پی‌گیری یک سؤال، بازپروری آن

یوسف احمدی، دبیر ریاضی شهرستان بابل

مقاله‌ی ارایه شده در هشتمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران
شهرکرد ـ مرداد ۱۳۸۵

چکیده

حدس و الگویابی از موضوعات بسیار مهم در آموزش ریاضی است زیرا سبب می‌شود که یادگیرنده با انگیزه و اشتیاق بیش‌تری به یادگیری و پژوهش بپردازد. این موضوع در بعضی از شاخه‌های ریاضی نظیر نظریه‌ی اعداد بیش‌تر به چشم می‌خورد ولیکن در حیطه‌ی حسابان، کمی پیچیده و ناملموس است. آن‌چه در ادامه می‌آید، تجربه‌ای است که در یکی از کلاس‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال پیش‌دانشگاهی، ضمن درس «مشتق» با دانش‌آموزان داشتیم. این تجربه نشان می‌دهد که حتی در حوزه‌ی حسابان نیز، با وجود ظاهر پیچیده‌ی برخی مباحث آن، حدس و الگویابی و تفکر نظام‌مند می‌تواند انگیزه‌بخش و محرک یادگیرندگان در یک یادگیری فعال و پویا باشد.

حدس و الگویابی در کلاس حساب دیفرانسیل و انتگرال

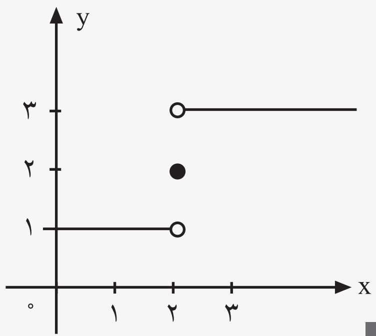
روزی مشغول تدریس درس «تابع مشتق» از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیش‌دانشگاهی بودم، که دانش‌آموزی، سؤال زیر را مطرح کرد:

آیا تابعی مانند f وجود دارد که نمودار f'، یعنی تابع مشتق آن، به صورت شکل (۱) باشد؟

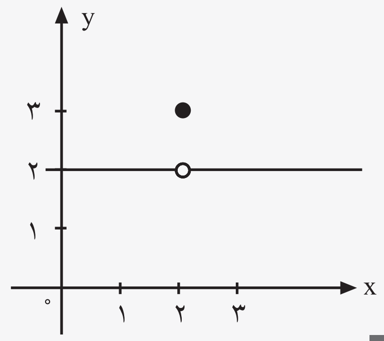
اگرچه این سؤال ظاهراً کمی ساده به نظر می‌رسید، ولی ذهن بسیاری از دانش‌آموزان کلاس را به خود مشغول کرد و پس از این‌که ضابطه‌ی تابع f' را به صورت

$$f'(x)=\begin{cases} ۲ & x\neq ۲ \\ ۳ & x=۲ \end{cases}$$

نوشتیم، تعدادی از دانش‌آموزان به دنبال حدس زدن



شکل۲



شکل۱

ضابطه‌ی f رفتند و اظهار داشتند با توجه به این‌که مشتق تابع f، مساوی ۲ است (باستثناء نقطه‌ی x = ۲)، پس ضابطه‌ی تابع f باید به صورت زیر باشد

$$f(x)=\begin{cases}2x+c & ;x\neq 2\\ a & ;x=2\end{cases}$$

که با توجه به مشتق‌پذیری f (با توجه به شکل، f' همه‌جا وجود دارد) و در نتیجه پیوستگی آن در همه ی نقاط، بالاخص در x = ۲، باید $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ یعنی $a=4+c$. بنابراین

$$f(x)=\begin{cases}2x+c & ;x\neq 2\\ 4+c & ;x=2\end{cases}$$

که همه‌جا همان تابع $f(x)=2x+c$ است و مشتق آن، تابع پیوسته‌ی $f'(x)=2$ می‌باشد، در حالی‌که مطابق شکل (۱)، f' پیوسته نیست. پس وجود تابعی مانند f که نمودار مشتق آن مطابق شکل (۱) باشد غیرممکن است.

