چرا باید هندسه به مدرسه بازگردد!

امیدعلی کرمزاده

دانشگاه اهواز

اجازه دهید قبل از شروع سخنرانی‌ام بر خلاف معمول سخنرانی‌های دیگر، برای شما حضار محترم یک سؤال ابتدایی هندسه که مربوط به اولین درس هندسه در دوره راهنمایی است، مطرح کنم و با عرض معذرت بگذارید این ادعا را نیز داشته باشم که برخلاف بیان مسئله، حل آن ساده نخواهد بود.
این موضوع، خود گواهی خواهد بود بر این‌که ما چگونه به سؤال‌های اساسی و طبیعی در مور مثلث بی‌توجه بوده‌ایم.

سؤال: اگر یک مثلث با اضلاع دلخواه a,b,c داشته باشیم، آیا مثلثی با اضلاع $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ نیز خواهیم داشت؟

باید توجه داشت که اگر جواب سؤال بالا مثبت باشد، جواب کامل داده شده است ولی اگر جواب منفی باشد که در این حالت چنین است (زیرا مثلث‌های متساوی‌الساقین بلندقد مثال نقض هستند) با یک مثال نقض، ما فقط جواب سؤال‌کننده را داده‌ایم ولی جواب سؤال ریاضی داده نشده است زیرا در حقیقت باید تمام مثلث‌هایی را مشخص کنیم که برای آن‌ها جواب مثبت (منفی) است.
اگرچه ظاهراً چنین چیزی از ما خواسته نشده ولی مسئله‌ی اصلی این است. بعضی‌ها هم فکر می‌کنند با گفتن این‌که "کافی است مجموع وارون اضلاع بزرگتر از وارون ضلع کوچکتر، بزرگتر باشد"، مسئله را

حل کرده‌اند در صورتی که چنین نیست، زیرا ما باید تعیین کنیم که چه موقع این اتفاق می‌افتد.
ما از کودکی به این موضوع عادت کرده‌ایم که یک سؤال این‌چنینی از خود می‌پرسیم و با یک مثال نقض فکر می‌کنیم به مسئله جواب داده‌ایم و بعضی اوقات آن را به یک مقاله نیز تبدیل می‌کنیم.

بعد از این‌که ژان پل دیودونه در سال ۱۹۵۸ شعار معروف

«*لعنت بر اقلیدس و مرگ بر مثلث*»

را سر داد، متأسفانه ریاضی‌دانان زیادی این شعار را تکرار کردند. این شعار باعث شد که در بیشتر کشورها از جمله ایران، از حجم تدریس مطالب هندسی در دبیرستان به‌طور چشم‌گیری کاسته شود. تنها کشورهایی نظیر شوروی سابق، ایتالیا هلند و چند کشور دیگر تسلیم این شعار نشدند.

همان‌طور که می‌دانید بورباکی (Bourbaki) یک گروه از ریاضی‌دانان فرانسوی بودند که ظاهراً اعضای آن کاملاً مشخص نبودند و برآن بودند که مسیر ریاضیات را به‌دلخواه و ابتکار خود تعیین کنند که در این مسیر نیز تا اندازه‌ای موفق شدند. آنها در نوشته‌ها و کتاب‌های خود از بکار بردن شکل و نمودار خودداری می‌کردند و این یکی از دلایلی بود که با هندسه اقلیدسی به‌شکل کلاسیک آن مخالف بودند.

معتقد بودند که اَشکال و نمودارها، در هندسه ممکن است ما را به اثبات اشتباه هدایت کنند و در یک کلام، روش‌های جبرخطی و هندسه تحلیلی را مناسب‌تر می‌دانستند (توجه داشته باشید که امروزه با وجود نرم‌افزارهای ریاضی دیگر اَشکال هندسی نه تنها مشکل‌زا نیستند بلکه خود انگیزه‌ی خوبی برای مطالعه هندسه هستند).

آمریکا که در آن زمان از رقیب خود یعنی روسیه در زمینه‌ی مسافرت به فضا عقب افتاده بود، به دنبال تغییراتی در برنامه‌ی درسی متوسطه‌ی خود بود و از این شعار استقبال کرد. در ایران تدریس هندسه، از اقلیدسی، هندسه فضایی،

هندسه مخروطات، هندسه ترسیمی و رقومی به یک حداقل ناچیز تقلیل پیدا کرد.

متأسفانه دیده شده که وقتی برنامه‌های درسی ریاضی، فقط به ریاضی‌دانان سپرده شود علائق شخصی آن‌ها در تصمیم‌گیری‌ها تأثیر مهمی دارد.

به‌یاد دارم در اوایل انقلاب که همکاران قصد تغییر برنامه‌های دوره‌ی کارشناسی ریاضی را داشتند، چون می‌خواستند درس‌های مورد علاقه‌ی خود را در این برنامه بگنجانند و به توافق نمی‌رسیدند، تصمیم گرفتند به‌جای ۱۲۰ واحد درسی مثلاً چیزی نزدیک به ۲۵۰-۲۴۰ واحد و بعداً ۱۸۰ واحد و در آخر، همین ۱۴۰-۱۳۰ واحدی را که الآن داریم، بپذیرند.

به‌عبارت دیگر، هر فردی که ریاضی‌دان خوبی باشد نمی‌تواند ادعا کند که برنامه‌ریز خوبی هم برای دوره ریاضی است.

متأسفانه چون در آن زمان گروه بورباکی همه از ریاضی‌دانان طراز اول جهان بودند، هر کسی جرأت ابراز مخالفت نداشت.

من نمی‌خواهم در این‌جا در پی اثبات درست یا نادرست بودن این شعار برآیم، ولی چون خیلی از افراد متوجه شده‌اند که دوباره باید به هندسه‌ی اقلیدسی در دبیرستان توجه بیشتری شود، خوشحالم.

فقط به چند نکته پیرامون این شعار اشاره می‌کنم و به بحث خود ادامه می‌دهم. تا قبل از طرح این شعار، توجه کنیم که چه ریاضی‌دانان برجسته‌ای از جمله خود بورباکی‌ها در دنیا بوجود آمدند که همگی هندسه را فراوان در دبیرستان مطالعه کرده بودند و مقایسه کنیم با ریاضی‌دانان زمان غیبت هندسه.

قصد ندارم که بگویم هندسه بهتر است یا جبر. به‌قول سر مایکل آتیا تفاوت این دو مانند تفاوت انسان‌ها در مرد و زن بودن است. مهم انسان بودن این دو است. هندسه و جبر هر دو ریاضی هستند و هردو هم خیلی خوب هستند و خیلی به هم‌دیگر نیز وابسته‌اند و هیچ‌کدام نمی‌تواند به تنهایی جای دیگری را بگیرد. من شخصاً وقتی الآن به کارهای خودم نگاه می‌کنم بعد به تجربه‌های بچگی‌ام در دبیرستان بر می‌گردم، می‌بینم همان نوع کارها و تفکری را که در هندسه داشتم الآن به‌کار می‌برم تا مثلاً در جبر یا توپولوژی کار کنم.

به‌عبارت دیگر برای این‌که بتوان در هندسه دبیرستانی تسلط داشت باید از قضایا و کارهای دیگران با اطلاع بود و بتوان این قضایا و نتایج را درست به‌کار برد تا بتوان در این قسمت کار و تحقیق کرد. درست مانند یک ریاضی‌دان جاافتاده و مجرب که در هر قسمت ریاضی می‌خواهد کار کند.

به دیگر سخن هندسه تنها یک شاخه از ریاضیات در دبیرستان نیست که خوب باشد یا بد باشد، کاربرد داشته باشد یا نداشته باشد، بلکه بدون شک تفکر ریاضی را که لازمه هر کسی است که می‌خواهد ریاضی را دنبال کند به فرد می‌آموزد. به‌عبارت دیگر کاربرد هندسه در خود ریاضیات اساسی است.

خوشبختانه در این سال‌های غفلت از هندسه در مدرسه، شخصی مانند کاکستر (Coxter)، ریاضی‌دان انگلیسی که ۹۶ سال عمر کرد وتمام سال‌های کاری خود را (به‌جز ۲ سال در پرینستون) در دانشگاه تورنتو کانادا گذرانید، به تنهایی هندسه را زنده نگه‌داشت و تحقیقات او در هندسه که ادامه‌ی کارهایش در هندسه‌ی اقلیدسی بود، باعث شد، گروه‌های کاکستر، در نظریه

ابرریسمان و میکروبیولوژی کاربرد اساسی پیدا کند. خیلی‌ها از کاکستر به‌عنوان نجات دهنده هندسه نام می‌برند.

به‌هر حال دانش‌آموز علاقمند به کار کردن در هندسه در حقیقت همان کاری را می‌کند که یک ریاضی‌دان در تحقیقات خود انجام می‌دهد.

اعتقاد دارم که دوباره باید قسمت‌هایی از هندسه به شکل درس اختیاری یا پروژه تحقیقاتی در دبیرستان برای دانش‌آموزان علاقمند در برنامه‌ی آموزشی گنجانده شود.

اجازه دهید از این شعار بورباکی و شعار دیگری یک نتیجه خوب بگیریم:

۱) افلاطون : هر کس هندسه نمی‌داند وارد نشود

۲) بورباکی : مرگ بر هندسه اقلیدسی

هیچ‌کدام از این دو شعار آزادی اندیشه و فکر کردن و تصمیم گرفتن را از انسان‌ها نگرفت. به‌عبارت دیگر هیچ‌کس مجبور به پذیرش و عمل به این شعارها نشد. زیرا هیچ‌کدام از این شعارها تبدیل به اعتقاد کورکورانه نشد. ریاضی به ما اجازه نمی‌دهد اعتقادات خود را به دیگران تحمیل کنیم. متأسفانه وقتی یک شعار، تبدیل به اعتقادی غیر منطقی شود حتی در دنیای ریاضی هم مسئله‌آفرین می‌شود(نه مسئله ریاضی). مثلاً معروف است که وقتی یکی از شاگردان فیثاغورث به این نتیجه رسید که $\sqrt{2}$ گویا نیست و آن را با فیثاغورث

درمیان گذاشت، فیثاغورثیان نتوانستند او را تحمل کنند و دستور کشتن اورا با خفه کردن در آب دادند.

بهتر است از این شعارها دست برداریم و به کارهای واقعی بپردازیم.

قبلاً هم در کتاب «نتایج باورنکردنی در ریاضیات» اشاره کرده‌ام که هیچ موجودی در ریاضیات به‌اندازه‌ی مثلث به ریاضی خدمت نکرده است. وقتی که مثلثی را در نظر می‌گیرید و با رسم چند خط یا در نظر گرفتن چند نقطه به نتایج جالبی می‌رسید، انسان شگفت‌زده می‌شود و این کار می‌تواند بدون توقف ادامه یابد. به‌عبارت دیگر مثلث یک ماشین جادویی تولید نتایج غیر بدیهی و زیباست. مثلاً آلبرت اینشتین در زندگی‌نامه‌ی خود می‌نویسد وقتی برای اولین بار دیدم که "سه ارتفاع یک مثلث متقاربند"، شگفت‌زده شدم و تأثیر عمیقی بر من گذاشت. این‌که انسان با کمک هندسه به این درجه از اطمینان و یقین و تفکر عمیق مجرد دست‌یابد.

به‌هر حال گرچه این شعار بورباکی باعث شد ریاضی‌دانان برجسته کمتر سراغ هندسه بروند ولی بعضی‌ها را هم وادار به ارائه‌ی اثبات‌های خوب جبری از بعضی از نتایج قدیمی هندسه نمود. مثلاً اخیراً آلن کونز(Alain Connes) ریاضی‌دان برجسته‌ی فرانسوی که برنده‌ی جایزه‌ی فیلدز است و هندسه‌ی ناجابجایی را هم معرفی کرده، یک اثبات جبری خوب از قضیه مورلی ارائه کرده است. جان کانوی(John Conway) که ریاضی‌دان برجسته‌ی دیگری است که در پرینستون آمریکاست، اثبات زیبایی برای این قضیه داده است و اثبات‌های دیگری نیز از ریاضی‌دانان خوب وجود دارد.

آلن کونز در اثباتش به این نکته اشاره می‌کند که قضیه‌ی مورلی را قبلاً ندیده بوده و آن راکسی به او معرفی کرده است. قضیه‌ی مورلی در سال ۱۸۹۹ توسط مورلی ارائه شد و آلن کونز بالای شصت سال سن دارد.

همان‌طور که درفشه در ترجمه‌ی اثبات آلن کونز در مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی اشاره کرده است، جای تعجب است که ریاضی‌دانی نظیر آلن کونز، این قضیه، که معروفیتش کمتر از قضیه‌ی اقلیدس نیست را ندیده است. به‌این قضیه، معجزه مورلی نیز می‌گویند.

اینجاست که به اثرات مخرب شعار بورباکی پی‌می‌بریم.

قبل از این‌که سراغ هندسه برویم، لازم است گفته شود که نتایج هندسی مانند بعضی از نتایج ریاضی مصنوعی نیستند.

به این مثال توجه کنید:

فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیر تهی و R یک دسته از زیرمجموعه‌های محض در X باشد و عناصر R را قرمز، و متمم عناصر R را آبی می‌نامیم.

X را یک مجموعه‌ی پرسپولیسی گوییم هرگاه هر تعدادی از عناصر R، مجموعه‌ی X را بپوشانند آن‌گاه تعداد متناهی از آن‌ها نیز X را بپوشانند. بدیهی است که هرگاه $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_n \subseteq \cdots$ یک زنجیر در R باشد آن‌گاه خواهیم داشت:

$$X \neq \bigcup_{1}^{\infty} G_n$$

در نتیجه اگر $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$ یک زنجیر از زیرمجموعه‌های آبی باشد آن‌گاه

$$\bigcap_{1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$$

یعنی همان خاصیت F.I.P در فضای فشرده، نتیجه‌ای که همان تعریف فضای فشرده است.

متأسفانه امروزه از این نتایج در ژورنال‌ها زیاد است. یعنی یک تعریف را به یک زبان دیگر نوشتن، و هر چه شخص زبان‌بازتر باشد می‌تواند این تعریف را به زبانهای مختلف بنویسد و ظاهراً به نتیجه‌ای دست یابد که همان تعریف است ولی چندین مرحله از آن دور است و دیگران آن را سریع نمی‌بینند.

در ریاضی اگر قرار است شعاری داده شود باید شعار

« مرگ بر این‌گونه نتایج »

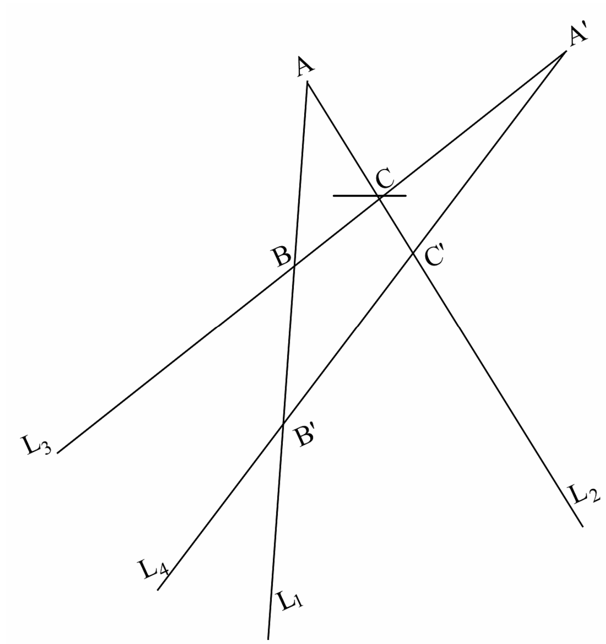
باشد.

حال به سراغ مثلث، این موجود جادویی می‌رویم.

چندین سال پیش مسئله‌ای در مسابقات امپیاد کشور به شکل زیر طرح کردم:

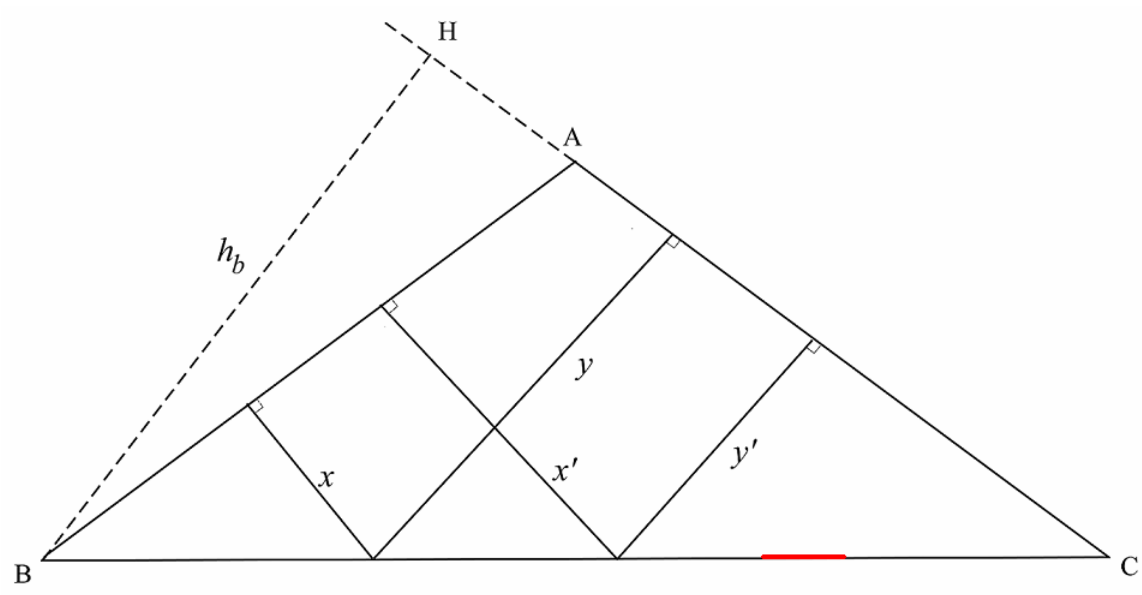
هر خطی که قرینه‌های آن نسبت به سه ضلع یک مثلث متقارب باشند، خط وفادار نامیده می‌شود. ثابت کنید یک خط، وفادار است اگر و تنها اگر از محل تلاقی ارتفاعات مثلث بگذرد و جالب است که نقطه‌ی تقارب سه قرینه هم همواره روی دایره محیطی مثلث قرار دارد.

چهار خط دلخواه



در چهار مثلث بالا، چهار محل تلاقی ارتفاعات بر یک خط قرار دارند.
چهار دایره‌ی محیطی متقاربند.

پایا Invariant



$$AB = AC$$

$$x + y = x' + y' = \cdots = h_b$$

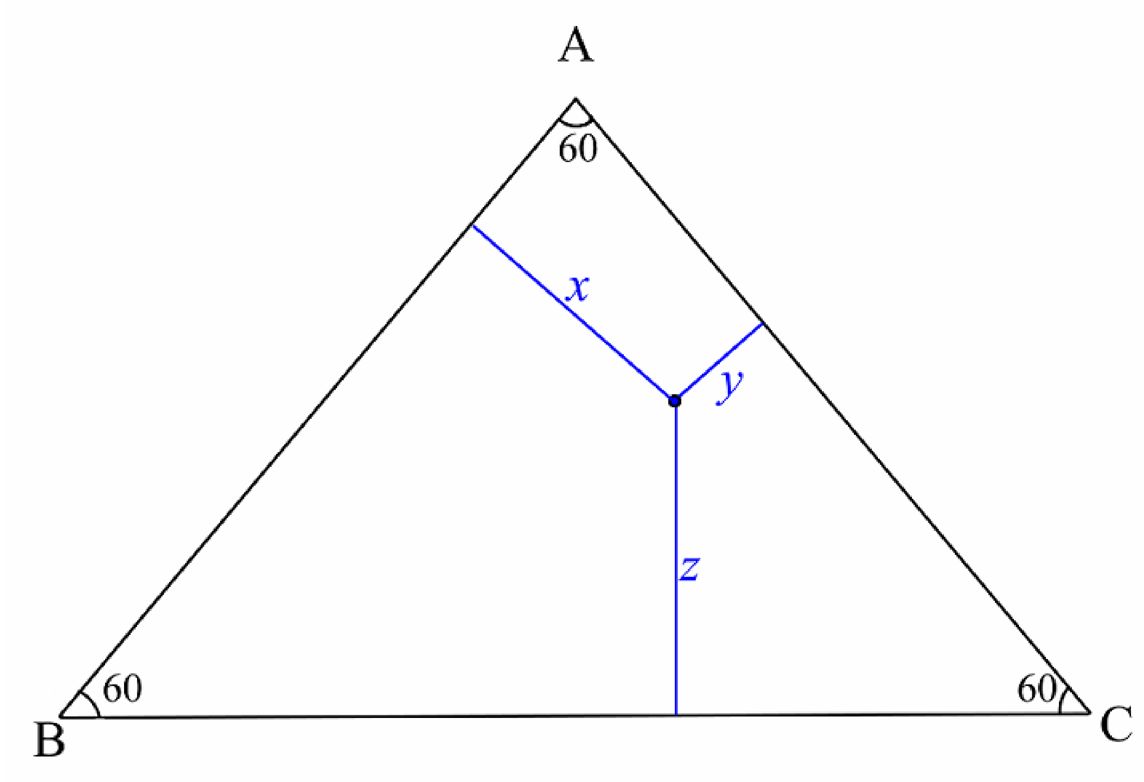
مجموع فواصل نقاط روی قاعده BC از دو ساق مقداری ثابت است که برابر با همان ارتفاع وارد بر ساق می‌باشد.

