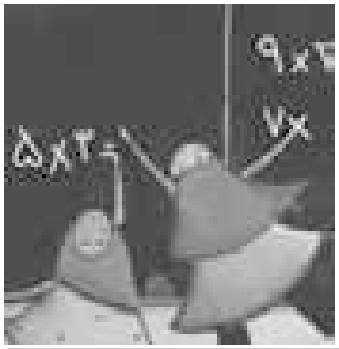
چکیده

در این مقاله، توسعه‌ی مفاهیم ریاضی در طول زمان مورد ملاحظه قرار گرفته است. ارجاع ویژه‌ای به تغییر توجه از رویه‌های قدم به قدمی که در یک زمان اجرا می‌شوند، به سمت یک نمادگرایی که می‌تواند به‌عنوان هستی‌های ذهنی که بر روی کاغذ یا در ذهن مورد استفاده قرار گیرد، داده می‌شود. با استفاده از دیدگاه‌های نظری مختلف از جمله مدل SOLO و نظریه‌های گوناگون ساخت‌وساز مفهوم، مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند تا چرخه‌ی بنیادینی که زیربنای ساختن مفاهیم است و به راه‌های مختلف در سرتاسر یادگیری ریاضی اتفاق می‌افتد، آشکار شود.



چرخه‌ی بنیادین ساخت مفهوم: زیربنای چارچوب‌های نظری گوناگون

نویسندگان: جان پگ، مرکز ملی سیمر (SIMERR)[1] دانشگاه نیو انگلند
دیوید تال، مرکز تحقیقات آموزش ریاضی دانشگاه وارویک
مترجمان: حسین عبدی، دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه شهید باهنر کرمان
محمد رضا فدایی، دانشگاه شهید باهنر کرمان
زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

در خلال سال‌های اخیر، نظریه‌های گوناگونی برای توضیح و پیش‌بینی توسعه‌ی شناختی در آموزش ریاضی ابداع شده‌اند، تمرکز این مقاله بر فراهم کردن جایگاه بحثی فراتر از یک مقایسه‌ی ساده بین جزئیات موجود در نظریه‌های مختلف است تا بتوانیم به سوی شناسایی شالوده‌های عمیق‌تر موضوعاتی که ما را در کسب آگاهی نسبت به مباحث مربوط به یادگیری ریاضی قادر می‌سازد، حرکت کنیم. به‌خصوص، تمرکز بر تحلیل چرخه‌های اساسی یادگیری، بنیانی تجربی فراهم می‌کند تا بتوان با اتکاء به آن، سؤال‌های مهمی را در ارتباط با یادگیری ریاضی مطرح کرد و باید که این کار انجام شود.

برای کمک به پرداختن به این تمرکز که مورد نظر مقاله است، بین دو نوع نظریه‌ی رشد شناختی تمایز قایل می‌شویم:

● **چارچوب‌های عمومی رشد بلندمدت فرد**، مانند نظریه‌ی مرحله‌ای پیاژه (به‌عنوان مثال، به منتخب آثار پیاژه که توسط گرابر و ونچه در سال ۱۹۷۷ ویرایش شده، مراجعه کنید)؛ نظریه‌ی توسعه‌ی هندسی فن‌هیلی‌ها (۱۹۸۶)، یا نظریه‌ی توسعه‌ی بلندمدت مراحل مجسم، نیمه‌مجسم- نمادین برونر (۱۹۶۶).

● **چارچوب‌های موضعی رشد مفهومی** مانند نظریه‌ی عمل- فرایند- شیء- طرحواره‌ی دوبینسکی (سزارنوچا[2]، دوبینسکی، پرابهو[3] و ویداکوویچ[4]، ۱۹۹۹) یا دنباله‌ای از مراحل تک‌ساختاری- چندساختاری- رابطه‌ای- تک‌ساختاری در مدل SOLO[5] (ساختار نتایج مشهود یادگیری، بیگزوکولیس، ۱۹۹۱، پگ، ۲۰۰۳).

بعضی نظریه‌ها (مانند نظریه‌های پیاژه، فن‌هیلی و مدل کامل SOLO) شامل هر دو چارچوب عمومی و موضعی می‌شوند. نظریه‌ی مجسم- نیمه‌مجسم- نمادین برونر، یک چارچوب رشد تحولی را صورت‌بندی می‌کند که در مراحل بعدی، به سه راه مختلف نزدیک شدن موضوعات داده شده منجر می‌شود. نظریه‌های دیگری مانند نظریه‌ی تجسم‌یافته‌ی لکاف و نونز (۲۰۰۰) یا نظریه‌ی یادگیری موقعیت- مدار لیو و ونگر[7]

جدول ۱ ـ مراحل عمومی تحول شناختی

مراحل پیاژه	سطوح فن هیلی (هافر، ۱۹۸۱)	مدل SOLO	مدل‌های برونر
حسی- حرکتی پیش عملیاتی عملیات عینی (محسوس) عملیات صوری	I. تشخیص II. تجزیه و تحلیل III. ترتیب IV. استنتاج V. دقت	حسی- حرکتی تصویری (نیمه مجسم) عینی نمادین صوری فراصوری	مجسم نیمه مجسم نمادین

(۱۹۹۰)، با جدیت بیش تری به ساختارهای زیستی یا اجتماعی دخیل در یادگیری ریاضی پرداخته اند. (جدول ۱)

نظریه های عمومی، به رشد بلندمدت فرد اشاره دارند که اغلب، با نخستین تعامل فیزیکی کودک با دنیای واقعی شروع می شود و به تدریج که کودک بالغ می شود، از طریق ایجاد راه های جدید عمل و تفکر، توسعه می یابد. در جدول ۱، چهار چارچوب نظری عمومی ارائه شده اند.

یک مثال از نوع تحولی که این دیدگاه های کلی در بر دارند را می توانید در معانی مرتبط با پنج حالت مدل SOLO ببینید که در جدول ۲، خلاصه شده اند (پگ، ص ۲۴۲، ۲۰۰۳).

جدول ۲ـ توصیف حالت ها در مدل SOLO

حسی- حرکتی (کمی پس از تولد)	فرد نسبت به محیط فیزیکی عکس العمل نشان می دهد. در این حالت نوزاد مهارت های حرکتی را اکتساب می نماید. وقتی که برای انجام ورزش های مختلف، مهارت های مرتبط به آن ها ایجاد می شوند، این مهارت ها در زندگی آینده نقش مهمی را ایفا می کنند.
تصویری (از دو سالگی)	شخص، اعمال را به شکل تصاویر، درونی سازی می کند. در این حالت است که خردسال، کلمات و تصاویری را می سازد که می توانند به جای اشیاء و رویدادها قرار گیرند. در بزرگسالان، این حالت باعث می شود تا آن ها، قدردان هنر و موسیقی شوند و دانشی شکل گیرد که دانش «شهودی» نامیده می شود.
عینی نمادین (از ۶ یا ۷ سالگی)	شخص از طریق استفاده از یک نظام نمادین مانند زبان نوشتاری و اعداد، به تفکر می پردازد. در دوره های آخر ابتدایی و دوره ی متوسطه، ارجاع به این حالت، بیش از سایر حالت ها، در یادگیری مرسوم است.
صوری (از ۱۵ یا ۱۶ سالگی)	شخص مفاهیم انتزاعی تری را مورد ملاحظه قرار می دهد. این امر می تواند بر حسب کار با «اصول» و «نظریه ها» توصیف شود. در این حالت، دانش آموزان دیگر تنها به ارجاعات عینی محدود نیستند. در شکل پیشرفته تر آن، این حالت، شامل ایجاد و توسعه ی دیسیپلین ها [حوزه های معرفتی] می شود.
فراصوری (احتمالاً در حدود ۲۲ سالگی)	شخص قادر است که ساختاربنیادی نظریه ها و حوزه های علمی را مورد سؤال یا چالش قرار دهد.

زیربنای این دیدگاه‌های عمومی، تحول زیستی فرد است. نوزاد با یک نظام حسی پیچیده‌ی در حال رشد، متولد می‌شود و با دنیای واقعی تعامل برقرار می‌کند تا پیوندهای نافذ و پیچیده‌ای بین تصورات و اعمال خود ایجاد کند و بین آن‌ها، هماهنگی به‌وجود آورد. توسعه‌ی زبان، باعث معرفی کلمات و نمادهایی می‌شود که می‌توانند بر تمرکز بر جنبه‌های مختلف و دسته‌بندی مشابهت‌های اساسی، برای ساختن مفاهیم به‌طور فزاینده پیچیده، مورد استفاده قرار گیرند.