بلافاصله، از جانب دانش‌آموزان، این سؤال مطرح شد که **آیا ممکن است تابعی مانند f موجود باشد به قسمی که نمودار تابع f' مطابق شکل (۲) باشد؟**

باز هم دانش‌آموزان سعی کردند ضابطه‌ی f را حدس بزنند. آن‌ها استدلال کردند که f' همه‌جا وجود دارد، پس f همه‌جا پیوسته و مشتق‌پذیر است؛ سپس نوشتند:

$$f'(x)=\begin{cases}3 & ;x>2\\ 2 & ;x=2\\ 1 & ;x<2\end{cases}$$

در نتیجه

$$f(x)=\begin{cases}3x+c & ;x>2\\ a & ;x=2\\ x+b & ;x<2\end{cases}$$

که با توجه به پیوستگی و مشتق‌پذیری f در x = ۲ باید داشته باشیم

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$$

$$\Rightarrow a=6+c=2+b\Rightarrow b=4+c \text{ و } a=6+c$$

یعنی

$$f(x)=\begin{cases}3x+c & ;x>2\\ 6+c & ;x=2\\ x+4+c & ;x<2\end{cases}$$

که این تابع، اصلاً در x = ۲ مشتق‌پذیر نیست زیرا $f'_+(2)\neq f'_-(2)$ در حالی‌که بنا به شکل (۲)، باید $f'(2)=2$.

وحدس های دانش آموزان

پس وجود تابعی مانند f که نمودار تابع مشتق آن مطابق شکل (۲) باشد غیرممکن است.

در این جا بود که تعدادی از دانش‌آموزان، حدس زیر را مطرح کردند:

اگر f' (یعنی تابع مشتق f) همه جا وجود داشته باشد اما پیوسته نباشد آن گاه f وجود ندارد.

به عبارت دقیق‌تر، **اگر تابعی همه جا موجود ولی ناپیوسته باشد، نمی‌تواند مشتق هیچ تابعی باشد.** البته من به عنوان معلم آن کلاس، در آن جلسه درباره‌ی درستی یا نادرستی حدس فوق اصلاً نظری ندادم و فقط گفتم که برای درستی یا نادرستی حدس فوق باید کمی صبر کنیم، زیرا مطمئن بودم در جلسات بعد، حدس فوق با اشکالاتی مواجه خواهد شد.

جلسه‌ی بعد به سراغ تمرین‌ها رفتیم و اتفاقاً به این مسئله برخورد کردیم که هرگاه

$$g(x)=\begin{cases}x^۲\sin\frac{۱}{x} & ; \quad x\neq ۰\\ ۰ & ; \quad x=۰\end{cases}$$

آیا g در $x=۰$ پیوسته است؟ مشتق‌پذیر چطور؟

بلافاصله دانش‌آموزان با استفاده از تعریف مشتق، یعنی $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{g(x)-g(۰)}{x-۰}$، مشتق‌پذیری g را در $x=۰$ بررسی کردند و ثابت شد که $g'(۰)=۰$.

سپس از آن‌ها خواستم که تابع مشتق g را به دست آورند. آن‌ها g' را چنین به دست آوردند

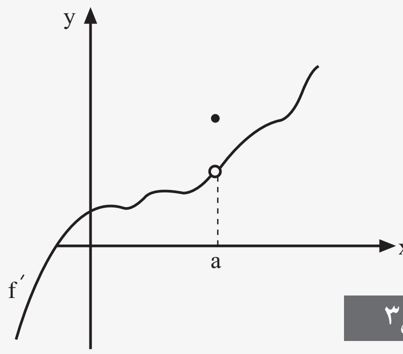
$$g'(x)=\begin{cases}۲x\sin\frac{۱}{x}-\cos\frac{۱}{x} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$$