عکس این مطلب نیز درست است.

وقتی که نقطه در امتداد ضلع BC باشد تفاضل فواصل مقداری ثابت است.

توجه: برای حالت برعکس کافی‌است فواصل نقاط روی یک پاره‌خط با طول هر قدر کوچک روی BC از دو ساق ثابت باشد.

نتیجه



ارتفاع = **ثابت** $= x+y+z$

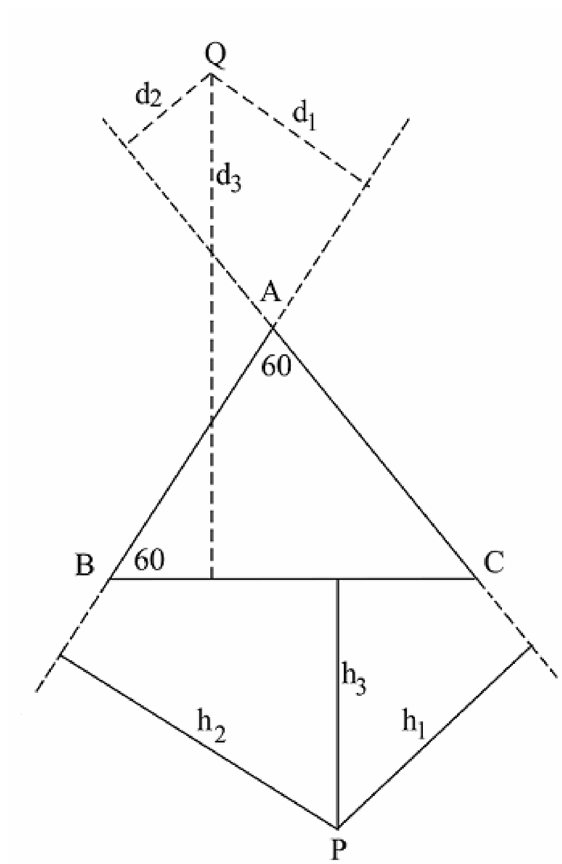
عکس این مطلب نیز درست است.

و به‌طور کلی می‌توان قضیه‌ی زیر را بیان نمود.

قضیه: مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر مجموع جبری فواصل تمام نقاط صفحه از اضلاع آن مقداری ثابت باشد.

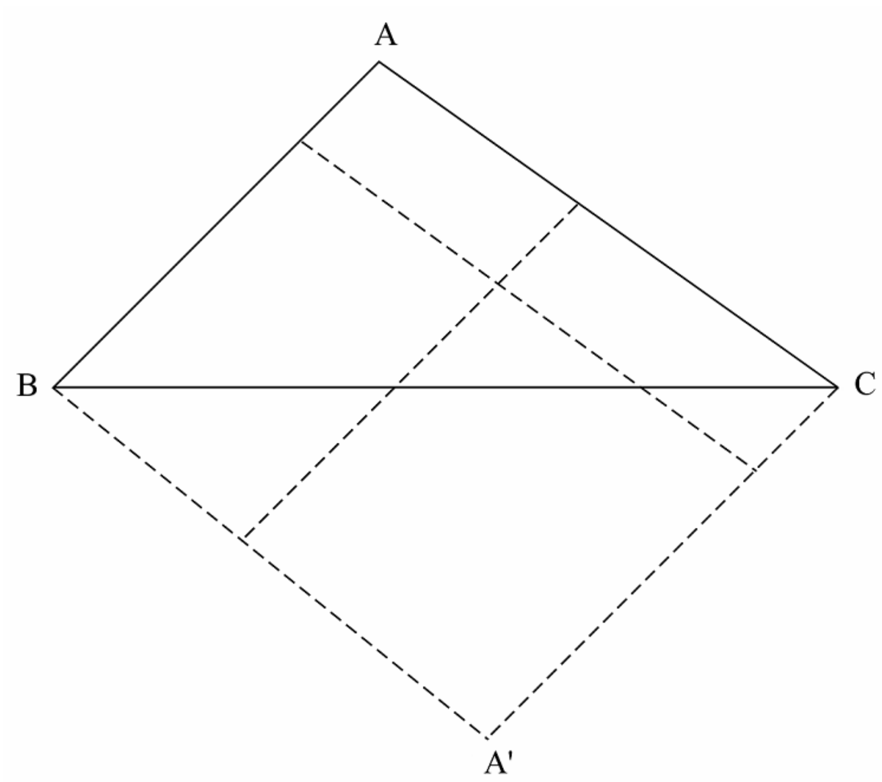
توجه: کافی‌است نقاط درون یک همسایگی و هرقدر کوچک دارای مجموع فواصل ثابت از اضلاع مثلث باشند.

ارتفاع مثلث $= d_3 - d_1 - d_2$

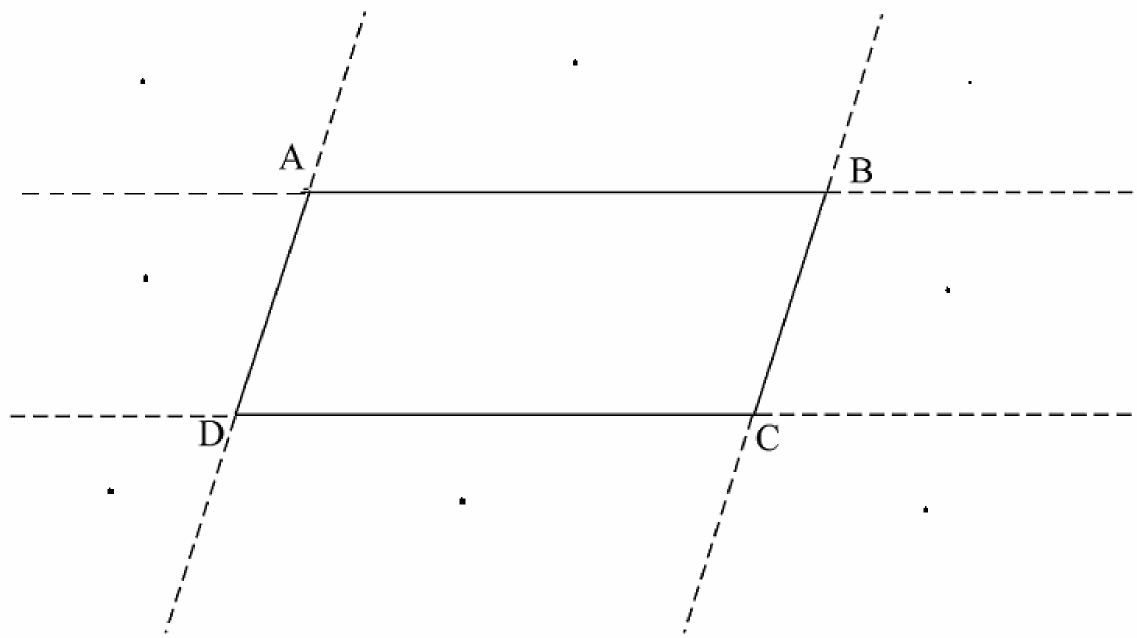


ارتفاع مثلث $= h_3 - h_1 - h_2$

نتایج قبل را چگونه به یک مثلث کلی می‌توان تعمیم داد؟



قضیه(جدید): ***یک چهار ضلعی گوژ متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر مجموع فواصل تمام نقاط درون آن از چهار ضلع مقداری ثابت باشد. یا به‌طور کلی مجموع جبری فواصل تمام نقاط صفحه از اضلاع آن مقداری ثابت باشد.***


A
B
C
D

کاربرد

یک رابطه جالب:

اگر معادلات $a_i x + b_i y + c_i = 0,\ i = 1,2,3$ **معادلات سه ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشند آن‌گاه معادله صفحه مختصات به‌شکل زیر است**

$$\sum_{i=1}^{3} \pm \frac{|a_i x + b_i y + c_i|}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} = h \qquad !!!!!!!$$

h **ارتفاع مثلث است.**

توجه: حتماً اولین بار است که علامت $\pm$ را قبل از قدر مطلق می‌بینید و در این‌جا واقعاً لازم است.

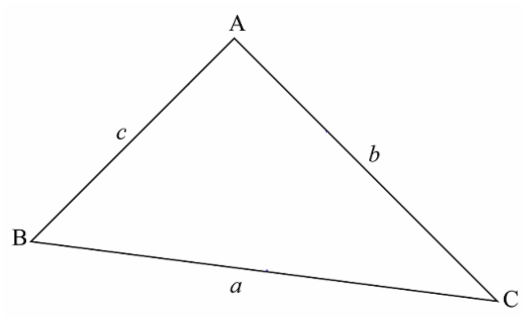
نشان دهید دستگاه زیر با فرض $a+b+c+d=\frac{r\sqrt{6}}{3}\ ,\ r>0$ دارای جواب است

$$\begin{cases}\sqrt{x-a^2}+\sqrt{y-a^2}+\sqrt{z-a^2}\le 2r\\ \sqrt{x-b^2}+\sqrt{z-b^2}+\sqrt{t-b^2}\le 2r\\ \sqrt{y-c^2}+\sqrt{z-c^2}+\sqrt{t-c^2}\le 2r\\ \sqrt{x-d^2}+\sqrt{y-d^2}+\sqrt{t-d^2}\le 2r\end{cases}$$

هرکس غیر از راه حلی که به‌زودی ارائه خواهم کرد راه حل دیگری بیابد می‌تواند خود را برای انجام کارهای بزرگتر آماده ببیند.

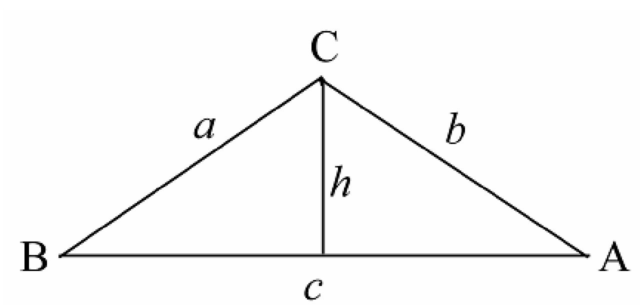
حال به سراغ حل دستگاه نامساوی‌ها می‌رویم

اول به‌یاد می‌آوریم در هر مثلث $a+b>c$.



چقدر $a+b$ **می‌تواند بزرگتر از** c **باشد؟**

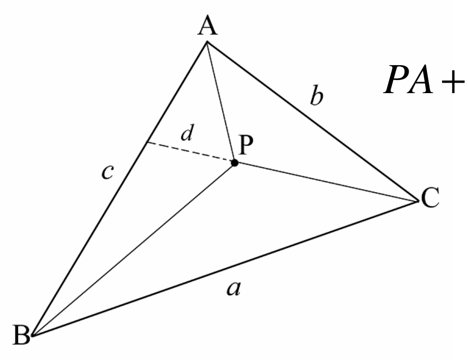
قضیه: ***اگر*** $\angle C \geq 90$ ***آن‌گاه*** $a+b \leq c+h$ ***که در آن*** h ***ارتفاع وارد بر ضلع*** $\overline{AB}$ ***است.***



برای اثبات به مقاله‌ی "چگونه قضیه بسازیم" در کتاب "تکمله کتاب نتایج باورنکردنی در ریاضیات" از انتشارات دانشگاه چمران (۱۳۸۴) مراجعه شود.

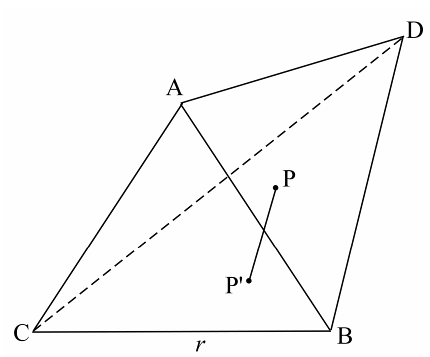
نتیجه: ***اگر*** $a \geq c \geq b$ **و** P ***نقطه‌ای درون مثلث باشد آن‌گاه***

$$PA+PB+PC \leq a+c$$



اثبات: فرض کنید $\angle BPA \geq 90$ **آن‌گاه** $PA+PB<c+d$
در نتیجه $PA+PB+PC \leq c+a$

همچنین به‌یاد می‌آوریم که در چهاروجهی منتظم مانند مثلث متساوی‌الاضلاع و با همان سادگی اثبات می‌توان نشان داد که مجموع فواصل هر نقطه درون یک چهاروجهی منتظم از چهار وجه مقداری است ثابت برابر با ارتفاع چهار وجهی.



حال یک چهاروجهی منتظم به ضلع r را در نظر می‌گیریم.
ارتفاع آن برابر با $r\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ خواهد شد. نقطه‌ی P را درون چهاروجهی منتظم طوری می‌گیریم که فاصله‌ی آن از وجه ABC برابر با a، از وجه ACD برابر با b، از وجه ADB برابر c در نتیجه فاصله‌ی آن از وجه DCB خودبه‌خود برابر d خواهد شد.
حال اگر

$$PA=\sqrt{x}\ ,\ PB=\sqrt{y}\ ,\ PC=\sqrt{z}\ ,\ PD=\sqrt{t}$$

آن‌گاه

$$P'A=\sqrt{x-a^2}\ \ , P'B=\sqrt{y-a^2}\ , P'C=\sqrt{z-a^2}$$

در نتیجه

$$\begin{cases}\sqrt{x-a^2}+\sqrt{y-a^2}+\sqrt{z-a^2}\le 2r\\ \sqrt{x-b^2}+\sqrt{z-b^2}+\sqrt{t-b^2}\le 2r\\ \sqrt{y-c^2}+\sqrt{z-c^2}+\sqrt{t-c^2}\le 2r\\ \sqrt{x-d^2}+\sqrt{y-d^2}+\sqrt{t-d^2}\le 2r\end{cases}$$

یعنی $x=PA^2\ ,\ y=PB^2\ ,\ z=PC^2\ ,\ t=PD^2$ جواب دستگاه است.

