**چکیده**

تفکر انتقادی، استدلال و اثبات، از مهارت‌های ضروری برای همه‌ی افراد در عصر حاضر است و ریاضی یکی از بهترین دیسیپلین‌های شناخته‌شده برای توسعه‌ی این مهارت‌هاست. لذا این مقاله، تلاش می‌کند تا ضمن معرفی و بیان اهمیت این مهارت‌ها، به برخی از مباحث نظری پیرامون توسعه‌ی چنین مهارت‌هایی ـ به‌ویژه توسط درس هندسه ـ پرداخته و با بیان این‌که برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای و کلاس درس آن باید به گونه‌ای باشد که این مهارت‌ها را در دانش‌آموزان تقویت کند، توصیه‌هایی را به معلمان ریاضی ـ به‌ویژه معلمان دوره‌های ابتدایی ـ ارایه می‌کند.

# تفکر نقادانه استدلال و اثبات در آموزش ریاضی

**مقاله‌ی ارایه شده در هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران ـ شهرکرد ـ مرداد ۱۳۸۵***

**آزاده زمانی ابیانه**

دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید بهشتی
و معلم ریاضی مدارس راهنمایی تهران

## مقدمه

تحولات پیوسته‌ی علوم و تکنولوژی، تغییرات سریع در الگوهای سنتی زندگی و تنوع افکار، گرایش‌ها و اطلاعات، شرایطی را فراهم آورده که زندگی در عصر حاضر را بسیار پیچیده کرده است. زندگی در چنین شرایطی مستلزم درک بهتر دیگران، اجتماعی فکر کردن و در حیطه‌ای گسترده‌تر، شناخت بهتر جهان است. در این عصر، همگی نیازمند تفاهم متقابل، سعه‌ی صدر و بردباری در مقابل نظرات مخالف و ارزیابی و قضاوت صحیح آن‌ها هستیم. درحقیقت برای موفقیت بیش‌تر، فراتر از نوعی هم‌زیستی بردبارانه، نیازمند همکاری فعال با یکدیگر می‌باشیم. (هاشمیان‌نژاد، ۱۳۸۰)

از طرفی تحقیقات انجمن‌های علمی، بین‌المللی (NECET)[1] نشان‌دهنده‌ی آن است که: «هرچه در مراحل سنی پایین‌تر، حساسیت ذهنی کودکان را نسبت به ملاک‌های استاندارد تفکر و تعقل منطقی و صحیح برانگیزانیم، روش‌ها و نگرش‌های عقلانی مورد نظر، در آن‌ها بهتر توسعه یافته و به افراد آزاداندیشی تبدیل می‌شوند که در مقابل مسایل عقلانی از خود واکنش نشان خواهند داد». [۱۴]

بنابراین یکی از وظیفه‌های ما معلمین ریاضی می‌تواند کمک به دانش‌آموزان باشد تا آن‌ها یاد بگیرند خوب فکر کنند، جریان تفکر خود و دیگران را نقد و تحلیل کنند، دلیل بیاورند و در نهایت مسأله‌ی مورد نظر خود را حل کنند. درحقیقت باید در آن‌ها «انگیزه‌ی خوب فکر کردن» ایجاد کنیم.

اما به تجربه، بسیار دیده‌ایم که اغلب دانش‌آموزان از سؤالات استدلالی فراری‌اند. آن‌ها از ترس این‌که مبادا دلایلشان مورد پذیرش واقع نشود، به سختی شروع به استدلال می‌کنند و گاهی در جریان عمل نیز مدام این نگرانی را به‌همراه دارند. آن‌ها عادت کرده‌اند که در هر مرحله از تفکرشان منتظر تأیید شدن از طرف معلم بمانند. تال[2] (۱۹۸۹) در این باره می‌گوید: «من دریافته‌ام که دانش‌آموزان از سؤالاتی که آن‌ها را درگیر ساده‌ترین اثبات‌ها کند، می‌گریزند؛ درحالی‌که ترجیح می‌دهند به جای آن به سراغ سؤالات قابل پیش‌بینی اما هولناک و پردردسر، مانند

انتگرال گیری بروند. برای آن‌ها ساده‌تر است که محاسبات معمولی اما پر دردسر انجام بدهند تا این‌که از تعاریف مجرد، استنتاجی بکنند؛ هر چند این استنتاج، بسیار پیش‌پا افتاده باشد.»