سپس این سؤال را مطرح کردم که

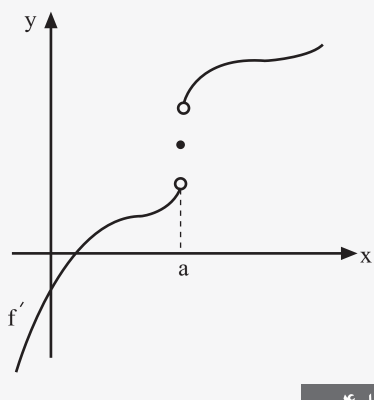
الف) آیا تابع g همه جا پیوسته و مشتق‌پذیر است؟

ب) آیا g' همه جا پیوسته است؟

در مورد سؤال (الف) همگی بر این که g همه جا پیوسته و مشتق‌پذیر است، اتفاق نظر داشتند، اما در مورد سؤال (ب)، تعداد کمتری، جوابی ارایه دادند و آن عده متوجه شدند که $\lim\limits_{x\to ۰}g'(x)$ وجود ندارد، در حالی که $g'(x)$ همه جا وجود دارد (یعنی g' پیوسته نیست). این مثال موجب شد که به نادرستی حدس جلسه‌ی قبل خود پی ببرند. البته این موضوع وظیفه‌ی من را کمی سنگین‌تر کرد چرا که این پرسش برای دانش‌آموزان مطرح شد که چرا تابعی مانند g' که ناپیوسته است می‌تواند مشتق تابعی مانند g باشد، در حالی که نمودارهای ناپیوسته‌ی شکل‌های (۱) و (۲) نتوانستند مشتق هیچ تابعی باشند. هم‌چنین اگر نمودارهای f' مانند شکل‌های (۳) و (۴) باشند که نتوانیم با به دست آوردن ضابطه‌ی f، وجود یا عدم وجود آن را بررسی کنیم، باید چه کرد؟



شکل ۳



شکل ۴

در این زمان، تعدادی از دانش‌آموزان، تمام فکر و ذهن خود را به رفتار تابع مشتق در همسایگی $x=a$ مشغول کردند. من نیز سعی کردم با استفاده از مطالب کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیش‌دانشگاهی و منابع موجود به این سؤال، پاسخ دهم.

به این منظور، چند تعریف و قضیه را که در کتاب درسی به‌صورت همان قضیه یا حتی به‌صورت مسأله بودند، مطرح کردم و این نتیجه را به‌دست آوردیم که

هرگاه تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f' نمی‌تواند بر $[a,b]$ ناپیوستگی ساده یا نوع اول داشته باشد.

اما f' ممکن است ناپیوستگی نوع دوم داشته باشد و در نتیجه وجود تابعی مانند f که نمودار تابع مشتق آن مانند شکل‌های (۱) یا (۲) باشد (نوع ناپیوستگی در این شکل‌ها نوع اول یا ساده است) غیرممکن است و البته، ناپیوستگی تابع g' از نوع اول نیست.

در ادامه، تعاریف و قضایایی که با این موضوع مرتبط هستند، برای علاقه‌مندان، به تفصیل آمده است.

تعریف. هرگاه تابع f در $x=a$ ناپیوسته بوده و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ وجود داشته باشند، می‌گوییم f در $x=a$ **ناپیوستگی نوع اول** یا **ناپیوستگی ساده** دارد یعنی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ یا $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq f(a)$.

در غیر این صورت گوییم که تابع f در $x=a$ **ناپیوستگی نوع دوم** دارد.

مثال. توابع $f(x)=[x]$ در $x=۱$ و $g(x)=[x]+[-x]$ نیز در $x=۲$ ناپیوستگی نوع اول دارند. اما تابع
$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{۱}{x} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$$
در $x=۰$ ناپیوستگی نوع دوم دارد.

تعریف. هرگاه $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq f(a)$ در این صورت ناپیوستگی f را در $x=a$ **رفع شدنی** گویند، در غیر این صورت ناپیوستگی را **رفع نشدنی** گویند.

