

ردیف	سؤالات	بارم
۱	در چه نقاطی از منحنی به معادله $y^2 + x^2 + 2x - 4y = 4$ مماس موازی محور $x$ هاست.	۰/۷۵
۲	معادله خط قائم بر منحنی تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = 2$ واقع بر آن هرگاه $f^{-1}(x) = x^2 + 2x$ باشد را بدست آورید.	۱/۲۵
۳	متحرکی روی منحنی $xy^2 - y\sqrt{x} = 2$ در حال حرکت است وقتی که متحرک در نقطه $M(4, 1)$ قرار می‌گیرد مؤلفه طول سرعت آن $2 \text{ cm/s}$ کاهش می‌یابد، مؤلفه عرض سرعت آن چه تغییری میکند؟	۱
۴	نقطه بحرانی را تعریف کرده و سپس نقاط بحرانی تابع $y = x - [x]$ را بدست آورید.	۱
۵	ثابت کنید که معادله $x^5 + x^2 + x - 7 = 0$ در $\mathbb{R}$ دقیقاً دارای یک ریشه است.	۱/۵
۶	(قضیه) ثابت کنید که هرگاه تابع $f$ روی بازه $I$ دارای مشتق مثبت باشد آنگاه $f$ روی $I$ صعودی اکید است.	۱
۷	منحنی نمایشی و جدول تغییرات تابع $y = \frac{1}{\sin x}$ را در بازه $[0, 2\pi]$ تنظیم کرده و نمودار آنرا رسم کنید.	۲
۸	مقدار تقریبی $\sqrt[4]{624}$ را با استفاده از دیفرانسیل بدست آورید.	۱
۹	برای بدست آوردن ریشه‌های معادله $x^2 - 2x + 1 = 0$ به روش نیوتن با تقریب اولیه $x_1 = 1$ مقدار $x_2$ را بدست آورید.	۱
۱۰	تقریب اضافی و نقصانی تابع $f(x) = \sin x$ را در بازه $[0, \pi]$ برای $n = 2$ بدست آورید.	۲
۱۱	حاصل حد زیر را بدست آورید.	۱
۱۲	حاصل هر یک از انتگرال‌های زیر را بدست آورید.	۱/۵
	الف) $\int_0^x \tan t \, dt$	
	ب) $\int (\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + 5) dx$	
	ج) $\int x^{-2} \cos \frac{1}{x} dx$	

\* موفق باشید

گروه ریاضی \*

کلید سؤالات : حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۳۰: ۱۴
« دوره پیش‌دانشگاهی » نیمسال دوم سال تحصیلی ۸۲-۱۳۸۱ تاریخ امتحان: ۸۲/۳/۱ مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه		

