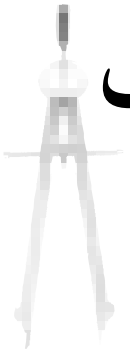
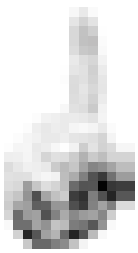
ریاضیات اصل موضوعی؛
قالبی نامناسب، اما موضوعی مناسب برای آموزش

لیلا قدکساز خسروشاهی
دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه شهید بهشتی
و معلم ریاضی شهرری



چکیده

بخش اول این مقاله، به توضیح در مورد رویکرد اصل موضوعی در آموزش ریاضی و ارائه‌ی تاریخچه‌ی کوتاهی از آن می‌پردازد. بخش دوم به بیان دلایلی برای نامناسب بودن رویکرد اصل موضوعی در آموزش ریاضی خواهد پرداخت و بخش سوم، که تأکید اصلی مقاله بر آن است، پس از توضیحاتی در مورد تفکر نقادانه و لزوم آموزش آن، به رابطه‌ی بین فهم ساختارهای اصل موضوعی و توسعه‌ی توانایی تفکر نقادانه می‌پردازد و فهم ساختارهای اصل موضوعی را موضوع مناسبی برای آموزش عمومی می‌داند.[1]



رویکرد اصل موضوعی به آموزش ریاضیات

در هر دستگاه اصل موضوعی، پس از پذیرفتنِ درستیِ چند گزاره به نام اصول موضوع، که نیاز به اثبات ندارند، قضایای دیگر به وسیله‌ی استدلال استنتاجی از آن اصول نتیجه می‌شوند. اصول موضوع باید سازگار باشند، یعنی استنتاج روی آن‌ها به تناقض منجر نشود. هم‌چنین برای این که تعداد آن‌ها خیلی زیاد نشود، باید مستقل از هم باشند، یعنی نتوان یکی را از بقیه استنتاج کرد.

«روش اصل موضوعی در ریاضیات، دست کم از زمان اقلیدس سابقه دارد. البته به هیچ‌وجه نمی‌توان گفت که ریاضیات یونانی منحصراً در همان قالب اصل موضوعیِ انعطاف‌ناپذیرِ کتاب «اصول» پدید آمده یا عرضه شده است، ولی تأثیر این رساله در نسل‌های بعدی آن‌چنان عظیم بوده که «اصول»، به صورت الگوی اثبات دقیق در ریاضیات درآمده است. گاهی حتی فیلسوفان، مثلاً اسپینوزا در **اخلاق به صورت اثبات هندسی**[2]، کوشیده‌اند استدلال‌ها را به شکل قضایای حاصل از تعریف‌ها و اصول موضوع عرضه کنند» (کورانت و رابینز، ۱۹۹۵، صفحه‌ی ۲۲۸).

با این حال، کورانت و رابینز (۱۹۹۵) بیان می‌کنند که این بیانِ دقیقِ اصل موضوعی، در قرن‌های هفدهم و هیجدهم از یادها رفت و جای خود را به شهود و استدلال‌های قانع‌کننده ولی آمیخته با مفاهیم مبهم داد. هرچند که قرن نوزدهم، عصر بازگشت به آرمان کلاسیک دقت و برهان دقیق بود و از این لحاظ حتی از الگوی علم یونانی پیشی گرفت.

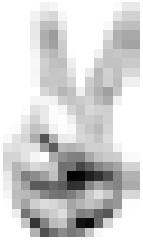
در ریاضیات مدرسه‌ای، به گفته‌ی هنا (۱۹۸۳) حرکتی با

با تدریس اصل موضوعی ریاضیات، دانش‌آموزان نقشی در تولید ریاضی نخواهند داشت و آن را به طور واقعی تجربه نمی‌کنند. در واقع، رویکرد اصل موضوعی در تدریس ریاضی، توانایی دانش‌آموزان را برای تولید ریاضی، دستِ‌کم می‌گیرد که این موضوع، می‌تواند از لحاظ روانی، مخرب باشد

عنوان **ریاضیات جدید** در اوایل دهه‌ی ۱۹۵۰ آغاز شد و بین سال‌های ۱۹۵۵ و ۱۹۵۶ این حرکت به اوج خود رسید. این حرکت، علاوه بر قرار دادن حوزه‌های بسیار مجرد از ریاضیات مدرن در ریاضیات مدرسه‌ای، تأکید بسیاری بر ریاضیات به‌عنوان یک ساختار اصل موضوعی داشت و بر منطق و اثبات، تأکید ویژه‌ای می‌کرد. نمونه‌ای از چنین رویکردی به تدریس مثلثات، در پیوست الف خواهد آمد.

به گفته‌ی کلمنتس و الرتون (۱۹۹۶)، هرچند که ریاضی‌دانان دانشگاهی نقش مهمی را در توسعه‌ی ریاضیات جدید در مدارس داشتند، اما به‌طور جهانی از آن برنامه حمایت نمی‌کردند؛ تا جایی که در اوایل دهه‌ی ۱۹۶۰، بسیاری از ریاضی‌دانانِ بانفوذ، اعلام کردند که از تغییرات جدید در ریاضی مدرسه‌ای، حمایت نمی‌کنند. به گفته‌ی آن‌ها، وقتی در دهه‌ی ۱۹۷۰، ریاضیات جدید در امریکا زیر سؤال رفت و عملاً از برنامه‌ی درسی ریاضی مدرسه‌ای حذف شد، بسیاری از کشورها تازه به آن روی آوردند، با این عقیده که ریاضیات مدرسه‌ایِ آن‌ها باید با پیشرفت‌های معاصر در سایرِ نقاط دنیا برابری کند.

در ایران نیز چنین تحولاتی را در عرصه‌ی ریاضیات مدرسه‌ای می‌توان با بررسی کتاب‌های مدرسه‌ای مشاهده کرد. در کتاب‌های ریاضی نظام قبلی آموزش متوسطه‌ی عمومی ایران نیز، تحت تأثیر حرکت ریاضیات جدید، غالباً از رویکرد اصل موضوعی برای ارائه‌ی مباحث ریاضی استفاده شد. اما با تغییر رویکرد به برنامه‌ی ریاضی مدرسه‌ای، در کتاب‌های ریاضی نظام جدید، استفاده از شهود و تجربه برای ورود به موضوعات درسی ریاضی یکی از هدف‌های اصلی بوده است. برای بررسی بهتر دلایل این تغییر رویکرد، در بخش بعدی به نقدهای وارد بر رویکرد اصل موضوعی در آموزش ریاضیات می‌پردازیم.



ریاضیاتِ اصل موضوعی، رویکردی نامناسب به آموزش ریاضیات

در حالی که بسیاری از معلمان و آموزشگران سنتی، روش اصل موضوعی آموزش ریاضی را بهترین می‌دانند، دویلیرز[۳] (۱۹۸۶) اذعان می‌دارد که ریاضی‌دانان و آموزشگران ریاضی بسیاری مانند فرودنتال[۴]، هرش[۵]، هیومن[۶]، کلاین[۷]، فیشباین[۸]، لاکاتوش[۹]، فن‌هیله[۱۰] و دیگران، نقدهای فلسفی و پداگوژیکی متعددی را بر این نوع تدریس ریاضی وارد می‌کنند. در این جا به‌طور خلاصه به برخی از نقدهایی که توسط این افراد بر این رویکردِ آموزشی وارد شده است، پرداخته می‌شود.

برخورد اصل موضوعی با ریاضیات، چهره‌ی نادرستی را از آن به دانش‌آموزان نشان می‌دهد و بازتاب ماهیتِ واقعی یک

تولید ریاضی نیست. به گفته دویلیرز (۱۹۸۶)، نگاهی به تاریخ ریاضی نشان می‌دهد که دانشِ جدید در ریاضی، معمولاً با اصول موضوعِ از قبل تعیین شده و استخراج قضایای جدید، تولید نمی‌شود و چنین روندی، بیش‌تر از آن‌که یک قاعده باشد، یک استثناء است. به عقیده‌ی وی، از نقطه‌نظر تاریخی، اصول موضوع، اغلب چیزهای از پیش تعیین شده در یک تولید ریاضی نیستند، بلکه تولیدات ریاضی اغلب با استفاده از حدس زدن، نظریه‌پردازی، تجزیه و تحلیل، تجرید، تعمیم و غیره صورت می‌پذیرند.

اصول موضوع معمولاً پس از یک تولید ریاضی و برای فرمول‌بندی آن، حذف کردن بحث‌های اضافی، دقیق کردن اثبات‌ها و ارائه‌ی این تولید به جامعه‌ی ریاضی‌دانان به‌وجود می‌آیند. دویلیرز (۱۹۸۶) به نقل از فیشباین بیان می‌کند که یک ریاضی‌دان حرفه‌ای، با خواندن یک ارائه‌ی اصل موضوعی از یک مبحث ریاضی، می‌تواند با شهود خود، تفکرِ نویسنده را بازسازی کند و نمادها و اصول و مفاهیم اولیه را برای خویش، تصور و توجیه کند؛ اما چنین کاری از یک دانش‌آموز متوسط برنمی‌آید.

