

سؤالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) رشته: علوم ریاضی ساعت شروع: ۱۰ صبح به افق تهران مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دوره‌ی پیش دانشگاهی « ۱۵ نمره ای »
تاریخ امتحان: ۱۰ / ۱۰ / ۱۳۸۶
اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی
دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد خارج از کشور در نیم سال اول سال ۱۳۸۶-۸۷

ردیف	سؤالات	نمره
۱	اگر برای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $0 \leq x < \varepsilon$ ثابت کنید: $x = 0$	۰/۷۵
۲	اگر مجموعه‌ی $\{x x \in \mathbb{R}: 2 < x < 4\}$ یک همسایگی متقارن باشد، مرکز و شعاع همسایگی را بیابید.	۰/۷۵
۳	با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$	۱
۴	ثابت کنید دنباله‌ی $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ غیر یکنوا، کراندار و همگرا است.	۱
۵	همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید و در صورت همگرایی، مجموع سری را حساب کنید. الف) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+2)}$ ب) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2k}$ ج) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$	۲
۶	با استفاده از دنباله‌ها ثابت کنید. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ در نقطه‌ی $x = 0$ حد ندارد.	۱
۷	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x}$ ج) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]-1}{x-1}$	۲
۸	اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & , x > 2 \\ x + 1 & , x = 2 \\ b[x] + 7 & , x < 2 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته باشد، مقادیر a و b را بیابید.	۱/۵
۹	معادله‌ی $x^2 - (m+1)x + 2m - 3 = 0$ در بازه‌ی $[-1, 1]$ حداقل یک ریشه دارد، حدود m را بیابید.	۱
۱۰	معادلات جانب‌های تابع $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 7x + 12}$ را بیابید.	۱
۱۱	مشتق‌پذیری تابع $f(x) = (x-1)[x]$ را در نقطه‌ی $x = 1$ بررسی کنید.	۱/۵
۱۲	اگر $g(x) = x^2 - 1$ و $f'(x) = \sqrt{3x+4}$ و $F = (f \circ g)(x)$ باشد، $F'(1)$ را بیابید.	۱/۵
	« موفق باشید »	۱۵
	جمع نمره	

ساعت شروع: ۱۰ صبح به افق تهران	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح. سوالات امتحان هم‌لنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)
تاریخ امتحان: ۱۳۸۶ / ۱۰ / ۱۰	دوره‌ی پیش دانشگاهی « ۱۵ نمره‌ای »	
اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی	دانش آموزان و داوطلبان آزاد خارج از کشور در نیم سال اول سال تحصیلی ۸۷-۱۳۸۶	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱	برهان خلت: اگر $x \neq 0$ پس $x < 0$ (خلاف فرض) یا $x > 0$ (۲۵) قرار می‌دهیم $\frac{x}{2} = \epsilon > 0$ پس طبق فرض $x < \frac{x}{2}$ یعنی $2x < x$ پس $2 < 1$ (۲۵) که تناقض است پس فرض خلف باطل است یعنی $x = 0$ (۲۵)	۰.۷۵
۲	$2 < x < 4 \rightarrow 2-3 < x-3 < 4-3 \rightarrow -1 < x-3 < 1$ (۲۵) $ x-3 < 1$ $\frac{2+4}{2} = 3$ (۲۵) ۳: کرزهایین (۲۵) ۱: شعاع‌هایین	۰.۷۵
۳	(۲۵) $\forall \epsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow \left \frac{2n+1}{n-1} - \frac{3}{2} \right < \epsilon$ ۱ $\left \frac{2n+1}{n-1} - \frac{3}{2} \right < \epsilon \rightarrow \left \frac{4n+2-3n+3}{2(n-1)} \right < \epsilon \rightarrow \left \frac{n+5}{2(n-1)} \right < \epsilon \rightarrow \frac{n-2}{2} > \frac{1}{\epsilon}$ (۲۵) $\frac{n-2}{2} > \frac{1}{\epsilon} \rightarrow n-2 > \frac{2}{\epsilon} \rightarrow n > \frac{2}{\epsilon} + 2$ (۲۵) با در نظر گرفتن $M, \left[\frac{2}{\epsilon} + 2 \right] + 1$ حکم برقرار است (۲۵)	۱
۴	با توجه به جدت دنباله: $\dots, -\frac{1}{k}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \dots$ دنباله یکنوا نیست (۲۵) ۱ $\frac{(-1)^n}{n+1} = \begin{cases} \frac{-1}{n+1} & \text{فرد } n \\ \frac{1}{n+1} & \text{زوج } n \end{cases}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$ (۲۵) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ دنباله همگراست بنابراین کراندار است (۲۵)	۱
۵	(۲۵) $S_n = \frac{1}{3-1} - \frac{1}{3^{n+2}}$ ۲ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3^k-1)(3^k+2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k-1} - \frac{1}{3^k+2}$ (۲۵) $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$ (۲۵) سری‌های $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{2^k} \rightarrow a_k = \frac{2^{k-1}}{2^k} \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1 \neq 0$ (۲۵) ح. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3}$ (۲۵) $a = \frac{2}{3} \rightarrow S = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 2$ (۲۵)	۲

