

باسمه تعالی

سؤالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۳۰: ۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دوره‌ی پیش دانشگاهی (۲۰ نمره‌ای)		تاریخ امتحان: ۱۳۸۷ / ۴ / ۳	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور جبرانی دوم سال تحصیلی ۸۷-۱۳۸۶		اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	معادله خط مماس بر منحنی $2x^3 + 4x^2y - 2y^3 - 2xy^2 - 2x = 0$ را در نقطه $(1, 1)$ بنویسید.	۱
۲	فرض کنید $f(x) = \frac{x-5}{x+1}$ مقدار $(f^{-1})'(-1)$ را بیابید.	۱
۳	اگر ارتفاع مثلثی با آهنگ ۲ سانتی متر بر دقیقه افزایش یابد، مساحت آن با آهنگ ۳ سانتی متر مربع بر دقیقه زیاد می شود، هنگامی که قاعده و ارتفاع مثلث به ترتیب ۳۰ و ۱۵ سانتی متر هستند، قاعده با چه آهنگی تغییر می کند؟	۱
۴	مشتق مرتبه n ام تابع $f(x) = \frac{1}{x} - 2x$ را محاسبه کنید.	۱
۵	مقادیر a، b، c و d را طوری تعیین کنید که $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ در نقطه $(0, 2)$ اکسترمم نسبی داشته و $(1, -1)$ برای نمودار f، نقطه عطف باشد.	۱/۵
۶	c مذکور در قضیه رول را در صورت وجود برای تابع $f(x) = x^2 + 4x - 2$ روی بازه $[-5, 1]$ بیابید.	۱/۵
۷	جدول تغییرات و نمودار تابع $y = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + x - 2}$ را رسم کنید.	۲/۵
۸	ثابت کنید: $ \cos x  \leq \left  x - \frac{\pi}{2} \right $	۱/۲۵
۹	با استفاده از قاعده هویتال حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \tan 3x \tan \left( \frac{\pi}{6} - x \right)$	۲
۱۰	در تابع $y = \text{Arccot} \sqrt{x}$ مقدار تقریبی تغییر تابع وقتی که x از ۱ به ۱/۰۵ افزایش می یابد را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۱	اگر تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد و m و M به ترتیب مقادیر مینیمم مطلق و ماکسیمم مطلق تابع f در این بازه باشند ثابت کنید: $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$	۱/۲۵
۱۲	مجموع بالا و پایین ریمان تابع $f(x) = x^3 + 3x + 1$ را در فاصله $[-2, 2]$ به ازای $n = 4$ به دست آورید.	۱/۷۵
۱۳	اگر $f(x) = \int_1^x t^2 dt$ و $g(x) = f(\Delta x)$ ، بدون محاسبه انتگرال، $g'(x)$ را بیابید.	۱
۱۴	انتگرالهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\int (2x^3 - \frac{1}{\sqrt{x}}) dx$ ب) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$ پ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2[x] dx$	۲
۲۰	جمع نمره	۲۰

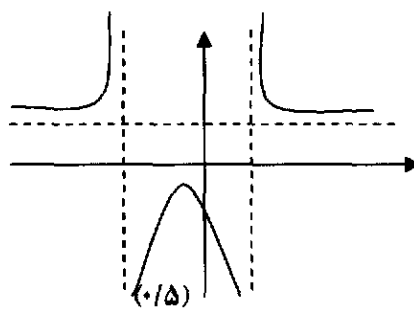
«موفق باشید»

