h) $e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\pi} = e^{i\frac{-3\pi}{4}} = \cos(-\frac{3\pi}{4}) + i\sin(-\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

۹. فرض کنید $Z_1 = -1+i\sqrt{3}$ ، $Z_2 = -\sqrt{3}+i$ نشان دهید که تساوی زیر برقرار نیست.

$$Arg(Z_1Z_2) = Arg(Z_1) + Arg(Z_2)$$

$Z_1 = -1+i\sqrt{3}$ $\quad |Z_1| = 2$ $\quad \cos\theta = \frac{-1}{2}$ $\quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$arg(Z_1) = \{\frac{2\pi}{3} + 2n\pi,\ n\in Z\}$ $\quad Arg(Z_1) = \frac{2\pi}{3}$

$Z_2 = -\sqrt{3}+i$ $\quad |Z_2| = 2$ $\quad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin\theta = \frac{1}{2}$

$arg(Z_2) = \{\frac{\pi}{6} - \pi + 2n\pi,\ n\in Z\}$ $\quad Arg(Z_2) = \cancel{-\frac{4\pi}{6}}\ \frac{5\pi}{6}$

$Z_1Z_2 = (-1+i\sqrt{3})(-\sqrt{3}+i) = -4i$ $\quad Arg(Z_1Z_2) = -\frac{\pi}{2}$

$Arg(Z_1) + Arg(Z_2) = \frac{2\pi}{3} + \cancel{\frac{4\pi}{6}}^{\,5\pi/6} = \cancel{\pi}^{\,3\pi/2} \neq \frac{-\pi}{2} = Arg(Z_1Z_2)$

۱۰. ثابت کنید:

a) $arg(\frac{Z_1}{Z_2}) = arg(Z_1) - arg(Z_2)$

$arg(Z_1) - arg(Z_2) = \{\theta_1 - \theta_2 : \theta_1 \in arg(Z_1), \theta_2 \in arg(Z_2)\}$

فرض می‌کنیم $\theta \in arg(\frac{Z_1}{Z_2})$. چون $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ بنابراین $\theta_1 - \theta_2 \in arg(\frac{Z_1}{Z_2})$

در نتیجه

$$\exists n_0 \in Z:\ \theta = \theta_1 - \theta_2 + 2n_0\pi$$

اما چون $\theta_1 \in arg(Z_1)$ ، لذا $\theta_1 + 2n_0\pi \in arg(Z_1)$ در نتیجه

$$\theta = (\theta_1 + 2n_0\pi) - \theta_2 \in arg(Z_1) - arg(Z_2)$$

بنابراین $(1)\quad arg(Z_1/Z_2) \subseteq arg(Z_1) - arg(Z_2)$.

بالعکس، فرض می‌کنیم $\theta_0 \in arg(\frac{Z_1}{Z_2})$. بنابراین

$$\exists \theta_1 \in arg(Z_1)\quad \exists \theta_2 \in arg(Z_2):\ \theta_0 = \theta_1 - \theta_2$$

در نتیجه $Z_2 = |Z_2| e^{i\theta_2}$, $Z_1 = |Z_1| e^{i\theta_1}$ شکل های قطبی Z_2, Z_1 می‌باشند

$\frac{Z_1}{Z_2} = |\frac{Z_1}{Z_2}| e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ $\Rightarrow (2)\quad arg(Z_1) - arg(Z_2) \subseteq arg(Z_1/Z_2)$

b) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(1) - \arg(z) = \{2n\pi - \theta,\ n \in \mathbb{Z},\ \theta \in \arg(z)\}$$

$$= -\{\theta - 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z},\ \theta \in \arg(z)\}$$

چون $\theta \in \arg(z)$ بنابراین $\theta - 2n\pi \in \arg(z)$ درنتیجه

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

c) $\arg(z_1 \bar{z}_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

$$z_2 = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\bar{z}_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = re^{-i\theta}$$

