

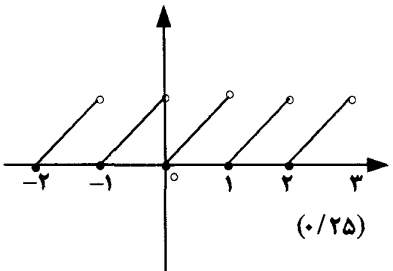
باسمه تعالی

سؤالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲) رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۱۰:۳۰	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دوره‌ی پیش دانشگاهی « ۱۵ نمره ای »	تاریخ امتحان: ۱۳۸۷ / ۲ / ۲۹	
دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال دوم سال تحصیلی ۱۳۸۶-۸۷	اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	مشتق تابع $y^3 + \cos(x+y) = 0$ را بنویسید.	۰/۷۵
۲	تابع $f(x) = \sqrt{x^3 + 3}$ مفروض است. معادله‌ی خط قائم بر تابع معکوس f را در نقطه‌ی ای به طول ۲ واقع بر f^{-1} بنویسید.	۱/۲۵
۳	بشکه‌ی ای به شکل استوانه و به شعاع قاعده‌ی 5 cm پر از آب است. اگر سوراخی در انتهای بشکه ایجاد شده و آب با سرعت $\frac{2}{5}\pi \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ از بشکه در حال خارج شدن باشد، ارتفاع آب با چه سرعتی کم می‌شود؟	۱
۴	مجموعه نقاط اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع $f(x) = x - [x]$ را با توجه به نمودار آن، تعیین کنید.	۰/۷۵
۵	ثابت کنید اگر تابع f روی بازه‌ی I مشتق پذیر بوده و f' روی I برابر مقدار ثابت صفر باشد، آن‌گاه f روی I ثابت است.	۱
۶	تابع $f(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 2x^2 - 3x)$ مفروض است. با توجه به قضیه رول، f دقیقاً چند اکسترمم نسبی دارد؟	۱
۷	ثابت کنید برای هر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ داریم $\sin x < \tan x$.	۱
۸	جدول تغییرات و نمودار تابع $y = x + \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ را رسم کنید.	۱/۷۵
۹	در محاسبه‌ی مقدار $\sqrt{5}$ به روش نیوتن، با حدس x_0 مناسب، x_1 و x_2 را محاسبه کنید.	۱/۲۵
۱۰	حاصل حدود زیر را بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{Arc} \cot x$ ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n} + \sqrt{\frac{n}{2}} + \sqrt{\frac{n}{3}} + \dots + 1)$	۱/۵
۱۱	تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ مفروض است. الف) $L_n(f)$ و $U_n(f)$ را در بازه‌ی $[0, 1]$ به دست آورید. ب) انتگرال پذیری f را روی $[0, 1]$ بررسی کنید.	۱/۲۵
۱۲	اگر f یک تابع پیوسته و فرد باشد و مقدار متوسط $f(x)$ در بازه‌ی $[-1, 3]$ برابر ۵ باشد و داشته باشیم $\int_1^3 (a + f(x)) dx = 17$ ، مقدار a را حساب کنید.	۱/۲۵
۱۳	حاصل انتگرال‌های زیر را بیابید. الف) $\int (2x - 5)^{99} dx$ ب) $\int (\tan^2 x - 1) dx$	۱/۲۵
	جمع نمره	۱۵
	« موفق باشید »	

باسمه تعالی

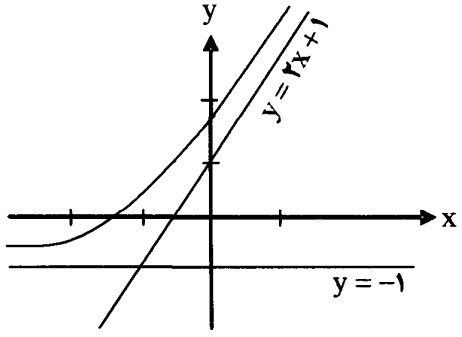
ساعت شروع: ۱۰:۳۰	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح سوالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)
تاریخ امتحان: ۱۳۸۷ / ۲ / ۲۹	دوره‌ی پیش دانشگاهی « ۱۵ نمره ای »	
اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی	دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال دوم سال تحصیلی ۱۳۸۶-۸۷	