علاوه بر این، با تدریس اصل موضوعی ریاضیات، دانش‌آموزان نقشی در تولید ریاضی نخواهند داشت و آن را به طور واقعی تجربه نمی‌کنند. در واقع، رویکرد اصل موضوعی در تدریس ریاضی، توانایی دانش‌آموزان را برای تولید ریاضی، دست‌کم می‌گیرد که این موضوع، می‌تواند از لحاظ روانی، مخرب باشد. دویلیرز (۱۹۸۶) به نقل از موریس کلاین (۱۹۷۷) می‌نویسد:

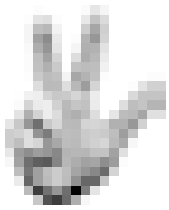
«ارائه‌ی استنتاجی ریاضی از نظر روانی، مخرب است زیرا سبب می‌شود دانش‌آموزان باور کنند که ریاضیات توسط نخبگانی به‌وجود آمده است که با اصول موضوع شروع می‌کنند و با استدلال مستقیم و بدون اشتباه، به قضایا می‌رسند. با مشاهده‌ی چنین ذهن‌های دسترسی‌ناپذیر، دانش‌آموز احساسِ ناتوانی می‌کند و به‌خصوص وقتی که استاد طوری درس را ارائه می‌دهد که انگار در عمل بسیار نخبه است، دانش‌آموز نسبت به توانایی‌های خود، دچار ناامیدی می‌شود».

علاوه بر این‌ها، با رویکرد اصل موضوعی به تدریس ریاضی، ممکن است که دانش‌آموزان، لزوم وجود اصول را احساس نکنند و آن‌ها را موضوعاتی بدیهی و روشن بدانند. هم‌چنین، در یک دستگاه اصل موضوعی، دانش‌آموزان الزاماً تفاوت بین اصول و قضیه‌های اولیه‌ای را که به نظرشان بدیهی هستند نمی‌دانند. بنابراین، آن‌ها نمی‌دانند که چرا باید گزاره‌هایی بدیهی به‌عنوان اصول را بپذیرند و درحالی که قضیه‌های اولیه هم برای آن‌ها به‌همان اندازه بدیهی به‌نظر می‌رسند، اما باید اثبات شوند.

از طرفی، در دستگاه‌های اصل موضوعی، معمولاً برای رسیدن به قضایای جالب که به اندازه‌ی لازم غیربدیهی بوده و نیاز به اثبات آن‌ها توسط دانش‌آموزان احساس می‌شود، معمولاً راهی طولانی وجود دارد که پیمودن آن برای دانش‌آموزان، خسته‌کننده خواهد بود.

یکی دیگر از نقدهای آموزشی که بر این رویکرد وارد شده، این است که چون دانش‌آموزان نقشی در انتخاب اصول موضوع و تعاریف اولیه نداشته و آن را موضوعی تمام شده می‌بینند، ریاضیات را موضوعی خشن و انعطاف‌ناپذیر می‌یابند که خلاقیت در آن نقشی ندارد و باید آن را به محفوظات خود اضافه کنند. در واقع، این روش ممکن است به یادگیری طوطی‌وار و حفظ کردنِ اصل‌ها، تعریف‌ها، قضیه‌ها، گزاره‌ها و اثبات‌های آن‌ها، بدونِ درک و فهم کافی بیانجامد.

با وجودی که ممکن است نقدهای مذکور، برای کنار نهادن رویکرد اصل موضوعی در آموزش ریاضی کافی به نظر برسند، اما این دستگاه‌ها به عنوان یک دست‌آوردِ تفکر بشری، به منظور نظام‌مند کردن تفکر، کارآمد می‌باشند. به همین دلیل، به نظر می‌رسد که رویکرد اصل موضوعی، نه به عنوان روشی برای ارائه‌ی ریاضیات، بلکه به عنوان موضوعی برای آموزشِ روشِ تفکرِ نظام‌مند، مفید و حتی ضروری هستند.



ریاضیات اصل موضوعی: موضوعی مناسب برای آموزش

«به جای این‌که به دانش‌آموزانمان بیاموزیم به چه چیزی فکر کنند، باید به آن‌ها یاد بدهیم چگونه فکر کنند».

