حدّ تابع در یک نقطه (۱)

● احمد قندهاری

۱. میل کردن x به سمت یک عدد

فرض کنید می‌خواهیم x را از سمت چپ عدد ۲، به ۲ نزدیک کنیم، ولی به آن نرسد؛ به صورت زیر:

$$x = ۱,\cdots,۱/۴,\cdots,۱/۷,\cdots ۱/۹,۱/۹۹,۱/۹۹۹,۱/۹۹۹۹,\cdots$$

ملاحظه می‌کنید که هر قدر تعداد ۹های سمت راست مُمیز را زیاد کنیم، عدد حاصل مرتباً به ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، ولی به آن نمی‌رسد. چون x از طرف اعداد کمتر از ۲ به آن نزدیک شده است، می‌نویسیم:

$$x \to ۲^-$$

حال x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۲ به عدد آن نزدیک می‌کنیم؛ به صورت زیر:

$$x = ۳,\cdots ۲/۷,\cdots,۲/۳,\cdots,۲/۱,۲/۰۱,۲/۰۰۱,۲/۰۰۰۱,۲/۰۰۰۰۱,\cdots$$

باز هم ملاحظه می‌کنیم، هر قدر تعداد ۰ های بین ممیز و عدد ۱ را زیاد کنیم، عدد حاصل مرتباً به ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، ولی به آن نمی‌رسد. چون x از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۲ به آن نزدیک شده است، می‌نویسیم:

$$x \to ۲^+$$

همسایگی

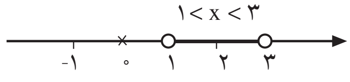
نامساوی $|x - ۲| < ۱$ را درنظر می‌گیریم و آن را حل می‌کنیم؛ به صورت زیر:

$$|x - ۲| < ۱ \Rightarrow -۱ < x - ۲ < ۱ \Rightarrow ۱ < x < ۳$$

عدد میانی بازه‌ی (۳و۱)، عدد ۲ است. فرض می‌کنیم $x = ۲$. اگر x را مرکز قرار دهیم، آن‌گاه بازه‌ی (۳و۱) را یک همسایگی متقارن به مرکز $x = ۲$ به شعاع ۱ گوییم. چنان‌چه از بازه‌ی (۳و۱)، مرکز همسایگی را برداریم، یعنی $(۱,۳) - \{۲\}$، آن‌گاه این همسایگی را یک همسایگی متقارن محذوف (مرکز حذف‌شده) عدد ۲ به شعاع ۱ گوییم.

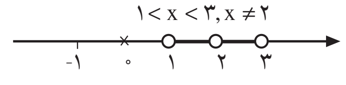
همسایگی متقارن عدد ۲ به شعاع ۱

$۱ < x < ۳$



همسایگی متقارن محذوف عدد ۲ به شعاع ۱

$۱ < x < ۳, x \neq ۲$



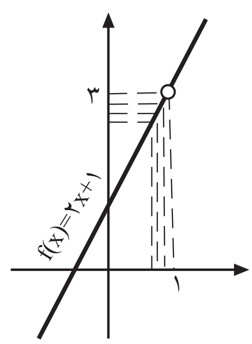
توجه: در حالت کلی، نامساوی $|x-a|<r$ یا $a-r<x<a+r$ را یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r گوییم.

حدّ چپ تابع

بررسی حدّ چپ تابع را با یک مثال شروع می‌کنیم. فرض کنید تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۱$ باشد. می‌خواهیم در این تابع x را از طرف اعداد کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک و رفتار تابع f را در این فرایند بررسی کنیم. برای درک بهتر، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹
f(x)	۲/۸	۲/۹۸	۲/۹۹۸	۲/۹۹۹۸	۲/۹۹۹۹۸

ملاحظه می‌کنیم، وقتی x از طرف اعداد کوچک‌تر از ۱ به آن نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، رفتار تابع نشان می‌دهد که f(x) به عدد ۳ نزدیک و نزدیک‌تر شده است. به نظر می‌رسد، وقتی $x\to ۱^-$، آن‌گاه حدّ f(x) برابر ۳ است. از این جدول نتایج زیر به‌دست می‌آید:



$۰<۱-x<۰/۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۲$

$۰<۱-x<۰/۰۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۰۲$

$۰<۱-x<۰/۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۰۰۲$

$۰<۱-x<۰/۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۰۰۰۲$

$۰<۱-x<۰/۰۰۰۰۱ \Rightarrow |f(x)-۳|<۰/۰۰۰۰۲$

این نتایج را به صورت زیر هم می‌توان نشان داد:

