پیوستگی و مشتق‌پذیری توابع بدرفتار

مرتضی بیات، زهرا خاتمی
مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان ـ گاوه زنگ

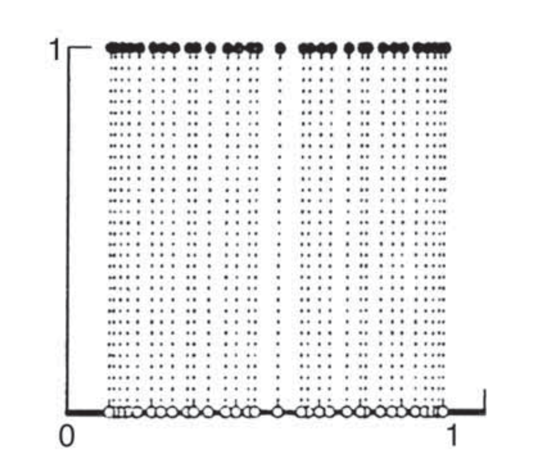
اولین بار در سال ۱۸۲۹، ریاضی‌دانی به نام دیریکله، تابعی به صورت زیر را معرفی کرد:

$$D(x)=\begin{cases}1 & (\text{گویا } x)\\ 0 & (\text{گنگ } x)\end{cases}$$

امروزه، تابع $D(x)$ به تابع دیریکله معروف است. این تابع از حدود چندگانه‌ی زیر نیز به‌دست می‌آید:

$$D(x)=\lim_{m\to\infty}\left\{\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!\,x)\right\}$$

تابع $D(x)$ نسبت به تابع‌های دیگر رفتار کاملاً خودسر دارد؛ اولاً این تابع را نمی‌توان به صورت دقیق و کامل رسم کرد، این بدین جهت است که بی‌شمار عدد گویا و گنگ در دامنه‌ی تابع در لابه‌لای همدیگر قرار گرفته‌اند که این امر تعیین موقعیت دقیق



شکل ۱. تابع دیریکله

هر کدام از آن‌ها را امکان‌پذیر نمی‌سازد. شکل تقریبی از آن بر بازه‌ی $[0,1]$ در شکل ۱ نشان داده شده است. (شکل ۱)

این تابع مشخصه‌ی دیگری هم دارد که در هیچ نقطه‌ی گویا و هیچ نقطه‌ی گنگ، حد ندارد. برای اثبات این ادعا فرض کنیم $D(x)$ در نقطه a حدی برابر L داشته باشد (یا $\lim\limits_{x\to a}D(x)=L$).

در این صورت با اختیار کردن $\varepsilon=\frac{1}{2}$ می‌توان δ ی یافت که $0<|x-a|<\delta$ به طوری که نامساوی

$$|D(x)-L|<\frac{1}{2}\qquad(1)$$

را ایجاد کند. اما همسایگی $0<|x-a|<\delta$ شامل نقطه‌ی گویایی مثل x_1 و نقطه‌ی گنگی چون x_2 است (در واقع، بی‌نهایت از هر کدام). از (۱) نتیجه می‌شود که

$$|D(x_1)-L|=|1-L|<\frac{1}{2}$$

$$|D(x_2)-L|=|0-L|<\frac{1}{2}$$

و درنتیجه داریم:

$$1=|1-L+L|\le|1-L|+|L|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

که این غیرممکن است، بنابراین $D(x)$ در هیچ نقطه‌ای مانند a حد ندارد.