شافرسمن (۱۹۹۱) پس از نقل این جمله از کلیمنت و لوچهلد (۱۹۸۰)، برای هر آموزشی، دو وجه متفاوت **موضوع تفکر** و **روش تفکر** را قایل است. وی با اطلاق عنوان **تفکرِ نقادانه** به وجه روش تفکر، اعتقاد دارد به چه چیز فکر کردن، که همان موضوعِ تفکر است، به عنوان اولین هدف آموزش تصور شده و آن‌قدر به صورت کلیشه‌ای در ذهن‌ها جا افتاده که معلمان و

یادگیرندگان، بیش‌تر تلاش و انرژی خود را صرف آن می‌کنند. در حالی که در دنیای امروز که حجم اطلاعات با سرعت زیادی در حال افزایش است، چنین آموزشی، یعنی دادن اطلاعات تازه و طبقه‌بندی شده در جهانی که در آینده، آن اطلاعات به سرعت جایگزین خواهند شد، خطا است. درنتیجه، توصیه‌ی اکید شافرسمن (۱۹۹۱)، تأکید بر آموزش روش تفکر یا تفکر نقادانه در آموزش مدرسه‌ای است.

در همین راستا، جونز (۲۰۰۱) اظهار می‌دارد که تفکر نقادانه، تلاش برای درست قضاوت کردن با استفاده از شواهد موجود است و به اعتقاد وی، بسیاری از افراد، باورهایشان همان چیزهایی است که همه قبول دارند، در حالی که یک متفکر نقاد، تفکر خاص خود را دارد و حتی اگر قضاوت‌هایش بین بقیه رایج نباشد، خطرپذیری دارد و می‌تواند از عقیده‌ی خود دفاع کند. به‌عقیده‌ی شافرسمن (۱۹۹۱)، تفکر نقادانه فرد را قادر می‌سازد تا شهروندی مسؤولیت‌پذیر و پاسخگو باشد که در اجتماع، به طور مؤثر حضور دارد و یک مصرف‌کننده‌ی صرف نیست. به عنوان مثال، وی بیان می‌کند که یک متفکر نقاد، به خوبی میان دو نامزد انتخاباتی سیاسی قضاوت می‌کند، می‌تواند در هیأت منصفه‌ی یک دادگاه جنایی حضور داشته باشد، نیاز اجتماعی را برای استفاده از نیروی دستگاه‌های اتمی ارزیابی کند یا به بررسی پی‌آمدهای افزایش دمای زمین بپردازد.

تفکر نقادانه فرد را قادر می‌سازد تا شهروندی مسؤولیت‌پذیر و پاسخگو باشد که در اجتماع، به طور مؤثر حضور دارد و یک مصرف‌کننده‌ی صرف نیست

به گفته‌ی شافرسمن (۱۹۹۱)، همه‌ی نظام‌های آموزشی، مشکلاتی را در رابطه با ایجاد مهارت‌های تفکر نقادانه در دانش‌آموزان گزارش کرده‌اند. این در حالی است که تجربه‌ی واقعی نگارنده، مؤید این امر است که نشان دادن ضعف‌های جدی شهروندان در استفاده از مهارت‌های تفکر نقادانه، نیازمند کار تحقیقی وسیعی نیست، زیرا شواهد موجود برای آن در دنیای اطرافمان، به‌سادگی قابل مشاهده‌اند. به طور نمونه، با نگاهی به اطراف، کسانی را می‌بینیم که ادعا می‌کنند بدون این‌که استدلال نمایند یا شواهد کافی برای ادعای خود ارائه دهند؛ استدلال می‌کنند بدون این‌که از روش‌های معتبری استفاده کنند و بسیاری اوقات، دچار دور باطل می‌شوند؛ از واژه‌های مشترک برای بیان مفاهیم متفاوت استفاده می‌کنند و به همین دلیل، حرف همدیگر را نمی‌فهمند و گاهی برداشت‌های نادرستی از حرف‌های یکدیگر دارند؛ مردمی را می‌بینیم که پیرو قدرت غالب هستند، سؤال نمی‌کنند، کنجکاو نیستند؛ برای خود فکر نمی‌کنند اما به دیگران تکیه می‌کنند تا برایشان فکر کنند؛ و بالاخره، به آسانی تحت تأثیر تبلیغات قرار می‌گیرند و در مسایل اجتماعی، سیاسی، دینی و فرهنگی، خیلی راحت و بدون دلیل، طرفدار جریان خاصی می‌شوند.

این در حالی است که شافرسمن (۱۹۹۱)، ادافر و ثورنکویست (۱۹۹۳)، جونز (۲۰۰۱)، دوبونو (۱۹۹۲) و شیروانی (۱۳۸۳)، تفکر نقادانه را قابل یادگیری و قابل توسعه می‌دانند. شافرسمن (۱۹۹۱) و دوبونو (۱۹۹۲) بیان می‌کنند که اکنون در سراسر دنیا، صدها برنامه برای آموزش تفکر نقادانه وجود دارد.

با پذیرفتن این موضوع که تفکر نقادانه قابل آموزش است، به رابطه‌ی بین فهم ساختارهای اصل موضوعی و توسعه‌ی توانایی تفکر نقادانه می‌پردازیم.