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۲$ باشد، باید: $۰<۱-x<۰/۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۰۲$ باشد، باید: $۰<۱-x<۰/۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۰۰۲$ باشد، باید: $۰<۱-x<۰/۰۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۰۰۰۲$ باشد، باید: $۰<۱-x<۰/۰۰۰۱$

اگر بخواهیم $|f(x)-۳|<۰/۰۰۰۰۲$ باشد، باید: $۰<۱-x<۰/۰۰۰۰۱$

می‌توان گفت: f(x) را به حدّ خودش به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم نزدیک کنیم، به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به ۱ نزدیک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۱$ را در نظر می‌گیریم و $x\to ۱^-$. می‌خواهیم: $|f(x)-۳|<\frac{۱}{۲۵۰}$ باشد. تعیین کنید x را چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

حل: چنین عمل می‌کنیم:

$$|f(x)-۳|<\frac{۱}{۲۵۰} \Rightarrow |(۲x+۱)-۳|<\frac{۱}{۲۵۰} \Rightarrow |۲x-۲|<\frac{۱}{۲۵۰}$$

$$\Rightarrow ۲|x-۱|<\frac{۱}{۲۵۰} \Rightarrow \underset{x\to ۱^-}{|x-۱|}<\frac{۱}{۵۰۰} \Rightarrow ۰<۱-x<\frac{۱}{۵۰۰}$$

یعنی x باید از سمت چپ عدد ۱ به عدد ۱ آن‌قدر نزدیک شود که فاصله‌اش تا عدد ۱ کمتر از $\frac{۱}{۵۰۰}$ باشد.

پس اگر بخواهیم f(x) به ۳ آن‌قدر نزدیک شود که فاصله‌ی f(x) از عدد ۳ کمتر از $\frac{۱}{۲۵۰}$ باشد، باید x را از سمت چپ به عدد ۱ آن‌قدر نزدیک کنیم که فاصله‌ی ۱ تا عدد x کمتر از $\frac{۱}{۵۰۰}$ شود.

تمرین: اگر در مثال بالا بخواهیم $|f(x)-۳|<\frac{۱}{۷۲۰}$ باشد، تعیین کنید x را از سمت چپ چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

جواب: $۰<۱-x<\frac{۱}{۱۴۴۰}$

تعریف حدّ چپ تابع

فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی $(a,x_۰)$ تعریف شده باشد. می‌گوییم حدّ چپ تابع f وقتی $x\to x_۰^-$، عدد حقیقی L است؛ اگر بتوان f(x) را به هر اندازه‌ی دل‌خواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که $x<x_۰$ را به اندازه‌ی کافی به $x_۰$ نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_۰^-} f(x)=L$$

تمرین: می‌دانیم: $\lim_{x\to ۲^-}(۴x+۳)=۱۱$، می‌خواهیم $|۱۱-(۴x+۳)|<\frac{۱}{۴۰۰}$ باشد. تعیین کنید x را چه‌قدر باید از سمت چپ ۲ به عدد ۲ نزدیک کنیم.

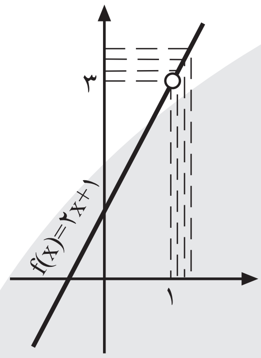
جواب: $۰<۲-x<\frac{۱}{۱۶۰۰}$

حدّ راست تابع

دوباره تابع با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۱$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، x از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ نزدیک شود؛ یعنی $x\to ۱^+$. می‌خواهیم رفتار تابع f را بررسی کنیم. به این منظور جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۰۱
f(x)	۳/۲	۳/۰۲	۳/۰۰۲	۳/۰۰۰۲	۳/۰۰۰۰۲

ملاحظه می‌کنیم، وقتی $x>1$ و به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود، رفتار تابع نشان می‌دهد که مقدار تابع ($f(x)$) به عدد ۳ نزدیک و نزدیک‌تر شده است. به‌نظر می‌رسد که وقتی $x\to 1^+$، آن‌گاه حدّ $f(x)$ برابر ۳ است. از این جدول نتایج زیر به‌دست می‌آید:



$$0<x-1<0/1 \Rightarrow |f(x)-3|<0/2$$
$$0<x-1<0/01 \Rightarrow |f(x)-3|<0/02$$
$$0<x-1<0/001 \Rightarrow |f(x)-3|<0/002$$
$$0<x-1<0/0001 \Rightarrow |f(x)-3|<0/0002$$
$$0<x-1<0/00001 \Rightarrow |f(x)-3|<0/00002$$

