بسمه تعالی

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

اعداد مختلط

۱. فرض کنید $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ثابت کنید.

a) $\bar{\bar{z}} = z$

فرض $z = a+ib$ داریم

$$\bar{z} = a - ib \Rightarrow \bar{\bar{z}} = a + ib \Rightarrow \bar{\bar{z}} = z$$

b) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$$z_1 = a_1 + ib_1 \ , \ z_2 = a_2 + ib_2$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) \quad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{z}_1 = a_1 - ib_1 \\ \bar{z}_2 = a_2 - ib_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

c) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_2 a_1 + a_2 b_1) \Rightarrow \overline{z_1 z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(b_2 a_1 + a_2 b_1) \quad (۱)$$

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(-a_1 b_2 - a_2 b_1) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

d) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} = \bar{z}_1 \cdot \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \bar{z}_1 \cdot \frac{1}{\bar{z}_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

e) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{۲}$

$$\left.\begin{array}{l} z = a + ib \\ \bar{z} = a - ib \end{array}\right\} \Rightarrow z + \bar{z} = ۲a = ۲\mathrm{Re}(z) \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{۲}$$

f) $Im(Z) = \frac{Z-\bar{Z}}{2i}$

$Z = a+ib$
$\bar{Z} = a-ib$ $\Rightarrow$ $Z-\bar{Z} = 2ib = 2i\,Im(Z)$ $\Rightarrow$ $Im(Z) = \frac{Z-\bar{Z}}{2i}$

g) $Re(iZ) = -Im(Z)$

h) $Im(iZ) = Re(Z)$

۲. مقادیر زیر را تعیین کنید.

$|(1+i)(2+i)| = |(2-1)+i(2+1)| = |1+3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

$\left|\frac{4-3i}{2-i}\right| = \left|\frac{4-3i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}\right| = \left|\frac{(8+3)+i(4-6)}{4\ \ 5}\right| = \left|\frac{11}{4} - \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{121}{16}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{125}{16}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

$|Z\bar{Z}| = |(a+ib)(a-ib)| = |a^2+b^2| = |Z|^2$

$|Z-1|^2 = |(a-1)+ib|^2 = (a-1)^2+b^2$

۳. کدام یک از مقادیر زیر درون دایره $|Z-i|=2$ قرار دارند

a) $\frac{1}{2}+i$

$|Z-i| = |\frac{1}{2}+i-i| = \frac{1}{2} < 2$ درون دایره

b) $2+3i$

$|Z-i| = |2+3i-i| = |2+2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} > 2$ بیرون دایره

c) $\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+1)$

$|Z-i| = |\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+1)-i| = |\sqrt{2}+i\sqrt{2}| = 2$ روی دایره

۴. مجموعه نقاطی را که با روابط زیر از صفحه مختلط تعیین می‌شوند رسم کنید.

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

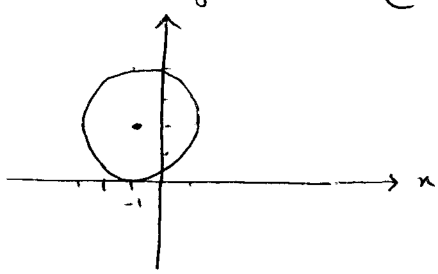
a) $|Z+1-2i|=2$

با فرض $Z=x+iy$ داریم:

$$|Z+1-2i|=2 \Rightarrow |x+iy+1-2i|=2 \Rightarrow |(x+1)+i(y-2)|=2$$

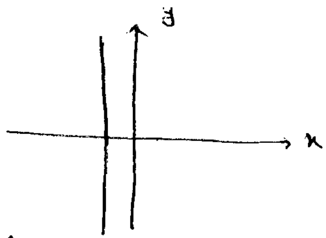
$$\Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=2 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=4$$

دایره ای به مرکز $(-1,2)$ و شعاع ۲



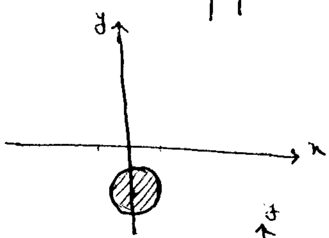
b) $Re(Z+1)=0$

$$Re(x+iy+1)=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$



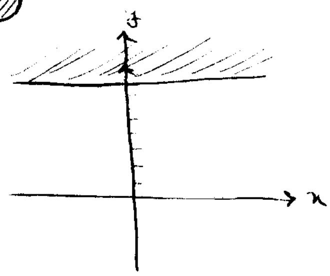
c) $|Z+2i|\leq 1$

$$|x+i(y+2)|\leq 1 \Rightarrow x^2+(y+2)^2\leq 1$$



d) $Im(Z-2i)>6$

$$Im(x+iy-2i)>6 \Rightarrow y-2>6 \Rightarrow y>8$$



۵۴. ثابت کنید:

۱. $|Z|=0 \Leftrightarrow Z=0$

$$|Z|=0 \Leftrightarrow a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a^2=0,\ b^2=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0 \Leftrightarrow Z=0$$

۲. $|Z_1-Z_2|\leq |Z_1|+|Z_2|$

$$|Z_1-Z_2|^2=(Z_1-Z_2)\cdot\overline{(Z_1-Z_2)}=(Z_1-Z_2)\cdot(\bar{Z}_1-\bar{Z}_2)=Z_1\bar{Z}_1-Z_1\bar{Z}_2-Z_2\bar{Z}_1+Z_2\bar{Z}_2$$

$$=|Z_1|^2-(Z_1\bar{Z}_2+\bar{Z}_1 Z_2)+|Z_2|^2 \qquad (1)$$