۰/۷۵	$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x+2}{2y-4} = 0 \quad (\cdot/۲۵) \Rightarrow 2x+2=0 \Rightarrow x=-1 \quad (\cdot/۲۵)$ $\Rightarrow y^2 + 1 - 2 - 4y = 4 \Rightarrow y^2 - 4y - 5 = 0 \Rightarrow y = -1, y = 5 \quad (\cdot/۲۵)$	۱
۱/۲۵	$A _b^a \in f \Rightarrow A' _b^a \in f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(b) = a \quad (\cdot/۲۵)$ $\Rightarrow b^2 + 2b = 4 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow A _1^a \quad (\cdot/۲۵)$ $f'(a) = \frac{1}{(f^{-1})'(b)} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2b^2 + 2} \Big _{b=1} = \frac{1}{6} \quad (\cdot/۲۵)$ $y - y_A = f'(x_A)(x - x_A) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{6}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3} \quad (\cdot/۲۵)$	۲
۱	$xy^2 - y\sqrt{x} = 2, \quad x=4, \quad y=1, \quad x'_t = -2 \text{ cm/s}, \quad y'_t = ?$ $x'_t y^2 + 2y'_t yx - y'_t \sqrt{x} - \frac{x'_t}{2\sqrt{x}} y = 0 \quad (\cdot/۵)$ $-2 \times 1 + 2y'_t \times 1 \times 4 - y'_t \sqrt{4} - \frac{-2}{2\sqrt{4}} \times 1 = 0$ $-2 + 8y'_t - 2y'_t + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 6y'_t = \frac{3}{2} \Rightarrow y'_t = \frac{1}{4} \text{ cm/s} \quad (\cdot/۲۵)$ <p>مؤلفه <math>y</math> متحرک با سرعت <math>1/4 \text{ cm/s}</math> در حال افزایش است. <math>(\cdot/۲۵)</math></p>	۳
۱	<p>تعریف: نقطه <math>c \in D_f</math> را نقطه بحرانی تابع <math>f</math> گوئیم هرگاه <math>f'(c) = 0</math> یا <math>f'(c)</math> موجود نبوده یا <math>(\cdot/۵)</math>.</p> $f(x) = x - [x] \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \text{ندارد} & \text{وجود}, \quad x \in Z \\ 1 & , \quad x \notin Z \end{cases} \quad (\cdot/۲۵)$ <p>بنابراین تابع بی‌شمار نقطه مشتق‌ناپذیری (بحرانی) دارد. <math>(\cdot/۲۵)</math></p>	۴
	<p>تابع <math>f(x) = x^5 + x^2 + x - 7</math> را در <math>\mathbb{R}</math> در نظر می‌گیریم، چون <math>f</math> از درجه فرد است حداقل یک ریشه در <math>\mathbb{R}</math> دارد. ثابت می‌کنیم که آن ریشه منحصر بفرد است فرض (خلف) کنیم چنین نباشد. یعنی</p>	۵

کلید سوالات : حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۱۲:۳۰
« دوره پیش‌دانشگاهی » نیمسال دوم سال تحصیلی ۸۲-۱۳۸۱ تاریخ امتحان: ۸۲/۳/۱ مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه		

۱/۵	$\exists x_1, x_2 \in R; f(x_1) = f(x_2) = 0 \quad (0/5)$ واضح است (بدلیل چندجمله‌ای بودن) $f$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر است. (۰/۲۵) لذا بنا به رول داریم $\exists c \in (x_1, x_2); f'(c) = 0$ $f'(x) = 5x^2 + 2x + 1 \neq 0 \quad (0/5)$ لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است یعنی معادله داده شده دقیقاً دارای یک ریشه است. (۰/۲۵)	
-----	---	--

۱	اثبات قضیه در کتاب. (۱)	۶
---	-------------------------	---

۲	۱) $f(x) = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow Df = [0, 2\pi]$ ۲) $y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ طول نقاط اکسترمم (۰/۵) تابع دارای مجانب افقی و مایل نبوده و حداکثر می‌توان مجانب قائم داشته باشد ۳) (۰/۵) مجانب‌های قائم $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$ ۴) <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>\frac{\pi}{2}</math></td> <td><math>\pi</math></td> <td><math>\frac{3\pi}{2}</math></td> <td><math>2\pi</math></td> </tr> <tr> <td><math>y'</math></td> <td></td> <td>-</td> <td>+</td> <td>+</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td></td> <td><math>\nearrow</math></td> <td><math>\searrow</math></td> <td><math>\nearrow</math></td> <td><math>\searrow</math></td> </tr> </table> <div style="margin-left: 100px;"> <math>\min</math>                      <math>\max</math> </div> ۵)	$x$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	$y'$		-	+	+	-	$y$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	۷
$x$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$															
$y'$		-	+	+	-															
$y$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$															

	$f(x) = \sqrt[4]{x}, \quad x = 625, \quad \Delta x = -1, \quad f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \quad (0/5)$	۸
--	--	---

« دوره پیش دانشگاهی » نیمسال دوم سال تحصیلی ۸۲-۱۳۸۱ تاریخ امتحان: ۸۲/۳/۱ مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه

۱	$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x)\Delta x \quad (۰/۲۵)$ $f(۶۲۴) \cong f(۶۲۵) + f'(۶۲۵) \times (-۱)$ $\sqrt{۶۲۴} \cong ۵ + \frac{۱}{۵ \times ۱۲۵} (-۱)$ $\sqrt{۶۲۴} \cong ۵ - \frac{۱}{۶۲۵} \quad (۰/۲۵)$													
۱	$f(x) = x^2 - ۳x + ۱, \quad x_1 = ۱, \quad f'(x) = ۲x - ۳ \quad (۰/۲۵)$ $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = ۱ - \frac{f(۱)}{f'(۱)} = ۱ - \frac{-۱}{-۱} = ۰ \quad (۰/۵)$ $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = ۰ - \frac{f(۰)}{f'(۰)} = -\frac{۱}{-۳} = \frac{۱}{۳} \quad (۰/۲۵)$	۹												
۲	$f(x) = \sin x \quad [۰, \pi], \quad n = ۴$ $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi - ۰}{۴} = \frac{\pi}{۴} \quad (۰/۵)$ $f'(x) = \cos x > ۰ \Rightarrow f \text{ صعودی}$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>x_i</math></td> <td style="padding: 5px;">۰</td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{\pi}{۴}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{\pi}{۲}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{۳\pi}{۴}</math></td> <td style="padding: 5px;"><math>\pi</math></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>f(x_i)</math></td> <td style="padding: 5px;">۰</td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{\sqrt{۲}}{۲}</math></td> <td style="padding: 5px;">۱</td> <td style="padding: 5px;"><math>\frac{\sqrt{۲}}{۲}</math></td> <td style="padding: 5px;">۰</td> </tr> </table> $\text{تقریب نقصانی} = \left[ ۰ + \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \right] \times \frac{\pi}{۴} = (\sqrt{۲} + ۱) \frac{\pi}{۴} \quad (۰/۷۵)$ $\text{تقریب اضافی} = \left[ \frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱ + ۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \right] \times \frac{\pi}{۴} = (\sqrt{۲} + ۲) \frac{\pi}{۴} \quad (۰/۷۵)$	$x_i$	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\pi$	$f(x_i)$	۰	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۰	۱۰
$x_i$	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\pi$									
$f(x_i)$	۰	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۰									
	$\lim_{x \rightarrow ۰} \frac{\int_0^x \tan \pi t \, dt}{x^2} = \frac{۰}{۰} \quad \text{مبهم} \quad (۰/۵)$	۱۱												

ساعت شروع: ۱۲:۳۰

رشته: علوم ریاضی

کلید سوالات: حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲

« دوره پیش دانشگاهی » نیمسال دوم سال تحصیلی ۸۲-۱۳۸۱ تاریخ امتحان: ۸۲/۳/۱ مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه

۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \tan \nu t \, dt}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \times \tan 2x}{2x} = \frac{2x}{2x} = 1 \quad (./5)$$

۱/۵

$$\begin{aligned} \text{الف)} \int_0^2 x^2 [x] \, dx &= \int_0^1 x^2 \, dx + \int_1^2 2x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{2x^3}{3} \Big|_1^2 \quad (./25) \\ &= \frac{15}{4} + \frac{135}{4} = \frac{150}{4} \quad (./25) \end{aligned}$$

۱۲

$$\text{ب)} \int (\sqrt{x^2} + \frac{1}{x^2} + 5) \, dx = \int x^{\frac{2}{2}} \, dx + \int x^{-2} \, dx + \int 5 \, dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{-1}}{-1} + 5x + c$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{x^5} - \frac{1}{x} + 5x + c \quad (./5)$$

$$\text{ج)} \int x^{-2} \cos \frac{1}{x} \, dx = \int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \, dx = - \int -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \, dx = -\sin \frac{1}{x} + c \quad (./5)$$