مثال. ناپیوستگی تابع $f(x)=[-x^۲]$ در $x=۰$ رفع شدنی است. اما ناپیوستگی $f(x)=[x^۲]$ در $x=۱$ رفع ناشدنی است.

نتیجه. اگر ناپیوستگی f در $x=a$ رفع شدنی باشد، آن‌گاه ناپیوستگی f در $x=a$ از نوع اول است. اگرچه عکس آن کلیت ندارد مانند $f(x)=[x]$ در $x=۱$.

قضیه۱. (قضیه مقدار میانی در توابع پیوسته). هرگاه تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته و k عددی حقیقی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، آن‌گاه عددی حقیقی مانند c بین a و b وجود دارد به‌قسمی که $f(c)=k$.

قضیه۲. اگر تابع f در بازه‌ی بسته $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه f، اکسترمم‌های مطلق خود را در این بازه می‌گیرد و اگر اکسترمم‌های مطلق در a و b نباشند، آن‌گاه این اکسترمم‌ها، نسبی نیز هستند.

قضیه۳. اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر بوده و اکسترمم نسبی داشته باشد، آن‌گاه $f'(a)=۰$.

قضیه۴. اگر حد تابعی در $x=a$ مثبت (منفی) شود، آن تابع در یک همسایگی محذوف از $x=a$، مثبت (منفی) است. این مطلب برای حد راست (چپ) نیز صادق است که وجود همسایگی راست(چپ) را به همراه دارد.

حال با توجه به تعاریف و قضایای قبل، قضیه‌ی زیر را که به **قضیه‌ی مقدار میانی برای مشتق‌ها** (مشابه با قضیه‌ی مقدار میانی در توابع پیوسته) معروف است، بیان می‌کنیم.

قضیه۵. (قضیه‌ی مقدار میانی برای مشتق‌ها) هرگاه تابع حقیقی f بر بازه‌ی $[a,b]$ مشتق‌پذیر بوده و k عددی حقیقی بین $f'(a)$ و $f'(b)$ باشد، در این صورت عددی حقیقی مانند c بین a و b وجود دارد به‌قسمی که $f'(c)=k$.

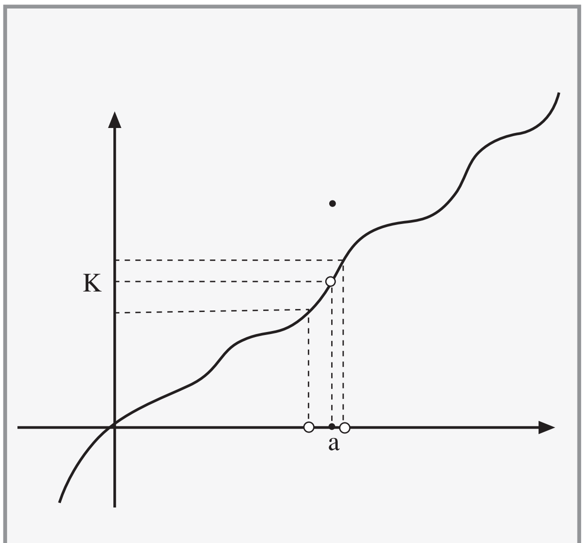
اثبات. فرض کنیم $f'(a)<f'(b)$ (حالتی که $f'(a)>f'(b)$ مشابه است). پس $f'(a)<k<f'(b)$. یعنی $f'(b)-k>۰$ و $f'(a)-k<۰$.

حال تابع کمکی $g(x)=f(x)-kx$ را در نظر می‌گیریم که با توجه به مشتق‌پذیری f، تابع g نیز مشتق‌پذیر بوده و $g'(x)=f'(x)-k$. پس $g'(a)=f'(a)-k<۰$ و

$g'(b)=f'(b)-k>0$. در نتیجه $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<0$.

