باسمه تعالی

سؤالات امتحان هماهنگ درس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)**	رشته : **علوم ریاضی**	ساعت شروع : ۱۴ : ۳۰	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
دوره ی پیش دانشگاهی «۱۵ نمره ای»		تاریخ امتحان : ۲۹ / ۲ / ۱۳۸۷	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال دوم سال تحصیلی ۸۷-۱۳۸۶		**اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی**	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	معادله خط مماس بر تابع معکوس تابع $f(x)=\sqrt[3]{2x^3+6x}$ را در نقطه‌ای به طول ۲- روی تابع معکوس پیدا کنید.	۱
۲	کارخانه ای بهای فروش هر واحد کالای تولید شده خود را ۱۵۰ تومان تعیین کرده است، اگر روزانه x واحد از این کالا تولید و فروخته شود و هزینه کل تولید روزانه $C(x)=x^3+12x^2+3x+4000$ تومان باشد، الف) تابع سود کل را محاسبه کنید. ب) تابع سود نهایی را بنویسید.	۱
۳	طول و عرض مکعب مستطیلی به ترتیب با سرعت ۲ و ۴ متر بر ثانیه افزایش و ارتفاع آن با سرعت ۳ متر بر ثانیه کاهش می یابد، وقتی طول و عرض و ارتفاع به ترتیب ۵ و ۲ و ۴ متر باشند، آهنگ تغییر حجم مکعب مستطیل را محاسبه کنید.	۱
۴	ثابت کنید اگر تابع f در نقطه‌ی c دارای اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه $f'(c)=0$ است.	۱/۲۵
۵	به کمک دیفرانسیل مقدار تقریبی $(1/03)^{10}$ را بیابید.	۱
۶	با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال حدود زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\sin^2 x}$ ب) $\lim_{x\to 2}(x^2-4)\tan\frac{\pi x}{4}$	۱/۵
۷	اگر تابع $f(x)=x^3-bx^2+ax+4$ بر بازه‌ی $[-1,2]$ در نقطه $c=1$ در شرایط قضیه رول صدق کند، مقادیر a و b را به دست آورید.	۱
۸	تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ مفروض است. نقاط A و B به ترتیب به طول های ۲ و ۱۰ دو نقطه روی تابع هستند. نقطه‌ای روی تابع پیدا کنید که مماس در آن نقطه موازی پاره خط AB باشد.	۱/۲۵
۹	جدول تغییرات و نمودار تابع $y=\frac{x^3}{1-x^2}$ را رسم کنید.	۱/۵
۱۰	تقریب نقصانی مساحت زیر منحنی $f(x)=1-x^2$ را در $[0,2]$ برای $n=4$ محاسبه کنید.	۱
۱۱	بدون محاسبه انتگرال حاصل مشتق مقابل را بیابید. $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{t}{1+t^2}dt$	۰/۷۵
۱۲	ثابت کنید: $\frac{\sqrt{3}}{4}<\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}dx<\frac{1}{2}$	۱
۱۳	انتگرال های زیر را محاسبه کنید. الف) $\int(3x+\frac{5}{x^2})dx$ ب) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ پ) $\int_0^1[2x]dx$	۱/۷۵
	«موفق باشید»	جمع نمره ۱۵

