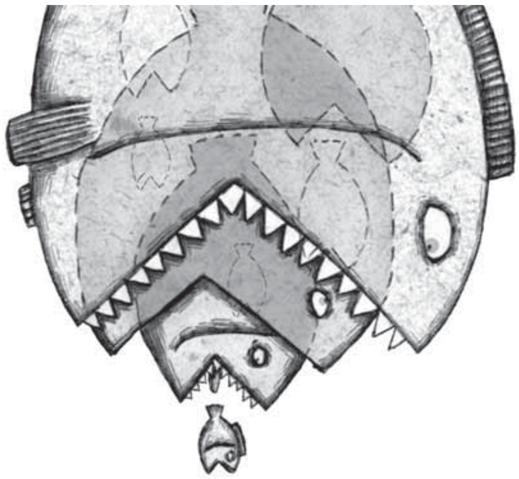

درباره‌ی واگرایی سری توافقی

علی‌اکبر جاویدمهر
دبیر دبیرستان‌های ساوه

در صفحه‌ی ۱۴ مجله‌ی رشد آموزش ریاضی شماره‌ی ۶۴، اثباتی بسیار کوتاه برای واگرایی سری توافقی به شرح زیر ارایه شده است:

اگر $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ همگرا باشد، آن‌گاه

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

که این یک تناقض است. پس این سری واگراست.

گرچه این اثبات بسیار کوتاه و جالب به‌نظر می‌رسد ولی اندکی به توضیح، نیاز دارد. فرض کنیم سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ همگرا باشد؛ پس مجاز هستیم در سری، تجدید آرایش ایجاد کنیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)>\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

حال اگر فرض کنیم $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=L$، آن‌گاه $L>L$ که یک تناقض است.

اثباتی دیگر برای واگرایی سری توافقی

برهان خلف: فرض کنیم این سری، همگرا باشد. پس مجاز هستیم در سری تجدید آرایش ایجاد کنیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\\&=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)\\&>\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\end{aligned}$$

پس

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}>\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

درنتیجه

$$L\geq\frac{1}{2}+L>L$$

این تناقض آشکار، نشان می‌دهد که سری واگراست.

اثبات واگرایی سری توافقی به کمک معیارکوشی

برهان خلف. فرض کنیم سری، همگرا باشد. پس با استفاده از معیارکوشی، داریم:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n, p (n \geq n_0, p \in N \Rightarrow \left| a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon)$$

حال اگر $\varepsilon < \frac{1}{2}$ را انتخاب کنیم، n_0 ی وجود دارد که اگر $n \geq n_0$ و $p \in N$، آن‌گاه

$$\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} < \varepsilon$$

چون این نامساوی به ازای هر p دلخواه برقرار است، بنابراین به‌ازای $p = n$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{2} = \frac{n}{2n} < \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} < \varepsilon$$

و این یک تناقض است؛ زیرا ε را کوچک‌تر از $\frac{1}{2}$ اختیار کرده بودیم. پس فرض خلف، باطل بوده و سری مورد نظر، واگراست.

منابع

[۱] یک اثبات کوتاه برای واگرایی سری توافقی، جمال روئین، **مجله‌ی رشد آموزش ریاضی**، شماره‌ی ۶۴، ص ۱۴، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

[۲] **آنالیز ریاضی**، ب-پ-دمیدوویچ، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف.

[۳] **آنالیز ریاضی**، تام. ام. آپوستل، ترجمه‌ی دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف.