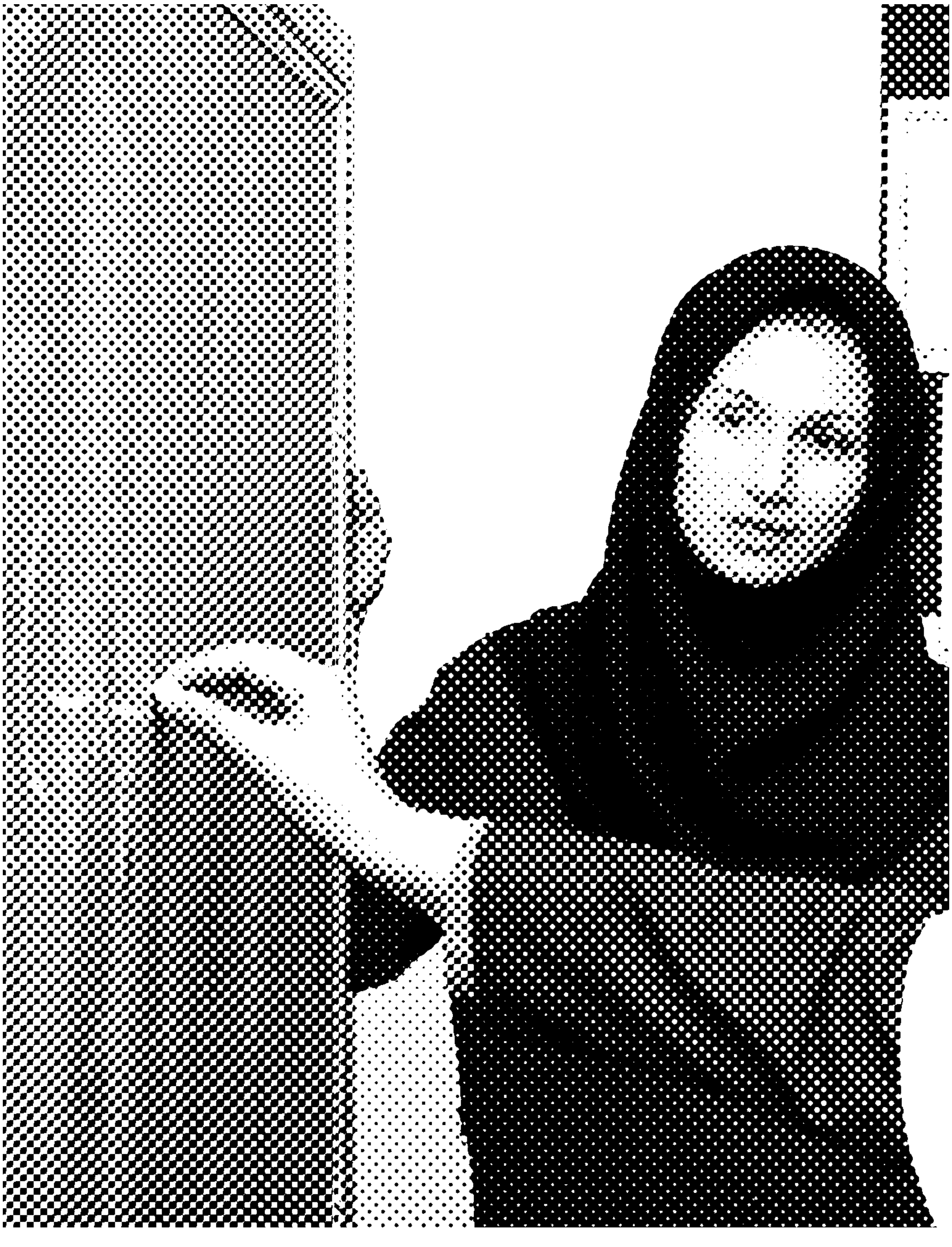
# یادگیری اکتشافی هندسه

## با استفاده از ابزار هندسه‌ی پویا بر اساس سطوح ون هیله

**نویسندگان: سینان اُلکان، اِن. بیلم سیناپلو، دنیز دریاکولو**
**مترجم: پگاه پیروانی‌نیا**

**واژگان کلیدی:**
هندسه‌ی پویا، سطوح ون‌هیله، تدریس پرسش ـ پاسخی.



**چکیده**

هدف از این مقاله، معرفی فعالیت‌های آزمایش شده در کلاس درس بر اساس سطوح تفکر هندسی ون‌هیله[1] با استفاده از هندسه‌ی پویا[2] می‌باشد. ایده‌های دیگر در پس این فعالیت‌ها عبارتند از تدریس پرسش-پاسخی[3]، مشارکت فعال دانش‌آموز و تصمیم‌گیری‌های دانش‌آموز-محور. طی ارایه‌ی دروس، دانش‌آموزان درگیر اکتشاف شخصی و ابداع دوباره‌ی روابط هندسی می‌شدند. از این آزمایش واضح بود که دانش‌آموزان سطح تفکر هندسی خود را به‌وسیله‌ی ساخت دانش هندسه توسط خودشان، افزایش دادند.

## مقدمه

برنامه‌های درس سنّتی هندسه‌ی دوره ی ابتدایی و راهنمایی، تأکید بر یادگیری فهرستی از تعاریف و خصوصیات اشکال توسط دانش‌آموزان دارد. این تأکید، موجب گمراهی است. به‌جای به‌خاطر سپردن ویژگی‌ها و تعاریف، دانش‌آموزان باید بتوانند مفاهیم هندسی معنی‌دار و روش‌های استدلال را در ذهن خود توسعه دهند تا بتوانند به‌طور دقیق، مسایل و موقعیت‌های فضایی را تجزیه و تحلیل کنند (باتیستا، ۲۰۰۱). هم‌چنین آموزش باید بتواند سطح تفکر دانش‌آموزان را بالا ببرد. در حال حاضر بهترین توصیف از طرز تفکر دانش‌آموزان در مورد اشکال دوبعدی، تئوری تفکر هندسی ون‌هیله می‌باشد (باتیستا، ۲۰۰۲).