رابطه‌ی بین فهم ساختارهای اصل موضوعی و توسعه‌ی توانایی تفکر نقادانه

هنا (۱۹۸۳) هر ساختار اصل موضوعی را متشکل از چهار مؤلفه می‌داند: مجموعه‌ای از مفاهیم اولیه یا تعریف نشده، مجموعه‌ای از قواعد شکل‌گیری، مجموعه‌ای از اصول، و مجموعه‌ای از قواعد استنتاج. با کنار نهادن مؤلفه‌ی دوم (به‌دلیل غیر کاربردی بودن در زمینه‌های غیر ریاضی) و اضافه کردن مجموعه‌ای از تعاریف به این مؤلفه‌ها، به تشریح نقش این مؤلفه‌ها در تقویت تفکر منطقی می‌پردازیم.

الف) تعریف‌ها و مفاهیم تعریف‌نشده یا اولیه

به گفته‌ی جونز (۲۰۰۱)، یک تعریف، بیانی از معنی یا معانی یک کلمه است که محدوده‌ی کاربرد آن کلمه را به‌طور دقیق، مشخص می‌کند.

تعریف، یکی از مؤلفه‌های اصلی تفکر علمی، منطقی و نقادانه است و لزوم وجود آن در تمامی علوم، از جمله علوم ریاضی، علوم تجربی و علوم انسانی احساس می‌شود. به نظر نویسنده، یکی از ضعف‌هایی که در توانایی تفکر نقادانه‌ی افراد جامعه دیده می‌شود، مربوط به عدم دقت در تعاریف واژه‌هاست که می‌توان آن را از دو جنبه بررسی کرد:

● از یک متفکر نقاد، انتظار می‌رود نسبت به تعاریف دقیق واژه‌ها حساس باشد. مثالی که شیروانی (۱۳۸۳) بیان می‌کند، گویای این مسأله است؛ فرض کنید یک مقام مسؤول کشوری در یک سخنرانی عمومی می‌گوید: «ما در کشورهای دیگر مداخله‌ی نظامی نمی‌کنیم، ولی در شرایط خاص، جنگ محدود را می‌پذیریم». به نظر بسیاری از شنوندگان، این سخنان بدون اشکال خواهد بود. اما یک متفکر نقاد، برای فهم این جمله به تعریف دقیق‌تری از شرایط خاص و جنگ محدود نیاز دارد و به‌سادگی، تحت تأثیر الفاظ به‌کار رفته و نحوه‌ی بیان آن قرار نمی‌گیرد.

● از دیگر مواردی که باید در تعاریف رعایت شود، اجتناب از تعریف دوری[11] به‌معنایی است که مفهوم الف را توسط ب و مفهوم ب را توسط الف تعریف کنیم. مثلاً بگوییم شجاعت یعنی دلیری و دلیری یعنی شجاعت. برای رفع این مشکل، به مفاهیم اولیه یا تعریف نشده نیاز خواهیم داشت تا بتوانیم بقیه‌ی مفاهیم را با استفاده از آن‌ها تعریف کنیم. بنابراین، یک متفکر نقاد، علاوه بر این که نسبت به تعریف واژه‌ها و مفاهیم حساس است، لزوم وجود مفاهیم اولیه و تعریف‌نشده را نیز درک می‌کند.

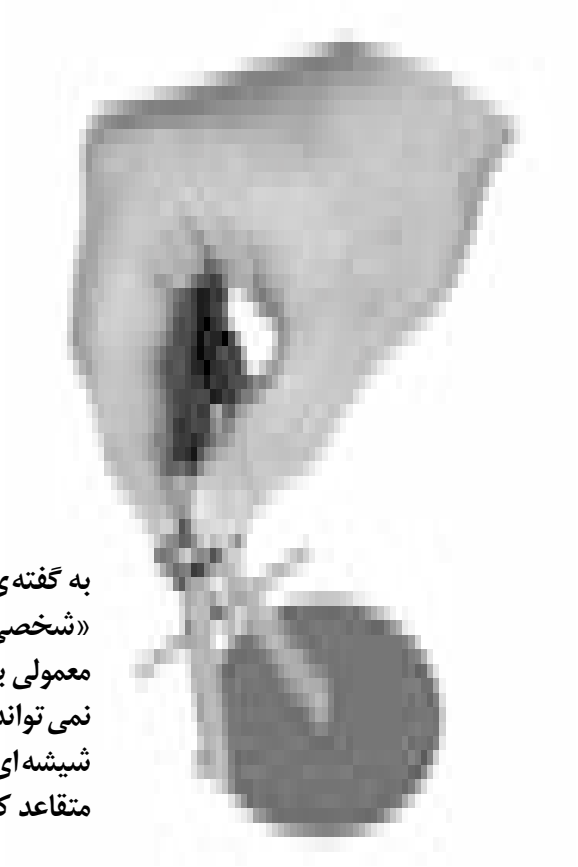
بنابه اظهار لین[12] در مطالعه‌ای که فاوست[13] (۱۹۳۸) روی یک روش جدید تدریس هندسه در دبیرستان انجام داد، موفق شد مهارت‌های تفکر نقادانه و توانایی تجزیه و تحلیل دانش‌آموزان را حتی در زمینه‌های غیر ریاضی ارتقا دهد. یکی از کارهایی که وی انجام داد، حساس کردن دانش‌آموزان نسبت به تعریف‌های دقیق، با شروع از زمینه‌های غیر ریاضی بود. به طور مثال، فاوست دانش‌آموزان را درگیر فعالیت‌های گروهی کرد و از آن‌ها خواست تا واژه‌هایی مثل مدرسه، نتیجه‌ی عالی و رستوران را که در زندگی روزمره از آن‌ها استفاده می‌کنند، تعریف کنند تا به این ترتیب، با مفهوم تعریف، ملزومات و کارکردهای آن آشنا شوند.