این نتایج را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

اگر بخواهیم $|f(x)-3|<0/2$ باشد، باید: $0<x-1<0/1$

اگر بخواهیم $|f(x)-3|<0/02$ باشد، باید: $0<x-1<0/01$

اگر بخواهیم $|f(x)-3|<0/002$ باشد، باید: $0<x-1<0/001$

اگر بخواهیم $|f(x)-3|<0/0002$ باشد، باید: $0<x-1<0/0001$

اگر بخواهیم $|f(x)-3|<0/00002$ باشد، باید: $0<x-1<0/00001$

می‌توان گفت: می‌توانیم $|f(x)-3|$ را به هر اندازه که بخواهیم، کوچک کنیم؛ به شرطی که x را از سمت راست به عدد ۱ به اندازه‌ی کافی نزدیک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2x+1$ را در نظر می‌گیریم و $x\to 1^+$. می‌خواهیم $|f(x)-3|<\frac{1}{750}$ باشد. تعیین کنید x را چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم.

حل:

$$|f(x)-3|<\frac{1}{750} \Rightarrow |2x+1-3|<\frac{1}{750} \Rightarrow |2(x-1)|<\frac{1}{750}$$
$$\Rightarrow 2|x-1|<\frac{1}{750} \Rightarrow \underset{x\to 1^+}{|x-1|}<\frac{1}{1500} \Rightarrow 0<x-1<\frac{1}{1500}$$

پس x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ آن‌قدر باید نزدیک کنیم که $x-1$ کمتر از $\frac{1}{1500}$ باشد.

تعریف حدّ راست تابع

فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی (x_0,b) تعریف شده باشد. می‌گوییم حدّ راست تابع f وقتی $x\to x_0^+$، عدد حقیقی L است؛ اگر بتوان $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دل‌خواه به L نزدیک کنیم، به شرطی که x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از x_0 به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$

مثال: داریم: $\lim_{x\to 1^+}(-4x+3)=-1$. می‌خواهیم: $|(-4x+3)+1|<\frac{1}{300}$. x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم؟

حل:

$$|(-4x+3)+1|<\frac{1}{300} \Rightarrow |-4x+4|<\frac{1}{300} \Rightarrow |-4(x-1)|<\frac{1}{300}$$
$$\Rightarrow 4|x-1|<\frac{1}{300} \Rightarrow \underset{x\to 1^+}{|x-1|}<\frac{1}{1200} \Rightarrow 0<x-1<\frac{1}{1200}$$

پس x را از طرف اعداد بزرگ‌تر از ۱ به عدد ۱ آن‌قدر باید نزدیک کنیم که $x-1$ کمتر از $\frac{1}{1200}$ باشد.

تعریف حدّ تابع در x_0

فرض می‌کنیم تابع f در یک همسایگی x_0 تعریف شده باشد (ممکن است تابع در خود x_0 تعریف نشده باشد). می‌گوییم حدّ $f(x)$ وقتی $x\to x_0$، برابر عدد حقیقی L است، اگر بتوان $f(x)$ را به هر اندازه‌ی دل‌خواه به L نزدیک کنیم؛ به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به x_0 نزدیک کنیم. در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L$$

به عبارت دیگر، حدّ $f(x)$ وقتی $x\to x_0$، برابر عدد حقیقی L است، اگر بتوان $|f(x)-L|$ را هر اندازه که بخواهیم کوچک کنیم؛ به شرطی که $|x-x_0|$ را به اندازه‌ی کافی کوچک کنیم.

مثال: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=3x-5$ را در نظر می‌گیریم. اگر $x\to 1$، آن‌گاه حدّ $f(x)$ برابر -2 است. می‌خواهیم $|f(x)+2|<\frac{1}{100}$ باشد. x را چه‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم؟

حل:

$$|f(x)+2|<\frac{1}{100} \Rightarrow |3x-5+2|<\frac{1}{100} \Rightarrow |3x-3|<\frac{1}{100}$$

$\Rightarrow |3(x-1)|<\frac{1}{100} \Rightarrow 3|x-1|<\frac{1}{100}$ یا $|x-1|<\frac{1}{300}$

$0<|x-1|<\frac{1}{300}$

پس x را آن‌قدر باید به عدد ۱ نزدیک کنیم که $|x-1|$ (که مثبت است) کوچک‌تر از $\frac{1}{300}$ بشود.