ساعت شروع: ۱۰ صبح به افق تهران	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح سوالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)
تاریخ امتحان: ۱۳۸۶ / ۱۰ / ۱۰	دوره‌ی پیش دانشگاهی « ۱۵ نمره ای »	
اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی	دانش آموزان و داوطلبان آزاد خارج از کشور در نیم سال اول سال تحصیلی ۱۳۸۶-۸۷	

نمره	راهنمای تصحیح	ردیف
------	---------------	------

۱	$a_n = \frac{1}{2\pi n}, b_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{3}} \quad (۱,۲۵)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0, b_n \neq 0$ $f(a_n) = \sin \frac{1}{2\pi n} = \sin(2\pi n) = 0 \quad (۲,۲۵)$ $f(b_n) = \sin \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{3}} = \sin(2\pi n + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۲,۲۵)$ <p style="text-align: center;">وجود ندارد $\lim f(x)$ (۲,۲۵) $\because \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \frac{\sqrt{3}}{2}$</p>	۶
---	---	---

۲	<p style="text-align: right;">نقطه</p> $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad (۲,۲۵)$ $ \cos \frac{1}{x} < 1 \quad (\text{کراندار}) \quad (۲,۲۵)$ $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0 \quad (۲,۲۵)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{(۲,۲۵)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2 \quad (۲,۲۵)$ $\text{ح.} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]-1}{x-1} = \frac{[1^+]-1}{1^+-1} = \frac{1-1}{0^+} = \frac{0}{0^+} = 0 \quad (۲,۲۵)$	۷
---	---	---

۱۵	$\lim_{x \rightarrow r^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow r^-} f(x) = f(r) \quad (۲,۲۵)$ $\lim_{x \rightarrow r^+} x + a = r + a \quad (۲,۲۵)$ $\lim_{x \rightarrow r^-} b[x] + v = b[r^-] + v = b + v \quad (۲,۲۵)$ $f(r) = r = r + a = b + v \Rightarrow a = -1, b = -r \quad (۲,۲۵)$ <p style="text-align: right;">مرتب‌بندی:</p>	۸
----	---	---

۱	$f(-1) \times f(0) < 0 \quad (۲,۲۵)$ $f(-1) = 1 + m + 1 + 2m - 3 = 3m - 1 \quad (۲,۲۵)$ $f(0) = 1 - m - 1 + 2m - 3 = m - 3 \quad (۲,۲۵)$ $(3m-1)(m-3) < 0 \quad m = \frac{1}{3}, m = 3$ $\frac{m}{1} + \frac{1}{3} + \frac{3}{1} \quad \frac{1}{3} < m < 3 \quad (۲,۲۵)$	۹
---	--	---

(۲)
بصورت رسم شده (۳)

ساعت شروع: ۱۰ صبح به افق تهران	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح سوالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)
تاریخ امتحان: ۱۳۸۶ / ۱۰ / ۱۰	دوره‌ی پیش دانشگاهی « ۱۵ نمره ای »	
اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی	دانش آموزان و داوطلبان آزاد خارج از کشور در نیم سال اول سال تحصیلی ۸۷-۱۳۸۶	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۱	<p>(۱۵) $x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3, x = 4$ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \infty$</p> <p>(۲۵) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 7x + 12} = 1 \rightarrow y = 1$</p> <p>بند هفتی تکرار</p>	۱۰
---	---	----

۱۵	<p>$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$</p> <p>$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)[x] - 0}{x-1} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1 & (۱۵) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0 & (۲۵) \end{cases}$</p> <p>$f'(1) = 1 \neq f'(1) = 0$ در $x=1$ مشتق نپذیرفت</p>	۱۱
----	---	----

۷۵	<p>$g(x) = x^2 - 1 \rightarrow g'(x) = 2x$ (۱۵)</p> <p>$F = (f \circ g)(x) \rightarrow F' = g'(x) \cdot f'(g(x))$ (۲۵)</p> <p>$f'(x) = \sqrt{3x+4} \rightarrow f'(g(x)) = \sqrt{3(x^2-1)+4} = \sqrt{3x^2+1}$ (۱۵)</p> <p>$F' = 2x \cdot \sqrt{3x^2+1}$ (۲۵)</p> <p>$F'(1) = 2(1) \cdot \sqrt{3(1)^2+1} = 4$ (۱۵)</p>	۱۲
----	---	----

جمع ۱۵	<p>کلیه محرم خسته نباشید</p>	
--------	------------------------------	--