توسعه‌ی سطوح تفکر هندسی دانش‌آموزان، یکی از اهداف اساسی آموزش ریاضیات می‌باشد زیرا هندسه در بسیاری از حوزه‌های علمی، تکنیکی و شغلی نیز به همان اندازه‌ی ریاضیات، بسیار مهم است. برای مثال در ترکیه، یک سوم سؤالات ریاضی در امتحان ورودی دانشگاه دارای زمینه‌ی هندسی می‌باشد (اولکن، تولوک، دارموس، ۲۰۰۲). با وجود این، درس هندسه گاهی اوقات در ریاضیات مدرسه و به‌خصوص در دوره‌ی ابتدایی نادیده گرفته می‌شود. بعضی از دلایل ممکن برای این بی‌اعتنایی می‌تواند کمبود منابعی مانند مواد عینی و ملموس، نرم‌افزارهای کامپیوتری مناسب و کمبود دانش و تخصص در مورد چگونگی استفاده از کامپیوتر و دیگر مواد آموزشی باشد. انجمن ملی معلمان ریاضی (NCTM) در «اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای» پیشنهاد می‌کند که از یک نرم‌افزار تعاملی هندسه برای بالا بردن یادگیری دانش‌آموز استفاده شود (NCTM, 2000).

هدف از مقاله‌ی حاضر، معرفی فعالیت‌های هندسی برای دانش‌آموزان دوره‌ی ابتدایی بر اساس سطوح تفکر هندسی ون‌هیله و با استفاده از ابزار هندسه‌ی پویا ـ Geometers’ Sketchpad ـ می‌باشد. فعالیت‌های آموزشی به جای تأکید بر تدریس یک محتوای ریاضی خاص، با تأکید بر یادگیری اکتشافی دانش‌آموز طراحی شده بودند. بنابراین، سایر ایده‌های نهفته در پس فعالیت‌ها، عبارتند از تدریس پرسش ـ پاسخی، مشارکت فعاَل دانش‌آموز و تصمیم‌گیری دانش‌آموز ـ محور. (هانافین، بوروس و لیتل، ۲۰۰۱). در ابتدا گوشه‌ای از چارچوب‌های نظری که در فهم و هدایت تفکر و یادگیری هندسی دانش‌آموزان مؤثر هستند را بیان می‌کنیم. سپس شرایط چند کلاس آزمایش شده در مدرسه را ذکر خواهیم کرد که دانش‌آموزان در آن‌ها توانستند پیشرفت‌هایی را به‌دست آورند و سطح تفکر هندسی خود را افزایش دهند.

## چارچوب‌های نظری

### تدریس پرسش و پاسخی

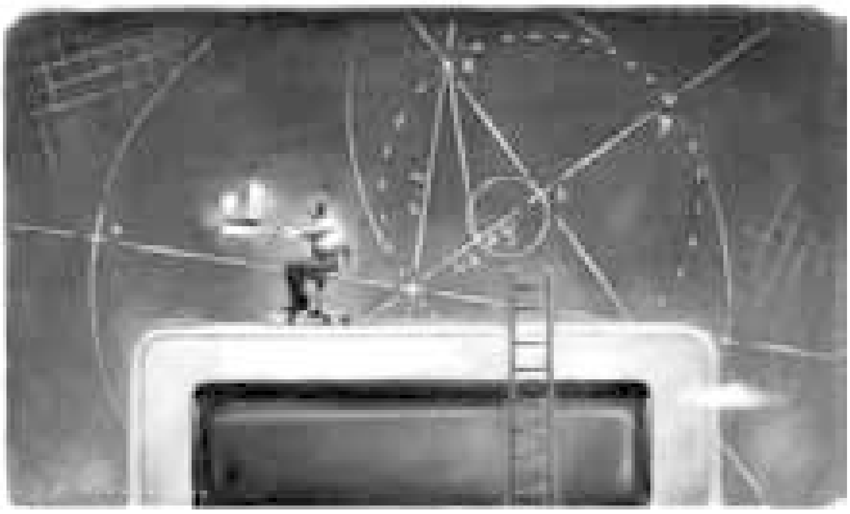
پرسش و پاسخ، یکی از ابزارهای آموزگار است که برای هدایت توجه دانش‌آموز به کشف و بازسازی دوباره‌ی ریاضیات، به‌کار می‌رود (مارتینو و ماهر، ۱۹۹۹). پرسش و پاسخ موجب شرکت فعال دانش‌آموز در بحث در مورد مفاهیم ریاضیات می‌شود. بنابراین هم مضمون و هم زمان پرسش، مهم است.

ابتدا، آموزگار از دانش‌آموزان می‌خواهد که در یک کلاس تحقیق‌ـ‌محور، نظر و تفکر خود را بیان کنند. سپس آموزگاران تصمیم‌گیری‌های آگاهانه‌ای درباره‌ی تفکر ریاضی دانش‌آموزان می‌گیرند تا بحث‌های بعدی را هدایت کنند. تک‌تک دانش‌آموزان باید برای یافتن پاسخ پرسش‌هایی که توسط آموزگار یا دیگر دانش‌آموزان پرسیده می‌شود، به چالش بیفتند.

به‌عنوان مثال، با توجه به محتوای سؤال، مهم است که آموزگار بیش‌تر سؤالات باز ـ پاسخ با مضمون و هدف دانش مفهومی و روش‌های حل مسأله بپرسد. همه‌ی این‌ها می‌توانند در ساخت‌وساز دانش ریاضیات پیچیده‌تری توسط دانش‌آموز مؤثر باشند (مارتینو و ماهر، ۱۹۹۹). به‌منظور استفاده‌ی مؤثر از پرسش و پاسخ، آموزگار باید در مورد حیطه‌ی محتوا مطلع باشد و بتواند بین تقلید کردن دانش‌آموز و بازسازی موضوع ریاضی توسط دانش‌آموز، تمایز قایل شود. بنابراین، تکلیفی که توسط پرسش آموزگار تعیین می‌شود باید این فرصت را به دانش‌آموزان بدهد که بتوانند هم از طریق کشف و هم پالایش نظرات قبلی، ایده‌های ریاضی را بازسازی کنند (مارتینر و ماهر، ۱۹۹۹؛ میدلتون، پوینور، تولوک، ولف و بوت، ۱۹۹۹).

زمان پرسیدن سؤال، مورد دیگری است که آموزگار باید به آن توجه کند. آموزگاران می‌توانند در روند تغییرات فکری دانش‌آموزان، به‌وسیله‌ی پرسیدن سؤالات به موقع و کمک به دانش‌آموزان در توسعه و بازسازی مفاهیم، شرکت داشته باشند (مارتینو و ماهر، ۱۹۹۹). به‌جای پرسیدن همه‌ی سؤالات به‌صورت یکجا و منتظر پاسخ دانش‌آموز ماندن، آموزگار می‌تواند ابزار پرسش و پاسخ را زمانی مورد استفاده قرار دهد که به موضوع مورد بحث مربوط می‌شود و منتظر بماند تا دانش‌آموزان پاسخ‌های خود را صورت‌بندی کنند. اگر

دانش‌آموزان یک کلاس در سطوح متفاوتی از تفکر باشند، آموزگاران می‌توانند برگه‌های فعالیتی را همراه داشته باشند که هم شامل سؤالات و هم راهنمایی‌هایی باشند که دانش‌آموزان را به فکر وادارد. آموزگاران باید آماده باشند تا هنگام کشف، به سؤالات دانش‌آموزان جهت بدهند. در مجموع پرسش سؤالات خوب و به‌موقع یکی از وظایف آموزگار در روند یادگیری و یاددهی ریاضی است که هم نیازمند دانش در مورد ریاضی و هم دانش درباره‌ی یادگیری ریاضی دانش‌آموزان است.



## سطوح تفکر هندسی ون‌هیله

در هندسه‌ی مدرسه‌ای که با یک مدل اصل موضوعی بیان می‌شود، فرض بر این است که دانش‌آموزان در سطح منطق صوری فکر می‌کنند. در حالی که معمولاً این طور نیست و آن‌ها درک و فهم پیش‌نیاز برای هندسه را ندارند. ما باید آموزشی را ارایه دهیم که متناسب با سطح تفکر دانش‌آموز باشد (ون‌هیله، ۱۹۹۹). ون‌هیله ادعا کرد که دانش‌آموزان طی دنباله‌ای از مراحل، در استدلال هندسی پیشرفت می‌کنند. نخستین سطح، دیداری[۴] است که با تفکر غیرکلامی آغاز می‌شود. دانش‌آموزی که در مرحله‌ی نخست است، می‌تواند اشکال را از روی ظاهرشان تشخیص دهد ولی ویژگی‌ها و خصوصیات مشخصه‌ی یک شکل را تشخیص نمی‌دهد. برای مثال می‌تواند یک مربع را تشخیص دهد ولی نمی‌فهمد که دارای چهار ضلع مساوی است. دانش‌آموزان می‌توانند اشکال را بر اساس فرم هندسی‌شان، دسته‌بندی کنند.

در مرحله‌ی بعد که سطح تجزیه‌وتحلیل‌ها است، می‌توانند ویژگی‌های اشیاء خاصی را ببینند و تشخیص دهند. آن‌ها می‌توانند تشخیص دهند که یک مستطیل، چهار ضلع و چهار زاویه‌ی قائمه دارد و اضلاع روبه‌روی آن با هم برابرند. در این جا زبان برای توصیف اشکال مهم است. در سطح سوم که سطح استنتاج غیررسمی[۶] است، دانش‌آموز می‌تواند عبارت‌هایی منطقی در مورد خود ویژگی‌ها و یا روابط بین آن‌ها بسازد. برای مثال، او می‌تواند نتیجه‌گیری کند که «مربع یک مستطیل است زیرا دارای اضلاع روبه‌روی مساوی است و چهار زاویه‌ی قائمه دارد.» سطوح چهارم و پنجم در نظریه‌ی وی هیله، استنتاج رسمی[۷] و دقت[۸] می‌باشند. احتمالاً دانش‌آموزان دوره‌ی ابتدایی، نمی‌توانند به این سطوح تفکر برسند. سطوح ون‌هیله، وابسته به سن نیست. دانش‌آموزان شما در سطوح متفاوتی هستند ولی یک درس هندسه‌ی خوب، درسی است که برای همه قابل دسترسی بوده و به همه‌ی آن‌ها این امکان را بدهد که در سطح خودشان، کار و پیشرفت کنند. آموزشی که به منظور پیشرفت از یک سطح به سطح بعدی است، باید شامل دنباله‌ای از فعالیت‌ها باشد که با یک مرحله‌ی اکتشافی آغاز می‌شود و به تدریج، مفاهیم و زبان مربوطه را می‌سازد و در نهایت شامل فعالیت‌هایی است که به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا چیزی را که تازه یاد گرفته‌اند به چیزهایی که از قبل می‌دانسته‌اند، مرتبط سازند.

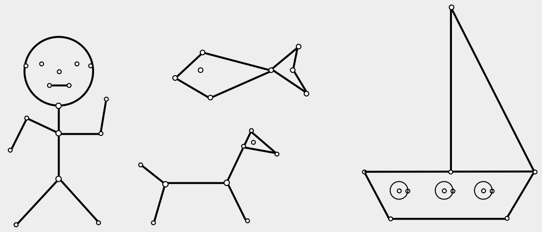
## نمونه‌ی فعالیت‌های هندسی ارایه شده به دانش‌آموزان

برنامه‌ی Geometers Sketchpad، یک محیط پویا و مناسب است که دانش‌آموزان می‌توانند در آن با توجه به سطح تفکر هندسی خودشان به کشف هندسه بپردازند. این محیط به دانش‌آموزان امکان ساخت اشکال هندسی روی صفحه نمایش را می‌دهد. آموزگاران می‌توانند با یک سری فعالیت‌های مقدماتی، دانش‌آموزان را با محیط نرم افزار آشنا کنند. سپس دانش‌آموزان، خود قادر خواهند بود تا اکتشافات شخصی خود را با کمک‌های جزئی آموزگار، انجام دهند. ادامه‌ی این مقاله به معرفی چنین فعالیت‌هایی اختصاص دارد و بعضی عکس‌العمل‌های احتمالی آموزگاران به این نوع از فعالیت‌ها را نشان می‌دهد.

## ۱. فعالیت‌های سطح دیداری

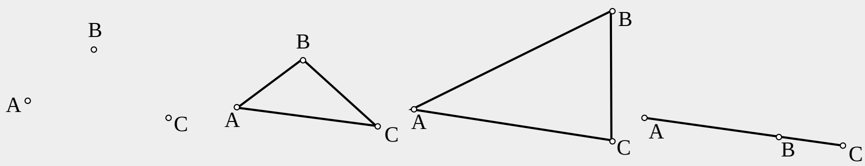
### الف) رسم اشکال هندسی

شکل‌های اشیایی مانند عروسک‌ها و اسباب‌بازی‌هایی را که قبلاً دیده‌اید، همانند زیر، رسم کنید.