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
۰/۷۵	$y' = \frac{-f'_x}{f'_y} = \frac{\sin(x+y)}{3y^2 - \sin(x+y)} \quad (۰/۵)$	۱
۱/۲۵	$\begin{aligned} 2 \in f^{-1} \Rightarrow a \in f \Rightarrow \sqrt{a^2+3} = 2 \Rightarrow a=1 \quad (۰/۲۵) \\ f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^2+3}} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{4} \quad m = (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{4}{3} \quad (۰/۲۵) \text{ شیب مماس} \\ \Rightarrow m' = -\frac{3}{4} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \text{معادله‌ی قائم } y-1 = -\frac{3}{4}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \quad (۰/۲۵) \end{aligned}$	۲
۱	$\begin{aligned} V = \pi r^2 h = 2500\pi h \Rightarrow V'_t = 2500\pi h'_t \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 2/5\pi = 2500\pi h'_t \quad (۰/۲۵) \\ \Rightarrow h'_t = \frac{1}{1000} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad (۰/۲۵) \end{aligned}$	۳
۰/۷۵	 <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p> <p style="text-align: right;"> $\phi = \text{مجموعه نقاط max مطلق و نسبی}$ (۰/۲۵) $\mathbb{Z} = \text{مجموعه نقاط min نسبی و مطلق}$ (۰/۲۵) </p>	۴
۱	<p>نقطه $a \in I$ را به دلخواه بر می‌گزینیم (۰/۲۵) و نشان می‌دهیم $\forall x \in I: f(x) = f(a)$.</p> <p>بدون کاستن از کلیت فرض کنیم $a < x$ پس f روی $[a, x]$ در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می‌کند (۰/۲۵)</p> $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a) \xrightarrow{f'(c)=0} f(x) = f(a) \quad (۰/۲۵)$ <p style="text-align: right;">پس:</p>	۵
۱	<p>f دارای ۵ ریشه است. (۰/۲۵)</p> <p>$f(x) = (x-2)(x+2)x(x+1)(x-3)$ (۰/۲۵)</p> <p>پس طبق قضیه رول بین هر دو ریشه‌ی f، f' حداقل یک ریشه دارد پس f' حداقل ۴ ریشه دارد. (۰/۲۵)</p> <p>از طرفی f' یک چند جمله‌ای درجه ۴ است پس باز طبق قضیه رول حداکثر ۴ ریشه دارد. (۰/۲۵)</p> <p>بنابراین f' دقیقاً ۴ ریشه دارد که همان نقاط اکسترمم نسبی f هستند. (۰/۲۵) چون f چند جمله‌ای است نقاط بحرانی دیگری ندارد. (۰/۲۵)</p>	۶
۱	<p>$f(x) = \sin x$ و $g(x) = \tan x$ و $f(0) = g(0) = 0$ و (۰/۲۵) $f'(0) = g'(0) = 0$ مشتق</p> <p>پذیرند پس $f'(x) = \cos x$ و $g'(x) = 1 + \tan^2 x$ (۰/۲۵) از طرفی همواره روی $(0, \frac{\pi}{2})$ داریم:</p> $\cos x < 1 < 1 + \tan^2 x \Rightarrow f'(x) < g'(x) \Rightarrow \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}): f(x) < g(x) \quad (۰/۲۵)$ <p style="text-align: right;">(۰/۲۵)</p>	۷
« ادامه در صفحه‌ی دوم »		

