

۱- مشتق توابع زیر را بدست آورید:

۱) $y = \ln | \sin x |$

۲) $y = e^{-\cos x} + e^{x+1}$

۲- معادله خط مماس بر منحنی تابع ضمنی $y = \cos(x-y)$ را در نقطه $(0, \frac{\pi}{2})$ بدست آورید.

۳- نقاط بحرانی تابع $y = (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$ را بدست آورید.

۴- ضرایب a و b و c و d را چنان تعیین کنید که تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ در $(2, 0)$ دارای یک ماکزیمم یا مینیمم نسبی باشد و منحنی نمایش آن در $(-1, 0)$ یک نقطه عطف داشته باشد.

۵- تابع $y = \frac{ax+b}{cx+1}$ مفروض است ضرایب a و b و c را به قسمی تعیین کنید که منحنی تابع از نقطه $(0, 3)$ بگذرد و

نقطه $O' = (-1, 2)$ مرکز تقارن منحنی تابع باشد. سپس نمودار تابع $y = \frac{2x+3}{x+1}$ را رسم کنید.

۶- معادله دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $(0, 1)$ و $(0, 6)$ گذشته و بر خط $y=1$ مماس باشد.

۷- دو دایره به معادلات زیر نسبت به هم چه وضعی دارند؟

$$x^2 + (y+5)^2 = 5$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 6 = 0$$

۸- الف) سهمی به معادله $x^2 - 4x - 8y - 4 = 0$ داده شده کانون و معادله خط هادی سهمی را مشخص کنید.

ب) معادله یک هذلولی را بنویسید که $f \left| \begin{matrix} 6 \\ 1 \end{matrix} \right.$ و $f \left| \begin{matrix} -4 \\ 1 \end{matrix} \right.$ کانونها و طول قطر کانونی آن $AA' = 8$ باشد.

۹- با استفاده از نمودار $y = |-x+2| - 1$ مقدار $\int_{-1}^2 y dx$ را بدست آورید.

۱۰- انتگرالهای زیر را بدست آورید.

الف) $\int (-\frac{1}{x^2} + \sqrt{x} - \frac{1}{x} + 1) dx$

ب) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \sin^2 x) dx$

۱۱- اگر $G(s) = \int_1^x \frac{-\sin t}{1-2t} dt$ باشد، آنگاه $G(\frac{\pi}{2})$ را بدست آورید.

۱۲- سطح محصور بین $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ را بدست آورید.

موفق باشید

۱) $y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

۲) $y' = \sin x e^{-\cos x} + 2e^{2x+1}$

$y = \cos(x-y) \Rightarrow y - \cos(x-y) = 0$

$y' = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = -\frac{\sin(x-y)}{1-\sin(x-y)} \Rightarrow m = -\frac{\sin(0-\frac{\pi}{2})}{1-\sin(0-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$y - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$ معادله خط مماس :

$y = (x^2-1)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}(2x) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{matrix}$

$f(1) = 0$

$f(-1) = 0$ مطلق Min

$f(0) = 1$ مطلق Max

$y = ax^2 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 2ax^2 + 2bx + c = 0 \Rightarrow y'' = 4ax + 2b = 0$

Min یا Max $(0, 2) \Rightarrow 2 = a(0)^2 + b(0)^2 + c(0) + d \Rightarrow d = 2 \Rightarrow y' = 2a(0)^2 + 2b(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0$

$I(-1, 1) \Rightarrow 1 = a(-1)^2 + b(-1)^2 + 0 \times (-1) + 2 \Rightarrow -a + b = -1$ (۱)

$y'' = 4a(-1) + 2b = 0 \Rightarrow -4a + 2b = 0$ (۲)

$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} -a + b = -1 \\ -4a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 2b = 2 \\ -4a + 2b = 0 \end{cases}$
 $-2a = 2 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} + b = -1 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$

$y = \frac{ax+b}{cx+1}$

۵- دو مجانب منحنی هموگرافیک مرکز تقارن منحنی است.

$y \rightarrow \pm \infty \Rightarrow cx+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{c}$

$O(-1, 2) \Rightarrow \frac{-1}{c} = -1 \Rightarrow c = 1$

$x \rightarrow \pm \infty \Rightarrow y = \frac{a}{c}$

$O(\frac{-1}{c}, \frac{a}{c}) \Rightarrow \frac{a}{c} = 2 \Rightarrow a = 2$

$\begin{cases} y = \frac{ax+b}{cx+1} \Rightarrow 0 = \frac{2(3)+b}{1(3)+1} \Rightarrow b = -6 \\ A(3, 0) \end{cases}$

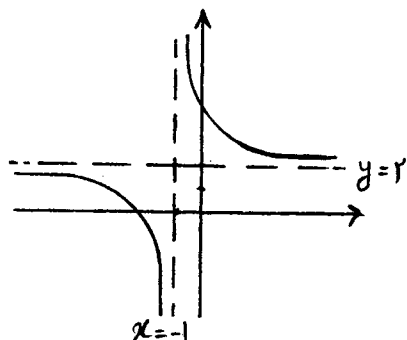
$y = \frac{2x+2}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{2x+2-2x-2}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2}$

y' همواره منفی است

$x \rightarrow \pm \infty \quad y = 2$ مجانب افقی

$y \rightarrow \pm \infty \quad x = -1$ مجانب قائم

| | | | |
|----|-----------|-----------------------|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | $+\infty$ |
| y' | - | - | - |
| y | 2 | $-\infty$ $+\infty$ | 2 |



