یک تجربه‌ی کلاسی در معرفی مفهوم حد

فرحناز حیاتی
دبیر ریاضی ایلام

به دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه‌های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت‌های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطه‌ی نزدیک‌تری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایت‌ها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده‌ای به وجود می‌آورد تا به تبیین نظریه‌های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می‌جوشد، بپردازند. آن‌گاه نظریه‌ها به عمل دَر می‌آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می‌شود و این فرآیند هم‌چنان ادامه پیدا می‌کند.

از همکاران گرامی انتظار می‌رود که روایت‌های خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیّت تجربه‌های خود واقف شوند و با پویایی به غنی‌تر کردن آن‌ها بپردازند.

مقدمه

در این مقاله‌ی آموزشی، تدریس حد را بررسی کرده و به تحلیل مفهوم آن می‌پردازیم. به جرأت می‌توان گفت که حد یکی از مفاهیمی است که فهم آن برای دانش‌آموزان دبیرستان، خصوصاً دانش‌آموزان سوم تجربی، بسیار دشوار است و در این مقطع اصولاً دانش‌آموزان قضیه‌های حد را فقط حفظ کرده و حتی به‌وسیله‌ی آن حد تابع‌ها را محاسبه می‌کنند لیکن اکثراً مفهوم واقعی حد را درک نمی‌کنند. این در حالی است که حد تقریباً در تمام رشته‌های مختلف بشری کاربرد دارد تا جایی که می‌توان گفت از حد گریزی نیست. از طرفی، مفهوم حد در قلب حساب دیفرانسیل و انتگرال جای دارد و اساس و زیربنای مفهوم مشتق و انتگرال است.

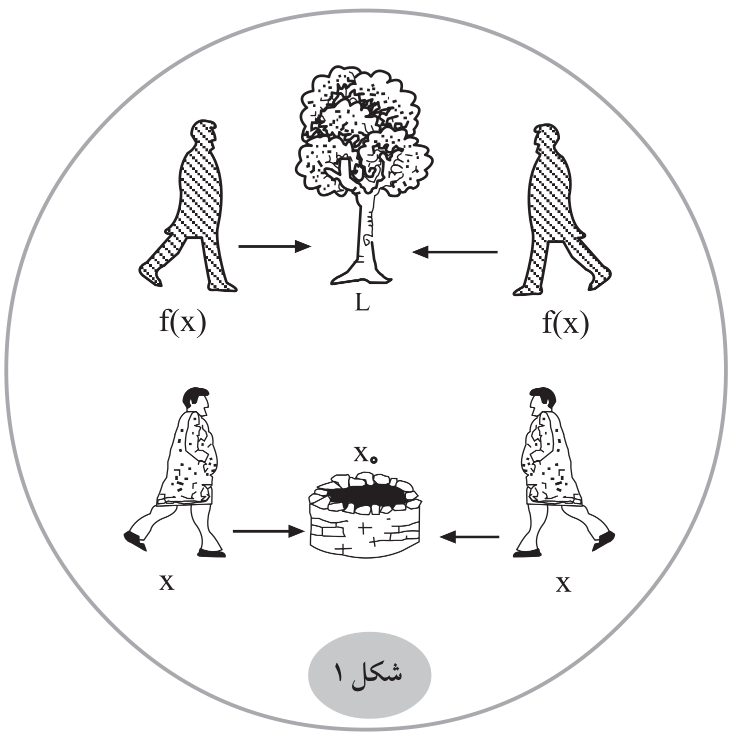
حد تابع

قبل از این که به تعریف مفهوم حد بپردازم، تجربه‌ی خود را در معرفی مفهوم آن به دانش‌آموزان در کلاس درس بیان می‌کنم.

مرحله‌ی اول. ابتدا تصویر دو فرد و یک درخت و یک چاه را پای تابلو کشیدم (شکل ۱) و درباره‌ی تصویر به دانش‌آموزان چنین توضیح دادم که دو فرد را در نظر بگیرید که به سمت چاه در حرکت هستند و با حرکت این دو نفر به سمت چاه، سایه‌های آن‌ها نیز در حال حرکت هستند. در تصویر مشاهده می‌شود که وقتی این دو نفر به طرف چاه حرکت می‌کنند، سایه‌های آن‌ها به طرف درخت نزدیک می‌شود، پس می‌توان با حرکت فرد به سمت چاه، رفتار سایه‌ی او را نیز بررسی کرد. پس از توضیح این مثال برای دانش‌آموزان، چاه را به نقطه‌ی x_0 و فرد را به نقطه‌ی x و سایه‌ی فرد را به تابع $f(x)$ تشبیه کردم و درخت، در واقع مقدار حد تابع، یعنی L بود. در ضمن به دانش‌آموزان توضیح دادم که فرد در اطراف چاه می‌تواند حرکت کند تا به لبه‌ی چاه برسد اما هیچ‌گاه خود را درون آن نمی‌اندازد و در مفهوم حد هم x تا نزدیکی x_0 می‌رود، ولی با آن برابر نمی‌شود. (شکل ۱)