ب) اصول موضوع

هنا (۱۹۸۳) یکی از چهار مؤلفه‌ی هر ساختار اصل موضوعی را مجموعه‌ای از اصول می‌داند و ابراز می‌دارد که این مؤلفه، مهم‌ترین آن‌هاست. برخی دستگاه‌های اصل موضوعی ممکن است فاقد یک یا چند تا از این مؤلفه‌ها باشند، ولی هیچ ساختار اصل موضوعی بدون وجود اصول، معنی‌دار نیست. هم‌چنین، یکی از مهم‌ترین مؤلفه‌های تفکر نقادانه، توانایی استدلال استنتاجی است که به آن پرداخته خواهد شد. اما استنتاج روی «هیچ چیز» انجام نمی‌شود. برای استنتاج حکم A_1 از حکم A_2، لازم است که حکم A_2 قبلاً به اثبات رسیده باشد. پس باید A_3ای وجود داشته باشد که A_2 از آن نتیجه شده باشد و.... به این ترتیب با زنجیری از گزاره‌ها مثل $A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow A_3 \leftarrow \dots \leftarrow A_i \leftarrow A_{i+1} \dots$ سروکار داریم که در آن، A_i از A_{i+1} استنتاج شده است. اما این زنجیر تا کجا ادامه دارد؟ نامتناهی بودن این زنجیر به این معناست که نمی‌توان درستی هیچ گزاره‌ای را ثابت کرد. بنابراین، A_i ها باید جایی تمام شوند. متناهی بودن A_i ها به دو شکل مختلف امکان‌پذیر است. یکی این که در این دنباله، یکی از گزاره‌ها مثل A_2، تکرار شوند که در این حالت، یک دور باطل در استدلال وجود دارد. یعنی برای اثبات درستی A_2 از درستی A_2 استفاده شده است:

$$A_2 \leftarrow A_4 \leftarrow A_3 \leftarrow A_2 \leftarrow A_1$$

حالت دیگر این است که این زنجیر به A_n ای منتهی شود که درستی آن را بدون اثبات پذیرفته‌ایم. چنین گزاره‌ای، **اصل** نام دارد و همان‌طور که دیدیم، اثبات، بدون وجود اصول، امکان‌پذیر نیست. هر دستگاه ریاضی، اصول موضوع خاصِ خود را دارد. اصولیِ که با تغییر آن‌ها، احتمالاً ماهیت دستگاه ریاضی تغییر خواهد کرد و قضیه‌های تولید شده در آن، با قبل متفاوت خواهد بود.



به گفته‌ی دوبونو (۱۹۹۲)، «شخصی که از پنجره‌ای با شیشه‌ی معمولی به بیرون نگاه می‌کند، نمی‌تواند شخصی را که از درون شیشه‌ای صورتی به بیرون می‌نگرد متقاعد کند که جهان صورتی نیست»

در زیر، به دو جنبه از اصول موضوع که به اعتقاد نویسنده، برای توسعه‌ی توانایی تفکر نقادانه لازم است به آن‌ها توجه کرد، اشاره می‌شود.