توجه: اگر $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$ و $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$ باشد، آن‌گاه می‌گوییم تابع f در x_0 حد دارد و حد آن برابر عدد حقیقی L است.

قضایای حد

قضیه‌ی ۱. فرض می‌کنیم a و b اعداد حقیقی و $n\in N$ باشد.

الف) $\lim_{x\to a} b=b$

ب) $\lim_{x\to a} x=a$

ج) $\lim_{x\to a} x^n=a^n$

قضیه‌ی ۲. فرض می‌کنیم a، b و L اعداد حقیقی و $n\in N$ و $\lim_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_2$ باشد. آن‌گاه داریم:

الف) $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=L_1\pm L_2$

ب) $\lim_{x\to a} b f(x)=bL_1$

ج) $\lim_{x\to a} f(x).g(x)=L_1.L_2$

د) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$ با شرط $L_2\neq 0$

قضیه‌ی ۳. اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L_1\in\mathbb{R}$ و $\lim_{x\to a} g(x)=0$ باشد، آن‌گاه:

$\lim_{x\to a} f(x).g(x)=L(0)=0$

قضیه‌ی ۴. اگر $f(x)=m_0x^n+m_1x^{n-1}+\cdots+m_n$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد، آن‌گاه:

$\lim_{x\to a} f(x)=m_0a^n+m_1a^{n-1}+\cdots+m_n$

قضیه‌ی ۵. اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ باشد، آن‌گاه: $\lim_{x\to a}|f(x)|=|L|$.

قضیه‌ی ۶. اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $L\geq 0$ و $n\in N$ باشد، آن‌گاه: $\lim \sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$. اگر n فرد باشد، شرط $L\geq 0$ لازم نیست.

قضیه‌ی ۷. اگر $f(x)\leq g(x)$ و $\forall x\in\mathbb{R}$ و f و g در a حدّ داشته باشند، آن‌گاه: $\lim_{x\to a} f(x)\leq \lim_{x\to a} g(x)$.

قضیه‌ی ۸. حدّ یک تابع در $x=a$ در صورت وجود یکتاست.

مثال: به کمک قضیه‌ی حدّ، حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-8x}{x^3+4x-1}$

$$=\frac{\lim_{x\to 1}(x^2-8x)}{\lim_{x\to 1}(x^3+4x-1)}=\frac{\lim_{x\to 1}x^2-\lim_{x\to 1}8x}{\lim_{x\to 1}x^3+\lim_{x\to 1}4x-\lim_{x\to 1}1}=\frac{1-8}{1+4-1}=\frac{-7}{4}$$

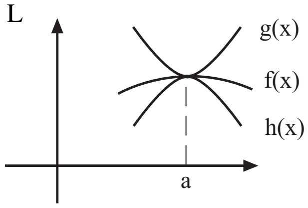
ب) $\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+4}{3x^2+x+4}}=\sqrt[3]{\frac{\lim_{x\to 1}(x^2-x+4)}{\lim_{x\to 1}(3x^2+x+4)}}$

$$=\sqrt[3]{\frac{\lim_{x\to 1}x^2-\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}4}{\lim_{x\to 1}(3x^2)+\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}4}}=\sqrt[3]{\frac{1-1+4}{3+1+4}}=\sqrt[3]{\frac{4}{8}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

قضیه‌ی فشردگی

فرض می‌کنیم به ازای هر x در یک همسایگی a، f(x) بین g(x) و h(x) باشد، هرگاه g(x) و h(x) وقتی $x\to a$، دارای حدّ $L\in R$ باشند، آن گاه:

$\lim_{x\to a} f(x)=L$



مثال: اگر $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ باشد، می‌دانیم $-1\leq \sin\frac{1}{x}\leq 1$ و (با فرض $x>0$) داریم: $-x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq x$

آن‌گاه: $\lim_{x\to 0^+}(-x)\leq \lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}\leq \lim_{x\to 0^+}(x)$

$0\leq \lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}\leq 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} x\sin\frac{1}{x}=0$

چنان‌چه $x<0$ باشد، داریم: $x\leq x\sin\frac{1}{x}\leq -x$ و:

$\lim_{x\to 0^-}(x)\leq \lim_{x\to 0^-} x\sin\frac{1}{x}\leq \lim_{x\to 0^-}(-x)\Rightarrow 0\leq \lim_{x\to 0^-} x\sin\frac{1}{x}\leq 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} x\sin\frac{1}{x}=0$

پس: $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

❐❐❐