پس از توضیح این مثال و ایجاد یک تصویر ذهنی از مفهوم حد برای دانش‌آموزان، مفهوم مقدار تابع در یک نقطه را یادآوری کرده و توسط جدول و مفهوم میل کردن، حد را توضیح دادم.

مرحله‌ی دوم. در این مرحله، با یک مثال شروع کردم.



شکل ۱

مثال. تابع $f(x) = ۲x^۲ + ۱$ مفروض است. وقتی x به سمت عدد ۳ میل می‌کند، تابع به سمت چه عددی میل می‌کند؟

x	۲/۷۵	۲/۹	۲/۹۹	۳	۳/۱	۳/۱	۳/۲۵
f(x)	۱۶/۱۲	۱۷/۸۲	۱۸/۸۸	?	۱۹/۱۱	۲۰/۲۲	۲۲/۱۲

از دانش‌آموزان خواستم، با استفاده از جدول، نتیجه‌گیری کنند که با میل کردن x به سمت عدد ۳، تابع به چه عددی میل می‌کند، که خود دانش‌آموزان به‌راحتی عدد ۱۹ را حدس زدند.

سپس همین نتیجه‌گیری را به زبان ریاضی بیان کردم و گفتم که برای بیان این مفهوم به زبان ریاضی، از کلمه‌ی حد یا Lim که مخفف کلمه‌ی انگلیسی Limit (به معنای حد) می‌باشد، استفاده می‌کنیم و چنین می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to ۳} f(x) = ۱۹$$

و توضیح دادم که از کلمه‌ی حد، زمانی استفاده می‌کنیم که بخواهیم رفتار یک تابع را زمانی که متغیر مستقل x به سمت عدد معینی میل می‌کند، بررسی کنیم؛ یعنی عبارت زیر را بررسی کنیم

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

و مثال زیر را ارایه کردم:

مثال. فرض کنید $f(x) = \frac{x^۳ - ۱}{x - ۱}$. توجه کنید که در این مثال، تابع برای $x = ۱$ تعریف نشده زیرا به‌ازای $x = ۱$، مخرج کسر صفر می‌شود. اما این سؤال مطرح است که رفتار تابع f(x) وقتی x به سمت عدد ۱ نزدیک می‌شود (ولی خود عدد ۱ نیست) چگونه است؟ برای این منظور جدولی تشکیل داده و در آن مقادیر کوچک‌تر و بزرگ‌تر از ۱ را درون تابع گذاشته و نتایج آن را نیز در جدول درج کردیم:

x	۰/۹	۰/۹۹	۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)	۱/۳	۱/۴۹	?	۱/۵۱	۱/۵۷

و از آن‌جا، دانش‌آموزان نتیجه گرفتند که

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = ۱/۵۰$$

حد چپ و راست تابع. در تعریف حد یک تابع در نقطه‌ای مانند x_0، فرض بر آن است که تابع روی فاصله‌ی بازی شامل x_0 تعریف شده باشد (مگر احتمالاً در نقطه‌ی x_0 تعریف نشده باشد). بدین معنی که مقادیر تابع به‌ازای تمام x های نزدیک به x_0 ($x > x_0$ یا $x < x_0$)، مشخص باشد.

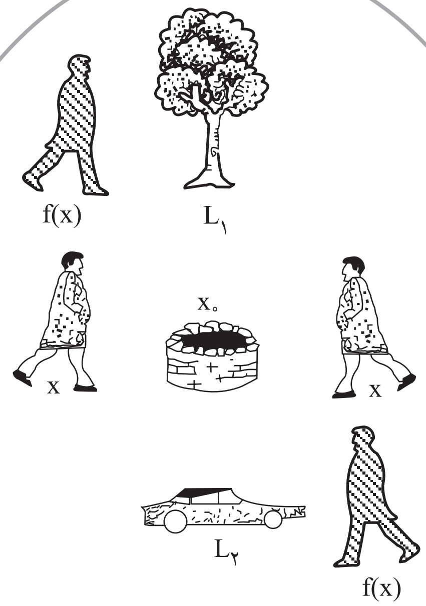
با دانش‌آموزان تعریف حد را در حالتی بررسی کردیم که x از سمت راست به x_0 نزدیک شود؛ به عبارتی، از مقادیر بیش‌تر از x_0 به سمت x_0 نزدیک شود (یا مشابهاً از طرف چپ به x_0 نزدیک شود، یعنی از طرف مقادیر کمتر از x_0 به سمت x_0 نزدیک شود) که آن‌ها به صورت‌های زیر می‌نویسند:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L_۱ \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L_۲$$

قضیه. $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع فوق موجود و با هم برابر باشند یعنی $L_۱ = L_۲$.

از این قضیه می‌توانیم چنین نتیجه‌گیری کنیم اگر مقدار حد راست در نقطه‌ی x_0 با مقدار حد چپ در همان نقطه، برابر نباشد، تابع f در نقطه‌ی x_0 حد ندارد که من سعی کردم این مفهوم را با تصویر شکل ۲، برای دانش‌آموزان ملموس‌تر کنم.

در این تصویر، فرض کنید که نور از سمت راست و از سمت چپ در دو جهت مختلف بتابد و سایه‌ی دو فرد در جهات مختلف قرار گیرند. در این صورت می‌گوییم تابع، حد ندارد. (شکل ۲)



شکل ۲

مثال ۱. اگر

$$f(x)=\begin{cases} x+۳; & x\le -۲ \\ ۳-x; & x>-۲ \end{cases}$$

آن‌گاه نمودار آن به شکل زیر است و داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۵ \qquad و \qquad \lim_{x\to ۲^-} f(x)=۱$$

(به شکل ۳ مراجعه کنید.)

مثال ۲. اگر

$$f(x)=\begin{cases} ۳+x^۲ & x<-۲ \\ ۰ & x=-۲ \\ ۱۱-x^۲ & x>-۲ \end{cases}$$

آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x\to -۲^+} f(x)=۷ \qquad و \qquad \lim_{x\to -۲^-} f(x)=۷$$

(به شکل ۴ مراجعه کنید.)

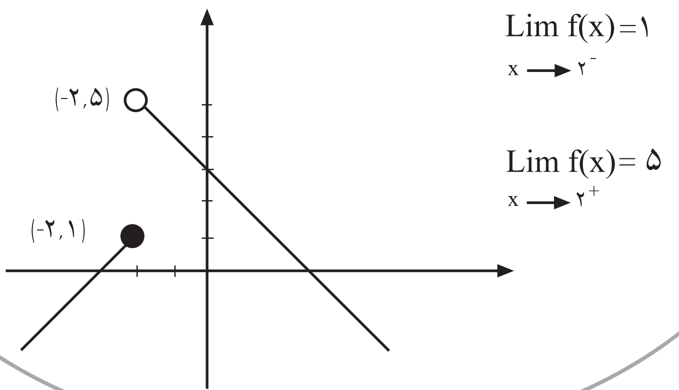
مرحله‌ی سوم. در این مرحله، به‌منظور تفهیم بهتر مفهوم حد، به تمرین‌هایی درباره‌ی نشان دادن مقدار حد از روی نمودار پرداختم و دانش‌آموزان را توسط نمودار با مفهوم حد آشنا کردم. از این‌رو برای دانش‌آموزان نمودارهایی رسم کرده و از آن‌ها خواستم که از روی نمودار تشخیص دهند که وقتی x به سمت عدد معینی میل می‌کند، تابع f(x) به سمت چه عددی میل می‌کند.

دانش‌آموزان، توسط نمودار هم مفهوم حد را بهتر درک می‌کنند و هم مفهوم حد چپ و راست را.