رسم نمودار:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1, 0) \Rightarrow 1 + 0 + a + 0 + c = 0 \\ (6, 0) \Rightarrow 36 + 0 + 6a + 0 + c = 0 \end{cases} \quad -۶$$

$$\begin{cases} a + c = -1 \\ 6a + c = -36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - c = 1 \\ 6a + c = -36 \end{cases}$$

$$\Delta a = -35 \Rightarrow a = -7 \Rightarrow c = 6$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ a = -7 \\ c = 6 \end{cases} \quad \text{خط مماس} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 - 7x + b + 6 = 0 \\ x^2 - 7x + b + 7 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

دایره بر خط $y = 1$ مماس است در نتیجه محل تقاطع خط با دایره در یک نقطه است یعنی معادله درجه دوم (۱) دارای یک ریشه است پس $\Delta = 0$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 49 - 4(b + 7) = 0 \Rightarrow 49 - 4b - 28 = 0$$

$$-4b = -21 \Rightarrow b = \frac{21}{4}$$

$$x^2 + y^2 - 7x + \frac{21}{4}y + 6 = 0 \quad \text{معادله دایره}$$

$$x^2 + (y + 5)^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} c(0, -5) \\ R = \sqrt{5} \end{cases} \quad -۷$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c'(2, -3) \\ R' = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 36 - 24} = \frac{1}{2}\sqrt{28} = \sqrt{7} \end{cases}$$

$$cc' = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$R + R' = \sqrt{5} + \sqrt{7} \quad |R - R'| < cc' < R + R' \Rightarrow \text{مقاطع}$$

$$|R - R'| = |\sqrt{5} - \sqrt{7}|$$

$$\text{الف) } x^2 - 4x - 8y - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 = 8y + 4 \quad -۸$$

$$(x - 2)^2 = 8y + 8 \Rightarrow (x - 2)^2 = 8(y + 1) \quad \text{سهمی قائم است}$$

$$h = 2 \quad p = 2$$

$$k = -1$$

$$\text{خط هادی } \Delta: y = k - p \Rightarrow y = -3$$

$$F \begin{vmatrix} 6 \\ 1 \end{vmatrix}, F \begin{vmatrix} h+c \\ k \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} h+c=6 \\ h-c=-4 \end{cases}$$

$$F' \begin{vmatrix} -4 \\ 1 \end{vmatrix}, F' \begin{vmatrix} h-c \\ k \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{2h=2 \Rightarrow h=1 \Rightarrow c=5$$

ب) هذلولی افقی است.

$$AA' = 8 \Rightarrow a = 4 \quad c^2 = b^2 + a^2 \Rightarrow b = 3$$

$$AA' = 2a \quad 25 = b^2 + 16$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1 \quad \text{معادله هذلولی}$$

$$y = |-x+2| - 1$$

| | | |
|---|----|---|
| x | -1 | 2 |
| y | 2 | 1 |

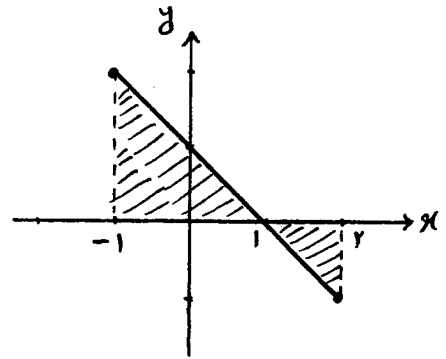
محل تقاطع با محور xها: $0 = |-x+2| - 1$

$$|-x+2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} -x+2=1 \Rightarrow x=1 \\ -x+2=-1 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

$$s_1 = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

$$s_2 = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^2 y \, dx = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



-9

$$1) \int \left(\frac{-1}{x^2} + \sqrt{x} - \frac{1}{x} + 1 \right) dx$$

$$\int (-x^{-2} + x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} + 1) dx = \frac{1}{x} + \frac{2\sqrt{x}}{3} - \ln|x| + x + c$$

$$2) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - \sin^2 x) dx$$

از رابطه مثلثاتی $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{حل: } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{4} \sin \pi - \frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4} \pi$$

-10

$$G(s) = \int_1^x \frac{-\sin t}{1-2t} dt \Rightarrow G'(x) = \frac{-\sin x}{1-2x} \Rightarrow G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sin \frac{\pi}{2}}{1-2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-1}{1-\pi}$$

-11

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \rightarrow y^2 = x \end{cases} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$$

-12

$$\int_{-1}^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3}$$

سطح محصور بین دو نمودار $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ می‌شود. طبق شکل: $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$.

$$\int_{-1}^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3}$$