این درحالی است که افراد در زندگی روزانه به چنین مهارت‌هایی یعنی تفکر نقادانه، استدلال و اثبات بسیار نیازمندند. از ساده‌ترین خریدهای روزانه گرفته تا در مسایل مهم‌تری چون تصمیمات سیاسی، اقتصادی، اجتماعی و... نیاز به چنین مهارت‌هایی حس می‌شود. انسان‌ها باید یاد بگیرند که در تصمیم گیری‌های اساسی‌ای چون انتخابات، تصمیم‌های منطقی و آگاهانه بگیرند و بتوانند دلایل کافی برای انتخاب‌های خود ارایه کنند.

مجله‌ی «دنیای کار در آینده»[3] (۱۹۸۸) پیش‌بینی می‌کند که بیش‌ترین رشد شغلی در آینده برای مناطقی خواهد بود که متقاضی مهارت‌های سطح بالای تفکر هستند. [۹]

از طرفی علم ریاضیات یکی از بهترین دانش‌ها برای توسعه‌ی چنین مهارت‌هایی است و به همین دلیل است که راس، یکی از مهم‌ترین اهداف تدریس ریاضیات را، آموزش استدلال منطقی[4] به دانش‌آموزان می‌داند. به اعتقاد او استدلال، تنها یک مهارت ریاضی نیست، بلکه مهارتی بنیادی است و به همین جهت تأکید می‌کند که «معلم‌ها باید به ریاضی، به‌عنوان یک موضوع درسی زنده، مهیج و پرشور که نقش اساسی در آموزش مدرسه‌ای تک‌تک دانش‌آموزان دارد نگاه کنند. آن‌ها باید به ماهیت نظری ریاضی که هم بسیاری از موقعیت‌ها را به صورت آرمانی[5] تبدیل می‌کند و هم تفسیرهای کاربردی‌ای از مفاهیم مجرد می‌سازد، توجه کنند.» [۱۱]

بنابراین یک وظیفه‌ی اساسی آموزش ریاضیات مدرسه‌ای، آن است که شهروندانی با توانایی استدلالی مناسب تربیت کند، تا در دنیای نمادین ریاضیات، دلایل و اثبات‌های قابل قبول ارایه کنند و در انتخاب‌های روزانه‌ی خود نیز موفق و مطمئن‌تر قدم بردارند.

## مروری بر ادبیات موضوع

### ـ تفکر نقادانه

تفکر هر فرد، ماهیت رفتار او را تشکیل می‌دهد و کیفیت زندگی او و آنچه می‌سازد، خلق می‌کند یا تولید می‌کند نیز به چگونگی اندیشه‌ی او وابسته است. نوعی از تفکر، تفکر انتقادی یا نقادانه[6] می‌باشد. کلمه‌ی Critical از واژه‌ی یونانی Critic به معنی سؤال کردن، معنی دادن و تحلیل کردن گرفته شده است، که در واقع با استفاده از همین سه فرایند است که انسان‌ها افکار خود، دیگران و امور و پدیده‌های محیط اطرافشان را بررسی می‌کنند و تلاش می‌کنند بهترین تصمیم گیری‌ها را انجام دهند. کسانی که نقادانه می‌اندیشند، به همان نسبت می‌توانند سؤالات مناسب‌تری بپرسند و اطلاعات مربوط به هم را بهتر جمع‌آوری کنند، این اطلاعات را به‌طور صحیح‌تری دسته‌بندی نمایند، دلایل منطقی آن‌ها را استخراج کنند و به نتایج بهتری دست یابند. علاوه بر این، آن‌ها می‌توانند با بررسی مداوم و ماهرانه‌ی تفکرات خود، کیفیت تفکرشان را توسعه داده و بنابراین زندگی موفق‌تری را برای خود طرح‌ریزی کنند. (هاشمیان‌نژاد، ۱۳۸۰)

هاشمیان‌نژاد به نقل از رابرت انیس[7] (۱۹۸۷)، تفکر انتقادی را «تفکری مستدل و منطقی» می‌داند که «بر تصمیم گیری در مورد عقاید و اعمال متمرکز است» و پیامد آن، نتایج درست و منطقی است.

دیویی نیز ماهیت تفکر انتقادی را «بررسی دقیق، مداوم و فعال هر عقیده یا هر شکلی از دانش با توجه به دلایلی که آن عقیده را تأیید می‌کنند و نتایجی که از آن عقیده حاصل می‌شود» می‌داند [۹] و لیپ من[8] (۱۹۹۱)، تفکر انتقادی را «بازسازی، تجدیدنظر و بررسی دقیق افکار» معرفی می‌کند.