توجه

در این‌جا اهمیت روش هندسی را در حل این دستگاه مشاهده کردیم اما ذکر یک نکته به‌خصوص برای معلمین ریاضی لازم است. توجه می‌کنیم که در نامساوی‌های قبل می‌توان به‌جای $2r$ هر عدد بزرگتر از $2r$ را قرار داد ولی هرگز نباید این‌کار را انجام داد، زیرا مقادیر ثابت در نامساوی‌ها باید به ما ایده‌ای برای اثبات نامساوی بدهند و این‌گونه کارها در حقیقت، ریاضی را به معما تبدیل می‌کنند و باعث فرار افراد از ریاضی می‌شوند. مثلاً به دستگاه زیر نگاه کنید

$$\begin{cases} \sqrt{x-a^2}+\sqrt{y-a^2}+\sqrt{z-a^2}\le r^2+1 \\ \sqrt{x-b^2}+\sqrt{z-b^2}+\sqrt{t-b^2}\le 2r+\dfrac{1}{1000} \\ \sqrt{y-c^2}+\sqrt{z-c^2}+\sqrt{t-c^2}\le 2r+\dfrac{1}{[r]!} \\ \sqrt{x-d^2}+\sqrt{y-d^2}+\sqrt{t-d^2}\le r(\sqrt[3]{r}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{r}}) \end{cases}$$

متأسفانه منابع ریاضی پر است از نامساوی‌های مصنوعی از این‌قبیل.

گهگاهی وقتی به قدرت مثلث فکر می‌کنم خستگی‌ام در کار کردن در ریاضی ازبین می‌رود. این سه پاره‌خط دارای چه قدرت جادویی هستند که تمام خطوط و دوایر و نقاط ...... که با این موجود سر و کار دارند خود به شکلی باهم رابطه‌ای زیبا دارند. مثلاً در هر مثلث ABC اگر H محل تلاقی ارتفاعات باشد آن‌گاه $AH^2 + a^2 = 4R^2$ یا محل تلاقی ارتفاعات، میانه‌ها، عمودمنصف‌ها روی یک خط هستند (خط اویلر) یا نیمساز رأس A نیمساز بین ارتفاع رأس A وخطی که رأس A را به مرکز دایره‌ی محیطی وصل می‌کند نیز می‌باشد یا وجود دایره‌ی نه نقطه در هر مثلث یا $R \geq 2r$ (و از آن‌جا در فضا $R \geq 3r$ و یا خط سیمسون در مثلث، یا این‌که در هر مثلث حاده‌الزاویه مثلثی که از پای ارتفاعات به‌دست می‌آید دارای کمترین محیط بین مثلث-های محاط در مثلث اصلی است، یا .... و به‌طور کلی هر قضیه‌ای درباره مثلث یک شگفتی است مثلاً $a^2 + b^2 = c^2$.

توجه کنید که تقریباً در همه‌ی این قضایا ما نمی‌گوییم که مثلاً "فرض کنیم ABC مثلثی است با این خاصیت آن‌گاه داریم ...."

یعنی بدون هیچ شرطی روی مثلث قضیه‌ای نظیر قضیه‌ی جادویی مورلی یا قضیه‌ای نظیر قضیه‌ی سوا یا قضیه‌ی منلائوس را داریم.

آیا اضلاع یک مثلث طلایی هستند یا این‌که یک کارخانه‌ی تولید ابدی ریاضی است که همه افراد به‌طور عادلانه می‌توانند در این تولید بدون پرداخت هیچ هزینه‌ای جز نشان دادن علاقه، سهیم باشند (ریاضی‌دان‌ها با داشتن مثلث می‌توانند در زمان بازنشستگی از سهام واقعی عدالت آن برخوردار باشند)

آیا می‌توانید تصور کنید که برای یک حلقه‌ی کلی R بتوان چیزی بیشتر از آن‌که R یک حلقه است یا برای یک فضای توپولوژی X به‌جز این‌که X یک فضای توپولوژی است چیزی بیشتر گفت؟ یا حتی وقتی که موجودات خاصی نظیر $C(X)$، $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$، فضای فشرده، گروه آبلی یا حتی خود $\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ را درنظر گیریم ، می‌توان به‌شکلی که از طریق مثلث همیشه به نتایج جدید رسید از طریق این موجودات نیز رسید.

آیا نباید قبول کرد که مثلث یک موجود بی‌نظیر است؟

اولین مسئله‌ی بغرنج ریاضی که با آن مواجه شدم (اول دبیرستان ۱۹۶۰) و تازه‌ترین نتیجه که با آن مسئله در ارتباط است (۲۰۰۷)

مسئله: ***مثلثی رسم کنید که سه ارتفاع آن معلوم باشد (آیا ارتفاعات یک مثلث می‌توانند خود تشکیل یک مثلث بدهند؟)***

حل: داریم $2S = \frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}$ که درآن S مساحت مثلث است. یعنی مثلث مورد نظر با مثلثی که اضلاع آن وارون ارتفاعات هستند مشابه است، پس با رسم مثلثی با اضلاع $\frac{1}{h_c}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_a}$ زوایای مثلث موردنظر بدست می‌آید. حال با داشتن زوایا و ارتفاعات، اضلاع را خواهیم داشت و در نتیجه مثلث به‌راحتی رسم می‌شود. توجه می‌کنیم که ارتفاعات یک مثلث در حالت کلی نمی‌توانند اضلاع یک مثلث باشند.

با مثلث، مفاهیم ماکزیمم و مینیمم را به‌خوبی می‌توان دید:
یک دایره به شعاع r داریم. به این دایره می‌توان بی‌نهایت مثلث محاط کرد. در بین این مثلث‌ها مثلثی وجود دارد که حاصل‌ضرب ارتفاعات آن مینیمم است(چرا؟)
می‌توان نوشت

$$2S = \frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}} = \frac{\frac{2S}{r}}{\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}}$$

یک رابطه شگفت‌انگیز $$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$$

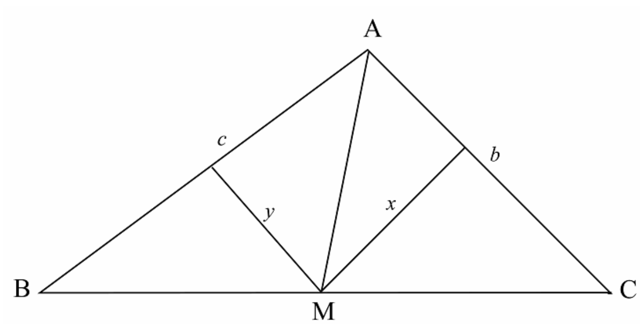
یعنی مجموع وارون ارتفاعات همیشه مقداری ثابت است.
پس حاصل‌ضرب $\frac{1}{h_a}\cdot\frac{1}{h_b}\cdot\frac{1}{h_c}$ **موقعی ماکزیمم است که** $\frac{1}{h_a}=\frac{1}{h_b}=\frac{1}{h_c}$ ، **یعنی مثلث متساوی‌الاضلاع. پس کافی است یک مثلث متساوی‌الاضلاع به آن دا یره محیط کنیم.**

میانه‌های مثلث

در هر مثلث سه ارتفاع متقاربند، سه نیمساز متقاربند، سه عمودمنصف متقاربند، سه میانه متقاربند.

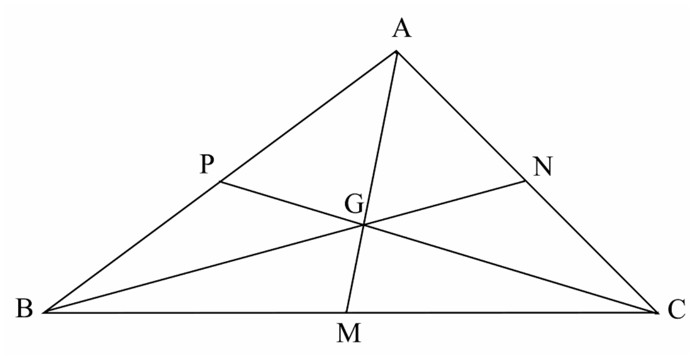
اثبات تقارب همه‌ی خطوط قبلی به‌جز میانه‌ها یکسان و بدیهی است، زیرا از برخورد هر دو تا از آن خطوط نقطه‌ای با شخصیت یکتا می‌یابیم که باید روی خط سوم از آن نوع باشد ولی متأسفانه تا به امروز در مورد میانه‌ها اثباتی متفاوت از اثبات بقیه در کتب درسی ارائه شده است. در این جا می‌خواهیم اثبات تقارب میانه‌ها را نیز مانند اثبات بقیه ارئه دهیم.

قضیه: ***در مثلث ABC ، نقطه‌ای روی میانه ضلع BC است اگر و تنها اگر نسبت فواصل آن از دو ضلع AB و AC برابر با عکس نسبت این دو ضلع باشد.***



اثبات: $xb = yc \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{c}{b}$

نتیجه: سه میانه متقاربند.



$$S_{APG} = S_{AGC}$$

پس شش مثلث هم‌مساحت هستند، یعنی

$$AG = 2GM$$

یعنی میانه‌ها در $\frac{2}{3}$ از رأس و $\frac{1}{3}$ از قاعده همدیگر را قطع می‌کنند.

شبه‌میانه: ***قرینه‌ی هر میانه را نسبت به نیمساز همان رأس، شبه‌میانه گویند.***

نتیجه: *در مثلث ABC نقطه‌ای روی شبه‌میانه رأس A است اگر و تنها اگر نسبت فواصل آن از دو ضلع AC و AB برابر با $\frac{b}{c}$ باشد (برعکس میانه‌ها)*

نتیجه: *شبه‌میانه‌های هر مثلث متقاربند و نقطه تقارب شبه مرکز ثقل نام دارد.*

خواص شبه‌میانه‌ها : شبه‌میانه‌ها مانند میانه‌ها (حتی قویتر) دارای خواص جالبی هستند، اما متأسفانه این خواص به کتب درسی راه پیدا نکرده‌اند.

مثلاً می‌دانیم که اگر رأس‌های مثلث را به نقاط تماس دایره‌ی محاطی با اضلاع مثلث وصل کنیم خطوط متقارب بدست می‌آیند (نقطه گرگون). جالب است که نقطه‌ی گرگون همان شبه‌مرکز ثقل است. یا در مثلث قائم‌الزاویه با رأس قائمه‌ی A، نقطه‌ی وسط ارتفاع AH همان شبه‌مرکز ثقل است. یا شبه‌میانه‌ها اضلاع مثلث ارتفاعیه (مثلثی که رئوس آن از پای ارتفاعات بدست می‌آید) را نصف می‌کنند. یا اگر از رئوس مثلث به شبه مرکز ثقل وصل کنیم تا دایره محیطی را در سه نقطه قطع کند شبه مرکز ثقل این سه نقطه‌ی جدید، همان شبه مرکز ثقل مثلث اصلی است و ....

یک مینیمم دیگر و مثلث

آیا می‌توان نقطه‌ای مانند P درون مثلث ABC یافت که مجموع مربعات فواصل آن از سه ضلع مینیمم شود؟

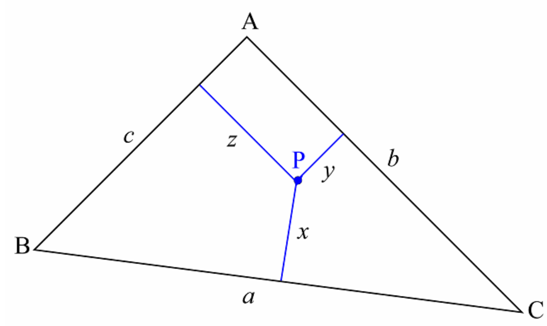
حل: می‌خواهیم $x^2+y^2+z^2$ مینیمم شود (x,y,z فواصل P از سه ضلع است)

اما می‌توان نوشت:

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=$$
$$(ax+by+cz)^2+(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(cx-az)^2$$

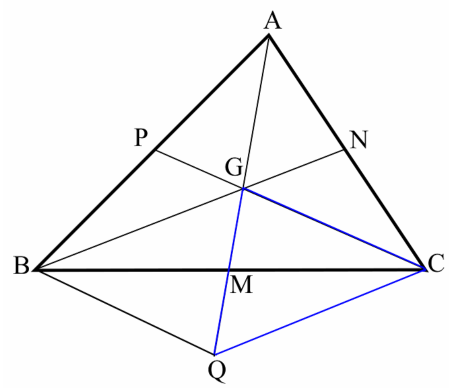
پس سمت چپ تساوی مینیمم است هرگاه

$$\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\ ,\ \frac{y}{z}=\frac{b}{c}\ ,\ \frac{x}{z}=\frac{a}{c}$$



یعنی P شبه مرکز ثقل است.

آیا میانه‌های یک مثلث، تشکیل یک مثلث می‌دهند؟



توجه می‌کنیم که اضلاع مثلث GQC به‌اندازه $\frac{2}{3}$ میانه‌ها است، پس مثلثی به اضلاع میانه‌ها وجود دارد.

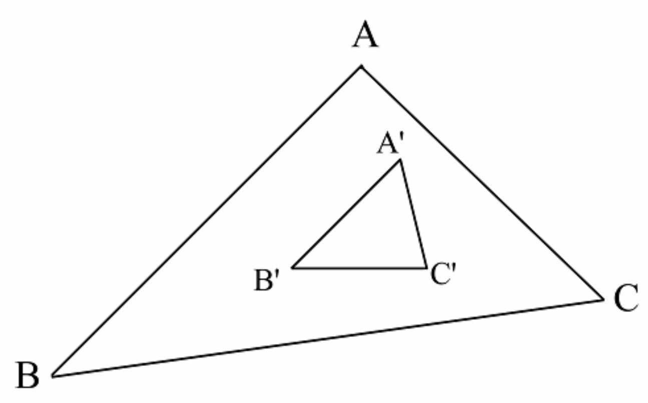
قضیه (Gazette 2007, Benyi and Caso)

در میان پاره‌خط‌های سوایی که اضلاع را به نسبت‌های داده شده‌ی معینی قطع می‌کنند تنها میانه‌ها می‌توانند تشکیل مثلث دهند.

توجه: منظور از خطوط سوایی، خطوطی هستند که از رئوس مثلث گذشته و در درون مثلث متقاربند.

صحبت‌های خود را با این مسئله‌ی حل نشده در مورد مثلث تمام می‌کنم.

اگر مثلث ABC با اضلاع a,b,c ومثلث $A'B'C'$ با اضلاع a',b',c' مفروض باشند، شرط لازم و کافی بر حسب اضلاع را بیابید که یکی درون دیگری باشد.



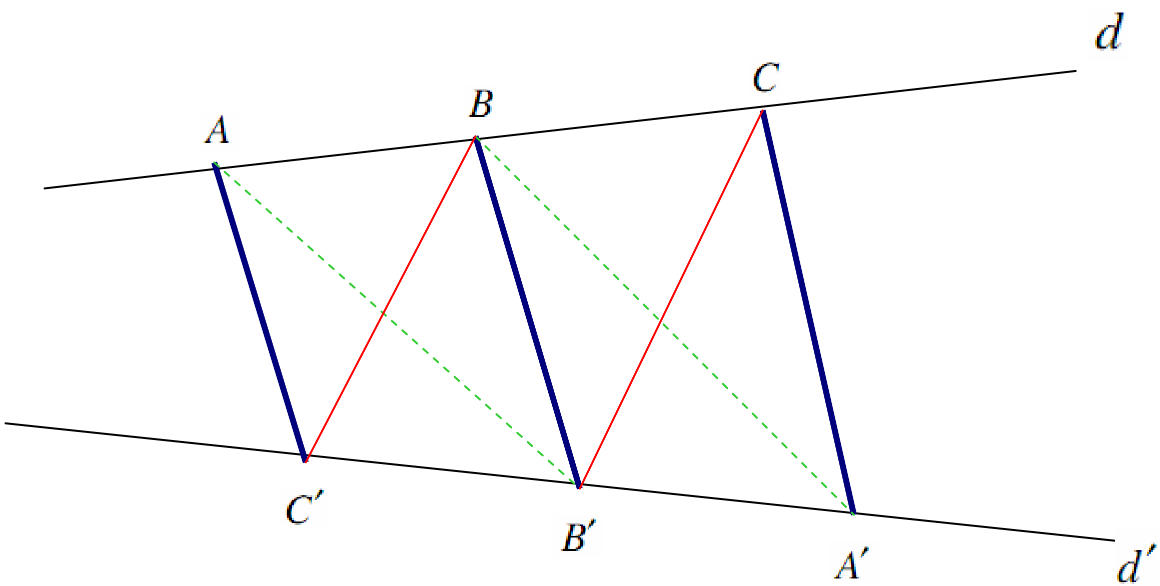
نکته آخر: جالب بودن هندسه جبری بیشتر به این علت است که در آن جبر تعویض‌پذیر، توپولوژی و توابع مختلط به‌کار گرفته می‌شوند تا نتایج هندسی را بدست آورند. ما باید از همان ابتدا در تدریس هندسه‌ی مقدماتی سعی کنیم روش‌هایی غیر از روش کلاسیک هم به‌کار ببریم و نشان دهیم مانند سایر شاخه‌های ریاضی، هنوز می‌توان در هندسه‌ی مقدماتی کارهای جدید غیر

بدیهی انجام داد و می‌توان مسائل حل نشده‌ای عنوان کردکه برای جوانان جالب بوده و به این ترتیب نشان دهیم که این هندسه نباید به موزه سپرده شود.

برای مثال به دو اثبات زیر از قضیه‌ی پاپوس توجه کنید که یک معلم خوب هندسه باید به نکاتی که در اثبات ما ارائه می‌شود اشاره داشته باشد تا دانش‌آموز از همان ابتدا متوجه اهمیت این نکات شود که خود می‌تواند انگیزه‌بخش باشد.

قضیه پاپوس: فرض کنید دو خط d و d' در صفحه داده شده‌اند. نقاط A، B و C روی خط d و A'، B' و C' روی d' (متمایز با نقطه‌ی تلاقی d و d') قرار دارند. اگر $AB' \parallel BA'$ و $BC' \parallel CB'$، آن‌گاه $AC' \parallel CA'$.

اگر



قبل از اثبات توجه کنیم که اگر $d \parallel d'$ آن‌گاه اثبات بدیهی است.

اثبات اول: فرض می‌کنیم O محل تلاقی d,d' باشد و قرار می‌دهیم

$$\frac{OB}{OA}=\lambda \ , \ \frac{OC}{OB}=\mu$$

در نتیجه طبق قضیه‌ی تالس

$$\frac{OA'}{OB'}=\lambda \ , \ \frac{OB'}{OC'}=\mu$$

به‌سادگی دیده می‌شود

$$\frac{OC}{OA}=\frac{OA'}{OC'}=\lambda\mu$$

پس طبق عکس قضیه‌ی تالس خواهیم داشت $AC' \| CA'$.

اثبات دوم: تجانسی که A را با مرکز O به B می‌برد، با f و آن را که با همان مرکز O، B را به C می‌برد با g نشان می‌دهیم. با توجه به خاصیت تعویض‌پذیری ضرب در اعداد حقیقی ترکیب دو تجانس بالا تعویض‌پذیر است، پس قرار می‌دهیم $h=f\circ g=g\circ f$.

اما $f(B')=A',\ g(C')=B'$ و در نتیجه

$$h(A)=g\circ f(A)=g(B)=C\ ,$$
$$h(C')=f\circ g(C')=f(B')=A'$$

یعنی C و A' به‌ترتیب مجانس‌های A و C' در تجانس h هستند، پس

$$AC' \| CA'$$

نتیجه‌گیری: اثبات اول ظاهراً ساده‌تر و بدیهی است، ولی متأسفانه ایده‌ی جدیدی به ما نمی‌دهد. مثلاً متوجه نمی‌شویم که ترکیب دو تجانس که در حقیقت ترکیب دو تابع است، خاصیت تعویض‌پذیری دارد (توجه می‌کنیم که ترکیب دو تابع به‌ندرت تعویض‌پذیر است). در اثبات اول برای بدست آوردن $\frac{OC}{OA}$ قرار داده‌ایم $\frac{OC}{OA}=\frac{OB}{OA}\times\frac{OC}{OB}=\lambda\mu$

در حقیقت OB از صورت و مخرج کسر دوم حذف شده تا $\frac{OC}{OA}$ بدست آمده است ولی اگر برای یک لحظه تصور کنیم که به‌جای اعداد حقیقی در یک حلقه‌ی تقسیم D هستیم و قرار دهیم $OA=a,\ OB=b,\ OC=c$ که $a,b,c\in D$ آن‌گاه خواهیم داشت $\frac{OC}{OA}=\frac{c}{a}=b.a^{-1}.c.b^{-1}$ که در حالت کلی غیرممکن است.

به همین دلیل است که متأسفانه قضیه پاپوس در صفحه‌ی آفین که روی میدان‌های تعویض‌ناپذیر (حلقه‌ی تقسیم) تعریف شده باشد درست نیست.