بنابراین $-\theta \in \arg(\bar{z}_2)$ درنتیجه

$$\arg(\bar{z}_2) = \{-\theta + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z},\ \theta \in \arg(z_2)\} = -\{\theta - 2n\pi,\ \theta \in \arg(z_2),\ n \in \mathbb{Z}\}$$

چون $\theta \in \arg(z_2)$ بنابراین $\theta - 2n\pi \in \arg(z_2)$ درنتیجه

$$\arg(\bar{z}_2) = -\arg(z_2)$$

$$\arg(z_1 \bar{z}_2) = \arg(z_1) + \arg(\bar{z}_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

۱۱. ثابت کنید:

a) $\operatorname{Arg}(z\bar{z}) = 0$

$$\arg(z\bar{z}) = \arg(z) - \arg(z) = \{2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow \operatorname{Arg}(z\bar{z}) = 0$$

b) اگر $\operatorname{Re}(z) > 0$ آنگاه $\operatorname{Arg}(z + \bar{z}) = 0$

$$\arg(z + \bar{z}) = \arg(2\operatorname{Re}(z)) = \{2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow \operatorname{Arg}(z + \bar{z}) = 0$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

ریشه n ام یک عدد کمپلکس

همه مقادیر زیر را مشخص کنید.

a) $(-2+2i)^{\frac{1}{3}}$ $\quad Z^{3}=(-2+2i)$

$r_0=|-2+2i|=2\sqrt{2}$ $\quad \cos\theta_0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin\theta_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \theta_0=\frac{3\pi}{4}$

$$Z_k=(2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right) \quad 0\leq k\leq 2$$

$k=0$ $\quad Z_0=\sqrt[6]{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt[6]{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=(1+i)$

$k=1$ $\quad Z_1=\sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=\sqrt[6]{8}\left(-\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}+i\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}\right)=-\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}\left((1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})\right)$

$k=2$ $\quad Z_2=\sqrt[6]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)\right)=\sqrt[6]{8}\left(\frac{-\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}-i\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}\right)$

$=-\frac{1}{2}\left((1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})\right)$

b) $(-1)^{\frac{1}{5}}$ $\quad Z^{5}=-1$ $\quad r_0=1$ $\quad \theta_0=\pi$

$$Z_k=\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{5}\right) \quad 0\leq k\leq 4$$

$k=0$ $\quad Z_0=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\frac{\pi}{5}=0.809+0.5878\,i$

$k=1$ $\quad Z_1=\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)=-0.309+0.9511\,i$

$k=2$ $\quad Z_2=\cos\pi+i\sin\pi=-i$

$k=3$ $\quad Z_3=\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)=-0.309-0.9511\,i$

$k=4$ $\quad Z_4=\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)=0.809-0.5878\,i$

d) $(16i)^{\frac{1}{4}}$ $\quad Z^4 = 16i \quad r_0 = 16 \quad \theta_0 = \frac{\pi}{2}$

$$Z_K = 16^{\frac{1}{4}}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2K\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2K\pi}{4}\right)\right] \qquad 0 \le K \le 3$$

e) $\sqrt{\frac{1-i}{1+i}}$ $\quad Z^2 = \frac{1-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{-2i}{2} = -i$

$r_0 = 1 \qquad \theta_0 = -\frac{\pi}{2}$

$$Z_K = \cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2K\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2K\pi}{2}\right) \qquad 0 \le K \le 1$$

فرض کنید $\omega \neq 1$ یک ریشه n ام واحد است. ثابت کنید.