در واژه‌نامه‌ی روان‌شناختی، تفکر انتقادی، راهبردی شناختی ذکر شده است که کار فردی را از راه بازبینی و آزمودن راه‌حل‌های ممکن هدایت می‌کند. [۱۰]

بنابراین به طور خلاصه تفکر انتقادی فرایندی است که به طور مؤثر روند تفکر را به‌کار می‌گیرد، تا به فرد کمک کند در مورد آن‌چه که اعتقاد دارد یا انجام می‌دهد، تصمیم‌سازی کند، تصمیم‌هایش را ارزیابی کرده و سپس آن‌ها را به‌کار گیرد.

ریشه‌ی تاریخی این نوع تفکر نیز، بسیار قدیمی است و طبق گفته‌ی سایت NCECT، شاید بتوان اولین بار آن را ۲۵۰۰ سال قبل، در آموزش‌ها و دیدگاه‌های سقراط ردیابی کرد. سقراط با تحقیق‌های خود دریافت که بسیاری از مردم نمی‌توانند دلایل عقلانی‌ای برای ادعاهای علمی خود ارایه کنند و ثابت کرد که افراد ممکن است قدرت و جایگاه والایی داشته باشند، اما در عین حال بسیار غیرمنطقی و سردرگم باشند. لازم به ذکر است که طبق ادعای سایت نامبرده، روش سؤال کردن او[9]، امروزه نیز به‌عنوان بهترین راهبرد جهت تدریس تفکر نقادانه شناخته می‌شود. [۱۷]

### ـ استدلال

افزایش توانایی استدلال یکی از اصولی است که از گذشته

تاکنون مورد تأکید آموزشگران ریاضی بوده است. راس در این زمینه چنین می‌گوید: «اساس ریاضیات استدلال است و... اگر توانایی استدلال در دانش‌آموزی رشد نکرده باشد، ریاضیات برای او به مجموعه‌ای از رویه‌ها[10] و مثال‌های تکراری فاقد این که چرا چنین هستند، تبدیل می‌شود.»

در اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای، شورای ملی معلمان ریاضی آمریکا و کانادا (NCTM[11] ـ ۲۰۰۰)، از استدلال و اثبات به‌عنوان یکی از اصول اساسی آموزش ریاضیات مدرسه‌ای یاد می‌شود و آن را برای درک ریاضیات ضروری می‌دانند. آن‌ها تأکید می‌کنند که دانش‌آموزان تا پایان پایه‌ی دوازدهم تحصیلی باید قادر باشند که:

ـ استدلال و اثبات را به‌عنوان یک جنبه‌ی اساسی ریاضیات بشناسند؛

ـ حدسیه‌های ریاضی ساخته و درستی آن‌ها را تحقیق کنند؛

ـ ادعاها و اثبات‌های ریاضی را ساخته و ارزیابی کنند؛

ـ انواع مختلف استدلال و روش‌های اثبات را انتخاب کرده و به‌کار ببرند.

در ریاضیات، روش‌های استدلالی فراوانی به کار می‌رود. فردین‌پور (۱۳۸۵)، برخی از انواع آن را چنین برمی‌شمرد:

**۱ـ روش شهودی**: این روش به درک شهودی و احساس وابسته بوده و استدلال در آن، متکی به حواس و غرایز افراد است. از این‌رو ممکن است اشخاص متفاوت، روش‌های مختلفی برای آن داشته باشند.

**۲ـ روش استقرایی**: که براساس آزمایش و تجربه است.

**۳ـ روش تمثیل**: که در حقیقت پیدا کردن نوعی مشابهت میان مفاهیم گوناگون است و می‌تواند در ایجاد زمینه‌های شهودی برای درک پدیده‌های ریاضی، مؤثر واقع شود.

**۴ـ روش برهان خلف**: که در واقع نوعی اثبات غیر مستقیم است.

**۵ـ روش استنتاج منطقی**: که در آن به کمک قوانین منطق ریاضی، از چند فرض درست، به نتیجه‌ای می‌رسیم که به اندازه‌ی همان فرض‌های درست، حتمی و مسلم هستند.

علاوه بر این، میرزا جلیلی (۱۳۸۵) از شیوه‌ی سنتی **قیاس** نیز به عنوان یک روش استدلال قدیمی یاد می‌کند که در یونان مطرح بوده و به وسیله‌ی ارسطو برجسته شده است.

**ـ اثبات**

اثبات در لغت‌نامه‌ی دهخدا به معنی **قرار دادن، درست کردن، نوشتن، پابرجا کردن** و در حیطه‌ی فلسفی **حکم کردن به ثبوت چیزی دیگر** ذکر شده است. در فرهنگ آکسفورد مقابل کلمه‌ی PROOF چنین دیده می‌شود: **راهی برای نشان دادن درستی یک عبارت یا صحیح بودن محاسبه در ریاضیات**. [۶]

به عقیده‌ی دیویس و هرش (۱۹۸۰)، نقل شده در گویا و غلام‌آزاد، (۱۳۸۵) «اثبات، تأیید و تصدیق است؛ اثبات، احترام متقابل است؛ اثبات، مهر قدرت است؛ اثبات، آیین و بزرگ‌داشت قدرت دلیل خالص است.»