این عدم‌وجود حد در هیچ نقطه از دامنه‌ی تابع $D(x)$، موجب شگفتی دیریکله و ریاضی‌دانان بعد از وی شد و بعدها ریاضی‌دانان به کمک این تابع، توابع جالب با خاصیت‌های

عجیب و غریب ساختند که در ادامه، به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

سؤال: آیا می‌توان تابعی ساخت که تنها در یک نقطه پیوسته باشد و در بقیه‌ی نقاط حد نداشته باشد؟

پاسخ. تابع زیر را درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases} x & (\text{گویا } x) \\ ۱-x & (\text{گنگ } x)\end{cases}$$

این تابع را براساس تابع دیریکله می‌نویسیم:

$$f(x)=x\times\begin{cases} ۱ & (\text{گویا } x) \\ ۰ & (\text{گنگ } x)\end{cases} + (۱-x)\times\begin{cases} ۰ & (\text{گویا } x) \\ ۱ & (\text{گنگ } x)\end{cases}$$

$$= xD(x)+(۱-x)\times\left(\begin{cases} -۱ & (\text{گویا } x) \\ ۰ & (\text{گنگ } x)\end{cases} +۱\right)$$

$$= xD(x)+(۱-x)(-D(x)+۱)$$
$$=(۲x-۱)D(x)+(۱-x)$$

بنابراین

$$\boxed{f(x)=(۲x-۱)D(x)+(۱-x)}$$

برای $x_{\circ}=\frac{۱}{۲}$ داریم $f(x_{\circ})=\frac{۱}{۲}$ و هم‌چنین

$$\lim_{x\to x_{\circ}} f(x)=\lim_{x\to x_{\circ}}(۲x-۱)D(x)+\lim_{x\to x_{\circ}}(۱-x)$$
$$=۰+\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}=f(x_{\circ})\,.$$

در ضمن برای $x\neq\frac{۱}{۲}$ داریم:

$$\frac{f(x)-(۱-x)}{۲x-۱}=D(x)$$

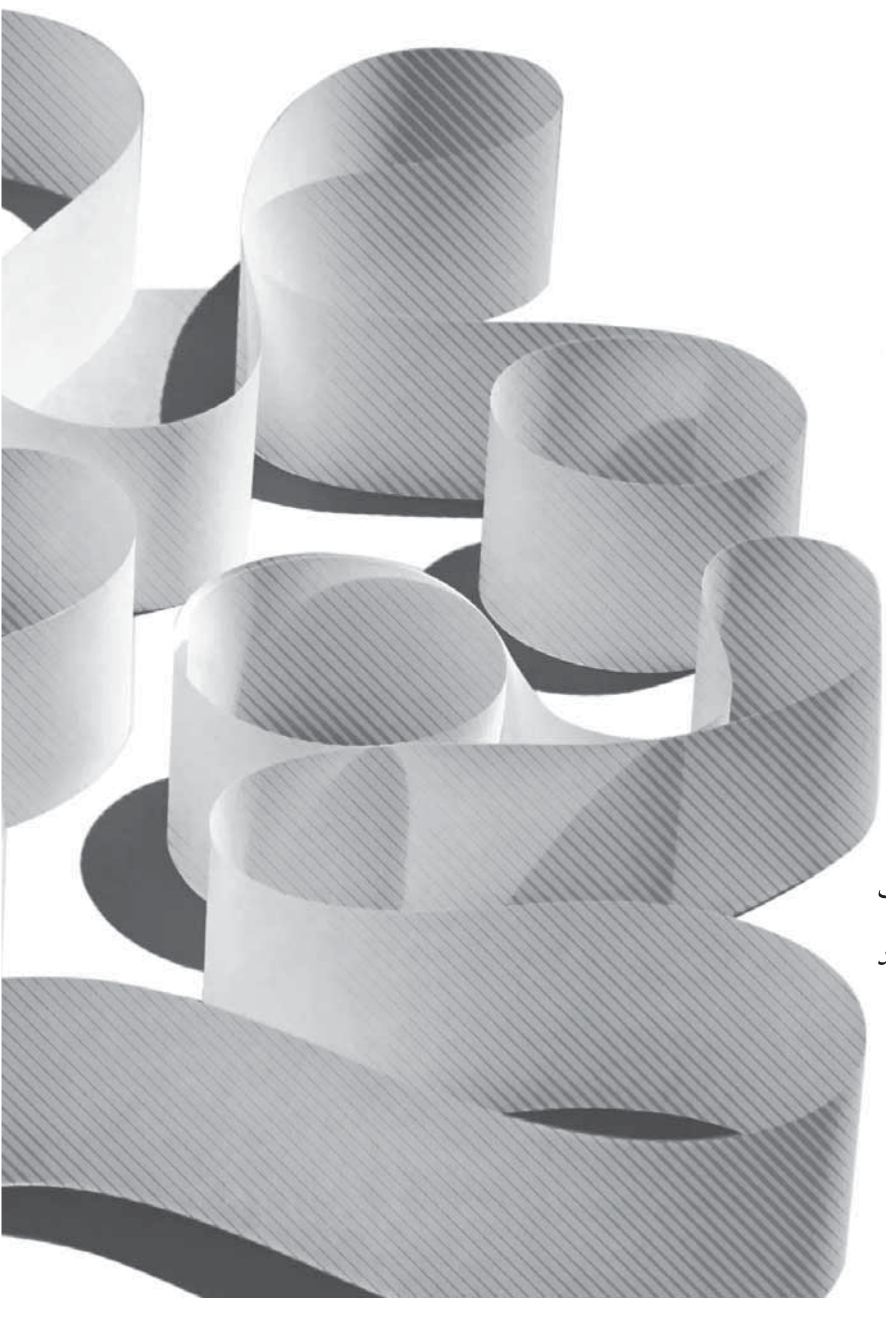
از آن‌جا که تابع $D(x)$ در هیچ نقطه‌ای حد ندارد، پس طرف چپ هم در هیچ نقطه حد ندارد؛ یعنی $f(x)$ نیز در $x\neq\frac{۱}{۲}$ حد ندارد.