### ب) ساخت اشکال هندسی

۱. سه نقطه‌ی دلخواه روی صفحه رسم کنید و آن‌ها را A، B و C بنامید.
۲. با هر دو نقطه از این نقاط، یک پاره‌خط رسم کنید. چه شکلی به‌دست می‌آید؟
۳. نقطه‌ی B را به چپ یا راست بکشید. چه چیزی تغییر می‌کند؟
۴. نقطه‌ی C را به چپ یا راست بکشید. چه چیزی تغییر می‌کند؟
۵. نقطه‌ی A را به چپ یا راست بکشید. چه چیزی تغییر می‌کند؟
۶. نقطه‌ی B را به روی خط AC بکشید. چه تغییری در شکل به‌وجود می‌آید؟
۷. فکر می‌کنید برای ساخت یک مثلث با سه نقطه، چه چیزی ضروری است؟



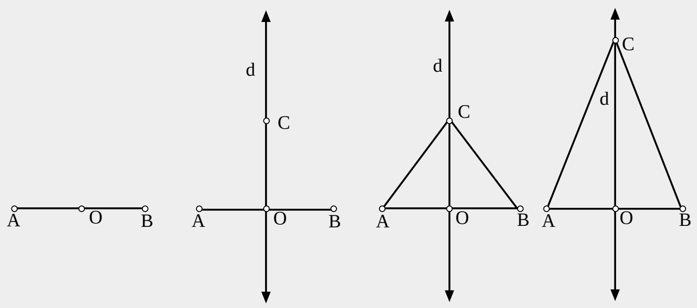

(۱) (۲) (۳-۴-۵) (۶)

## ۲. فعالیت‌های سطح تجزیه و تحلیل

### الف) آزمودن خواص هندسی

پاره‌خط AB را رسم کنید. نقطه‌ی وسط آن را O بنامید. خطی عمود بر پاره‌خط رسم کنید که از O عبور کند. آن را d بنامید. نقطه‌ای به‌نام C را روی d طوری بگذارید که روی AB نباشد. پاره‌خط‌هایی را با استفاده از نقاط A و B و C رسم کنید. چه چیزی درباره‌ی مثلث ABC می‌توان گفت؟ ...............

نقطه‌ی C را روی خط d جابه‌جا کنید. چه ویژگی‌هایی از مثلث تغییر می‌کند و چه چیزهایی ثابت می‌مانند؟ ......................



### ۳. فعالیت‌های سطح استنتاج غیر رسمی

#### الف) ساخت یک چهار ضلعی دلخواه

یک چهارضلعی دلخواه رسم کنید. نقطه‌ی وسط هر ضلع را بیابید. نقاط وسط را به‌هم وصل کنید. شکل به‌دست آمده را مشاهده کنید. شبیه‌چه چیزی است؟

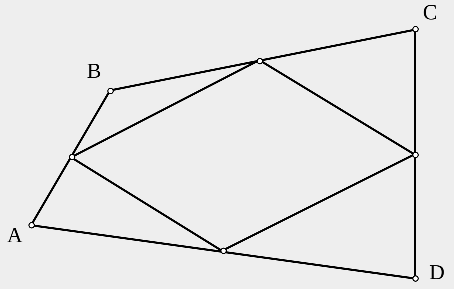
آیا این اتفاقی است؟

آیا زمانی که چهار ضلعی غیرمحدب باشد نیز چنین چیزی برقرار است؟

آیا اگر اضلاع چهار ضلعی با یکدیگر موازی نباشند. باز چنین چیزی برقرار است؟

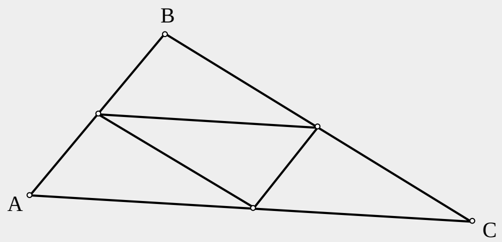
با تغییر دادن چهارضلعی بیرونی، چهار ضلعی درونی چگونه تغییر می‌کند؟

ابتدا حدس بزنید و سپس آن‌را امتحان کنید.




#### ب) ساخت یک مثلث دلخواه:

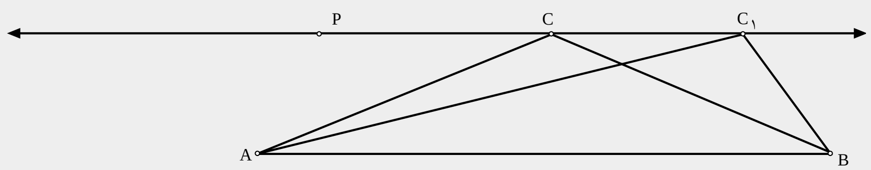
- یک مثلث دلخواه رسم کنید. نقاط وسط هر ضلع را به یکدیگر وصل کنید. چه‌چیزی می‌توانید راجع به مساحت چهار مثلث به‌دست آمده بگویید؟
- آیا این مساحت‌ها برابرند؟ آیا این امکان وجود دارد که بعضی مواقع با هم برابر نباشند؟ ابتدا حدس بزنید و سپس حدس خود را امتحان کنید.
- ادعای خود را ثابت کنید.




#### ج) مساحت یک مثلث

پاره‌خط AB را رسم کنید. نقطه‌ی C را خارج از آن در نظر بگیرید. خط دیگری به نام P را از نقطه‌ی C و به موازات AB رسم کنید. نقطه‌ی دیگر $C_1$ را روی خط P در نظر بگیرید. مثلث‌های ABC و $ABC_1$ را بسازید. چه چیزی می‌توانید درباره‌ی مساحت این دو مثلث بگویید؟

بعد از اندازه‌گیری مساحت مثلث ABC، نقطه‌ی C را روی خط P جابه‌جا کنید. آیا تغییراتی در مساحت مشاهده می‌کنید؟ چرا؟




پس از آزمایش فعالیت‌های قبل، از کارآموزان خواستیم خودشان فعالیت‌های مشابهی برای دانش‌آموزان دوره‌ی ابتدایی، طراحی کنند. قطعه‌های ویرایش شده‌ی زیر، نمونه‌ای از فعالیت‌های طراحی شده توسط این معلمان است. هم‌چنین بازتاب آن‌ها بر فعالیت‌هایی که مطالعه کردند، آمده است.

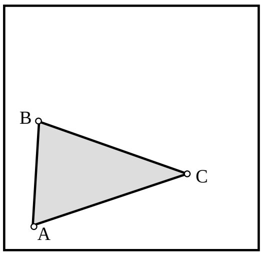
## اکتشافات دانش‌آموزان و بازتاب آن‌ها روی فعالیت‌ها

### قطعه‌ ی ۱

**فعالیت ۱**

- با شروع از یک مثلث، تعدادی چندضلعی رسم کنید.
- مجموعه زوایای داخلی هر چندضلعی را اندازه بگیرید و محاسبه کنید.
- بر اساس مشاهدات خود حدس بزنید.