به عقیده‌ی تال (۱۹۸۹)، «اثبات، یعنی دقیق بودن در قبال دلایل و به‌دست آوردن نتایج.»

رضائی (۱۳۸۵) در این‌باره می‌گوید: «اثبات، گفتمان ریاضی است، یعنی چیزی که ما به عنوان ادبیات ریاضی یا فرهنگ ریاضی می‌شناسیم» و زنگنه (۱۳۸۵) نیز اثبات‌های رسمی و صوری ریاضی را «زبانی که ریاضی‌دانان با آن سخن می‌گویند» معرفی می‌کند. عده‌ای نیز پا را فراتر از این نهاده و معتقدند که شاید بتوان ریاضیات را «علم ثابت کردن»[12] نامید (الدنبرگ و فریبرگ[13]، ۲۰۰۲). اما به نظر می‌رسد، همان‌طور که گویا (۱۳۸۵) نیز اشاره می‌کند، «تاریخ نشان می‌دهد از پیش از یونانی‌ها تا زمان حال، تبیین ریاضی‌دان‌ها از ریاضی و چیستی آن، نگاه آن‌ها را به اثبات و دقت شکل داده است.» یعنی در حقیقت آن‌چه که اثبات نامیده می‌شود، بستگی به استفاده و پذیرش آن از سوی جامعه دارد. [۸]

در استانداردهای NCTM، از اثبات به عنوان «یک روش رسمی برای بیان انواع خاصی از استدلال و قضاوت‌ها» یاد شده است و تأکید شده که «تا پایان متوسطه، دانش‌آموزان باید با بهره‌بردن از استدلال‌های ریاضیاتی، اثبات رسمی بنویسند و ارزش چنین بحث‌هایی را حس کنند.» (ص ۵۶)

آموزشگران ریاضی (هنا، ۲۰۰۰؛ شونفلد، ۱۹۹۴؛ وبر، ۲۰۰۳؛ گویا و غلام‌آزاد، ۱۳۸۵) نقش‌هایی را که اثبات در ریاضی ارایه می‌کند به صورت زیر بیان کرده‌اند:

ـ تأیید درستی یک عبارت؛

ـ توضیح چرایی درستی یک عبارت؛

ـ ایجاد ارتباطات با دانش ریاضی؛

ـ کشف یا خلق جدیدی در ریاضی؛

ـ نظام‌وار کردن عبارت‌ها در یک نظام اصل موضوعی.

## قلمرو پیش از اثبات

راس معتقد است که شروع استفاده از واژه‌ی «اثبات» و عبارت

«این یک اثبات نیست»، نباید دیرتر از کلاس هشتم باشد، چرا که باید حساسیت ریاضی دانش‌آموزان را هرچه زودتر تقویت کرد. اما از طرف دیگر بسیاری از آموزشگران معتقدند که «لازم است پیش از آن‌که از دانش‌آموزان بخواهیم که اثبات بنویسند، توانایی استدلال ریاضی آن‌ها توسعه یافته باشد.» (مانسی[14]، ۲۰۰۳) به اعتقاد آن‌ها، توانایی استدلال شفاهی و قضاوت کردن درباره‌ی قابل قبول بودن یک مفهوم، یااین‌که چرا یک رویه باید مورد استفاده قرار بگیرد و نیز توانایی نقد این‌ها، قدم اول راه است و اگر دانش‌آموزی این مهارت‌ها را نداشته باشد، در اثبات نیز موفق نخواهد بود.

ادوارد[15] (۱۹۹۷) قلمرو پیش از اثبات را «راه‌های تفکر، تکلم و عمل کردن به گونه‌ای که هدف، جستجو کردن و یافتن قطعیت ریاضی تضمین شود» بیان می‌کند. او معتقد است که مهارت‌های استدلال و قضاوت کردن، دانش‌آموزان را به فعالیت‌های روزانه‌ی ریاضیاتی‌شان پیوند می‌دهد و پنج نوع فعالیت استدلالی زیر را به عنوان پیش‌نیاز اثبات بر می‌شمرد:

- درک و الگوسازی؛
- توصیف الگوها؛
- حدسیه‌سازی؛
- استدلال‌های استنباطی؛
- استدلال‌های استقرایی (قیاسی).

او معتقد است که کودکان، هر کدام از این نوع استدلال‌ها را از کودکی تجربه می‌کنند تا آماده‌ی اثبات می‌شوند.