اینک حالت کلی‌تری از مثال فوق را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱. فرض کنیم f و g دو تابع پیوسته بر بازه‌ی (a,b) باشند؛ یعنی f و g در هر نقطه‌ی $x_{\circ}\in(a,b)$ پیوسته باشند و هم‌چنین f و g متمایز باشند؛ یعنی $x\in(a,b)$ موجود باشد که $f(x)\neq g(x)$. اگر تابع $h:(a,b)\to R$ را با ضابطه‌ی

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (\text{گویا } x) \\ g(x) & (\text{گنگ } x)\end{cases} \qquad (۲)$$

تعریف کنیم در آن صورت h در $x_{\circ}\in(a,b)$ پیوسته است اگر و تنها اگر $f(x_{\circ})=g(x_{\circ})$.



برهان. مشابه بالا تابع $h(x)$ را برحسب تابع دیریکله به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\boxed{h(x)=(f(x)-g(x))D(x)+g(x)} \qquad (۳)$$

فرض کنیم $f(x_\circ)=g(x_\circ)$. به وضوح $h(x_\circ)=g(x_\circ)$. از آن‌جا که $\lim\limits_{x\to x_\circ}(f(x)-g(x))=\circ$ و $D(x)$ تابع کراندار است، داریم:

$$\lim_{x\to x_\circ} h(x)=\lim_{x\to x_\circ}\big(f(x)-g(x)\big)D(x)+\lim_{x\to x_\circ} g(x)$$
$$=g(x_\circ)=h(x_\circ)\,.$$

برعکس. فرض کنیم h در $x_\circ$ پیوسته باشد و نیز $f(x_\circ)\neq g(x_\circ)$ (فرض خلف). از آن‌جا که $f(x)-g(x)$ تابع پیوسته بوده و در $x_\circ$، غیرصفر می‌باشد، پس همسایگی از $x_\circ$ مانند (c,d) (که $(c,d)\subset(a,b)$) وجود دارد که برای هر $x\in(c,d)$، $f(x)-g(x)\neq\circ$. اینک برای $x\in(c,d)$ داریم

$$\frac{h(x)-g(x)}{f(x)-g(x)}=D(x)$$

حال طرف اول در $x_\circ$ پیوسته است. پس $D(x)$ نیز پیوسته می‌باشد که امکان ندارد.

