اثبات‌های بدون کلام برای هم‌ارزی مجموعه‌ها

قاسم حسین قنبری
دبیر ریاضی سمنان

به‌دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله در نظر دارد که این مهم را به‌عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به‌همین منظور، ستونی در مجله باعنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به‌وجود می‌آورد تا به‌تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به‌عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به‌نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.
از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به‌اهمیّت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به‌غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

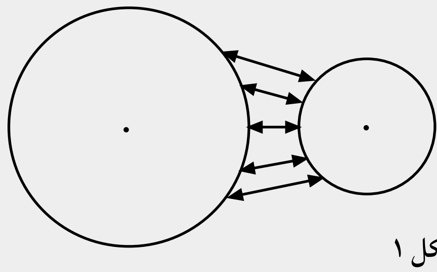
رشد آموزش ریاضی

در سال‌های اول کار معلمی، در مورد نحوه‌ی تدریس این طور فکر می‌کردم که معلم ابتدا باید درس را ارایه کند و هنگام تدریس، همه‌ی دانش‌آموزان گوش کنند. بعد در جلسه‌ی آینده تمرینات را حل کنند و... به عبارتی، ابتدا معلم مسایل را طرح و مدل سازی کند سپس دانش‌آموزان از روی آن مدل، مسایل را حل کنند. اما اتفاقاتی که در حین کار برای من پیش آمد، افق‌های جدیدی را به روی من باز کرد که گفتن آن خالی از لطف نیست.

یکی از مفاهیمی که در کتاب ریاضی سال اول دبیرستان مطرح شده است، هم‌ارزی مجموعه‌هاست. «دو مجموعه را هم‌ارز گوییم هرگاه تناظر یک به‌یکی بین اعضای آن‌ها برقرار باشد.» این مفهوم در مورد مجوعه‌های متناهی مشکلی را برای دانش‌آموزان ایجاد نمی‌کند. اما مشکل اصلی وقتی پیش می‌آید که مجموعه‌های نامتناهی مدّنظر باشند. وقتی که برای اولین بار این مبحث را درس می‌دادم با خودم می‌گفتم چقدر خوب است که هیچ دانش‌آموزی هم‌ارز بودن یا نبودن مجموعه‌های نامتناهی مثل بازه‌ها را سؤال نمی‌کند؛ چرا که با تئوری آن‌روز من، ابتدا باید مفهوم تابع را ارایه می‌کردم، سپس تابع یک به‌یک و پوشا را؛ در نهایت با ارایه‌ی تابع‌های مناسب، به اثبات هم‌ارز بودن آن‌ها می‌پرداختم. بنابراین تئوری بالا زیر سؤال رفت. از طرفی خانم دکتر گویا در یک سخنرانی در دانشگاه شهیدباهنر در سال ۱۳۷۵، مطلبی را در مورد مضرات حل مسایل مدل شده، ارایه کردند، یا به عبارتی مضرات همان تئوری من؛ و مثالی آوردند که دانش‌آموزی دستگاه دو معادله و دو مجهول را بدون تشکیل دستگاه، فقط با کمک شکل حل کرده بود. اما خود من تا آن موقع این نوع کار را تجربه نکرده بودم. تا این‌که یک روز در یکی از کلاس‌ها، مسأله‌ی زیر را به منظور سرگرمی مطرح کردم که «تعداد نقاط روی محیط یک دایره به شعاع یک بیش‌تر است یا تعداد نقاط روی یک دایره به شعاع دو؟»

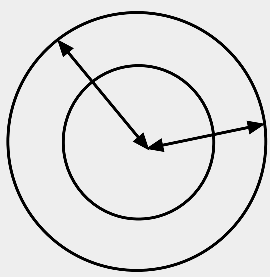
در ابتدا، همان‌طور که انتظار داشتم، اکثر دانش‌آموزان جواب دادند نقاط روی دایره به شعاع ۲ بیش‌تر است. بعد از چند دقیقه که دانش‌آموزان ناامید شده بودند، برای تحریک آن‌ها گفتم که نشان دهید که تعداد نقاط این دو شکل با هم برابرند و دو مجموعه با هم، هم‌ارز هستند.

