

با سمه ی تعالی

سؤالات امتحان هماهنگ درس : هندسه تحلیلی و جبر خطی	رشته : علوم ریاضی	ساعت شروع : ۱۰ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دوره ی پیش دانشگاهی	« ۱۵ نمره ای »	تاریخ امتحان : ۱۳۸۶ / ۱۰ / ۱۷	
دانش آموزان مجتمع های تطبیقی دختران و پسران تهران در نیم سال اول سال تحصیلی ۱۳۸۶-۸۷		اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی	

ردیف	سؤالات	نمره
------	--------	------

۱	بردار های $a = (2, -1, 2)$ و $b = (3, -4, 2)$ مفروضند، قرینه ی بردار $a + b$ را نسبت به امتداد بردار $a - b$ محاسبه کنید.	۱/۵
۲	مقدار $m$ را طوری بیابید که زاویه ی بین دو بردار $a = (m, -1, 2)$ و $b = (1, -1, 0)$ برابر با $45^\circ$ باشد.	۱/۲۵
۳	نشان دهید دو خط به معادله های $L_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1}$ و $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}$ متقاطع اند.	۱
۴	معادله ی صفحه ای را بنویسید که از سه نقطه ی $A(1, 2, -1)$ ، $B(2, 3, 0)$ ، $C(-1, 0, 2)$ بگذرد.	۱
۵	نوع مقاطع مخروطی زیر را تعیین کنید، سپس نمودار آن ها را رسم کنید. الف: $y^2 + 12x + 4y - 32 = 0$ ب: $4x^2 + 9y^2 - 16x - 36y + 16 = 0$	۲/۵
۶	معادله ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, -2)$ بوده و از نقطه ی $(2, 3)$ بگذرد.	۰/۷۵
۷	با استفاده از دوران محورهای مختصات به اندازه ی مناسب، نوع مقطع مخروطی را تعیین کنید. $x^2 + 8xy + y^2 = 15$	۱/۵
۸	اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس $(A^2 + AB + 2B)$ را بیابید.	۱
۹	با استفاده از ویژگی های دترمینان و بدون بسط درستی رابطه ی زیر را ثابت کنید. $\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = (a+4)(a-2)^2$	۱
۱۰	از تساوی ماتریسی مقابل مقدار $x$ را بیابید؟ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$	۱
۱۱	اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس $A^{10}$ را محاسبه کنید.	۰/۵
۱۲	دستگاه معادلات مقابل را از روش حذفی گاوس حل کنید. $\begin{cases} 3x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 8 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases}$	۱
۱۳	فرض کنید $A$ یک ماتریس مربعی و وارون پذیر باشد، ثابت کنید: $ A^{-1}  = \frac{1}{ A }$	۱
۱۵	جمع نمره	۱۵

راهنمای تصحیح سوالات هماهنگ درس: هندسه تحلیلی و جبر خطی	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دوره ی پیش دانشگاهی	« ۱۵ نمره ای »	تاریخ امتحان: ۱۳۸۶ / ۱۰ / ۱۷	
دانش آموزان مجتمع های تطبیقی دختران و پسران تهران در نیم سال اول سال تحصیلی ۸۷-۱۳۸۶ اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی			

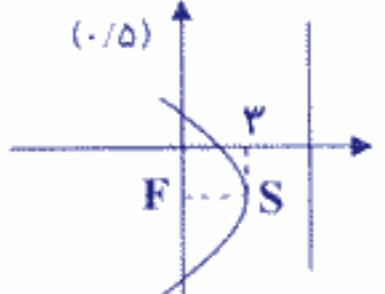

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱	$a+b=(2,-1,2)+(3,-4,2)=(5,-5,4) \quad (./25)$ $a-b=(2,-1,2)-(3,-4,2)=(-1,3,0) \quad (./25)$ $(./25)(a+b)' = \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{ a-b ^2} (a-b) = \frac{-2 \cdot (-1,3,0)}{1} = (2,-6,0) \quad (./25)$ $(./25)(a+b)'' = 2(a+b)' - (a+b) = (4,-12,0) - (5,-5,4) = (-1,-7,-4) \quad (./25)$	
---	--	--

۲	$a \cdot b =  a   b  \cos \alpha \quad (./5) \Rightarrow m+1 = \sqrt{m^2+5} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (./25)$ $(m+1)^2 = (\sqrt{m^2+5})^2 \Rightarrow m^2+2m+1 = m^2+5 \quad (./25) \Rightarrow 2m=4 \Rightarrow m=2 \quad (./25)$	
---	---	--

۳	$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t \quad (./5) \\ z=2t \end{cases}$ $\frac{t-1}{2} = \frac{-2t+2}{1} = \frac{2t-2}{-1} \quad (./25) \Rightarrow \begin{cases} t-1 = -4t+4 \Rightarrow t=1 \\ -t+1 = 4t-4 \Rightarrow t=1 \end{cases} \quad (./25)$ دو خط متقاطع اند	
---	--	--

۴	<p>بردار نرمال صفحه، ضرب خارجی دو بردار <math>AB, AC</math> می باشد  <math>A(1,2,-1), B(2,3,0), C(-1,0,2)</math>  <math>AB=(1,1,1), AC=(-2,-2,2) \quad (./25) \Rightarrow N=AB \times AC=(5,-5,0) \quad (./25)</math> نرمال صفحه  <math>A(1,2,-1), N(5,-5,0) \Rightarrow 5(x-1)-5(y-2)+0(z+1)=0 \quad (./25) \Rightarrow x-y+1=0 \quad (./25)</math> معادله ی صفحه</p>	
---	--	--

۵	<p>(الف)</p> $y^2+12x+4y-32=0 \Rightarrow (y+2)^2-4-32+12x=0$ $\Rightarrow (y+2)^2=36-12x \quad (./25)$ $\Rightarrow (y+2)^2=-12(x-3) \quad (./25)$ سهمی افقی دهانه به چپ $\Rightarrow 12=4a \Rightarrow a=3 \quad (./25)$	
	<p>(ب) مقطع بیضی است زیرا:</p> $4(x^2-4x)+9(y^2-4y)+16=0$ $4[(x-2)^2-4]+9[(y-2)^2-4]+16=0 \quad (./25)$ $\Rightarrow 4(x-2)^2-16+9(y-2)^2-36+16=0$ $\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \quad (./25)$ بیضی افقی است $\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$	

۶	$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \quad (./25) \Rightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=R^2$ از نقطه ی $(2,3)$ می گذرد $3^2+5^2=R^2 \Rightarrow R^2=34 \quad (./25) \Rightarrow (x+1)^2+(y+2)^2=34 \quad (./25)$	
---	--	--

راهنمای تصحیح سوالات هماهنگ درس: هندسه تحلیلی و جبر خطی	رشته : علوم ریاضی	ساعت شروع : ۱۰ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دوره ی پیش دانشگاهی	« ۱۵ نمره ای »	تاریخ امتحان : ۱۳۸۶ / ۱۰ / ۱۷	
دانش آموزان مجتمع های تطبیقی دختران و پسران تهران در نیم سال اول سال تحصیلی ۸۷-۱۳۸۶		اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۷	$x^2 + \lambda xy + y^2 = 15 \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{b}{a-c} = \frac{\lambda}{1-1} \stackrel{\text{تقریباً}}{\approx} \infty \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad (./25)$ $\Rightarrow \begin{cases} x = x' \cos \frac{\pi}{4} - y' \sin \frac{\pi}{4} \\ y = x' \sin \frac{\pi}{4} + y' \cos \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (./25) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases} \quad (./25)$ $\Rightarrow \frac{1}{2}(x' - y') + \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x' - y') \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x' + y') + \frac{1}{2}(x' + y')^2 = 15 \quad (./25)$ $\Rightarrow \frac{1}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) + \lambda x'y' - \lambda y'^2 + \frac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) = 15 \Rightarrow \Delta x'^2 - 2y'^2 = 15 \quad (./25)$ $\Rightarrow \frac{x'^2}{3} - \frac{y'^2}{5} = 1 \quad (./25) \text{ مقطع هذلولی است}$	۱/۵
---	--	-----

۸	$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (./25)$ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (./25)$ $\Rightarrow A^2 + AB + 2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (./5)$	۱
---	--	---

۹	$\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 + C_2 + C_3 \rightarrow C_1} \begin{vmatrix} a+4 & 2 & 2 \\ a+4 & a & 2 \\ a+4 & 2 & a \end{vmatrix} = (a+4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} \quad (./25)$ $\xrightarrow{\begin{cases} -R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \\ -R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{cases}} (a+4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 \end{vmatrix} \quad (./25) = (a+4)(a-2)^2 \quad (./25)$	۱
---	--	---

۱۰	$\begin{bmatrix} 1-2x & 3+x & 7+4x \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 4 - 8x + 3 + x + 7 + 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{14}{3} \quad (./5)$	۱
----	---	---

۱۱	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (./25)$ $A^{10} = (A^2)^5 = (I_{2 \times 2})^5 = I_{2 \times 2} \quad (./25)$ <p style="text-align: right;">در نتیجه</p>	۱/۵
----	--	-----



راهنمای تصحیح سوالات هماهنگ درس: هندسه تحلیلی و جبر خطی	رشته : علوم ریاضی	ساعت شروع : ۱۰ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دوره ی پیش دانشگاهی	« ۱۵ نمره ای »	تاریخ امتحان : ۱۳۸۶ / ۱۰ / ۱۷	
دانش آموزان مجتمع های تطبیقی دختران و پسران تهران در نیم سال اول سال تحصیلی ۸۷-۱۳۸۶		اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱۲	$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 &   & 2 \\ 1 & 2 & 1 &   & 8 \\ 1 & -3 & 2 &   & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 - \frac{1}{3}R_1 \Rightarrow R_2 \\ \xrightarrow{(\cdot/25)} \\ R_2 - \frac{1}{3}R_1 \Rightarrow R_3 \end{array}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 &   & 2 \\ \cdot & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} &   & \frac{22}{3} \\ \cdot & -\frac{10}{3} & \frac{7}{3} &   & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_3 + 2R_2 \Rightarrow R_3 \\ \xrightarrow{(\cdot/25)} \end{array}$ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 &   & 2 \\ \cdot & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} &   & \frac{22}{3} \\ \cdot & \cdot & \frac{15}{3} &   & \frac{45}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 &   & 2 \\ \cdot & 5 & 4 &   & 22 \\ \cdot & \cdot & 15 &   & 45 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (\cdot/25) \Rightarrow \\ \begin{cases} 15z = 45 \Rightarrow z = 3 \\ 5y + 4z = 22 \Rightarrow y = 2 (\cdot/25) \\ 3x + y - z = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \end{array}$	
----	--	--

۱۳	$AA^{-1} = I (\cdot/25) \Rightarrow  AA^{-1}  =  I  (\cdot/25) \Rightarrow  A   A^{-1}  = 1 (\cdot/25) \Rightarrow  A^{-1}  = \frac{1}{ A } (\cdot/25)$	
----	---	--

۱۵	جمع نمره	موفق باشید
----	----------	------------