چون بعضی از نویسندگان علاقه‌مند هستند به این‌که بدانند چگونه حالت‌های متوالی، راه‌های جدیدی را برای عمل معرفی می‌کنند که جایگزین حالت‌های قبلی می‌شوند، مدل SOLO، به‌وضوح، هر حالتی را درون حالت بعدی جای می‌دهد تا خزانه‌ای هرچه غنی‌تر از حالت‌های پیچیده‌تر و ظریف‌تر عملیات برای یادگیرنده قابل دسترسی باشد. هم‌زمان با این، تمام حالت‌های به‌دست آمده، برای استفاده‌ی مناسب، در دسترس باقی می‌مانند. این امر، هم‌چنین در حالت‌های مجسم- نیمه‌مجسم- نمادین برونر نیز منعکس است که این حالت‌ها به ترتیب در کودک ایجاد می‌شوند، اما از آن به بعد، همه‌ی حالت‌های کسب‌شده به‌طور هم‌زمان، در دسترس باقی می‌مانند.

درنتیجه، در هر بحثی که درباره‌ی نظریه‌های موضعی یادگیری مفهومی انجام می‌شود، ضروری است که توسعه‌ی راه‌های به لحاظ کیفی متفاوت تفکر که برای فرد قابل دسترس هستند، در نظر گرفته شوند به طور خاص در حالت‌های بعدی، مانند حالت‌های عملیات صوری یا عینی- نمادین، حالت‌های حسی- حرکتی و تصویری تفکر نیز برای ارایه‌ی یک دیدگاه بدیل، در دسترس دانش‌آموز قرار دارد.

چرخه‌های موضعی

چرخه‌های موضعی توسعه‌ی مفهومی، به یک جنبه‌ی مفهومی خاص مرتبط است که در آن، یادگیرنده تلاش می‌کند تا اطلاعات در دسترس را بفهمد و با استفاده از تمام ساختارهای شناختی در دسترس خود در آن زمان، ارتباطاتی ایجاد نماید. در یادگیری مفاهیم خاص نظریه‌های فردی تفسیر خاص خود را از چرخه‌ها دارند که به‌وضوح، با مفهوم مورد بحث مرتبط است.

به دنبال تمایز قایل شدن پیاژه بین انتزاع تجربی (از خواص اشیای تصور شده) و انتزاع شبه‌تجربی (از خواص اَعمال بر اشیای تصور شده)، گری وتال (۲۰۰۱) بدین نتیجه رسیدند که (حداقل) سه راه مختلف برای ساختن مفاهیم ریاضی وجود دارد: از تمرکزی بر ادراک[9] اشیاء و خواص آن‌ها همان‌طور که در هندسه رخ می‌دهد؛ از عمل بر اشیایی که ماهیت نمادین دارند و نمادها و خواص آن‌ها در یک طرحواره‌ی عملیاتی از فعالیت‌ها تعبیه شده‌اند؛ همان‌گونه که در حساب و جبر چنین است؛ و بالاخره تمرکز بعدی بر خود خواص که به نظریه‌های اصل موضوعی صوری منتهی می‌شود. با این وجود، این سه راه مختلف ساخت‌وساز مفهوم، هر سه از نقطه‌ای پی‌ریزی می‌گردند که یادگیرنده، یک موقعیت اندکی پیچیده را مشاهده می‌کند، سپس ارتباطی بین اجزای این موقعیت برقرار می‌نماید، و روابطی می‌سازد تا انگاره‌های پیچیده‌تری بسازد. این تعبیر از تحول، به یک چرخه‌ی بنیادین ساخت‌وساز دانش منجر می‌گردد.

مشابه همین چرخه در مدل SOLO نیز صورت‌بندی شده‌است تا نتایج یادگیری قابل مشاهده‌ی افراد را که به سؤال‌های مختلف در زمینه‌های وسیع و متنوع پاسخ می‌دهند، دربر گیرد. چارچوب SOLO می‌تواند در زیر چتر جامع مدل‌های نوپیاژه‌ای[10] قرار گیرد. این مدل، به عنوان عکس‌العملی به بی‌کفایتی‌های مشاهده‌شده در چارچوب پیاژه شکل گرفت، آن‌جا که در مدل انتظار می‌رود کودک، در سطوح مختلف، تکالیف مختلفی را که ظاهراً در یک سطح هستند، انجام دهد و پیاژه آن را ناهمترازی (decalage) نامید (بیگز و کولیس، ۱۹۸۲). این مدل، با بخش‌هایی از نظریه‌های کیس (۱۹۹۲)، فیشر (به فیشر و نایت، ۱۹۹۰، مراجعه کنید) و هالفورد (۱۹۹۳) اشتراک زیادی دارد.

برای فهم بهتر موضوع ناهمترازی، لازم است گفته شود که مدل SOLO به جای تمرکز بر سطح تفکر یا مرحله‌ی تحول ذهنی دانش‌آموزان، بر پاسخ‌های آنان متمرکز شده است. این، نشان‌دهنده‌ی یک وجه تمایز اساسی بین SOLO و کار پیاژه و دیگران است که در آن، تمرکز SOLO بر توصیف ساختار پاسخ است، نه بر بعضی از ساخت‌های مراحل تحول شناختی یک فرد. قدرت SOLO این است که این مدل، چارچوبی ارایه می‌دهد تا امکان ارایه‌ی تفسیری سازگار از ساختار و کیفیت پاسخ‌های تعداد زیادی از دانش‌آموزان را در سرتاسر محیط‌های گوناگون یادگیری در چندین حوزه‌ی موضوعی فراهم کند.

چارچوب «موضعی» پیشنهاد شده توسط مدل SOLO، شامل چرخه‌ای بازگشتی از سه سطح است. در این تفسیر، به مرحله‌ی اول چرخه، سطح تک‌ساختاری[11] پاسخ (U) اطلاق شده است و بر مسأله یا حوزه متمرکز است، اما فقط از یک بخش از داده‌ی مرتبط استفاده می‌کند. سطح چندساختاری[12] پاسخ (M) دومین سطح است و بر دو یا چند داده تمرکز دارد بدون آن‌که هیچ گونه رابطه‌ای بین آن‌ها درک شود و هیچ تلفیقی بین اجزای مختلف اطلاعات وجود داشته باشد. سطح سوم، سطح رابطه‌ای[13] پاسخ (R) است که بر تمام داده‌های در دسترس متمرکز است به گونه‌ای که هر داده، در موزائیک کلی روابط تنیده شده است تا به کل، ساختاری منسجم بدهد.

هنگامی که این سه سطح تک‌ساختاری، چندساختاری، و رابطه‌ای با هم در نظر گرفته شوند، چرخه‌ی یادگیری UMR نامیده می‌شوند. این سطوح، در داخل زمینه‌ای وسیع‌تر تدوین شده‌اند که با یک سطح مقدم پیش‌ساختاری[14]، پاسخ به یک مسأله‌ی خاص که حتی به سطح تک‌ساختاری نرسیده و یک سطح کلی انتزاع تعمیم‌یافته[15] که در آن، کیفیت‌های سطح رابطه‌ای در داخل تصویری بزرگ‌تر که ممکن است پایه‌ی چرخه‌ی بعدی ساخت‌وساز باشد، قرار می‌گیرد.

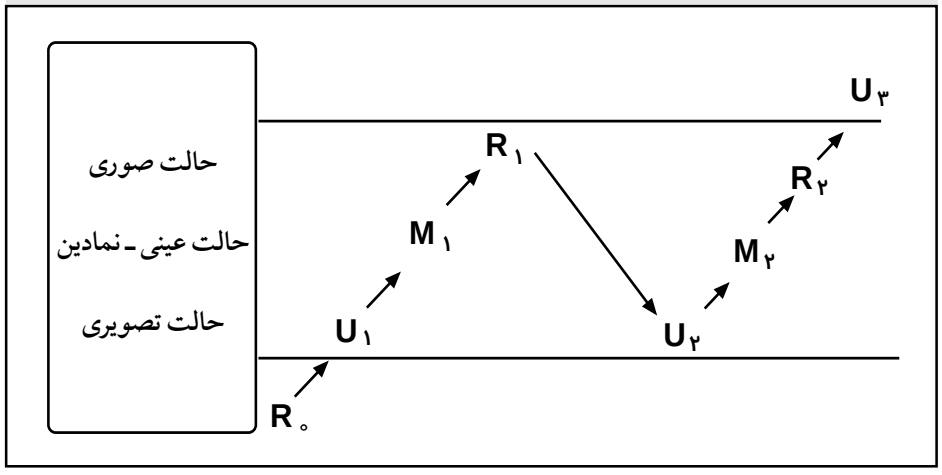
در نخستین توصیف طبقه‌بندی SOLO، بیگز و کولیس (۱۹۸۲) تذکر دادند که ممکن است چرخه‌ی UMR بر سطوح مختلف عمل کند. برای مثال، آن‌ها این چرخه را با چارچوب عمومی بلندمدت نظریه‌ی مرحله‌ای پیاژه مقایسه نموده و نظر دادند که «سطوح پیش‌ساختاری، تک‌ساختاری، چندساختاری، رابطه‌ای و انتزاع تعمیم‌یافته، با مراحل حسی‌ـ حرکتی، پیش عملیاتی، عینی اولیه، عینی میانی، تعمیم عینی و عملیات صوری، همسان[16] اما به‌طور منطقی، متمایز هستند» (منبع بالا، ص ۳۱). البته به اعتقاد آن‌ها، در نظر گرفتن دنباله‌ی UMR که در هر یک از حالت‌های متوالی SOLO رخ می‌دهد، بیش‌تر ارزش عملی دارد، چنان‌که یک چرخه‌ی UMR در یک حالت، می‌تواند مبنای انتزاع تعمیم‌یافته‌ی حالت بعدی شود (منبع بالا، جدول ۱۰ـ۱، ص ۲۱۶). این موضوع، چارچوبی ارایه می‌دهد تا بتوان پاسخ‌ها را به ترکیبی از یک سطح مفروض در یک حالت مفروض منتسب کرد.

متعاقباً، پگ (۱۹۹۲) و پگ و دیوی[17] (۱۹۹۸)، مثال‌هایی از حداقل دوچرخه‌ی UMR در حالت عینی‌ـ نمادین نشان دادند که پاسخ سطح رابطه‌ای در یک چرخه، به یک پاسخ سطح تک‌ساختاری در چرخه‌ی بعدی در درون همان حالت تبدیل شد. این مشاهده، دوباره ای نظریه را بر چرخه‌های کوچک‌تر تشکیل مفهوم درون حالت‌های مختلف متمرکز کرد.

با استفاده از این یافته، پاسخ‌های قبل از پاسخ‌های رابطه‌ای، می‌توانند تبدیل به یک سطح تک‌ساختاری جدید شوند که سطح اول یک چرخه‌ی UMR پیچیده‌تر را نمایش می‌دهند. این چرخه‌ی جدید، ممکن است به عنوان یک چرخه‌ی اضافی رشد در داخل همان حالت واقع شود. به همین ترتیب، ممکن است چرخه‌ای را در حالت بعدی به‌دست آمده، نشان دهد. این دو امتحان، در شکل ۱ نشان داده شده‌اند.

برای باز کردن بیش‌تر این ایده، ابتدا نیازمندیم ببینیم که تفکر

شکل ۱ : نمایش نموداری سطوح مرتبط با حالت عینی‌ـ نمادین



در حالت تصویری و تفکر در حالت عینی ـ نمادین به چه معناست. حالت تصویری درگیر «نمادین» کردن جهان از طریق زبان شفاهی است، این حالت با تصویربرداری ذهنی از اشیا مربوط بوده و تفکر می‌تواند به‌عنوان قضاوت‌های شهودی یا متکی بر قضاوت‌های مبتنی بر تصورات توصیف شود.

برای حالت عینی ـ نمادین، جنبه‌ی «عینی» با لزوم اجرا در آن مرتبط است تا عینیت خود را از وقایع دنیای واقعی بگیرد. جنبه «نمادین» به جایی وابستگی دارد که فرد، از طریق به‌کار بردن و دست‌ورزی با نظام‌های نمادین مانند زبان نوشتاری، اعداد و علایم مکتوب موسیقی به تفکر می‌پردازد. این حالت برای دانش‌آموزان سنین حدود ۵ تا ۶ سالگی، قابل دسترس است. تصاویر و کلماتی که بر تفکر در حالت تصویری تفوق داشتند، هم‌اکنون به صورت مفاهیم مرتبط با دنیای واقعی تکامل می‌یابند. با نمادها (که اشیاء یا مفاهیم را بازنمایی می‌کنند)، می‌توان طبق قوانین منسجمی، بدون ارجاع مستقیم به آنچه بازنمایی می‌کنند، استفاده کرد لذا، غرقه‌شدن در این حالت، نتیجه‌اش توانایی ارایه‌ی توصیف‌های نمادین از جهان تجربه شده است که توسط دیگران، قابل درک و قابل ارتباط برقرار کردن است.

به عنوان مثالی عملی برای شکل (۱)، اجازه دهید که بر تحول مفهوم عدد متمرکز شویم. در حالت تصویری، کودک از لحاظ کلامی در حال رشد است، به اشیاء نام می‌دهد و درباره‌ی آنچه می‌بیند، حرف می‌زند. در این حالت، اعداد از طرحواره‌ـ عملِ شمارش، به‌مفهوم عدد، توسعه می‌یابند، مستقل از این که شمارش چگونه انجام شده است به صفت تبدیل می‌شوند، مانند تشخیص مجموعه‌ای از سه فیل، و توانایی ترکیب این مجموعه، با مجموعه‌ای شامل دو فیل، و به دست آوردن پنج فیل.

اگر حالت عینی ـ نمادین را برای مفهوم عدد در نظر بگیریم، موقعیت اعداد از صفت‌ها به اسم‌ها تبدیل می‌گردد؛ یعنی به یک نماد که به خودی‌خود با معناست و می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد، بدون زمینه و قابل تعمیم است. یک پاسخ سطح تک‌ساختاری در اولین چرخه، توانایی استفاده از یک عمل برای پاسخ دادن به مسایل ساده‌ی مکتوب مانند ۳+۲ را بدون ارجاع به زمینه و به‌وسیله‌ی اجرای یک رویه‌ی حسابی مناسب، در نظر می‌گیرد. یک پاسخ چندساختاری، دربرگیرنده‌ی چندعملیات با اعداد شناخته شده است که می‌توانند به ترتیب، اجرا گردند. سطح نهایی در چرخه‌ی اول وقتی کامل می‌شود که دانش‌آموزان بتوانند پاسخ‌های عددی متعددی برای این سؤال که «اگر پاسخ به یک سؤال جمع ۵ باشد، سؤال‌های ممکن چه می‌توانند باشند» تولید کنند.

دومین چرخه در حالت عینی ـ نمادین برای عدد، اعداد را به شکل حرکت اعمال‌شده بر چیزهایی می‌بیند که دانش‌آموز با آن‌ها، تجربه‌ی مستقیم دارد. در سطح تک‌ساختاری، یک عمل واحد می‌تواند بر اعداد بزرگ‌تری اجرا گردد؛ یا با کاهش نیاز به حافظه‌ی کاری، بسیاری از اعمال به طور خودکار اجرا می‌شوند. پاسخ سطح چندساختاری، انتظار دارد که دانش‌آموزان بتوانند از عهده‌ی انجام یک‌سری محاسبات برآیند. آنچه در اینجا مهم است نیاز به تکلیف‌هایی است که مبنای متوالی داشته باشند.

سرانجام، سطح رابطه‌ای در این چرخه‌ی دوم، دغدغه‌ی مروری از دستگاه عددی را دارد. این امر در موقعی که دانش‌آموزان، تکلیف‌های غیر متوالی حساب را با موفقیت انجام می‌دهند و قادرند براساس الگوهای تجربه‌شده‌ی حسابی، یک حالت تعمیم‌یافته را ارایه دهند، مشهود است. اما آن‌چه که مورد بحث است این است که پاسخ، به دنیای واقعی گره خورده است و شامل در نظر گرفتن امکانات، شرایط یا محدودیت‌های بدیل نیست. در مدل SOLO این در نظر گرفتن، فقط هنگامی ظاهر می‌شود که سطح پاسخ، به حالت بعدی کارکرد که از آن به‌عنوان حالت صوری یاد می‌شود، وارد گردد. ارزش اهمیت دادن به چرخه‌های اولیه‌ی UMR، اجازه می‌دهد که «اعتبار» وسیع‌تری به پاسخ‌های سؤالات پیچیده‌تر داده شود. برای مثال، بیگز و کولیس (۱۹۸۲) پرسشی طرح کردند که دانش‌آموزان، ملزم بودند مقدار x را در معادله‌ی زیر پیدا کنند:

$(x \times 9) \div (72 \times 9) = (36 \div 72)$

پاسخ‌های دانش‌آموزان به این سؤال که نشان می‌دهد آن‌ها، توانایی کار با حساب را دارند، صرف‌نظر از درک کیفیت‌های اساسی خود مسأله، می‌توانند به صورت اولین چرخه‌ی UMR طبقه‌بندی شده و به‌ترتیب به‌عنوان U_1 ، M_1 ، R_1 ، ثبت گردند که به‌طور ساده، عبارتند از:

U_1 : توجه کردن به تنها یک جنبه‌ی مسأله، مثلاً «این معادله، چه ارتباطی با ضرایب ۹ دارد؟»

M_1 : توجه کردن به بیش از یک جنبه‌ی مسأله مثلاً «۴۹ و ۷۲ها در هر دو طرف معادله هستند.»

R_1 : ارایه‌ی یک حدس خوب فکر شده[۱۸]، مثلاً «۳۶ـ زیرا هر دو طرف به ۳۶ نیاز دارد.»

دومین چرخه‌ی UMR (که به شکل $U_۲$ و $M_۲$ و $R_۲$ ثبت شده)، شامل به‌کارگیری یک یا چند عملیات برای یافتن یک راه‌حل است:

$U_۲$: یک محاسبه؛ مثلاً «۲ = ۳۶ ÷ ۷۲»؛

$M_۲$: مشاهده‌ی بیش از یک عمل که ممکن است با خطا اجرا شوند؛

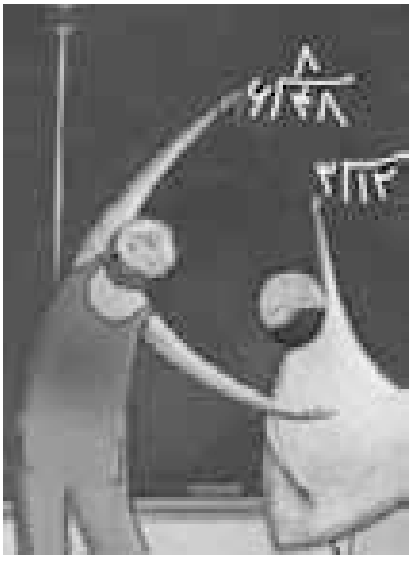
$R_۲$: دیدن الگوها و ساده کردن؛ مثلاً حذف ۹ از صورت و مخرج سمت راست.

به‌علاوه، پاسخ‌هایی که فراتر از حالت عینی ـ نمادین‌اند و می‌توانند به‌عنوان پاسخ‌های حالت صوری طبقه‌بندی شوند توسط دانش‌آموزانی ارایه می‌شود که بر مبنای الگوهای زیربنایی حساب، دیدی کلی و شفاف نسبت به مسأله داشته باشند، از ساده کردن استفاده کنند، و تنها وقتی به حساب متوسل شوند که این کار، ضروری باشد. در یک برنامه‌ی درسی که تمرکز آن بر معناسازی در یک سطح و تکیه بر آن برای حرکت به سمت سطح بالاتر است، اهمیت دادن به دو یا چند چرخه از پاسخ‌ها، رده‌بندی متوالی هر حالت را به چند چرخه نشان می‌دهد. علاوه بر این، این کار این ظن را تقویت می‌کند که چرخه‌ی UMR، در ساختن مفهوم‌های جدید فعال است و این کار، زمانی رخ می‌دهد که فرد مشاهده می‌کند که در ابتدا، چه چیزی یک زمینه‌ی جدید با جنبه‌های متمایزی است که به‌طور جداگانه مورد توجه قرار گرفته‌اند، سپس به یکدیگر ملحق شده‌اند، بعد به عنوان یک مفهوم ذهنی جدید که می‌تواند در فرایند تفکری پیچیده‌تری به‌کار رود، دیده شده‌اند.

چنین نگاهی نسبت به چرخه‌های تحول شناختی، نه تنها با سنّت معرفت شناختی پیاژه و پیوندهای آن با ظرفیت حافظه‌ی فعال درعلم شناختی سازگار است، بلکه با شواهد فیزیولوژی عصبی نیز در آن، مغز زیستی بین عصب‌ها ارتباط برقرار می‌نماید، سازگار است. چنان پیوندهایی، گروه‌های عصبی را قادر می‌سازد تا با سازگاری عمل کنند و یک ساختار پیچیده‌ی ذهنی را شکل دهند که به عنوان یک هستی پیچیده‌ی منفرد[۱۹] تصور می‌شود و ممکن است به نوبه‌ی خود، موضوعی برای تأمّل باشد تا در سطحی بالاتر، بر آن عمل شود (کریک، ادلمن و تونُنی، ۲۰۰۰).

جمع‌بندی فرایند ـ شیء

یک مثال عمده ی از ساخت‌وساز مفهوم که در سرتاسر توسعه ی حساب و دست‌ورزی با نمادها در جبر، مثلثات و حسابان اتفاق می‌افتد، نمادین کردن اعمال به عنوان رویّه‌های «انجام ـ دادنی» و استفاده از نمادها برای تمرکز ذهنی آن‌ها به عنوان مفاهیم «فکر ـ کردنی[۲۱]» است. لازمه‌ی این کار، انتقال تمرکز از عمل بر اشیایی که می‌شناسیم، بر فکر کردن بر آنَ اعمال، به عنوان اشیای ذهنی قابل دست‌ورزی است. این چرخه‌ی ساخت‌وساز ذهنی به صورت‌های گوناگونی توصیف شده است که از آن جمله، می‌توان به عمل، فرایند، شیء (دوبینسکی، ۱۹۹۱)؛ درونی‌سازی، فشرده‌سازی، واقع‌انگاری (اسفارد[۲۲]، ۱۹۹۱)؛ یا رویّه، فرایند، فرهوم اشاره کرد که یک فرهوم، دربرگیرنده‌ی یک نماد مانند ۲+۳ است که



در جریان توسعه‌ی تفکر ریاضی، چنین چرخه‌های ساخت‌وسازی بارها و بارها رخ می‌دهند؛ از فشرده‌سازی طرحواره ـ عمل شمارش گرفته که به مفهوم عدد منجر می‌شود تا حساب جمع، ضرب، توان‌ها، کسرها، اعداد صحیح، اعداد اعشاری که از طریق دست‌ورزی با نمادها در حساب، جبر، مثلثات و حسابان انجام می‌شود و بالاخره از آن‌جا تا تفکر ریاضی در سطوح پیشرفته جلو می‌رود. در هریک از این موارد، یک چرخه‌ی موضعی از شکل‌گیری مفهوم در ساختن مفاهیم خاص ریاضی وجود دارد

می‌تواند به‌طور دوجانبه، به عنوان فرایند یا مفهوم عمل کند (گری وتال، ۱۹۹۱، ۱۹۹۴). هریک از این نظریه‌های «فرایند ـ شیء»، عمدتاً بر اساس ایده‌ی «تجرید بازتابی» پیاژه بنا شده است که در آن، اعمال بر اشیای موجود یا معلوم، به عنوان فرایند درونی می‌شوند و سپس، به‌صورت اشیای ذهنی تفکر در می‌آیند.

طی سال‌ها، پژوهشگران بعد از پیاژه از جمله دیینز (۱۹۶۰)، دیویس(۱۹۸۴)، و گرینو(۱۹۸۳) درباره‌ی سازوکاری که به وسیله‌ی آن، اعمال تبدیل به اشیای ذهنی می‌شوند، نظریه‌پردازی کردند. دیینز از یک تمثیل زبان‌شناختی استفاده کرد و ملاحظه کرد که چگونه مُسند در یک جمله، ممکن است نهاد جمله‌ای دیگر باشد. دیویس به این نکته توجه کرد که رویه‌های ریاضی، از دل دنباله‌ای از اعمال‌زاده می‌شوند که وی آن‌ها را «دنباله‌های به‌طور بصری تعدیل شده» (VMS)[۲۳] نامید که در آن‌ها، هرگام بی‌درنگ، گام بعدی را به‌یاد می‌آورد تا جایی که آشنایی با این گام‌ها، این امکان را می‌دهد که تمام، آن‌ها، به عنوان یک فرایند کامل دریافت شده و به آن، به عنوان یک وجود ذهنی فکر شود. گرینو با استفاده از یک پردازش اطلاعات[۲۴] بر روشی متمرکز شده است که در آن، یک رویه ممکن است ورودی رویه‌ی دیگری شود و از آن به بعد، به عنوان یک «هستی مفهومی» دریافت شود.

دوبینسکی، انتقال از عمل به اشیای ذهنی را به عنوان بخشی از نظریه‌ی Apos(عمل ـ فرایند ـ شیء ـ طرحواره) خود توصیف کرد که در آن، اعمال به عنوان فرایندها درونی‌سازی می‌شوند، سپس، به عنوان اشیائی در درون یک طرحواره‌ی بزرگ‌تر در نظر گرفته می‌شوند (دوبینسکی، ۱۹۹۱). اندکی بعد، تأکید کرد که علاوه بر این، اشیاء می‌توانند به وسیله‌ی خلاصه‌سازی طرحواره‌ها و فرایندها، تشکیل شوند (سزار نوچا و همکاران، ۱۹۹۹). اسفارد (۱۹۹۱) پیشنهاد داد که رشد «عملیاتی»، از طریق چرخه‌ای که آن را «درونی سازی ـ فشرده‌سازی ـ واقع‌انگاری» خوانده است ایجاد می‌شود که این رشد عملیاتی، باعث تولید اشیاء واقع‌انگاری می‌شود که ساختار این رشد عملیاتی، یک «رشد ساختاری» مکمل را با تمرکز بر ویژگی‌های اشیاء، ارایه می‌دهد.

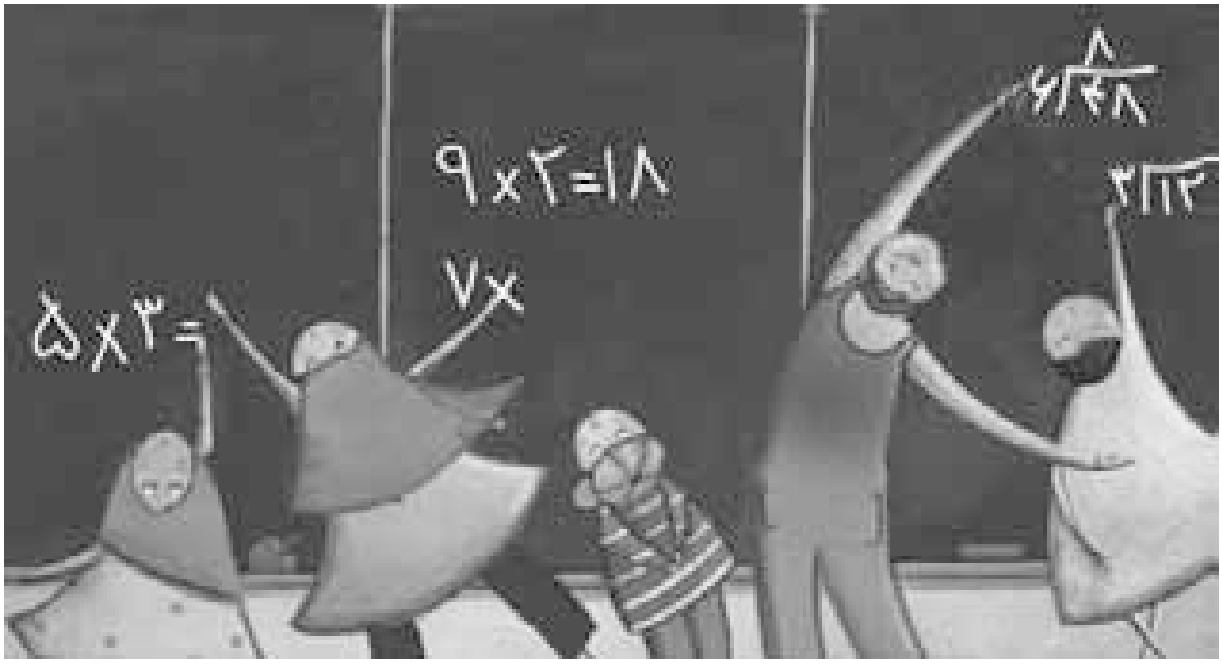
در جزئیات، تفاوت‌هایی بین دو نظریه‌ی دوبینسکی و اسفارد وجود دارد. برای مثال، مرحله‌ی اول نظریه‌ی اسفارد، «فرایند درونی سازی»، همان نامی است که به مرحله دوم در نظریه‌ی دوبینسکی اطلاق شده است. با این وجود، از دیدگاهی کلی، هر دو نظریه شبیه‌هم‌اند. هر دو نظریه با اعمالی بر اشیای معلوم (که ممکن است فیزیکی یا ذهنی باشند) شروع می‌کنند و آن‌قدر با این اشیاء تمرین می‌شود تا تبدیل به رویه‌های گام‌به‌گام معمولی (روتین) می‌شوند و تمام آن‌ها به عنوان یک کل به صورت فرایندها دیده می‌شوند. سپس خود این‌ها به عنوان هستی‌هایی تصور می‌شوند که می‌توان در سطحی بالاتر بر آن‌ها عمل کرد تا چرخه‌های بعدی ساخت‌و‌ساز ایجاد شوند. به عنوان مثال، این تجزیه و تحلیل می‌تواند برای یک عبارت جبری که به تدریج پیچیده‌تر می‌شود، به کار رود مثلاً، عبارت $x^2 - 3x$ ممکن است به عنوان فرمانی برای اجرای دنباله‌ای از اعمال دیده شود: با این عدد مانند x (به فرض $x = 4$) شروع کنید آن را به توان دو برسانید تا x^2 به‌دست آید (در این مثال خاص، ۱۶)، اکنون ۳ را در x^2 ضرب کنید (۱۲) و آن را از x^2 کم کنید تا مقدار $x^2 - 3x$ به دست آید (در مورد آن مثال، ۱۲-۱۶ که مساوی ۴ می‌شود).

هم‌چنین، می‌توانیم به دنباله‌ی اعمال به عنوان یک رویه‌ی متوالی گرفتن یک مقدار خاص x و محاسبه‌ی $x^2 - 3x$ فکر کنیم. یک رویه‌ی بدیل که همین نتیجه را می‌دهد این است که $x - 3$ را محاسبه و آن را در x ضرب کنیم تا نتیجه‌ای را بدهد که توسط عبارت $x(x - 3)$ معرفی می‌شود. حالا دو رویه‌ی گام‌به‌گام مختلف داریم که برای یک ورودی، خروجی یکسان دارند. آیا این‌دو «یکسان» هستند یا «متفاوتند»؟

به عنوان رویه‌هایی که هریک در موقع لزوم اجرا شده‌اند. مسلماً متفاوتند. امّا بر حسب فرایند کلّی برای ورودی داده شده، همیشه خروجی یکسان را نتیجه می‌دهند. بدین معنی، این دو «یکسان» هستند و این یکسانی را فرایند می‌نامیم.

می‌توانیم این فرایند را با تابع $f(x) = x^2 - 3x$ یا $f(x) = x(x - 3)$ بنویسیم و این‌ها، فقط راه‌های متفاوتی برای مشخص کردن یک تابع یکسان هستند.

در این مورد، بگوییم که ممکن است عبارت‌های $x^2 - 3x$ و $x(x - 3)$ در سطح‌های متفاوت فهمیده و در نظر گرفته شوند که عبارتند از: رویه‌هایی که دنباله‌های متفاوتی از ارزشیابی را نمایش می‌دهد فرایندهایی که باعث ورودی ـ خروجی‌های یکسان می‌شوند، عبارت‌هایی که ممکن است خود عبارت مورد دست‌ورزی قرار گیرد و بالاخره به عنوان توابعی که اساساً



تال جهان سومی را به عنوان جهان «صوری ـ اصل موضوعی» عملیات ذهنی دید که در آن، خواص با استفاده از نظریه‌ی مجموعه‌ها توصیف می‌شوند و تبدیل به بخشی از یک نظام صوری تعریف‌ها و اثبات‌های رسمی می‌گردند. در این جا طرحواره‌های کلّی مانند حساب اعداد اعشاری یا عملیات روی بردارها در فضا را می‌توان به عنوان هستی‌های منفرد تعمیم داد و خلاصه کرد

هستی‌های یکسان هستند.

گری و تال (۱۹۹۴) بر پیچیدگی فزاینده‌ی نقش نمادها، مانند ۴+۳ متمرکز شدند. برای دانش‌آموزان کم‌سن‌تر، این یک دستور العمل برای اجرای عمل جمع است. دانش‌آموزان بالغ‌تر، ممکن است آن را به عنوان مفهوم جمع ببینند که ۷ را نتیجه می‌دهد. کسان دیگر ممکن است این نماد را بدیلی برای ۴+۳، ۵+۲ و ۶+۱ ببینند که همگی، راه‌های مختلفی برای دیدن مفهوم ۷ هستند. گری وتال، از این فشردگی فزاینده‌ی دانش، از یک رویه که در موقع مناسب خود اجرا می‌شود، از فرایندی که نتیجه‌ای می‌دهد و به فرایندهای مختلفی که نتیجه‌ی یکسان می‌دهند، از همه‌ی این‌ها استفاده کردند تا مفهوم فرهوم (Procept) را تعریف کنند. (از جنبه‌ی فنی، یک فرهوم مقدماتی، یک نماد ساده مانند ۴+۳ دارد که می‌تواند به‌طور دوگانه، هم به عنوان یک رویه که قابل اجراست دیده شود یا به عنوان مفهومی که توسط آن رویه تولید می‌شود دیده شود، و یک فرهوم، شامل گردایه‌ای از فرهوم‌های مقدماتی مانند ۴+۳، ۵+۲ و ۶+۱ است که باعث تولید خروجی یکسان می‌شوند.)

در جریان توسعه‌ی تفکر ریاضی، چنین چرخه‌های ساخت‌وسازی بارها و بارها رخ می‌دهند؛ از فشرده‌سازی طرحواره ـ عمل شمارش گرفته که به مفهوم عدد منجر می‌شود تا حساب جمع، ضرب، توان‌ها، کسرها، اعداد صحیح، اعداد اعشاری که از طریق دست‌ورزی با نمادها در حساب، جبر، مثلثات و حسابان انجام می‌شود و بالاخره از آن‌جا تا تفکر ریاضی در سطوح پیشرفته جلو می‌رود. در هریک از این موارد، یک چرخه‌ی موضعی از شکل‌گیری مفهوم در ساختن مفاهیم خاص ریاضی وجود دارد. در یک سطح، اعمال بر یک یا چند شیء معلوم انجام می‌شود که گری وتال (۲۰۰۱) آن‌ها را شیء (اشیای) پایه‌ی آن چرخه نامیده‌اند؛ با عملیاتی که خود آن‌ها به عنوان رویه‌ها، در کانون توجه قرار می‌گیرند و در یک جریان فشرده‌سازی، تبدیل به فرایندهای کلی می‌شوند و به خودی‌خود، به عنوان اشیای ذهنی دریافت می‌گردند تا اشیای

پایه‌ی چرخه‌ی بعدی شوند.

جدول ۳، سه دیدگاه نظری را برای چرخه‌های موضعی ساخت‌وساز نشان می‌دهد (دیویس، ۱۹۸۴؛ دوبینسکی (سزار نوچا و همکاران ۱۹۹۹)؛ گری‌وتال، ۱۹۹۴ و ۲۰۰۱) که در کنار دنباله‌ی UMR مدل Solo، برای ارزیابی پاسخ‌ها در سطوح متوالی قرار داده شده‌اند.

در هر چارچوب، این امکان وجود دارد که تجزیه و تحلیل Solo برای چرخه، به عنوان یک کلّ به کار رود. عمل یا رویه‌ی اولیه در یک سطح تک‌ساختاری از اجراست که در آن، تنها از یک رویه برای یک مسأله‌ی خاص استفاده شده است. سطح چند ساختاری، راجع به احتمال رویه‌های بدیل است که بدون آن‌ها، به شکل از درون مرتبط دیده می‌شوند که از آن به بعد، در سطح عمل در نظریه‌ی Apos باقی می‌ماند. سطح رابطه‌ای به رویه‌های مختلف با اثر یکسان اشاره دارد که اساساً به صورت فرایندهای یکسان دیده می‌شوند. این امر، به خلاصه کردن فرایند به عنوان شیء (یک سطح تک‌ساختاری جدید) و استفاده از آن به عنوان یک وجود در طرحواره‌ی وسیع‌تری از دانش منجر می‌شود.

اگر کسی طالب باشد، یک تجزیه و تحلیل ظریف‌تر Solo، می‌تواند در مورد پاسخ‌های [مختلف] به مسایل داده شده به کار رود. برای مثال، ممکن است سطح اولیه‌ی عمل، در برگیرنده‌ی چندگام باشد و ممکن است که در ابتدا یادگیرندگان فقط قادر باشند که از عهده‌ی گام‌های مجزا برآیند، سپس بتوانند بیش از یک گام را انجام دهند و عاقبت، از عهده‌ی یک رویه به عنوان یک کل برآیند. یک بار دیگر، این کار یک چرخه‌ی اولیه در درون یک چرخه‌ی بزرگ‌تر می‌دهد و هریک، اهمیت خود را دارا هستند. اولی یادگیرنده را قادر می‌سازد تا نمادها را به عنوان رویه‌هایی که در موقع تناسب اجرا می‌شوند تفسیر کند اما چرخه‌ی بزرگ‌تر نمادها را قادر می‌سازد که خودشان، اشیائی برای تفکر شوند که می‌توانند در سطوح به‌طور فزاینده پیچیده‌تری از تفکر، به‌کار گرفته شوند.

چرخه‌های مشابه در حالت‌های مختلف

اکنون به این بحث می‌پردازیم که دسترسی به حالت‌های مختلف، هم‌چنان که افراد [پخته‌تر] و پیچیده‌تر می‌شوند، برای افراد ممکن می‌شود. در نتیجه، مثلاً دانش‌آموزان نه تنها درون حالت عینی ـ نمادین عمل می‌کنند بلکه به ساختارهای دانشی حالت‌های قبلی مانند حالت حسی ـ حرکتی یا حالت تصویری نیز دسترسی دارند. پس سؤالی که در این‌جا مطرح می‌شود این است که چگونه دانش ساخته شده در حالت‌های قبلی به حالت‌های عملی پیچیده‌تر مربوط می‌شود؟ برای مثال، به چه طریقی ممکن است که ایجاد تصورات در حال نمادین، به وسیله‌ی عمل فیزیکی و ادراک، جنبه‌های اجرایی پیچیده‌تر حالت‌های حسّی ـ حرکتی و تصویری، پشتیبانی شود؟

در مورد مفهوم بردار، پوینتر (۲۰۰۴) با در نظر گرفتن انتقال فیزیکی یا شیء بر یک سطح صاف، دانش‌آموزی را تشویق کرد که کانون توجه خود را از اعمال خاصّ که انجام می‌دهند به اثر آن اعمال معطوف کنند. عمل می‌توانست کاملاً پیچیده باشد؛ شیء را از موقعیت A به سمت موقعیت B و سپس به سمت موقعیت C فشار دهید. این عمل، با انتقال مستقیم A به موقعیت C کاملاً متفاوت است اگرچه اثر هر دو عمل یکسان است. هر دو در A آغاز می‌شوند و به C ختم می‌گردند بدون آن که دغدغه‌ی این را داشته باشند که بین A و C چه اتفاقی می‌افتد. این تصور که اعمال متفاوتند، ممکن است به عنوان یک پاسخ چندساختاری لحاظ شود در حالی که تمرکز بر یکسان بودن اثر، حرکت به سمت دیدگاه رابطه‌ای است.

اثر انتقال را می‌توان به وسیله‌ی یک پیکان نشان داد

جدول ۳

مدل Solo	دیویس	Apos دوبینسکی	گری وتال
			[اشیای پایه]
تک‌ساختاری چند ساختاری	رویه (VSM)	عمل	رویه
رابطه‌ای	فرایند تلفیقی	فرایند	فرایند
تک‌ساختاری (در یک چرخه‌ی جدید)	هستی	شیء	فرهوم
		طرحواره	

که شروع آن نقطه‌ای بر روی شیء و انتهای آن همان نقطه در شیء انتقال یافته است. تمام چنین پیکان‌هایی دارای بزرگی و جهت یکسان هستند تمام این پیکان‌ها می‌توانند تنها به صورت یک بردار نشان داده شوند که تا وقتی که بزرگی و جهت خود را حفظ کنند، می‌توانند به هرجایی انتقال پیدا کنند. این پیکان قابل حرکت، تجسم جدیدی از اثر انتقال را به عنوان یک بردار آزاد[۲۸] به دست می‌دهد. این بردار، حالا یک هستی مستقل است که می‌توان بر آن عملیاتی در سطحی بالاتر انجام داد. به‌طور ساده، جمع دو بردار آزاد یک بردار آزاد منفرد است که همان اثر را دارد که وقتی که دو بردار با هم یکی پس از دیگری ترکیب می‌شوند. بردار آزاد قابل حرکت، یک هستی اجرایی ـ تصویری دارد که فرایند انتقال را به عنوان یک شیء ذهنی که می‌توان بر روی آن عملیاتی انجام داد خلاصه می‌کند.

در این مثال، انتقال پیکان، هم عمل فیزیکی است (حسی ـ حرکتی) و هم یک بازنمایی تصویری (به عنوان پیکانی که به عنوان یک بردار آزاد توصیف شده است). با استعانت از مدل Solo که در آن، هر حالت، بخشی از حالت قبلی باقی می‌ماند، تال (۲۰۰۴) جنبه‌های حسی ـ حرکتی و تصویری یا به زبان برونر، ترکیبی از حرکتی و تصویری را با هم، در یک حالت ترکیبی عمل در نظر گرفت که آن را «تجسم یافته‌ی مفهومی[۲۹]» نامیده تا باآن چه که لکاف به معنای وسیع‌تر از واژه‌ی «تجسم‌یافته» استفاده کرده است، تمایز قایل شود. اما هرجا که احتمال سردرگمی وجود نداشته است، تنها از «تجسم‌یافته» استفاده شده است. تجسم ترکیبی از عمل و دریافت (ادراک) است که در طی سال‌ها، از طریق به کار بردن زبان، پیچیده‌تر و ظریف‌تر می شود.

حالت تجسم یافته‌ی دریافت، به وسیله‌ی به‌کار بردن نمادها در حساب، جبر، مثلثات، حسابان و امثال این‌ها که ساختاری فرهومی دارند، تکمیل می‌شود. تال (۲۰۰۴) این حالت از عملیات را «نمادین ـ فرهومی»[۳۰] یا به‌طور خلاصه، «نمادین» نامیده است. وی با مطالعه‌ی این حالت‌های مکمل عملیات، به این نکته دست یافت که این‌ها دو جهان کاملاً متفاوت از ریاضی را ارایه می‌کنند؛ یکی مبتنی بر عمل فیزیکی و دریافت که از طریق بازتاب مفهومی‌تر و دیگری از طریق خلاصه‌سازی فرایندها به عنوان اشیای ذهنی که می‌توان به عنوان نمادها با آن‌ها کارکرد، غنی‌تر و قدرتمندتر می‌گردد.

تال جهان سومی را به عنوان جهان «صوری ـ اصل موضوعی»[۳۱] عملیات ذهنی دید که در آن، خواص با استفاده از نظریه‌ی مجموعه‌ها توصیف می‌شوند و تبدیل به بخشی از یک نظام صوری تعریف‌ها و اثبات‌های رسمی می‌گردند. در این‌جا طرحواره‌های کلّی مانند حساب اعداد اعشاری یا عملیات روی بردارها در فضا را می‌توان به عنوان هستی‌های منفرد تعمیم داد و خلاصه کرد و به صورت اصل موضوعی مثلاً به عنوان «یک میدان کاملاً مرتب» یا «یک فضای برداری بر روی میدان اسکالرها» تعریف نمود.

این چارچوب، منشایی مشابه مدل Solo دارد، اما در جزئیات با آن متفاوت است. مثلاً، جایی که مدل Solo به پردازش اطلاعات در حالت‌های متوالی توسعه می‌نگرد و ساختار مشاهده شده‌ی پاسخ‌ها را تجزیه و تحلیل می‌کند سه جهان ریاضی چارچوبی برای تحوّل شناختی از عمل و دریافت کودک را از طریق بسیاری ساخت‌وسازهای ذهنی در تجسم و نمادگذاری به سطوح بالاتر ریاضی صوری اصل موضوعی ارایه می‌کند. تال و گری و دانشجویان دکتری آن‌ها، بعضی از راه‌هایی را نشان داده‌اند که از طریق آن‌ها فشرده‌سازی دانش از فرایند به شیء ذهنی در حساب، جبر، مثلثات، حسابان و همین‌طور تا ریاضیات صوری رخ می‌دهد. آن‌ها این کار را نه فقط با مشاهده‌ی فرایند کلی فشرده‌سازی در هر زمینه، بلکه از طریقی که زمینه‌های مختلف چالش‌های مفهومی مختلفی را برای یادگیرنده به‌وجود می‌آورند، انجام داده‌اند. (گری ـ پیتا، پنتو و تال، ۱۹۹۹؛ تال، گری، علی، کرولی، دوماروییس، مک گون، پیتا، پینتو، توماس و یوسف، ۲۰۰۰).

در مدرسه که دقیقاً هدف مدل Solo حالت عینی ـ نمادین با پشتیبانی حالت حسی ـ حرکتی و تصویری است، این چارچوب، حالت‌های عملیات را تنها به دو جهان مکمل ریاضی یعنی مجسم و نمادین طبقه‌بندی می‌کند.

در این‌جا یک سؤال پیش می‌آید: آیا این صورت‌بندی، می‌تواند راه‌هایی را برای مفهوم سازی چرخه‌های موضعی موازی ساخت‌وساز در ریاضی ارایه دهد؟ مثال بردار یک مورد را نشان می‌دهد که در آن، می‌توان تغییر کانون توجه از عمل به اثر را تجسم نمود و ایده‌ی بردار آزاد را به عنوان معرف عمل ارایه داد.

بعداً تمرکز بر خواص موجود می‌تواند به خواص منتخبی برای عملیات بر بردارها منجر شود که آن خواص، به عنوان پایه‌ای صوری برای تعریف یک فضای برداری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

این امر ما را قادر می‌سازد تا بازتاب چرخه‌ی عمل ـ اثر ـ تجسم جهان تجسم‌یافته را به صورت چرخه‌ی عمل ـ فرایند ـ فرهوم در جهان نمادین درنظر بگیریم. این ارتباط بین فشرده‌سازی عملی «انجام دادنی» به مفهوم فکر کردنی در جهان‌های مجسم و نمادین، به طور طبیعی، در دیگر شکل‌گیری‌های مفاهیم نمادین در ریاضی نیز به‌وجود آید.

برای مثال، در مورد کسرها، عمل تقسیم یک شیء یا مجموعه‌ای از اشیاء به تعداد بخش‌های مساوی و انتخاب تعدادی خاص از آن‌ها، می‌تواند به اعمال متفاوتی که دارای آثار یکسانی هستند منجر گردد (برای مثال، عددی را درنظر بگیرید و آن را به ۶ قسمت مساوی تقسیم کنید و سه تا را انتخاب کنید، یا عددی را به چهار بخش مساوی تقسیم نموده و دو بخش آن را انتخاب کنید). در این مورد، سه‌ششم و دوچهارم، دارای اثر یکسانی از نظر کمیّت هستند (و البته، نه از نظر تعداد بخش‌های تولیدشده، نتیجه انتقال ظریف و عمیق از عمل تسهیم به اثر آن تقسیم، کسرهای $\frac{۳}{۶}$ و $\frac{۲}{۴}$ است که معرف اثر یکسانی هستند. این امر، موازی هم‌ارزی کسرها در جهان نمادین و مثالی از مفهوم رابطه‌ی هم‌ارزی است که ابتدا، به شکل دست‌ورزی با نمادها در جهان نمادین و بعداً، برحسب تعریف نظریه‌ی مجموعه‌ای رابطه‌ی هم‌ارزی در جهان صوری‌ـاصل موضوعی تفکر ایجاد می‌شود. بدین طریق، چرخه‌های تناظری را می‌بینیم که باعث ادراکات به طور فزاینده پیچیده‌تر در حالت‌های متوالی رشد شناختی می‌شود. اگرچه تفاوت در نظریه‌های گوناگون ساخت‌وساز مفهوم، از طریق تجرید بازتابی بر اعمال به‌وجود آمده‌اند، این چرخه‌ی بنیادی ساخت مفهوم از عمل «انجام‌ـدادنی» به مفهوم «فکرـکردنی»، زیربنای تمام آن‌هاست. (جدول ۴)