تعدادی از دانش‌آموزان منصرف شدند، اما برخی ادامه دادند و چند روش مختلف ارایه کردند. دو ـ سه نفری، شکل زیر را کشیده بودند:



شکل ۱

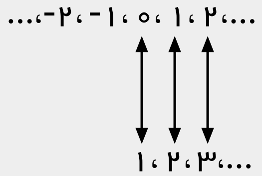
همان‌طور که دیده می‌شود، در این شکل مفهوم تناظر ۱ـ۱ به وضوح بیان نشده است و همه‌ی نقاط را شامل نمی‌شود. اما در این بین، یکی از دانش‌آموزان شکل زیر را کشیده بود:



شکل ۲

به عبارتی این دانش‌آموز یک اثبات بدون کلام برای این مسأله ارایه کرده بود. این اتفاق و موضوعی که خانم گویا مطرح کرده بودند، مرا مصمم کرد که بیش‌تر به این روش بپردازم. به همین دلیل، در سال‌های بعد که کتاب «آموزش هنر حل مسأله» وارد سیستم درسی شد، در بخش راهبرد رسم شکل، فرصت را مغتنم شمردم و جلسه‌ای را هم به این موضوع اختصاص دادم که دانش‌آموزان، مسایل هم‌ارزی مجموعه‌ها را با کمک رسم شکل حل کنند و نتیجه‌ی آن، یک سری اثبات‌های بدون کلام شده است که در ادامه آورده می‌شود.

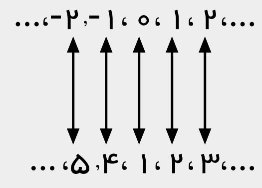
به عنوان ساده‌ترین مسأله، ابتدا از بچه‌ها خواستم که نشان دهند W و N (مجموعه‌ی اعداد حسابی و مجموعه‌ی اعداد طبیعی) هم‌ارزند. از آن‌جا که معمولاً معلم‌های عزیز این مسأله را در کلاس‌های ریاضی (۱) حل می‌کنند، این مسأله برای بچه‌ها چنگی به دل نمی‌زند؛ ولی برای شروع، خالی از لطف نبود. به همین ترتیب هم‌ارزی اعداد طبیعی و اعداد زوج، مشکلی ایجاد نکرد. چرا که اگر آن‌ها را زیر هم بنویسیم، تناظر مورد نظر ایجاد خواهد شد. اما هم‌ارزی Z و N (مجموعه‌ی اعداد صحیح و مجموعه‌ی اعداد طبیعی)، بچه‌ها را کمی دچار چالش کرد. روشی که معمولاً توسط دانش‌آموزان ارایه می‌شد، به شکل زیر بود:



شکل ۳

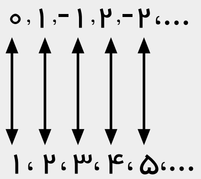
در این‌جا بعد از کمی بحث و مشخص شدن اشکالات روش بالا، دو روش دیگر توسط دانش‌آموزان ارایه شد. (خاطرنشان می‌کنم که در این‌گونه کار که هدف، کشف راه‌حل توسط خود دانش‌آموزان است، معلم اصلاً نباید دانش‌آموزان را مستقیماً راهنمایی کند؛ بلکه فقط ایرادهای کار را گوشزد می‌کند.)

اولین روش که توسط دانش‌آموزان ارایه شد، چنین بود:



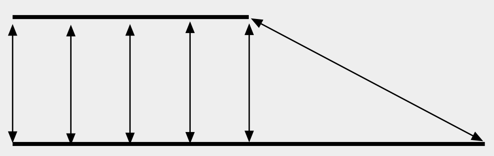
شکل ۴

روش دوم، این‌چنین بود:



شکل ۵

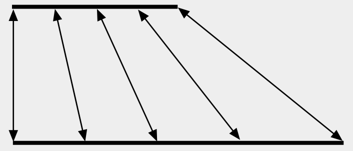
درباره‌ی مجموعه‌ی Z (اعداد صحیح) دیگر مسأله‌ای برای حل وجود نداشت؛ فقط هم‌ارزی Q و Z(اعداد گویا و اعداد صحیح) می‌ماند که به منظور حفظ شادابی کلاس، از طرح آن خودداری کردم. سپس به سراغ بازه‌ها و دوایر رفتم و از بچه‌ها خواستم که نشان دهند مجموعه نقاط روی یک دایره به شعاع ۱ و مجموع نقاط روی یک دایره به شعاع ۲ باهم، هم‌ارزند. دانش‌آموزان این کلاس هم مانند همان دانش‌آموز، مسأله را حل کردند و در ادامه از آن‌ها خواستم که این کار را برای یک پاره خط به طول ۱ و یک پاره‌خط به طول ۲ انجام دهند. از آن‌جایی که کار به‌صورت گروهی انجام می‌شد، بین گروه‌های مختلف رقابت ایجاد شده بود و هرگروه سعی می‌کرد که مسأله را سریع‌تر حل کند. برخی راه‌حل‌هایی ارایه می‌کردند که به دلیل عجله در کار، ناقص یا غلط بود از جمله راه‌حل ارایه شده در شکل زیر:



شکل ۶

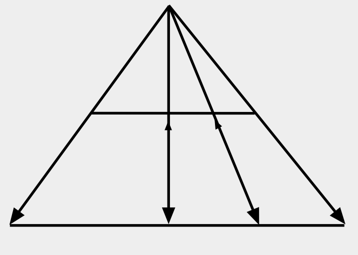
اما دو روش زیر که توسط دانش‌آموزان ارایه شدند، درست بودند:

روش اول



شکل۷

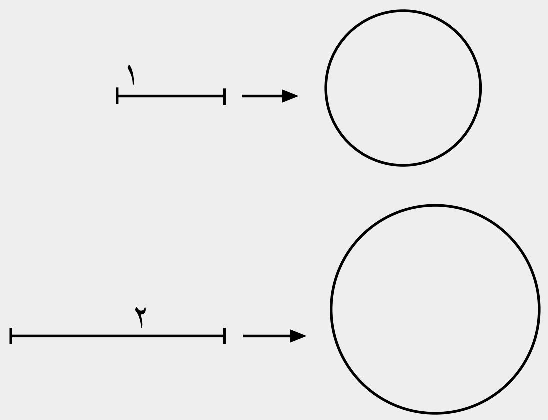
روش دوم



شکل۸

روش دوم، کاملاً بدون کلام بود و هنگامی که بچه‌ها آن‌را به من نشان دادند، اصلاً باورم نمی‌شد که آن‌ها خودشان آن را یافته باشند! ولی حقیقت این بود و آن‌ها خودشان فکر کرده بودند و هیچ منبعی نداشتند. روش اول، با وجود این‌که روشی صحیح بود ولی من از دانش‌آموزان سؤال کردم که اگر تقسیمات را در هر دو پاره‌خط ادامه دهیم، آیا همه‌ی نقاط، پوشش داده می‌شوند و هیچ نقطه‌ای باقی نمی‌ماند و هدفم این بود که از فرصت استفاده کنم و زمینه را برای ورود به اعداد گنگ آماده کنم.

اما گروهی دیگر، از تکنیک تبدیل یک مسأله به مسأله‌ی دیگر استفاده کرده و با شکل زیر به روش بسیار جالبی، مسأله را حل کرده بودند:

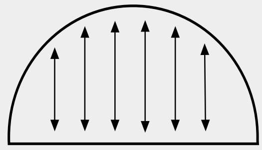


شکل ۹

همان‌طور که دیده می‌شود اثبات کاملاً بدون کلام است.