بنابه قضیه‌ی(۴)، در یک همسایگی راست از $x=a$ یعنی در بازه‌ی $(a,a+\varepsilon)$ که $(a,a+\varepsilon)\subset(a,b)$ ، $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}<0$ و چون $x>a$ پس $g(x)-g(a)<0$. در نتیجه اگر $t_1\in(a,a+\varepsilon)\subset(a,b)$ ، آن‌گاه $g(t_1)<g(a)$ و چون $g'(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}=f'(b)-k>0$ ، پس مشابهاً در یک همسایگی چپ از $x=b$ یعنی در بازه‌ی $(b-\varepsilon',b)$ که $(b-\varepsilon',b)\subset(a,b)$ ، $\frac{g(x)-g(b)}{x-b}>0$ پس $g(x)-g(b)<0$ و اگر $t_2\in(b-\varepsilon',b)\subset(a,b)$ ، آن‌گاه $g(t_2)-g(b)<0$. یعنی $g_{(t_2)}<g_{(b)}$. در نتیجه g در بازه‌ی $[a,b]$ عرض‌هایی کوچک‌تر از عرض‌های ابتدا و انتها (یعنی $g_{(t_1)}$ و $g_{(t_2)}$)دارد. یعنی حداقل یکی از اکسترمم‌های مطلق، در ابتدا و انتها نیست. پس $a<c<b$ وجود دارد که g در $x=c$ اکسترمم مطلق و در عین حال اکسترمم نسبی است (بنا به قضیه(۲)) و با توجه به قضیه‌ی (۳)، $g'(c)=0$ یعنی $f'(c)-k=0$ یعنی $f'(c)=k$.

نتیجه. هرگاه تابع f بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f' نمی‌تواند بر $[a,b]$ ناپیوستگی ساده یا نوع اول داشته باشد، اما f' ممکن است ناپیوستگی نوع دوم داشته باشد.



شکل۵

اثبات. (برهان خلف) فرض کنیم f' ناپیوستگی نـ (ساده) داشته باشد یعنی نقطه‌ای چون $t\in(a,b)$ وجود باشد که در آن $f'(t^+)$ و $f'(t^-)$ وجود دارند ولی $f'(t)\neq f'(t^+)$ یا $f'(t)\neq f'(t^-)$.

فرض کنید $f'(t)<f'(t^+)$ و فرض کنیم $(k\in R)f'(t)<k<f'(t^+)$. بنا به قضیه‌ی(۴)، $\delta>0$ وجود دارد به قسمی که برای هر $x\in(t,t+\delta)$ داریم $f'(t)<k<f'(x)$ و این با قضیه‌ی(۵)، مغایر است، زیرا باید $x_0\in(t,t+\delta)$ موجود باشد به قسمی که $f'(x_0)=k$.

پس با توجه به قضیه‌ی قبل، تابعی مانند f وجود ندارد که نمودار f' به صورت یکی شکل‌های (۱)، (۲)، (۳) یا (۴) باشد (نوع ناپیوستگی در این شکل‌ها، نوع اول است) و در حالت خاص، f' نمی‌تواند ناپیوستگی رفع شدنی داشته باشد.

به طور شهودی اگر نمودار تابع f' ، مطابق شکل (۵) باشد، می‌توانیم یک همسایگی از $x=a$ را طوری در نظر بگیریم که f' در این همسایگی همه‌جا موجود باشد ولی بعضی از خط‌های افقی $y=k$ ، نمودار f' را قطع نکنند. یعنی حکم قضیه‌ی قبل برقرار نباشد. یا خاصیتی شبیه به خواص قضیه مقدار میانی در توابع پیوسته برای f' برقرار نباشد.

مثال. توابعی مانند f و g وجود ندارند که در آن‌ها

$$f'(x)=\begin{cases} x^2\sin x & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

و

$$g'(x)=\begin{cases} x^2+5x & x>0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{1}{x^2+2} & x<0\end{cases}$$

منابع

[۱] **حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲ پیش‌دانشگاهی**، مؤلفان: تلگینی، خردپژوه، رجالی و قیاسیان، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی.

[۲] **اصول آنالیز ریاضی**، تألیف: والتر رودین، ترجمه‌ی دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات علمی و فنی، ۱۳۷۱.