● یک متفکر نقاد باید به لزوم وجود اصول آگاه باشد و بداند که استدلال، در خلأ انجام نمی‌شود و در پسِ هر استدلالی، اصولی نهفته است؛ هرچند که ممکن است در آن استدلال، مستقیماً از آن اصول استفاده نشود. از آن‌جایی که زبان و تفکرِ بشر، پیچیدگی‌های فراوانِ خاصِ خود را دارد و منطقی که بر آنَ حکم‌فرماست، بسیار پیچیده‌تر از منطق مرتبه اول کلاسیک است، شاید بتوان با شروع از دستگاه‌های ریاضی، به عنوان مدل ساده شده‌ای از تفکر بشری، لزوم وجود این اصول را بهتر درکَ کرد. در این زمینه، در پیوست ب، به یک تجربه‌ی کلاسی در درس هندسه‌ی اقلیدسی برای پرداختن به این موضوع اشاره می‌شود.

● از یک متفکر نقاد انتظار می‌رود که نتایج حاصل از تغییرِ اصول را درک کند و بداند که ممکن است دو شخص متفاوت، حتی با روش‌های استدلالی مشابه، به این دلیل که اصول متفاوتی را پذیرفته‌اند یا به عبارت دیگر، چارچوب‌های ذهنی متفاوت دارند، به نتایج متفاوت و متضاد برسند. آگاهی از منشأِ این تفاوت، به شخص، در قضاوت‌هایش کمک می‌کند.

به گفته‌ی دوبونو (۱۹۹۲)، «شخصی که از پنجره‌ای با شیشه‌ی معمولی به بیرون نگاه می‌کند، نمی‌تواند شخصی را که از درون شیشه‌ای صورتی به بیرون می‌نگرد متقاعد کند که جهان صورتی نیست»، و به اعتقاد وی، چنین افرادی، یکدیگر را دیوانه می‌پندارند. در واقع، دوبونو (۱۹۹۲) منشأ بسیاری از سوءِ تفاهم‌ها را تفاوتِ باورها، تفاوتِ چارچوب فکریَ افراد یا متفاوتَ بودنِ اصول پذیرفته شده توسط آن‌ها می‌داند و بیان می‌کند که اگر شخصی که از پنجره‌ای با شیشه‌ی معمولی بیرون را نگاه می‌کند، بداند دیگری جهان را در چه چارچوبی می‌بیند، او را بهتر درک کرده و برای متقاعد کردن او، از راه‌حل‌های هوشمندانه‌تری بهره خواهد برد.

به دلیل پیچیده بودن ساختار تفکر بشر، امکان ندارد که آن را با یک دستگاه اصل موضوعیِ ریاضی‌وار، مدل‌سازی کنیم. اصول ذهنی افراد، با سازوکارهایِ پیچیده‌ای در حال تغییر است و همین تغییر است که موجب خلاقیت می‌شود. دوبونو (۱۹۹۲) با تأکید بر تفکر خلاق، اعتقاد دارد که تفکر نباید به وسیله‌ی اصول هدایت شود. زیرا هرگاه از اصل شروع کنیم،

تنها از طریق آن اصل، موقعیت را درک می‌کنیم و این مسأله، باعث بستن چشمان ما به حالت‌های ممکن دیگر می‌شود و خلاقیت را از بین می‌برد. اما هرگاه پس از عمیق کردن تفکر، به اصل باز گردیم، برای رسیدن به ادراکی گسترده‌تر، فرصت بیش‌تری داشته‌ایم.

پ) قوانین استنتاج

در دستگاه‌های اصل موضوعی ریاضی، معمولاً از قواعد منطق مرتبه اول کلاسیک برای استنتاج استفاده می‌شود، یعنی همان منطقی که مدت‌ها به عنوان یک ماده‌ی درسی مستقل در مدارس تدریس می‌شد. با وجودی که قوانین استنتاج، در تفکر نقادانه نیز کاربرد وسیعی دارند، اما به گفته‌ی ادافر و ثورنکویست(۱۹۹۳)، تحقیقات نشان می‌دهند که دانش‌آموزان نمی‌توانند این قوانین را در زندگی روزمره‌ی خود به کار ببرند و برای ایجاد این توانایی، باید از موقعیت‌های واقعی در زندگی استفاده کنند. جونز (۲۰۰۱) در کتاب خود با عنوان «پایه و اساس تفکر نقادانه»[۱۴]، علاوه بر این که بخش‌هایی را به آموزش منطق ریاضی اختصاص داده است، مثال‌ها و تمرین‌های فراوانی را از کاربرد این قوانین در زندگی واقعی بیان می‌کند و اشتباهات رایج در این زمینه را مطرح می‌نماید.