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \dots + n\omega^{n-1} = \frac{-n}{1-\omega}$$

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^n = \frac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega}$$

با مشتق گیری از طرفین داریم

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \dots + n\omega^{n-1} = \frac{-(n+1)\omega^n(1-\omega) + (1-\omega^{n+1})}{(1-\omega)^2}$$

با توجه به اینکه $\omega^n = 1$ و $\omega^{n+1} = \omega$ خواهیم داشت

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \dots + n\omega^{n-1} = \frac{-(n+1)(1-\omega) + (1-\omega)}{(1-\omega)^2}$$

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \dots + n\omega^{n-1} = \frac{-(n+1)+1}{1-\omega}$$

$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \dots + n\omega^{n-1} = \frac{-n}{1-\omega}$$

حل تمرین ریاضی عمومی ۱

تابع

۱. فرض کنید $f(x)=\frac{1}{1+x}$ مطلوبست:

الف) $f(f(x))$

$$f(f(x)) = f\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{1+x}{1+1+x} = \frac{1+x}{2+x}$$

ب) $f\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{1+x}$$

ج) $f(cx)$

$$f(cx) = \frac{1}{1+cx}$$

د) به ازای کدام مقادیر c، x ای وجود دارد که $f(cx)=f(x)$

$$f(cx)=f(x) \Rightarrow \frac{1}{1+cx} = \frac{1}{1+x} \Rightarrow 1+x = 1+cx \Rightarrow (c-1)x=0$$

اگر $c \neq 1$ باشد $x=0$.

ر) به ازای کدام مقادیر c، معادله $f(cx)=f(x)$ حداقل دارای دو جواب است؟

$$\frac{1}{1+cx} = \frac{1}{1+x} \Rightarrow 1+cx = 1+x \Rightarrow cx = x \Rightarrow c=1$$

دارای حداقل ۲ جواب

۲. فرض کنید $g(x)=x^2$، $h(x)=\begin{cases} 0 & x\in Q \\ 1 & x\in R-Q' \end{cases}$.

الف) به ازای کدام y، $h(y)\le y$؟

$y\in Q \quad h(y)\le y \Rightarrow 0\le y$

$y\in R-Q' \quad h(y)\le y \Rightarrow 1\le y$

ب) به ازای کدام y ها، $h(y)\le g(y)$؟

$y\in Q \quad h(y)\le g(y) \Rightarrow y^2\geq 0 \quad y\in Q$ ها

$y\in R-Q' \quad h(y)\le g(y) \Rightarrow y^2\geq 1 \Rightarrow y^2-1\geq 0 \quad y\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

$((-\infty,-1]\cup[1,\infty))\cap R-Q'$

ج) حاصل $g(h(t)) - h(t)$ چیست؟

$$g(h(t)) = g\left(\begin{cases} 0 & x \in Q \\ 1 & x \in R-Q \end{cases}\right) = \begin{cases} 0 & x \in Q \\ 1 & x \in R-Q \end{cases}$$

$$g(h(t)) - h(t) = 0$$

د) به ازای کدام a، $g(g(a)) = g(a)$ ؟

$$g(g(a)) = g(a^2) = a^4$$

$$g(g(a)) = g(a) \Rightarrow a^4 = a^2 \Rightarrow a^2(a^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

۳. دامنه توابع زیر را مشخص کنید

الف) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$1 - x^2 \geq 0$ $\qquad x = \pm 1$

x		-1		1	
	$-$		$+$		$-$

$D_f = [-1, 1]$

ب) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

$g(x) = \frac{1}{x-1}$, $\quad h(x) = \frac{1}{x-2}$

$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ $\qquad D_h = \mathbb{R} - \{2\}$ $\qquad D_f = D_g \cap D_h = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

ج) $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$

$g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\quad D_g = [-1, 1]$

$h(x) = \sqrt{x^2-1}$ $\qquad x^2 - 1 \geq 0$

x		-1		1	
	$+$		$-$		$+$

$D_h = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$$D_f = D_g \cap D_h = \{-1, 1\}$$

د) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$

$g(x) = \sqrt{1-x}$, $\quad h(x) = \sqrt{x-2}$

$D_g = (-\infty, 1]$ $\qquad D_h = [2, \infty)$ $\qquad \Rightarrow \qquad D_f = \phi$