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان هماهنگ درس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)**	رشته : **علوم ریاضی**	ساعت شروع : ۱۴ : ۳۰
دوره ی پیش دانشگاهی «۱۵ نمره ای »		تاریخ امتحان : **۱۳۸۷ / ۲ / ۲۹**
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال دوم سال تحصیلی **۸۷-۱۳۸۶**		**اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	$\begin{vmatrix}-۲\\a\end{vmatrix}\in f^{-1}\Rightarrow\begin{vmatrix}a\\-۲\end{vmatrix}\in f\to\sqrt[۳]{۲a^۳+۶a}=-۲\Rightarrow a^۳+۳a+۴=۰\Rightarrow a=-۱$ (۰/۲۵) $f'(x)=\frac{۲x^۲+۲}{\sqrt[۳]{(۲x^۳+۶x)^۲}}\overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow} f'(-۱)=۱\Rightarrow (f^{-۱})'(-۲)=\frac{۱}{f'(-۱)}=۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ **معادله مماس** $y+۱=۱(x+۲)\Rightarrow y=x+۱$ (۰/۲۵)	۱
۲	**الف)** $R(x)=۱۵\circ x$ (۰/۲۵) $\Rightarrow P(x)=R(x)-C(x)\underset{(۰/۲۵)}{=}-x^۳-۱۲x^۲+۱۴۷x-۴\circ\circ\circ$ (۰/۲۵) **ب)** $P'(x)=-۳x^۲-۲۴x+۱۴۷$ (۰/۲۵)	۱
۳	$V=xyz\underset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow} V'_t=x'_tyz+xy'_tz+xyz'_t\underset{(۰/۵)}{=}۲(۲)(۴)+۵(۴)(۴)+۵(۲)(-۳)=۶۶$ (۰/۲۵)	۱
۴	**بدون کاستن از کلیت فرض می کنیم c یک مینیمم نسبی f باشد پس برای x های در یک همسایگی c داریم:** **حال اگر** $x>c$ **آنگاه** $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq\circ$ **(۰/۲۵) و در نتیجه** $f(x)-f(c)\geq\circ$ **(۰/۲۵)** **و اگر** $x<c$ **آنگاه** $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq\circ$ **(۰/۲۵) و در نتیجه** $\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_+(c)=f'(c)\geq\circ$ (۱) **(۰/۲۵). از (۱) و (۲) نتیجه می شود** $f'(c)=\circ$ **(۰/۲۵)** $\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_-(c)=f'(c)\leq\circ$ (۲)	۱/۲۵
۵	$f(x)=x^{۱۰}\to f'(x)=۱\circ x^۹$ (۰/۲۵) $x_\circ=۱\ ,\ \Delta x=\circ/\circ۳$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (۱+\circ/\circ۳)^{۱۰}\simeq ۱+۱\circ(۱)\frac{۳}{۱\circ\circ}\underset{(۰/۲۵)}{=}\frac{۱۳}{۱\circ}$ (۰/۲۵)	۱
۶	**الف)** $\lim_{x\to\circ}\frac{Sinx-x}{Sin^۲x}\overset{H}{=}\frac{\circ}{\circ}=\lim_{x\to\circ}\frac{Cosx-۱}{Sin۲x}\overset{(۰/۲۵)}{=}\frac{\circ}{\circ}\overset{H}{=}\lim_{x\to\circ}\frac{-Sinx}{۲Cos۲x}\overset{(۰/۲۵)}{=}\circ$ (۰/۲۵) **ب)** $\lim_{x\to۲}\frac{x^۲-۴}{Cot\frac{\pi x}{۴}}\overset{(۰/۲۵)}{=}\frac{\circ}{\circ}\overset{H}{=}\lim_{x\to۲}\frac{۲x}{-\frac{\pi}{۴}(۱+Cot^۲\frac{\pi x}{۴})}\overset{(۰/۲۵)}{=}-\frac{۱۶}{\pi}$ (۰/۲۵)	۱/۵
۷	$f(-۱)=f(۲)$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۳-b-a=۱۲-۴b+۲a\Rightarrow a-b+۳=\circ$ (۰/۲۵) * $f'(x)=۳x^۲-۲bx+a\Rightarrow f'(۱)=۳-۲b+a=\circ$ (۰/۲۵)** **پس از * و ** داریم:** $a=-۳\ ,\ b=\circ$ (۰/۲۵)	۱
۸	$f(x)=\sqrt{x-۱}$ **روی** $(۱\ ,\ +\infty)$ **پیوسته و مشتق پذیر است پس در شرایط قضیه مقدار میانگین روی** $[۲\ ,\ ۱\circ]$ **صدق می کند. (۰/۲۵)** $m_{AB}=\frac{f(۱\circ)-f(۲)}{۱\circ-۲}=\frac{۳-۱}{۸}=\frac{۱}{۴}\overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow}\exists c\in(۲\ ,\ ۱\circ)$ **که** $f'(c)=\frac{۱}{۴}\overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow}\frac{۱}{۲\sqrt{c-۱}}=\frac{۱}{۴}\overset{(۰/۲۵)}{\Rightarrow}c=۵$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
	«ادامه در صفحه‌ی دوم»	

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان هماهنگ درس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)**	رشته : **علوم ریاضی**	ساعت شروع : ۱۴ : ۳۰
دوره ی پیش دانشگاهی «۱۵ نمره ای»		تاریخ امتحان : ۱۳۸۷ / ۲ / ۲۹
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال دوم سال تحصیلی ۸۷-۱۳۸۶		**اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۹	$y=\frac{x^3}{1-x^2} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$ **مجانب مایل** $y=-x$ **(۰/۲۵) و مجانب قائم** $x=-1$ **و** $x=1$ $y'=\frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2} \Rightarrow y'=0 \Rightarrow x^2(3-x^2)=0 \Rightarrow x=0,\sqrt{3},-\sqrt{3}$ (۰/۲۵) (۰/۵) (۰/۲۵)	۱/۵
۱۰	$f(x)=1-x^2$ **روی** $[1,0]$ **نزولی و مثبت است و روی** $[2,1]$ **منفی است بنابراین روی این بازه** $-f(x)$ **را در نظر می گیریم که تابعی است صعودی و مثبت ، پس:** $\Delta x=\frac{1}{2}$ **نقاط فراز** : $0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},2$ (۰/۲۵) **تقریب نقصانی** $=\sum_{i=1}^{2} f(x_i)\Delta x+\sum_{i=3}^{4} -f(x_{i-1})\Delta x \overset{(0/5)}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{4}\right)\right)=1$ (۰/۲۵)	۱
۱۱	$-\underset{(0/25)}{\mathrm{Sin}x}\left(\frac{\mathrm{Cos}x}{1+\underset{(0/25)}{\mathrm{Cos}^2 x}}\right)-\underset{(0/25)}{\mathrm{Cos}x}\left(\frac{\mathrm{Sin}x}{1+\underset{(0/25)}{\mathrm{Sin}^2 x}}\right)$	۰/۷۵
۱۲	$f(x)=\frac{\mathrm{Sin}x}{x}$ **روی** $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ **اکیداً نزولی است پس:** $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{3}} \le \frac{\mathrm{Sin}x}{x} \le \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}} \overset{(0/5)}{\Rightarrow} \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \le \frac{6}{\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{Sin}x}{x}dx \le \frac{3}{\pi} \underset{(0/25)}{\Rightarrow} \frac{\sqrt{3}}{4} \le \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{Sin}x}{x}dx \le \frac{1}{2}$ (۰/۲۵)	۱
۱۳	**الف)** $\int(3x+5x^{-2})dx=\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{x}+c$ (۰/۵) **ب)** $2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{Sin}\sqrt{x}\,dx=-2\mathrm{Cos}\sqrt{x}+c$ (۰/۵) **پ)** $\int_0^{\frac{1}{2}} 0dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1} 1dx \overset{(0/5)}{=} 1\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ (۰/۲۵)	۱/۷۵
	جمع نمره	۱۵

همکاران محترم ضمن عرض خسته نباشید ، لطفاً برای پاسخ های درست دیگر به تناسب بارم را منظور فرمایید.