راهنمای تصحیح سوالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی
دوره ی پیش دانشگاهی (۲۰ نمره ای)	تاریخ امتحان: ۳ / ۴ / ۱۳۸۷
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۸۷-۱۳۸۶	اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱	$F'(x, y) = -\frac{6x^2 + 8xy - 2y^2 - 2}{4x^2 - 6y^2 - 4xy} \quad (1,1) \rightarrow m = -\frac{6+8-2-2}{4-6-4} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3} \quad (0/25)$ $y-1 = \frac{5}{3}(x-1) \quad (0/25)$	۱
۱	$\left  \frac{-1}{a} \in f^{-1} \Rightarrow \left  \frac{a-5}{a+1} \right  = -1 \quad (0/25) \Rightarrow a-5 = -a-1 \Rightarrow a=2 \quad (0/25)$ $f'(x) = \frac{6}{(x+1)^2} \quad (0/25) \Rightarrow (f^{-1})'(-1) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{6} = \frac{3}{9} \quad (0/25)$	۲
۱	$S = \frac{1}{\gamma} xh \Rightarrow S'_t = \frac{1}{\gamma} (x'_t h + x h'_t) \quad (0/25) \Rightarrow 3 = \frac{1}{\gamma} (15x'_t + 3 \cdot 0 \cdot 2) \quad (0/25)$ $\Rightarrow 6 = 15x'_t + 6 \Rightarrow 15x'_t = -54 \quad (0/25) \Rightarrow x'_t = \frac{-54}{15} = -\frac{18}{5} \frac{\text{cm}}{\text{m}} \quad (0/25)$ <p>کاهش می یابد</p>	۳
۱	$f(x) = \frac{1}{x} - 2x \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} - 2 \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \dots \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad (0/5)$	۴
۱/۵	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \xrightarrow{(0,3)} 3 = 0 + d \Rightarrow d = 3 \quad (0/25)$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \xrightarrow{x=0} f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \quad (0/25)$ <p>نقطه اکسترمم است پس:</p> $(1, -1) \xrightarrow{f(1)=-1} -1 = a + b + 3 \Rightarrow a + b = -4 \quad (0/25)$ <p>چون (1, -1) نقطه عطف است:</p> $f''(x) = 6ax + 2b \xrightarrow{x=1} f''(1) = 6a + 2b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b = -4 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -6 \quad (0/5)$	۵
۱/۵	<p>f در [-۵, ۱] پیوسته (۰/۲۵) و در (-۵, ۱) مشتق پذیر است (۰/۲۵) و f(۱) = f(-۵) = ۳ پس شرایط قضیه رول برقرار است:</p> $\exists c \in (-5, 1) : f'(c) = 0 \quad (0/25) \Rightarrow f'(x) = 2x + 4 \Rightarrow 2c + 4 = 0 \Rightarrow c = -2 \quad (0/25)$	۶
«ادامه در صفحه ی دوم»		

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی
دوره ی پیش دانشگاهی (۲۰ نمره ای)	تاریخ امتحان: ۱۳۸۷ / ۴ / ۳
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۱۳۸۶-۸۷	اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره																		
۷	<p>(۰/۲۵) <math>D = \mathbb{R} - \{1, -2\}</math> و <math>x = -2</math> و <math>x = 1</math> : مجانب قائم (۰/۲۵) و <math>y = 1</math> مجانب افقی (۰/۲۵)</p> $y' = \frac{(2x+1)(x^2+x-2) - (2x+1)(x^2+x+2)}{(x^2+x-2)^2}$ <p><math>y' = 0 \Rightarrow -4(2x+1) = 0</math> (۰/۲۵) <math>\Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{-7}{9}</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>x = 0 \Rightarrow y = -1</math> (۰/۲۵) <math>y = 0 \Rightarrow</math> موجود نیست</p>  <table border="1" data-bbox="239 694 925 963"> <tr> <td>x</td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>-2</math></td> <td><math>-\frac{1}{2}</math></td> <td><math>1</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td></td> <td>+</td> <td>+</td> <td>-</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td></td> <td><math>+\infty</math></td> <td><math>-\frac{7}{9}</math></td> <td><math>+\infty</math></td> <td></td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$-2$	$-\frac{1}{2}$	$1$	$+\infty$	y'		+	+	-	-	y		$+\infty$	$-\frac{7}{9}$	$+\infty$		۲/۵
x	$-\infty$	$-2$	$-\frac{1}{2}$	$1$	$+\infty$															
y'		+	+	-	-															
y		$+\infty$	$-\frac{7}{9}$	$+\infty$																
۸	<p><math>f(x) = \cos x</math> را در بازه <math>(\frac{\pi}{4}, x)</math> در نظر می گیریم (۰/۲۵) بنابر قضیه مقدار میانگین داریم:</p> $f(x) - f(\frac{\pi}{4}) = f'(c)(x - \frac{\pi}{4})$ (۰/۲۵) <p><math>\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = (-\sin c)(x - \frac{\pi}{4})</math> (۰/۲۵) <math>\Rightarrow  \cos x  =  \sin c  \left  x - \frac{\pi}{4} \right </math> (۰/۲۵)</p> <p>از طرفی می دانیم <math> \sin c  \leq 1</math> لذا <math> \cos x  \leq \left  x - \frac{\pi}{4} \right </math> (۰/۲۵)</p>	۱/۲۵																		
۹	<p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x}</math> (۰/۲۵) <math>\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x}</math> (۰/۲۵) <math>= \frac{0}{0}</math></p> <p><math>\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x}</math> (۰/۲۵) <math>= \frac{0}{2} = 0</math> (۰/۲۵)</p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \tan^3 x \tan(\frac{\pi}{6} - x) = 0 \times \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\tan(\frac{\pi}{6} - x)}{\cot^3 x} = \frac{0}{0}</math> (۰/۲۵)</p> <p><math>\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{-(1 + \tan^2(\frac{\pi}{6} - x))}{-2(1 + \cot^2 3x)}</math> (۰/۵) <math>= \frac{1}{2}</math> (۰/۲۵)</p>	۲																		
	«ادامه در صفحه ی سوم»																			