اما به نظر می‌رسد قدرت نقد، استدلال و اثبات نمی‌تواند به کمک آموزش در یک درس مجزای منطقی ایجاد شود و باید در سایه‌ی تمام بخش‌های ریاضیات- و یا حتی دروس دیگر- ارایه شود. در حقیقت باید طراحی کل برنامه‌ی درسی ریاضیات مدرسه‌ای به گونه‌ای باشد که دانش‌آموزان به تفکر دقیق و نقادانه، منطقی حرف‌زدن و استدلال کردن تحریک‌شده و عادت کنند. استانداردهای NCTM نیز تأکید می‌کند که «استدلال و اثبات، باید به عنوان بخشی از تجربه‌ی ریاضی دانش‌آموزان از پیش از دبستان تا پایه‌ی دوازدهم و به صورت یک عادت ذهنی، مانند دیگر عاداتشان درآید، تا در بسیاری از زمینه‌های دیگر نیز بتوانند آن‌ها را توسعه داده و از آن بهره بگیرند.» مانسی (۲۰۰۳) معتقد است که «در سطوح ابتدایی، دانش‌آموزان باید در موقعیت‌هایی که آن‌ها را قادر به ساختن، اصلاح کردن و آزمودن حدس‌هایشان می‌سازد قرار بگیرند و این موقعیت‌ها باید تا دبیرستان که دانش‌آموزان نیاز به دانستن این دارند که چگونه ایده‌های خود را به زبان ریاضیاتی و نمادین بیان کنند، ادامه یابد. به‌علاوه باید نحوه‌ی استدلال کردن در بحث درباره‌ی ایده‌ها و حدس‌های همسالانشان را یاد بگیرند. آن‌ها باید یاد بگیرند که مثال‌های خود را توسعه بدهند و بتوانند استدلال‌های خود را در گروه به‌خوبی بیان کنند. در دبیرستان، باید بتوانند بحث‌هایشان را شفاف‌تر مطرح کنند و آن‌ها را به‌طور رسمی بنویسند. معلم و دانش‌آموزان باید عادت کنند که بپرسند: «چرا؟» چرا که این سؤال نقادانه برای توسعه‌ی مهارت‌های استدلال ریاضی دانش‌آموزان الزامی است.»

بسیاری از محققان معتقدند که به کمک مهارت‌های هندسی، به خوبی می‌توان توانایی استدلال دانش‌آموزان را سنجید (مانسون و مور[16]، ۱۹۹۷؛ مو[17]، ۱۹۹۶) و اصولاً ناتوانی استدلالی آن‌ها اغلب در این درس حس می‌شود، چرا که معمولاً اولین‌بار در این درس است که به‌طور رسمی از آن‌ها خواسته می‌شود یک حکم ریاضی را ثابت کنند.

اما همان‌طور که مانسی (۲۰۰۳) می‌گوید، برخی از آموزشگران ریاضی هم‌چون هداس، هرشوویتز و شوارتز[18] (۲۰۰۰) معتقد به لزوم کاستن از اثبات در برنامه‌ی درسی ریاضی دبیرستانی- به‌ویژه با حضور تکنولوژی- هستند. هنا[19] (a- ۲۰۰۰) نیز سه عامل زیر را برای لزوم این کاستن بیان می‌کند:

- یکی از عامل‌ها، پیشنهاد «استانداردهای ارزشیابی و برنامه‌ی درسی NCTM (۱۹۸۹)» است، که تأکید می‌کند تنها دانش‌آموزانی که برای ادامه‌ی تحصیل دانشگاهی، ریاضی را انتخاب می‌کنند، بیش‌تر در اثبات آموزش ببینند.
- عامل دیگر این‌که، بسیاری از آموزشگران اثبات را غیرضروری می‌بینند و نظریه‌های روان‌شناختی نیز بر توسعه‌ی مهارت‌های قضاوت و استدلال در دانش‌آموزان تأکید دارد تا اثبات رسمی نوشتاری.
- سومین عامل، توسعه‌ی ابزار تکنولوژی است که احساس نیاز به اثبات رسمی نوشتاری را کمرنگ‌تر کرده است و به عبارت دیگر، نرم‌افزارهای هندسی پویا[20]، تا حدودی جایگزین اثبات رسمی شده است.[21]

بنابراین همان‌طور که مانسی نیز می‌گوید، به نظر می‌رسد، «آن‌چه در اثبات رسمی نوشتاری مهم است، درک و ریاضی‌ورزیدن دانش‌آموزان است که بدون مهارت‌های استدلالی ریاضی مناسب ممکن نیست و علاوه بر این، لزومی ندارد برای این‌که دانش‌آموزان ریاضی را درک کرده و بفهمند، قادر باشند اثبات رسمی نوشتاری بنویسند.»