در این زمان، دانش‌آموزی این سؤال را مطرح کرد که چه مواقعی از حدچپ یا حد راست استفاده می‌کنیم؟

در پاسخ به او گفتم که عموماً در موارد زیر حد چپ و راست

شکل ۳



را به طور جداگانه حساب می کنیم:

(الف) تابع f فقط در یک طرف نقطه‌ی $x_۰$ تعریف شده باشد و مثال زیر را زدم:

مثال. حد تابع $f(x)=\sqrt{۱-x}$ را در نقطه‌ی $x=۱$ به دست آورید. چون دامنه‌ی این تابع $(-\infty,۱]$ است، پس تابع f فقط در سمت چپ ۱ تعریف شده است و

$$\lim_{x\to ۱^-}\sqrt{۱-x}=۰$$

(ب) تابع f در دو طرف $x_۰$ با ضابطه‌های مختلف تعریف شده باشد، یعنی قانون تابع f در یک طرف $x_۰$ با قانون آن در طرف دیگر، متفاوت باشد. برای این مورد، مثال زیر را زدم:

مثال. حد تابع f را که به صورت زیر تعریف شده در نقطه‌ی $x=۲$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}۲x-۵ & x<۲\\ ۲x^۳-۷x-۳ & x\geq ۲\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۲^-}۲x-۵=-۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+}۲x^۳-۷x-۳=-۱$$

(ج) اگر در ضابطه‌ی تابع، قدر مطلق یا جزء صحیح وجود داشته باشد (که در واقع حالت خاصی از حالت دوم است).

مثال. حد تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را در نقطه‌ی $x=۰$ به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{|x|}{x}=۱$$

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{|x|}{x}=-۱$$

مثال. حد تابع $f(x)=[x]$ را در نقطه‌ی $x=۰$ بیابید.

$$\lim_{x\to ۰^+}[x]=۰$$

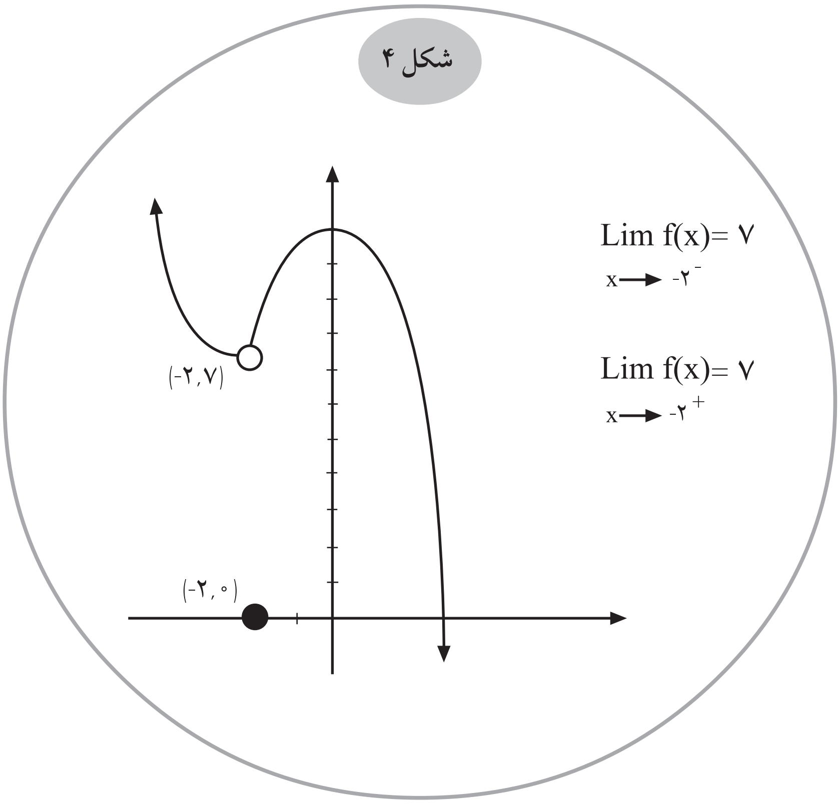
$$\lim_{x\to ۰^-}[x]=-۱$$

(د) اگر در تابع، برخی عبارت‌های مثلثاتی وجود داشته باشد.

مثال. حد تابع $f(x)=\tan(x)$ را در نقطه‌ی $x=\pi/۲$ بیابید.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-}\tan(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\tan(x)=-\infty$$



شکل ۴

جمع بندی

با استفاده از مثال‌های عینی، می‌توانیم مفهوم حد را برای دانش‌آموزان، ملموس‌تر کنیم که به نظر من اگر به این روش، مرحله به مرحله مفهوم حد را تفهیم نماییم، دانش‌آموز راحت‌تر آن را می‌پذیرد. در ضمن، می‌توان ساختن وسایل کمک‌آموزشی در زمینه‌ی حد را به دانش‌آموزان پیشنهاد کرد تا مطلب حد برای آن‌ها جاذبه‌ی بیش‌تری پیدا کند.

منبع

۱. مسعود نیکوکار، بهمن عربزاده، **حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد اول)**، انتشارات نور تهران، ۱۳۶۸.