باسمه تعالی

ساعت شروع: ۱۰:۳۰	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح سوالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)
تاریخ امتحان: ۱۳۸۷ / ۲ / ۲۹	دوره‌ی پیش دانشگاهی « ۱۵ نمره ای »	
اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی	دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال دوم سال تحصیلی ۱۳۸۶-۸۷	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۸	<p>$D = \mathbb{R}$ (۰/۲۵) نقاط تلاقی: $\left \begin{matrix} -۳ \\ ۲ \\ \cdot \\ \sqrt{۳} \end{matrix} \right$ (۰/۲۵)</p> <p>هم ارزی $y = x + x+1 \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow +\infty : y = 2x+1 \text{ (۰/۲۵) مجانب مایل} \\ x \rightarrow -\infty : y = -1 \text{ (۰/۲۵) مجانب افقی} \end{cases}$</p> <p>$y' = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} \Rightarrow y' > 0$ (۰/۲۵)</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>$\frac{-۳}{۲}$</td> <td>۰</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td colspan="4" style="text-align: center;"> ----- </td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td>-1</td> <td>↖</td> <td>↗</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">(۰/۲۵)</p>  <p style="text-align: right;">(۰/۲۵)</p>	x	$-\infty$	$\frac{-۳}{۲}$	۰	$+\infty$	y	-----				y'	-1	↖	↗	$+\infty$	۱/۲۵
x	$-\infty$	$\frac{-۳}{۲}$	۰	$+\infty$													
y	-----																
y'	-1	↖	↗	$+\infty$													

۹	<p>$\sqrt{5}$ ریشه مثبت معادله $x^2 - 5 = 0$ است. پس $f(x) = x^2 - 5$ (۰/۲۵) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{5}{x_n} \right)$ (۰/۲۵)</p> <p>$x_0 = 2$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x_1 = \frac{9}{4} = 2/25$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x_2 = \frac{161}{72} = 2/236$ (۰/۲۵)</p>	۱/۲۵
---	--	------

۱۰	<p>الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{Arc} \cot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{Arc} \cot x}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{1+x^2} = 1$ (۰/۲۵)</p> <p>ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \stackrel{H}{=} \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big _1^n = 2$ (۰/۲۵)</p>	۱/۵
« ادامه در صفحه‌ی سوم »		

باسمه تعالی

ساعت شروع: ۳۰ : ۱۰	رشته : علوم ریاضی	راهنمای تصحیح سؤالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)
تاریخ امتحان: ۲۹ / ۲ / ۱۳۸۷		دوره‌ی پیش دانشگاهی « ۱۵ نمره ای »
اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی		دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نیم سال دوم سال تحصیلی ۸۷-۱۳۸۶

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
۱/۲۵	<p>الف) $\Delta x = \frac{1}{n} (0/25)$ و $x_i = \frac{i}{n} \rightarrow$ نقطه صفر در زیر بازه‌ی اول قرار دارد $\Rightarrow f(l_1) = 0$, $f(l_i) = f(u_i) = 1$ $f(u_i) = 1 \quad i = 2, \dots, n$</p> <p>$L_n(f) = \sum_{i=1}^n f(l_i) \Delta x = (0 + \underbrace{1 + \dots + 1}_{\text{بار } n-1}) \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \quad (0/25)$</p> <p>$U_n(f) = \sum_{i=1}^n f(u_i) \Delta x = (\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\text{بار } n}) \frac{1}{n} = 1 \quad (0/25)$</p> <p>ب) $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(f) = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(f) \Rightarrow$ انتگرال پذیر است. $[0, 1]$ روی f (0/5)</p>	۱۱
۱/۲۵	<p>$\frac{1}{3 - (-1)} \int_{-1}^3 f(x) dx = 5 \quad (0/25)$ f پیوسته است $\Leftarrow f$ انتگرال پذیر است.</p> <p>(0/5) $\Rightarrow \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^1 \cancel{f(x)} dx + \int_1^3 f(x) dx = 5 \times 4 \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx = 20$ $\int_1^3 (a + f(x)) dx = \int_1^3 a dx + \int_1^3 f(x) dx = 17 \Rightarrow 2a + 20 = 17 \Rightarrow a = \frac{-3}{2} \quad (0/25)$</p>	۱۲
۱/۲۵	<p>الف) $\frac{1}{2} \int_2^7 \underbrace{(2x-5)}_u^{99} dx = \frac{1}{2 \dots} (2x-5)^{100} + c \quad (0/25)$</p> <p>ب) $\int ((\tan^2 x + 1) - 2) dx = \tan x - 2x + c \quad (0/25) \quad (0/25)$</p>	۱۳
۱۵	جمع نمره	

همکاران محترم ضمن عرض خسته نباشید ، لطفاً برای پاسخ های درست دیگر به تناسب بارم را منظور فرمایید.