## نظرات پیاژه، اینهلدر و ون‌هیله[22] پیرامون توسعه‌ی مهارت استدلال هندسی در دانش‌آموزان

طبق گفته‌ی مانسی (۲۰۰۳)، پیاژه و اینهلدر (۱۹۶۷) تحقیقاتی درباره‌ی این‌که چطور کودکان ایده‌های هندسی خود را می‌سازند انجام دادند که نتیجه‌ی کار آن‌ها نشان داد که «ایده‌های هندسی در طول زمان، توسعه‌یافته و منسجم‌تر می‌شوند.» (کلمنتس و باتیستا[23]، ۱۹۹۲) و سطح پیشرفت آن‌ها براساس سن افراد و نه براساس تکنیک‌ها یا فعالیت‌های آموزشی‌شان تعیین می‌شود (فیوزی[24]، ۲۰۰۳). تحقیقات این دو نشان داد که کودکان، پیش از دبستان، قادر به بازنمایی فضای کلاس درس خود هستند و می‌توانند میان اشیا، براساس خصوصیات توپولوژیکی آن‌ها، تمایز قایل شوند، البته نمی‌توانند میان منحنی بودن یا مسطح بودن آن‌ها تفاوتی بگذارند.

علاوه بر این دریافتند که درک کودکان از فضا لزوماً برگرفته از منطق ریاضیات آن‌ها نیست و بیش‌تر از تجربه و مشاهده‌ی واقعیات صورت می‌گیرد.

پیاژه (۱۹۸۷) ادعا کرد که دانش‌آموزان براساس سه سطح (PL) در توسعه‌ی مهارت‌های اثبات و قضاوتی‌شان عمل می‌کنند که این سطوح مطابق رشد زیستی آن‌هاست. دانش‌آموزان کمتر از ۷ یا ۸ سال در سطح یک (PL1) هستند. در این سطح، آن‌ها حوادث مرتبط را مجزا می‌بینند و لزومی برای شفاف کردن نظرات خود نسبت به نقطه‌نظرات دیگران نمی‌بینند. در سطح دو (PL2) که سنین ۷ یا ۸ سال تا ۱۱ یا ۱۲ سال را شامل می‌شود، کودکان شروع به پیش‌گویی و قضاوت درباره‌ی استدلال‌هایشان می‌کنند که ممکن است این قضاوت‌ها نادرست باشند، چرا که براساس نتایج تجربی و مشاهده- و نه فرضیات- بنا شده‌اند. علاوه بر این، آن‌ها می‌توانند رخدادهای بعدی را براساس این‌که در رخداد قبلی چه اتفاقی افتاده است، به هم متصل کنند. سطح سه (PL3) شامل سنین ۱۱ـ۱۲ سال و سال‌های پس از آن می‌شود، که در آن دانش‌آموزان قادرند استدلال‌های قیاسی رسمی بیان کنند و نیاز به استدلال‌های منطقی را حس می‌کنند و اهمیت قضاوت درباره‌ی حدس‌هایشان را درک می‌کنند (کلمنتس و باتیستا، ۱۹۹۲).

در مقابل، ون هیله ادعا کرد که ۶ سطح تفکر هندسی وجود دارد که کودکان براساس آن در یادگیری هندسه پیشرفت می‌کنند. این سطوح به صورت سلسله‌مراتبی بوده و برای این‌که کودکی در هر سطحی عمل کند، باید در استدلال‌های مورد نیاز آن سطح تبحر یافته باشد و البته هر کسی که در یک سطح موفق عمل می‌کند، لزومی ندارد که در سطوح بالاتر نیز موفق باشد.

از نظر او پیشرفت در هر سطحی بیش‌تر به آموزش و تجربه وابسته است تا بر سن یا پیشرفت فیزیکی افراد. به همین سبب دانش‌آموزان دبیرستانی و حتی بزرگ‌سالان نیز، ممکن است در سطح پایینی از سطوح ون‌هیله باشند** (جونز و سووافورد[25]، ۱۹۹۷).