### اکتشافات و بازتاب یک دانش‌آموز بر فعالیت ۱

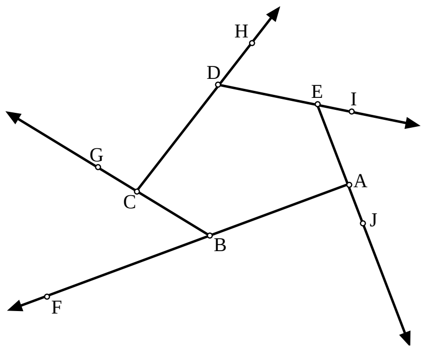



در این حالت با شروع از مثلث، تعدادی چندضلعی رسم می‌کنیم. ما همه‌ی زوایای هر یک از چند ضلعی‌ها را اندازه گرفتیم و با هم جمع زدیم تا مجموع زوایای داخلی همه‌ی آن‌ها را به‌دست آوریم. سپس رئوس را جابه‌جا کردیم و مشاهده کردیم که اندازه‌ی زاویه‌ها تغییر می‌کند ولی مجموع آن‌ها تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر، تغییر ابعاد چندضلعی، موجب تغییر اندازه‌ی زوایای آن می‌شود، ولی مجموع زوایا ثابت می‌ماند.

### قطعه‌ی ۲

**فعالیت ۲**

- با نیم‌خط‌های EA و DE و CD و BC و AB یک پنج ضلعی رسم کنید.
- در صورت نیاز، نقاط را طوری تنظیم کنید تا پنج ضلعی محدب شود.
- بر روی امتداد بیرونی اضلاع، نقاط J و I و H و G و F را در بیرون پنج ضلعی در نظر بگیرید.
- زوایای خارجی $I\hat{E}A$ و $H\hat{D}I$ و $G\hat{C}D$ و $F\hat{B}C$ و $J\hat{A}B$ را اندازه گرفته و مجموع آن‌ها را حساب کنید.
- اکنون اجزای پنج ضلعی را تغییر دهید و این مجموع را محاسبه کنید (دقت کنید که پنج ضلعی محدب بماند).
- آیا این مجموع برای هر پنج ضلعی، ثابت است؟
- با استفاده از نیم‌خط‌ها، چند ضلعی‌های دیگری مانند مثلث، شش ضلعی و دیگر چندضلعی‌ها را همراه با زوایای بیرونی آن‌ها بسازید.
- مجموع زوایای بیرونی این چند ضلعی‌ها چقدر است؟
- آیا این مجموع به تعداد اضلاع بستگی دارد؟




### اکتشافات و بازتاب یک دانش‌آموز بر فعالیت ۲

مجموع زوایای خارجی همیشه برابر با ۳۶۰درجه می‌شود. من فکر می‌کنم همیشه چنین چیزی برقراری است زیرا همه‌ی آن‌ها با هم، یک دور کامل را تشکیل می‌دهند. این مجموع ربطی به تعداد اضلاع ندارد و اگر تعداد اضلاع افزایش پیدا کند، اندازه‌ی هر یک از این زاویه‌ها کاهش می‌یابد.

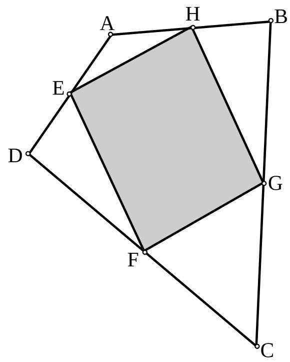
## قطعه‌ی۳: از استنتاج غیررسمی به استنتاج رسمی

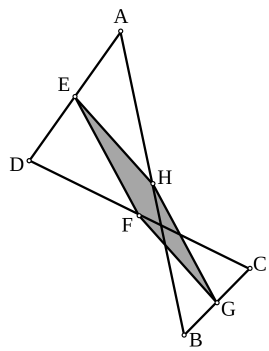
**فعالیت ۳**

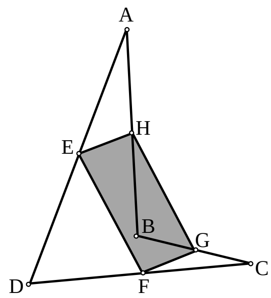
- یک چهارضلعی دلخواه رسم کنید. نقاط وسط اضلاع روبه‌رو را به یکدیگر وصل کنید. شکل به‌دست آمده را مشاهده کنید، شبیه به چه چیزی است؟
- آیا این، اتفاقی است؟
- آیا هنگامی که چهارضلعی محدب نباشد، چنین چیزی برقرار است؟
- آیا هنگامی که اضلاع چهارضلعی یکدیگر را قطع کنند نیز چنین چیزی درست است؟
- با تغییر چهارضلعی بیرونی، چهار ضلعی درونی چگونه تغییر می‌کند؟
- ابتدا حدس بزنید و سپس حدس خود را اثبات کنید.

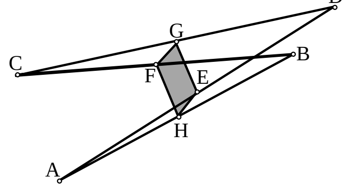
**اکتشافات و بازتاب یک دانش‌آموز بر فعالیت۳**

نقاط وسط اضلاع چهارضلعی، یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند. زمانی که اضلاع جابه‌جا می‌شوند، چهارضلعی درونی هم‌چنان یک متوازی‌الاضلاع باقی می‌ماند. چنین چیزی برای چهارضلعی‌های غیرمحدب و آن‌هایی که اضلاع خود را قطع می‌کنند نیز، برقرار است.



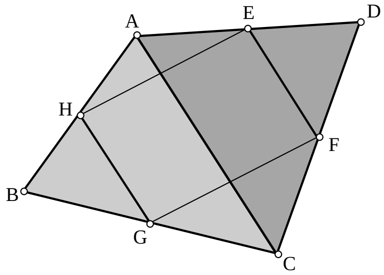



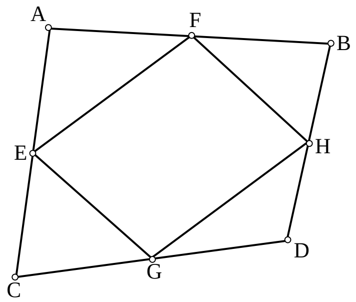

**حدس دانش‌آموز.**

از مشاهده‌ی شکل‌ها چنین نتیجه گیری می‌شود که اضلاع روبه‌رو در چهارضلعی‌های درونی، برابر هستند و این برای اثبات متوازی‌الاضلاع بودن آن‌ها کافی است. در ابتدا چنین چیزی برای من عجیب بود ولی بعد آن‌را به این صورت اثبات کردم:



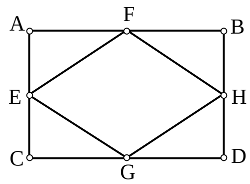
**اثبات دانش‌آموز.** من یکی از قطرهای چهارضلعی را رسم کردم. سپس به خاطر آوردم که اگر وسط‌های دو ضلع از مثلثی را به هم وصل کنیم، این پاره‌خط با ضلع سوم موازی است. بنابراین در مثلث ADC، اضلاع AC و EF با یکدیگر موازی هستند. به طریق مشابهی در مثلث ABC اضلاع AC و GH موازیند در نتیجه GH و EF با هم موازی هستند. زمانی که این کار را برای مثلث‌های ADC و ABD که از طریق رسم دومین قطر چهارضلعی به‌وجود می‌آیند، انجام دادم، مشخص شد که پاره‌خط‌های HE و GF نیز با یکدیگر موازیند. بنابراین، EFGH یک متوازی‌الاضلاع است.

**اکتشافات و بازتاب دانش‌آموز دیگری بر فعالیت۳**



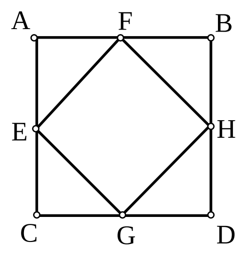

ابتدا نقاط وسط اضلاع چهارضلعی را پیدا می‌کنیم. سپس آن‌ها را به یکدیگر وصل می‌کنیم تا یک چهارضلعی دیگر به‌دست بیاید. فکر می‌کنم که چهارضلعی به‌دست آمده، یک متوازی‌الاضلاع باشد. برای اطمینان از این موضوع، شیب‌های اضلاع روبه‌رو را در چهارضلعی درونی حساب کردم و مشخص شد که دوبه‌دو با یکدیگر برابرند.

هنگامی که یکی از نقاط را جابه‌جا کردم، چهارضلعی‌های خاصی به‌وجود آمدند که اضلاع، شیب‌ها و زوایای آن‌ها را اندازه‌گیری کردم.




الف) اگر ABCD یک مستطیل باشد، از وصل کردن وسط‌های اضلاع، یک لوزی به‌دست می‌آید.

از آن‌جا که ABCD یک مستطیل است، AB=CD و AC=BD و E و F و G و H، وسط اضلاع مستطیل هستند. AB با CD برابر است. زیرا ABCD یک مستطیل است و F و G، AB و CD را نصف می‌کنند، پس CG=GD=BF=FA زیرا همه‌ی آن‌ها نصف پاره‌خط‌های برابر هستند. زوایای $\hat{D}, \hat{C}, \hat{B}, \hat{A}$، همگی با ۹۰ برابر هستند، زیرا ABCD یک مستطیل است. بنابراین مثلث‌های AEF و ECG و GDH و HBF، به حالت دوضلع و زاویه‌ی بین، باهم برابرند. پس، برابری این مثلث‌ها نتیجه می‌دهد که اضلاع EG و GH و HF و FE هم برابرند زیرا اجزای متناظر در مثلث‌های برابر هستند. من طول‌ها و زوایا را طبق بالا اندازه گرفتم. بنابراین چهارضلعی EGHF یک لوزی است.

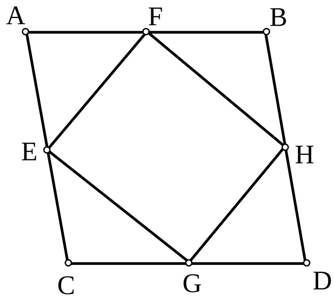



ب) اگر ABCD یک مربع باشد، از وصل کردن وسط‌های اضلاع آن، دوباره یک مربع به‌دست می‌آید.

ABCD یک مربع است. تمام اضلاع باهم برابرند و تمام زوایا ۹۰ هستند. اگر وسط‌های هر ضلع را به ترتیب به‌هم وصل کنیم، تشکیل یک مربع و چهار مثلث قائم‌الزاویه می‌دهند. مثلث AEF، یک زاویه‌ی قائمه دارد، و از آن‌جا که AE=EF، $A\hat{E}F$ و $A\hat{F}E$، زاویه‌ی °۴۵ هستند. به طریق مشابه، زوایای $C\hat{E}G$ و $C\hat{G}E$ نیز °۴۵ اند. پس مثلث GEF، مثلث قائم‌الزاویه است. به طریق مشابه، مثلث‌های EGH و GHF و HFE نیز قائم‌الزاویه هستند و EG=GH=HF=FH با هم برابرند و بنابراین چهارضلعی درونی، یک مربع است.

ج) اگر ABCD یک لوزی باشد، از وصل کردن وسط‌های اضلاع آن، یک مستطیل به‌دست می‌آید.

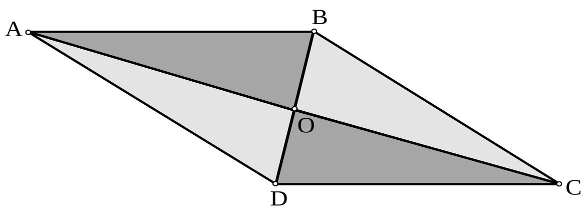
چهارضلعی ABCD، یک لوزی است، بنابراین زاویه‌ی $\hat{A}$ با زاویه‌ی $\hat{D}$ برابر است و زاویه‌ی $\hat{B}$ با زاویه‌ی $\hat{C}$ برابر است. نقاط E و F و G و H، وسط اضلاع هستند که AE=EC=CG=GD=HD=HB=BF=FA زیرا همه‌ی آن‌ها، نصف پاره‌خط‌های برابر هستند. مثلث‌های HGD و AEF به حالت دوضلع و زاویه‌ی بین، باهم برابرند. مشابهاً مثلث‌های ECG و




