a.c)$$

$$=(۴\times۶)-(۳\sqrt{۳})(۴\sqrt{۲})=۱۲(۲-\sqrt{۶})$$

مسئله‌ی۳: با فرض آن‌که بردار b بر هر دو بردار غیرموازی a و c عمود باشد، ثابت کنید دو بردار $(a\times b)$ و $(a\times c)$ بر هم عمودند.

حل:

$$a.b=۰\ ,\ b.c=۰$$

$$\Rightarrow (a\times b).(a\times c)=|a|^{۲}(b.c)-(a.b)(a.c)$$

$$=(|a|^{۲}\times۰)-(۰)(a.c)$$

$$\Rightarrow (a\times b).(a\times c)=۰\Rightarrow (a\times b)\perp(a\times c)$$

مسئله‌ی۴: بـا فـرض $\angle(a,b)=\alpha$، $\angle(a,c)=\beta$، $\angle(b,c)=\gamma$ و $\angle((a\times b),(a\times c))=\theta$ ثـابـت کـنـیـد $\sin\alpha\sin\beta\cos\theta+\cos\alpha\cos\beta=\cos\gamma$.