۲۷- به کمک مشتق‌گیری نشان دهید اگر $n\geq 2$ آنگاه برای هر $x>-1$ ، $(1+x)^n > 1+nx$

فرض می‌کنیم $f(x)=(1+x)^n$ ، در این صورت تابع f در بازه $[0,x]$ و $[-1,x]$ تا $x<0$ ، در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می‌کند، بنابراین برای بازه $[-1,x]$ ، $c\in[-1,x]$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=f'(c)$$

اما $f'(x)=n(1+x)^{n-1}$ و

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{(1+x)^n}{x+1}$$

بنابراین

$$\frac{(1+x)^n}{1+x}=n(1+c)^{n-1}$$

اما $-1<c<x<0$ ، بنابراین $x<0$ ، از طرفی $0<(1+c)^{n-1}<1$ ، چون $x<0$ ، $x(1+c)^{n-1}>x$ *

از طرفی

$$\frac{(1+x)^n}{1+x}=n(1+c)^{n-1} \Rightarrow (1+x)^n=\underset{>0}{n(1+c)^{n-1}}+nx(1+c)^{n-1}$$

بنابر رابطه *

$$(1+x)^n > n+xn \Rightarrow (1+x)^n > 1+nx$$

اما برای بازه $[0,x]$ داریم

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(c) \Rightarrow \frac{(1+x)^n-1}{x}=n(1+c)^{n-1}$$

اما $0<c<x \Leftarrow 1<(1+c)^{n-1}<(1+x)^n$ بنابراین

$$\frac{(1+x)^n-1}{x}=n(1+c)^{n-1}>n$$

بنابراین

$$(1+x)^n-1>nx \Rightarrow (1+x)^n>1+nx$$

۲۸- فرض کنید f مشتق‌پذیر باشد و مشتق $f'(x)=(1+x^3)^{-1/2}$ ، نشان دهید که اگر $g=f^{-1}$ آنگاه $g''(x)=\frac{3}{2}(g(x))^2$

$$g=f^{-1} \Rightarrow g'=(f^{-1})'=\frac{1}{f'(f^{-1})} \qquad g''(x)=-\frac{(f'(f^{-1}(x)))'}{(f'(f^{-1}(x)))^2}$$

$$\Rightarrow g''(x)=-\frac{(f^{-1}(x))'\, f''(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^2}$$

$$f'(x)=(1+x^3)^{-1/2} \Rightarrow f''(x)=\frac{-3}{2}x^2 f'^3(x)$$

$$g''(x)=-\frac{(f^{-1}(x))'\times \frac{-3}{2}(f^{-1}(x))^2\times f'^3(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^2}$$

چون $(f^{-1}(x))'=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ ، بنابراین

$$g''(x)=\frac{3}{2}(f^{-1}(x))^2 \Rightarrow g''(x)=\frac{3}{2}(g(x))^2$$