BFH نیز به حالت دوضلع و زاویه‌ی بین، برابر هستند. $E\hat{G}H = H\hat{F}E = F\hat{E}G$. زوایای $G\hat{E}C$ و $E\hat{G}C$ و $B\hat{H}F$ و $B\hat{F}H$ همه با هم برابرند زیرا زوایای مجاور به قاعده در مثلث‌های متساوی‌الساقین برابر هستند. پس از آن‌جا که $D\hat{H}G + B\hat{H}F$، مکمل زاویه‌ی $F\hat{H}G$ بوده و نیز DGH+EGC، مکمل $E\hat{G}H$ و $G\hat{E}C + A\hat{E}F$، مکمل $F\hat{E}G$ و $A\hat{F}E + B\hat{F}H$ نیز مکمل $E\hat{F}H$ هستند، زوایای $F\hat{H}G$ و $H\hat{G}E$ و $G\hat{E}F$ و $E\hat{F}G$ با هم برابرند زیرا مکمل‌های آن‌ها با هم برابرند. بنابراین، چون چهارزاویه‌ی برابر در یک چهارضلعی داریم و مجموع زوایای هر چهارضلعی، ۳۶۰° است، هر زاویه باید ۹۰° باشد. بنابراین چهارضلعی FHGE یک مستطیل است زیرا چهارزاویه‌ی ۹۰° دارد. بنابراین یک مستطیل داریم زیرا اضلاع آن دوبه‌دو موازی هستند و زاویه‌ها همه قائمه هستند.

**فعالیت ۴ (طراحی شده توسط کارآموز)**

- مساحت قسمت‌های به‌وجود آمده توسط قطرهای یک متوازی‌الاضلاع را با یکدیگر مقایسه کنید.
- ابتدا حدس بزنید و سپس آن‌را اثبات کنید.




**حدس دانش‌آموز.** مساحت این قسمت‌ها با یکدیگر برابر است.

**اثبات دانش‌آموز.** پس از پیدا کردن این نتیجه، تلاش کردم برای آن دلیلی بیابم، یعنی آن را ثابت کنم. این اثبات من است. مساحت‌های دو مثلث BCD و ABD برابرند زیرا قاعده‌ی آن‌ها (AB و CD) و ارتفاع‌های نظیر آن‌ها با یکدیگر برابرند (ارتفاع‌های این قاعده‌ها همان ارتفاع‌های متوازی‌الاضلاع است). ثابت کنیم دو مثلث AOB و ADO دارای مساحت‌های برابرند. می‌دانیم که دو قطر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را در نقطه‌ی وسطشان قطع می‌کنند. این موضوع، این قانون را به‌یاد می‌آورد که نسبت مساحت‌های به‌وجود آمده در یک مثلث، با طول قاعده‌ی آن‌ها متناسب است. بنابراین چون OB و DO با یکدیگر برابرند، مساحت‌ها نیز با یکدیگر برابرند.

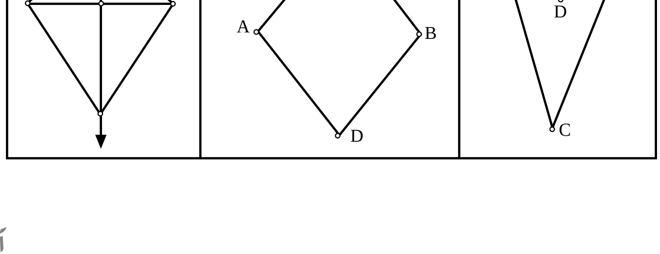
**فعالیت۵**

- سعی کنید یک دلتاوار[9] بسازید. (توجه کنید که باید طوری این شکل را بسازید که فقط اندازه‌ی شکل را با حرکت دادن یک نقطه از آن تغییر می‌دهید، هنوز یک دلتاوار بماند.

**اکتشافات و بازتاب یک دانش‌آموز بر فعالیت۵:**

برای ساخت این شکل مراحل زیر را دنبال کردم:

- یک پاره‌خط رسم نموده و نقطه‌ی وسط آن‌را یافتم.
- از این نقطه‌ی وسط، خطی را عمود بر خط اولی رسم کردم.
- دو نقطه‌ی دلخواه روی این خط عمود در نظر گرفتم.
- دو نقطه‌ی انتهایی پاره‌خط را به این دو نقطه‌ی دلخواه وصل کردم.
- پاره‌خط، نقطه‌ی برخورد و خط عمود را پاک کردم.

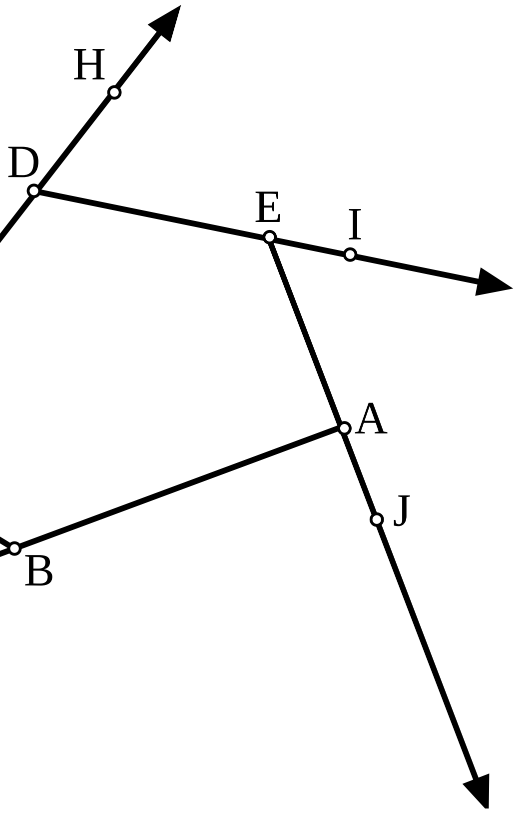


**حدس دانش‌آموز**. پیش ازانجام این تمرین، وقتی فکر می‌کردم که «دلتاوار چیست؟» اغلب یک شکل معمولی مثل دلتاوار شکل مرحله‌ی ۱ به ذهنم می‌آمد. من فکر می‌کردم دلتاوار باید شبیه آن باشد. از سوی دیگر، من دریافتم که می‌توانیم دلتاوارهای خیلی متفاوتی را بسازیم. یک لوزی و چهارضلعی مقعری مانند شکل مرحله‌ی ۳ نیز، دلتاوار هستند به شرط این که یک جفت ضلع برابر پشت‌سر هم داشته باشد.