با مشاهده‌ی برخی اشتباهات و راه‌حل‌های غلط سایر گروه‌ها، متوجه شدم که اکثر اشتباهات ناشی از تداخل دو مفهوم «طول» و «تعداد نقاط» یا همان عدد اصلی در مجموعه‌های بالا است. لذا برای این‌که این دو مفهوم را بیش‌تر متمایز کنم، تصمیم گرفتم در ادامه ی کار، هم‌ارزی در بازه‌ی [۱و۰] و مجموعه‌ی R (اعداد حقیقی) را از بچه‌ها بخواهم. از آن‌جایی که رسیدن به این نتیجه، کمی مشکل به نظر می‌رسید، تصمیم گرفتم کمی به بچه‌ها کمک کنم. لذا از بچه‌ها خواستم که ابتدا نشان دهند که یک نیم‌دایره و یک پاره‌خط با هم،

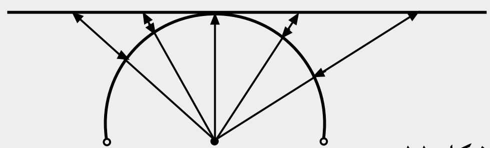
هم‌ارزند. برخی از گروه‌ها شکل زیر را برای این هم‌ارزی کشیده بودند:



شکل ۱۰

اما برخی از گروه‌ها هم هر دو مجموعه را به پاره‌خط تبدیل کرده بودند و با کمک مسأله‌ی قبل، ثابت کردند که دو مجموعه با هم، هم‌ارزند.

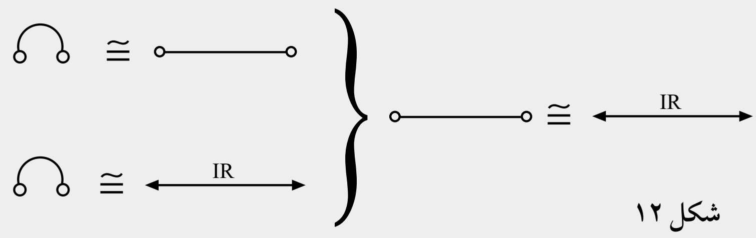
در نهایت از دانش‌آموزان خواستم نشان دهند که یک نیم‌دایره و خط اعداد حقیقی با هم، هم‌ارزند که با حل این مسأله، آخرین مرحله را طی می‌کردیم. هر چند که در مورد این مسأله، جر و بحث طولانی در گرفت و روش‌های نادرست زیادی ارایه شد، ولی در نهایت بچه‌ها به شکل زیر دست یافتند:



شکل ۱۱

البته من به آن‌ها کمک کردم که دو نقطه‌ی انتهایی نیم‌دایره را حذف کنند تا به مشکل برنخورند.

در این‌جا نوبت من بود که نتیجه‌گیری نهایی را بکنم و کار را جمع و جور کنم. از آن‌جا که همه‌ی اثبات‌ها بدون کلام بود، من نیز اثبات بدون کلام زیر را ارایه کردم:



شکل ۱۲

در ضمن در پایان، با کمک مسأله‌ی بالا، تفاوت طول و تعداد نقاط را برای بچه‌ها بیان کردم. چرا که در واقع در آخرین مسأله، طول یک مجموعه ۱ و طول دیگری بی‌نهایت است؛ ولی با هم، هم‌ارزند.

اما نتایجی که از این کار گرفتم:

۱. توجه به کار گروهی و فکر جمعی، هرچند که این کار در کلاس با سروصدا همراه است.

۲. توجه به زمان فکر کردن برای پاسخ به سؤالات در کلاس. چرا که پاسخ اکثر سؤالات این کلاس حداقل ۱۰ تا ۱۵ دقیقه وقت نیاز داشت. ولی ما معمولاً توقع داریم که همانند سؤالات کنکور بچه‌ها سریع به جواب برسند!

۳. درگیر شدن دانش‌آموزان با مفاهیم مختلف در هنگام حل یک مسأله. همان‌طور که دیدیم مفاهیم طول و اعداد گنگ به‌طور ضمنی در کار ظاهر شدند و بچه‌ها را درگیر کردند.

۴. خوب است که برای از بین بردن بسیاری از مشکلات کلاس‌های گروهی، در هر مدرسه حداقل یک کلاس برای کار گروهی طراحی شود.