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان هماهنگ درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته : علوم ریاضی
دوره ی پیش دانشگاهی ( ۲۰ نمره ای )	تاریخ امتحان : ۳ / ۴ / ۱۳۸۷
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۸۷-۱۳۸۶	اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره												
۱۰	$f(x) = \text{Arc cot} \sqrt{x} \Rightarrow dy = f'(x)dx \quad (۰/۲۵) \Rightarrow dy = \frac{-1}{1+\sqrt{x}} dx \quad (۰/۵)$ $dy = \frac{-1}{1+1} \times ۰/۰۵ = \frac{-1}{۲} \times \frac{۵}{۱۰۰} = \frac{-۵}{۲۰۰} \quad (۰/۲۵)$	۱/۲۵												
۱۱	<p>f در [ a, b ] پیوسته است پس مقدار ماکزیمم (M) و مینیمم مطلق (m) خود را در این بازه دارد (۰/۲۵)</p> <p>بنابراین برای هر <math>x \in [a, b]</math> داریم :</p> $m \leq f(x) \leq M \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \quad (۰/۲۵)$ $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (۰/۲۵) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \quad (۰/۲۵)$	۱/۲۵												
۱۲	$f(x) = x^3 + 3x + 1$ <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td><math>x_i</math></td> <td>-۲</td> <td>-۱</td> <td>۰</td> <td>۱</td> <td>۲</td> </tr> <tr> <td><math>f(x_i)</math></td> <td>-۱۳</td> <td>-۳</td> <td>۱</td> <td>۵</td> <td>۱۵</td> </tr> </table> $\Delta x = \frac{2-(-2)}{4} = 1 \quad (۰/۲۵)$ $L_f(f) = \sum_{i=1}^4 f(l_i) \Delta x \quad (۰/۲۵) = 1(-13 - 3 + 1 + 5) = -10 \quad (۰/۲۵)$ $U_f(f) = \sum_{i=1}^4 f(u_i) \Delta x \quad (۰/۲۵) = 1(-3 + 1 + 5 + 15) = 18 \quad (۰/۲۵)$	$x_i$	-۲	-۱	۰	۱	۲	$f(x_i)$	-۱۳	-۳	۱	۵	۱۵	۱/۲۵
$x_i$	-۲	-۱	۰	۱	۲									
$f(x_i)$	-۱۳	-۳	۱	۵	۱۵									
۱۳	$f'(x) = 1 \times x^2 - 0 = x^2 \quad (۰/۵) \Rightarrow g'(x) = \Delta f(\Delta x) = \Delta(\Delta x)^2 = 12\Delta x \quad (۰/۲۵)$	۱												
۱۴	<p>الف) <math>\int (2x^3 - x^{-2}) dx = \frac{1}{4} x^4 - \frac{3}{2} x^{-1} + c \quad (۰/۵)</math></p> <p>ب) <math>\int \tan^3 x (1 + \tan^2 x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + c \quad (۰/۲۵)</math></p> <p>پ) <math>\int_0^1 2[x] dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} 2[x] dx = 0 + \int_1^{\frac{\pi}{2}} 2 dx = 2(\frac{\pi}{2} - 1) \quad (۰/۲۵)</math></p>	۲												
۲۰	جمع نمره													

همکاران محترم ضمن عرض خسته نباشید، لطفاً برای پاسخ هر دو دست درگیر با نام رابره مناسب منظور فرمایید.