**نظر کارآموز برای آینده**. من معتقدم که هندسه‌ی پویا، روش بسیار مؤثری برای تدریس بسیاری از موضوعات در هندسه با استفاده از فعالیت‌های خوب طراحی شده است. در آینده، من قصد دارم هندسه را با استفاده از تأثیر مشاهدات توسط نرم‌افزارهای هندسی به دانش‌آموزانم تدریس کنم تا آن‌ها را به کشف وادارم و یادگیریشان، عینی‌تر باشد. من یک مطالعه‌ی تحقیقی را که در ترکیه انجام شده بود، خواندم. در این مطالعه، دانش‌آموزان مشاهده کردند که ضمن این‌که روی فعالیت‌ها کار می‌کنند، روابط ریاضی را نیز کشف می‌کنند. به علاوه، مشاهده شد که اعتماد‌به‌نفس دانش‌آموز با کشف خاصیت‌ها، روابط و الگوهای جدید، افزایش می‌یابد و هم‌چنین آن‌ها دیدند که هندسه، فعالیتی است برای کشف چیزهای جدید. اکنون، من نیز چنین احساسی دارم.

## بحث

مشاهده شد که در چنین کلاسی، دانش‌آموزان هم بیش‌تر لذت می‌برند و هم بیش‌تر یاد می‌گرفتند. هم‌چنین مشاهده شد که آن‌ها چنین کلاسی را بسیار دوست داشتنی می‌دانستند. این امر، از فعالیت‌هایی که انجام می‌شد و در عکس‌العمل‌های آن‌ها و این‌که دانش‌آموزان مختلف از زوایای مختلف به یک مسأله می‌رسیدند و توضیحات مختلفی را برای یک حقیقت ریاضی بیان می‌کردند، مشهود است. در یک کلاس معلم‌ـ محور (به‌جای کلاسی که توسط معلم هدایت می‌شود) چنین چیزی اگر غیر ممکن نباشد، بسیار مشکل است. هم‌چنین مشخص بود که دانش‌آموزان خودشان به‌وسیله‌ی فعالیت‌هایی که خود یا معلمشان طرح می‌کردند از یک سطح به سطح بعدی می‌رفتند. هر چند آن‌ها با این ذهنیت که هر مسأله یک راه‌حل دارد، شروع به حل مسائل می‌کردند، ضمن فعالیت‌ها در می‌یافتند که ممکن است برای هر مسأله چند راه‌حل وجود داشته باشد. با راهنمایی معلم، ابتدا سؤالات را صورت‌بندی می‌کردند و سپس فرضیه‌ای را حدس می‌زدند و بعد آن را براساس اکتشافاتشان اثبات می‌کردند. عمق یادگیری و رضایت دانش‌آموزان در چنین کلاسی با کلاس‌های معمولی قابل مقایسه نیست. بعضی از دانش‌آموزان نیز باور خود نسبت به آموزش هندسه را تغییر دادند. در بازتاب‌های تعدادی از آن‌ها بر کلاس، روشی را که سال‌ها با آن به آن‌ها هندسه آموزش داده شده بود، نقد کردند و درخواست کردند از رویکردی شهودی‌تر، باز‌ـ پاسخ و اکتشافی، درست مانند آن‌چه ما در این کلاس به کار بردیم، استفاده شود.




## جمع بندی

دانش شکل و مکان برای فهم ساختار هندسی اشکال و سؤالات هندسه، دارای اهمیت است. بنابراین ضروری است دانش‌آموزان تجربه‌ها و تمرین‌هایی را در رابطه با شکل گیری اشکال هندسی داشته باشند تا بتوانند آن‌ها را بررسی کنند. ایجاد چنین محیطی، با استفاده از یک نرم‌افزار مناسب براساس کاربردهای هندسه‌ی پویا، امکان‌پذیر است. این کار باعث کمک به پیشرفت دانش‌آموزان و ایجاد یادگیری در یک سیستم مفهومی براساس خواص و ویژگی‌ها می‌شود که در هندسه از آن برای تجزیه و تحلیل اشکال استفاده می‌شود. این امر، باعث تشویق دانش‌آموزان به حرکت به سوی سطوح بالاتر تفکر هندسی به‌جای به‌خاطر سپردن صرف فهرستی بلند از ویژگی‌های اشکال می‌شود (باتیستا، ۲۰۰۲). هم‌چنین باید تئوری مربوط به پیشرفت در تفکر هندسی دانش‌آموزان، به‌وسیله‌ی معلمان درونی شود تا یک محیط یادگیری غنی به‌وجود بیاید.

زیرنویس‌ها:

1. Van Hiele
2. Dynamic Geometry
3. Teacher Questioning

این روش تدریس، به روش سقراطی نیز مشهور است.

4. Visual
5. Analysis
6. Informal Deduction
7. Formal Deduction
8. Rigor
9. Deltoid


**منبع اصلی:**

Geometric Explorations with Dynamic Geometry Applications Based on Van Hiele Levels, S. Olkun, N.B. Sinnoplu, D.Deryakulu, International Journal for Mathematics Teaching and Learning, http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijmenu.htm

**منابع استفاده شده در مقاله‌ی اصلی:**

Battista, M.T.(2001). Research-Based Perspective on Teaching School Geometry. In Subject-Specific Instructional Methods and Activities, edited by Jere Brophy. Vol. 8, Advances in Research on Teaching series. New York: JAI Press, Elsevier Science.

Battista, M.T. (2002). Learning geometry in a dynamic computer environment; Teaching Children Mathematics, 8 (6), 333-339.

Hannafin; R.D.; Burruss, J.D. & Little, C. (2001). Learning with dynamic geometry programs: Perspectives of teachers and learners. The Journal of Educational Research, 94(3), 132-144.

Martino, A.M.& Maher, C.A.(1999). Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: what research practice has taught us; Journal of Mathematical Behavior, 18(1); 53-78.

Middleton, J.A., Poynor, L., Wolfe, P., Toluk, Z., & Bote, L.A. (1999). A Sociolinguistic Perspective on Teacher Questioning in a Cognitively Guided Instruction Classroom. Paper presented at the Annual Meeting og the American Educational Research Association, April 19-23, Montreal Canada.

NCTM (2000). Principals and Standards for School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, Reston: VA.

Olkun, S.; Toluk, Z & Durmus, S. (2002). Matematik ve Si n f Ögretmenligi Ögrencilerinin Geometrik Düsünme Düzeyleri. Ulusal Fen ve Matematik Egitimi Kongresi’nde Sunulmu,s Bildiri, Orta Dogu Teknik Üniversitesi: Ankara.

Van Hiele, P.M. (1986). Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education. Orlando: Academic Press.

_________ (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. Teaching Children Mathematics, 5(6), 310-316.