نتیجه ۱. مجموعه نقاط پیوستگی تابع h در قضیه ۱، برابر مجموعه جواب‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ در (a,b) است.

نتیجه ۲. اگر $A\subseteq R$ مجموعه‌ای متناهی به صورت $A=\{x_1,\dots,x_n\}$ باشد، آن‌گاه تابعی وجود دارد که مجموعه نقاط پیوستگی آن، مجموعه‌ی A باشد.

برهان. تابع $h:(a,b)\to R$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$h(x)=\begin{cases}(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) & (\text{گویا } x)\\ \circ & (\text{گنگ } x)\end{cases}$$

مجموعه نقاط پیوستگی h برابر A است.

اینک مشابه قضیه ۱، قضیه‌ای ارایه می‌دهیم و به کمک آن توابعی معرفی می‌کنیم که مجموعه نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق‌پذیر است برابر مجموعه‌ی متناهی مفروض A باشد.

قضیه ۲. فرض کنیم f و g دو تابع متمایز و مشتق‌پذیر روی (a,b) باشند؛ یعنی در هر نقطه‌ی $x_\circ\in(a,b)$، مشتق‌پذیر باشند) و $h:(a,b)\to R$ را با ضابطه‌ی (۲) تعریف کنید. در آن صورت h در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است اگر و فقط اگر $f(x_\circ)=g(x_\circ)$ و $f'(x_\circ)=g'(x_\circ)$.

برهان. فرض کنیم $f(x_\circ)=g(x_\circ)$ و $f'(x_\circ)=g'(x_\circ)$، نشان می‌دهیم h در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است. طبق رابطه‌ی (۳) داریم:

$$\frac{h(x)-h(x_\circ)}{x-x_\circ}=\Big(\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}-\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}\Big)D(x)+\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ} \qquad (۴)$$

از طرفین رابطه، حد می‌گیریم:

$$h'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\frac{h(x)-h(x_\circ)}{x-x_\circ}$$
$$=\lim_{x\to x_\circ}\Big(\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}-\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}\Big)D(x)+\lim_{x\to x_\circ}\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}$$
$$=\circ+g'(x_\circ)=g'(x_\circ)$$

توجه کنید که در حد بالا، از آن‌جا که $D(x)$ تابع کراندار است و $\lim\limits_{x\to x_\circ}\Big(\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}-\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}\Big)=\circ$ پس

$$\lim_{x\to x_\circ}\Big(\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}-\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}\Big)D(x)=\circ$$

برعکس. فرض کنیم h در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است. بنابراین h در $x_\circ$ پیوسته است و در نتیجه طبق قضیه ۱، $h(x_\circ)=f(x_\circ)=g(x_\circ)$. حال کافی است نشان دهیم $f'(x_\circ)=g'(x_\circ)$. فرض کنیم $f'(x_\circ)\neq g'(x_\circ)$ (فرض خلف). طبق رابطه‌ی (۴) داریم:

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{h(x)-h(x_\circ)}{x-x_\circ}=\lim_{x\to x_\circ}\Big(\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}-\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}\Big)D(x)+\lim_{x\to x_\circ}\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

$$\Rightarrow h'(x_\circ)-g'(x_\circ)=\lim_{x\to x_\circ}\Big(\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}-\frac{g(x)-g(x_\circ)}{x-x_\circ}\Big)D(x)$$

این تساوی با توجه به این که $f'(x_\circ)\neq g'(x_\circ)$ و نیز این که $D(x)$ در هیچ نقطه حد ندارد، امکان‌پذیر نیست. در نتیجه $f'(x_\circ)=g'(x_\circ)$.

نتیجه۱. مجموعه نقاطی که تابع h مشتق‌پذیر است برابر است با اشتراک مجموعه جواب معادله‌های $f(x)=g(x)$ و $f'(x)=g'(x)$ در (a,b).