سنک (۱۹۸۹) تحقیقاتی درباره‌ی آمادگی دانش‌آموزان دبیرستانی برای اثبات، با توجه به سطوح ون‌هیله انجام داد که نتیجه‌ی تحقیقات او نشان داد دانش‌آموزانی که هندسه را در سطح ۱ آغاز کرده‌اند، شانس کمتری برای یادگیری نوشتن اثبات دارند و آن‌ها که از سطح ۲ آغاز کرده‌اند ۳۳٪ و کسانی که از سطح ۳ شروع کرده‌اند، ۵۰٪ شانس موفقیت در یادگیری نوشتن اثبات دارند و دانش‌آموزانی بیش‌ترین پتانسیل موفقیت در اثبات را با شروع هندسه‌ی دبیرستانی دارند که در سطح ۴ یا دیرتر هندسه را آغاز کرده‌اند. طبق نتیجه‌ی این تحقیقات، دانش‌آموزان سطح ۴، با پایان رشته ۵۷٪ مهارت در اثبات می‌یابند و کسانی که سطح استدلالی‌شان در سطح ۵ است- هر چند تعداد افرادی که سال را با این سطح آغاز کرده‌اند، اندک است- ۸۵٪ مهارت در اثبات می‌یابند. این نتایج، نظریه‌ی ون‌هیله را تأیید می‌کرد که دانش‌آموزان موفق در اثبات در سطح ۵ اند و سطح ۴ جایگاه دانش‌آموزانی است که شروع به یادگیری اثبات رسمی یا غیررسمی می‌کنند. سنک (۱۹۹۷) تأکید کرد دانش‌آموزانی که در حال گذراندن هندسه‌ی دبیرستانی هستند، باید حداقل در سطح ۳ یا بالاتر از آن باشند تا شانس موفقیت بیش‌تری برای یادگیری نوشتن اثبات پیدا کنند. درحقیقت بسیار مهم است که دانش‌آموزان، قبل از این‌که مشغول رشته‌های هندسی به شدت متمرکز بر اثبات بشوند، به سطح لازم برای تفکر هندسی دست پیدا کرده باشند (مانسون و مور، ۱۹۹۷).

## نتیجه‌گیری

همان‌طور که بیان شد، تفکر نقادانه و استدلال به عنوان مهارت‌هایی ضروری برای هر فرد و نیز به عنوان پیش‌نیاز برای یادگیری اثبات ریاضی مطرح‌اند. ریاضیات و به‌خصوص هندسه نیز به‌عنوان بسترهایی مناسب جهت تقویت این مهارت‌ها معرفی شدند. اما استانداردهای NCTM (۲۰۰۰) تأکید می‌کند که هندسه نباید به صورت یک دیسیپلین مجزا، تنها در دبیرستان آموزش داده شود و باید در برنامه‌ی درسی تمام پایه‌ها گنجانده شود. لذا با توجه به این امور و نیز نظریاتی که مؤید این است که

ایده‌های هندسی دانش‌آموزان به صورت سلسله مراتبی ـ براساس سن یا تجربه‌ی آموزشی افراد ـ رشد می‌کند، توجه به نکته‌ی اساسی زیر، ضروری به‌نظر می‌رسد:

معلمان ریاضی ـ به‌ویژه معلمان پایه‌های ابتدایی ـ باید باور کنند که مهارت‌های استدلالی و انتقادی دانش‌آموزان باید به کمک آن‌ها و خصوصاً در سنین پایین‌تر شکل گرفته و توسعه یابد و همان‌طور که دکتر شیوا زمانی (۱۳۸۵) اشاره می‌کند، «باید به تفاوت‌های فردی افراد و علایق آن‌ها در هر زمینه توجه داشت و با در نظر گرفتن سن و معلومات پایه‌ای افراد، از آن‌ها انتظار اثبات و استدلال داشت» و به‌علاوه پذیرفت که «نوع و شکل دلیل آوردن برای یک موضوع در سنین مختلف متفاوت است و وظیفه‌ی ما معلمان ریاضی است که در هر سنی که تدریس می‌کنیم، منطق دانش‌آموزان را ـ هر چند اندکی ناچیز ـ به سمت منطقی که مورد قبول ریاضیات، عقل سلیم و جامعه است، آرام آرام هدایت کنیم» (چمن‌آرا، ۱۳۸۵) و همواره توجه داشته باشیم که، «یکی از اهداف اصلی آموزش، تربیت افراد منطقی است.»[۴]

**زیرنویس‌ها**

* این مقاله، با راهنمایی استاد گرامی، سرکار خانم دکتر زهرا گویا تهیه شده است.

**1.** National Council for Excellence in Critical Thinking Instruction

**2.** David Tall

**3.** In the Future World of Work

**4.** Logical Reasoning

**5.** Idealize

**6.** Critical Thinking

**7.** Ennis, R. H.

**8.** Lipman

**9.** Socratic Questioning

**10.** Procedures

**11.** National Council Of The achers Of Mathematics

**12.** Proving Science

**13.** Oldenburg & Freiburg

**14.** Mansi, Kate Elizabeth

**15.** Edwards

**16.** Manson & Moore

**17.** Mu

**18.** Hadas, Hershkowitz & Schwartz

**19.** Hanna, Gila

**20.** Dinamic Software

۲۱. اثبات قضیه‌ی چهار رنگ و آخرین قضیه‌ی فرما به کمک تکنولوژی، شاهدی بر این ادعاست.