بحث

این مقاله، چندین چارچوب نظری مختلف را در هر دو سطح کلی و موضعی، مورد ملاحظه قرار داده، و بر یک چرخه‌ی زیربنایی توسعه‌ی مفهومی از اعمال که به تدریج، به سمت مفاهیمی که می‌توانند به عنوان هستی‌های ذهنی مورد دست‌ورزی قرار گیرند، متمرکز شده است. این چرخه، نه فقط در مفاهیم مختلف ریاضی، بلکه در حالت‌های مختلف عملیات در رشد شناختی بلندمدت نیز اتفاق می‌افتد. در قلب فرایند، تعریض کانون توجه از دنباله‌ی خاصی از گام‌ها در یک عمل به نمادگرایی متناظر آن قرار دارد که نه تنها مشوق فرایند برای اجراست، بلکه معرف مفهوم ساخته شده نیز می‌باشد.

در این مقاله، ادعا نشده است که این، تنها راهی است که از آن طریق، مفاهیم رشد می‌کند. قبلاً به این نکته اشاره شده بود که راه‌های مختلفی برای ساختن مفاهیم وجود دارند که از آن جمله، می‌توان ساخت‌وساز از ادراک اشیاء، از عمل بر اشیاء و از خواص اشیاء را نام برد. ساخت‌وساز اول، به توسعه‌ی مفهوم از نوع فن هیلی منجر می‌شد که در آن، اشیاء تشخیص

جدول ۴

ساخت و ساز یک مفهوم از طریق تجرید بازتابی بر اعمال					
	چرخه بنیادین ساخت مفهوم	گری‌تال	Apos	دیویس	Solo
طرحواره	اشیای معلوم	شئ (اشیای پایه)	عمل	دنباله‌ی دیداری تعدیل شده به عنوان رویه	تک‌ساختاری
	رویه به عنوان عمل بر اشیای معلوم	رویه [به عنوان عمل بر اشیای پایه]			
	رویه‌های بدیل	رویه‌های بدیل			چندساختاری
	فرایند به عنوان اثر عمل	فرایند	فرایند	فرایند	رابطه‌ای
	شیء به عنوان فرهوم	فرهوم	شیء	هستی	تک‌ساختاری [چرخه‌ی جدید]
			طرحواره		

داده می‌شوند و خواص گوناگون از هم تمیز داده شده و توصیف می‌گردند. سپس از این دانسته استفاده می‌شود تا تعاریفی صورت‌بندی شوند که در اثبات اقلیدسی به کار می‌روند. ساخت‌وساز دوم از نمادها استفاده می‌کند تا اعمالی را معرفی کند که اشیای ذهنی می‌شوند و می‌توانند در سطوح پی‌درپی پیچیده‌تر و ظریف‌تری مورد استفاده قرار گیرند. سومین ساخت‌وساز، به خلق ساختارهای اصل موضوعی از طریق تعریف رسمی و اثبات می‌انجامد که در آن‌ها، یک طرحواره‌ی کلی مانند حساب اعداد اعشاری، می‌تواند به عنوان یک شیء ذهنی ـ در این مورد یک میدان کاملاً مرتب ـ مجدداً ساخته شود. به طور برجسته‌ای تمام این‌ها می‌توانند چنان طبقه‌بندی گردند که بتوان نتایج یادگیری را بر حسب چرخه‌ی UMR در مدل Solo، تجزیه و تحلیل کرد.

در این مقاله، به طور خاص، بر مورد دوم متمرکز شده‌ایم که در آن، مفاهیم به وسیله‌ی فشرده‌سازی عمل طرحواره‌ها به مفاهیم قابل دست‌ورزی و با استفاده از نمادها ساخته می‌شود. این، عمده‌ترین چرخه‌ی ساخت مفهوم در حساب، جبر، حسابان نمادین و دیگر زمینه‌هایی است که در آن‌ها، رویه‌ها نمادین شده و خود نمادها نیز به صورت اشیاء تفکر درآمده‌اند. این، شامل عمل ـ طرحواره‌ی شمارش و مفهوم عدد، عملیات تقسیم و مفهوم کسر، اعمال عمومی حساب به عنوان ابزاری برای عبارات جبری قابل دستورزی، آهنگ تغییر که تبدیل به مشتق می‌شود و نظایر این‌هاست.

در تمام این «عناوین»، یک چرخه‌ی موضعی زیربنایی ساختن مفهوم از عمل ـ طرحواره به اشیاء ذهنی وجود دارد. تمام این عملیات می‌توانند به عنوان فعالیت‌های تجسم‌یافته، چه به‌عنوان عملیات فیزیکی یا تجربه‌های فکری، اجرا شوند و سپس، ممکن است برای انعطاف بیش‌تر در محاسبه و دستورزی، نمادین شوند. چرخه‌ی موضعی ساخت‌وساز در جهان تجسم‌یافته از طریق تغییر توجه از انجام عمل به تجسم اثر آن عمل رخ می‌دهد. این امر، از فعالیت نمادین موازی حمایت می‌کند که در آن، یک عمل به عنوان رویه‌ی قابل اجرا، نمادین می‌شود و سپس نمادها معنای جدیدی به عنوان اشیاء ذهنی به خود می‌گیرند که می‌توانند در محاسبات و دستورزی‌های نمادین سطح بالاتر، مورد استفاده قرار گیرند.

به‌علاوه، تمام این عناوین در یک چرخه‌ی موضعی ساخت‌وساز مشترک هستند که آن چرخه، با وضعیتی که پیچیدگی‌هایی را برای یادگیرنده ایجاد می‌کند آغاز می‌شود، که یادگیرنده ممکن است در وحله ینخست، بر جنبه‌های منفرد تمرکز کند، اما بعداً، جنبه‌های دیگر را می‌بیند و بین آن‌ها پیوند برقرار می‌کند تا نه‌تنها تصور پیچیده‌تری بسازد بلکه تصور فشرده غنی‌تری را پی‌ریزی کند که در یک سطح بالاتر، به عنوان یک هستی منفرد مورد استفاده قرار گیرد. چنین توسعه‌ای در مدل Solo، برای تجزیه و تحلیل نتایج مشهود یادگیری توصیف شده است، اما به عنوان یک چرخه‌ی موضعی یادگیری نیز در دامنه وسیعی از چارچوب‌های نظری موضعی، متجلی گشته است. در مورد فشرده‌سازی دانش از انجام دادن ریاضی به‌وسیله‌ی اجرای اعمال، تا نمادین کردن آن اعمال به عنوان مفاهیم فکر کردنی، تمام این چارچوب‌های نظری، دارای یک چرخه‌ی زیربنایی موضعی یادگیری یکسان هستند.

پانویس‌ها

1. The National Centre of Science, Information and Communication Technology, and Mathematics Education for Rural and Regional Australia
2. Czarnocha
3. Prabhu
4. Vidakovic
5. Structure of the Observed Learning Outcome (SOLO)
6. Embodied Theory of Lakoff and Nunez
7. Situated Learning of Lave and Wenger
8. Mode
9. Perception
10. Neo-Piagetian
11. Unistructural (U)
12. Multistructural (M)
13. Relational (R)
14. Prestructural
15. Extended Abstract
16. Isomorphic
معادل فارسی **هم‌ریخت** برای ایزومورفیک، وسعت واژه را در این‌جا، نشان نمی‌دهد.
17. Davey
18. Educated Guess
19. Single Entity
20. Do-able
21. Think-able
22. Sfard
23. Visually Moderated Sequences (VMS)
24. Information Processing
در بعضی ترجمه‌ها، از معادل **پردازش خبر** استفاده شده است.
25. Conceptual Entity
26. Same
27. Base Object
28. Free Vector
29. Conceptual-Embodied
30. Symbolic-Proceptual
31. Formal-Axiomatic
32. Reflective Abstraction