نتیجه ۲. برای یک مجموعه‌ی متناهی و مفروض $A \subseteq (a,b)$ مانند $A=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ ، تابعی موجود است که مجموعه نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر است، برابر با مجموعه‌ی A می‌باشد.

برهان. تابع $h:(a,b)\to R$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$h(x)=\begin{cases}(x-x_1)^2(x-x_2)^2\dots(x-x_n)^2 & (\text{گویا } x)\\ 0 & (\text{گنگ } x)\end{cases}$$

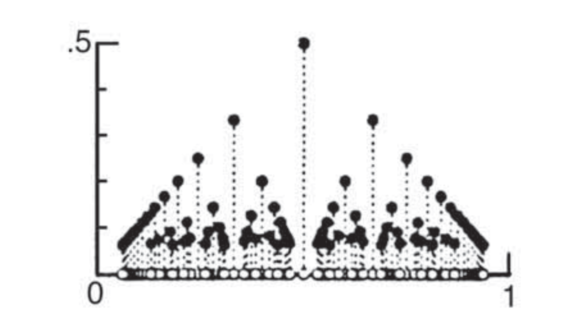
تابع h در نقاط A مشتق‌پذیر است.

تذکر: شرط پیوستگی f و g در قضایای ۱ و ۲ ضروری است. فرض کنیم $f:(0,1)\to R$ با ضابطه‌ی $f(x)=xD(x)$ و تابع $g:(0,1)\to R$ با ضابطه $g(x)=-xD(x)+x$ تعریف شود در آن صورت f و g مطابق قضیه ۱، فقط در $x=0$ پیوسته هستند و مطابق قضیه ۲، در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیستند. در حالی که تابع $h:(0,1)\to R$ با ضابطه (۲) به صورت $h(x)=x$ است که این تابع بر $(0,1)$ مشتق‌پذیر است.

چند مسأله برای علاقه‌مندان

۱. نقاط پیوستگی و ناپیوستگی تابع زیر را بیابید

$$f(x)=\begin{cases}\sin(x) & (\text{گویا } x)\\ \cos(x) & (\text{گنگ } x)\end{cases}$$



شکل۲. تابع ریمان

۲. تابع زیر در چه نقاطی مشتق‌پذیر است؟

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & (\text{گویا } x)\\ 0 & (\text{گنگ } x)\end{cases}$$

۳. آیا می‌توان تعریف مشتق را با تعریف زیر عوض کرد؟

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$$

(راهنمایی: تابع $f(x)=D(x)$ را درنظر بگیرید.)

۴. آیا تابعی مانند f وجود دارد که در هیچ نقطه‌ای حد نداشته باشد. ولی $|f|$ در هر نقطه مشتق‌پذیر باشد؟ (راهنمایی: تابع $f(x)=-D(x)+1$ را درنظر بگیرید.)

۵. **(تابع ریمان)**. نشان دهید تابع زیر در نقاط گنگ پیوسته و در نقاط گویا ناپیوسته است (شکل۲ را ببینید)

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{گنگ } x\in(0,1)\\ \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\in(0,1)\ ,\ (p,q)=1\ ,\ q>0\end{cases}$$

۶. نشان دهید تابع زیر در نقاط گنگ پیوسته و در نقاط گویا ناپیوسته است

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{گنگ} \quad x\in(0,1)\\ p\sin(\frac{1}{q}) & x=\frac{p}{q}\in(0,1)\ ,\ (p,q)=1\ ,\ q>0\end{cases}$$

منابع

[۱] قدیر مهاجری مینایی، **مباحثی پیرامون پیوستگی و مشتق**، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، سال چهاردهم، شماره ۵۵ (۱۳۷۸). صص ۴۶-۴۹، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

[۲] ایساک مارون، **ریاضیات عمومی ۱ و ۲**، ترجمه‌ی خلیل پاریاب، انتشارات پاریاب، ۱۳۷۵.

[3] *E. Hairer and G. Wanner,* **Analysis by Its History**, Springer – Verlag, 1997.