**22.** Piaget, Inhelder & Van Hiele

**23.** Clements & Battista

**24.** Fusey

**25.** Jones & Swafford

** از آن‌جا که این مقاله فرصتی برای معرفی این ۶ سطح ندارد، لذا نظر علاقمندان به آشنایی بیش‌تر با سطوح ون‌هیله را به منبع ۱۳ و مقاله‌های مرتبط با نظریه‌ی ون‌هیله که در شماره‌های مختلف مجلات رشد آموزش ریاضی چاپ شده است، جلب می‌کنم.

**منابع**


۱. تال، دیوید. (۱۹۸۹). ماهیت اثبات ریاضی. مترجم: عرفان صفر (۱۳۸۵). **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۸۳ (ویژه‌نامه اثبات)، صص ۱۱ تا ۱۷، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۲. چمن‌آرا، سپیده. (۱۳۸۴). **روش تدریس ریاضی مبتنی بر نظریه‌ی ساخت‌وسازگرایی**. پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی.

۳. راس، کنت. (۲۰۰۰). ریاضی ورزیدن و اثبات: جایگاه الگوریتم‌ها و اثبات در ریاضیات مدرسه‌ای. مترجمان: فاطمه مرادی و محبوبه شریعتی (۱۳۸۵). **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۸۳ (ویژه‌نامه اثبات)، صص ۳۰ تا ۳۳، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۴. میزگرد «اثبات». **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۸۳ (ویژه‌نامه اثبات)، صص ۴۷ تا ۶۱، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۵. جلیلی، میرزا. (۱۳۸۵). اثبات در یک دستگاه ریاضی. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۸۳ (ویژه‌نامه اثبات)، صص ۲۲ تا ۲۴، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۶. رضائی، مانی. (۱۳۸۵). گام برداشتن در مسیر حدس، کشف و اثبات. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۸۳ (ویژه‌نامه اثبات)، صص ۲۵ تا ۲۹، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۷. غلام‌آزاد، سهیلا و گویا، زهرا. (۱۳۸۵). نقش اثبات در برنامه‌ی ریاضی درسی مدرسه‌ای. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۸۳ (ویژه‌نامه اثبات)، صص ۴ تا ۱۰، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۸. گویا، زهرا. (۱۳۸۵). چرا ویژه‌نامه‌ی «اثبات»؟ یادداشت سردبیر. **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۸۳ (ویژه‌نامه اثبات)، صص ۲ و ۳، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۹. هاشمیان‌نژاد، فریده. (۱۳۸۰). پرورش تفکر انتقادی از طریق برنامه‌ی درسی دوره‌ی ابتدایی. **مجموعه مقالات ارائه شده در همایش برنامه درسی و پرورش تفکر (انجمن برنامه درسی ایران)**، گردآورنده: حسن ملکی (۱۳۸۳).

10. Dictionary Of Psychology. Arthurs. Rober. P. 177.

به نقل از اکرمی، سید کاظم (۱۳۸۰). فرهنگ اسلامی، برنامه درسی و تفکر. **مجموعه مقالات ارائه شده در همایش برنامه درسی و پرورش تفکر (انجمن برنامه درسی ایران)**، گردآورنده: حسن ملکی، (۱۳۸۳).

**11.** http://www.org/past/maa-nctm.html

**12.** Jones, R. P. (2001). **Foundation Of Critical Thinking**. Harcourt College Publisher.

**13.** Mansi, K. E. (2003). **Reasoning and Geometric Proof In Mathematics Education: A Review Of The Litrature**. (Under The Direction of dr. Hollylynne Stohl). A Thesis Submitted To The Graduate Faculty Of North Carolina State University In Partial Fulfillment Of The Degree Of Master Of Science.

**14. National Council for Excellence in Critical Thinking Instruction** (NCECT) Statement Of Policy And Principles. NCECT Founding Principles. Http://www.criticalthinking.org

**15.** National Council Of Teachers Of Mathemetics. (2000). **Principles and Standards For School Mathematics**. Reston, VA: National Council Of Teachers Of Mathemetics.

**16.** Oldenburg, K. R. & Freiburg, A. R. (2002). Learning to Prove: The Idea Of Heuristic Examples. **ZDM**.

**17.** Paul, R. & Elder, L. & Bartell, T. (1997). A Brief History of the Idea of Critical Thinking. Http://www.criticalthinking.org/resources/books