تجربه‌ی تدریس نویسنده در دوره‌های متوسطه و راهنمایی نشان می‌دهد که آشنایی با قوانین استنتاج و توانایی به‌کارگیری آن‌ها، تنها یک وجه توانایی استدلال استنتاجی است و دانش‌آموزان در صورتی که با آن قوانین آشنا شده باشند، در زمینه‌های مجردتر، به‌خوبی با آن‌ها دست‌ورزی می‌کنند. اما مشکلات وقتی پدیدار می‌شوند که شخص می‌خواهد برای تفکر نظام‌مند روی یک مسأله‌ی واقعی زندگی، آن مسأله را به زبان منطق ریاضی تبدیل کند، یعنی کاری که یک متفکر نقاد به‌طور پیوسته با آن سروکار دارد. این مشکل حتی در تبدیل مسایل ریاضی که به زبان دقیق ریاضی بیان نشده‌اند. به زبان ریاضی نیز وجود دارد. به نظر نویسنده، دلیل این مشکل، به پیچیدگی‌های زبان محاوره‌ای و زبان تفکر بشر مربوط می‌شود. زبان منطق ریاضی، فقط یک مدل ساده شده از تفکر بشری است و با وجود این که منطق‌دانان، با گسترش منطق مرتبه‌ی اول و ابداع منطق‌های پیچیده‌تر، سعی در مدل‌سازی ریاضی زبان تفکر بشری داشته‌اند، این مسأله هنوز برای آن‌ها بیش‌تر به یک آرزو شبیه است. علاوه بر این، حتی ترجمه‌ی جملاتی که ساختار آن‌ها در قالب منطق مرتبه اول می‌گنجد، کاری ساده نیست و برای این کار باید دقت و حساسیت لازم را به خرج داد تا در این ترجمه‌ی زبانی، هیچ معنایی نادیده گرفته نشود. این موضوع از این جهت قابل توجه است که زبان گفتاری با زبان نوشتاری متفاوت است. به عنوان مثال، برای انتقال معانی در گفتار، از ابزاری مانند تأکیدات آوایی (تأکید روی کلمات مختلف) استفاده می‌شود که کمی تغییر در آن، می‌تواند معانی مختلفی را القا کند. در زیر به دو نمونه از این موارد، یکی در زمینه‌ی محاورات روزمره و دیگری در زمینه‌ی ریاضی اشاره می‌شود.

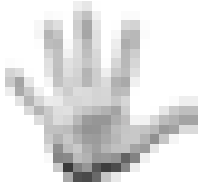
● جمله‌ی «اگر در امتحان نمره‌ی بیست بگیری، تو را به مهمانی خواهم برد.» را در نظر بگیرید. این جمله را به دو شکل مختلف می‌توان ادا کرد که ساختار یکی از آن‌ها به شکل $p \Rightarrow q$ است و دیگری با دادن آهنگ خاصی به «اگر در امتحان نمره‌ی بیست بگیری»، در واقع معنی «فقط اگر نمره بیست بگیری» را القا می‌کند و بنابراین، ساختار آن به شکل $p \Leftrightarrow q$ خواهد بود.

● «از هر دو نقطه، فقط یک خط راست می‌گذرد.» جملاتی مشابه این جمله، در کتاب‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای به وفور دیده می‌شوند. این جمله، با تأکید بر کلمات مختلف، معانی متفاوتی را با ارزش‌های مختلف القا می‌کند که دو مورد از آن‌ها را در این جا می‌آوریم:

از هر دو نقطه فقط **یک** خط راست می‌گذرد. درست

از هر دو نقطه فقط یک **خط راست** می‌گذرد. نادرست

به نظر نویسنده، اولین گام در آموزش استدلال استنتاجی به منظور رشد توانایی تفکر نقادانه، این است که دانش‌آموزان را نسبت به پیچیدگی‌های زبانی‌شان آگاه کنیم و به آن‌ها آموزش دهیم که چگونه زبان محاوره‌ای و زبان تفکر خود را به زبان منطقی ریاضی تبدیل کنند. تنها پس از انجام این مرحله است که آموزش قوانین استنتاج معنادار خواهد بود.



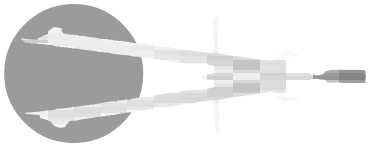
سخن پایانی

در این مقاله، پس از ارائه‌ی شواهدی برای نامناسب بودن رویکرد اصل موضوعی در آموزش ریاضیات، به تفکر نقادانه، به عنوان یکی از مهارت‌های مورد نیاز هر شهروند در جامعه‌ی امروزی پرداختیم و در این میان، از فهم ساختارهای

اصل موضوعی به عنوان یکی از مؤلفه‌های پرورش تفکر نقادانه دفاع کردیم. بنابراین، به‌طور ضمنی به این مسأله پرداخته‌ایم که

فهم ساختارهای اصل موضوعی، یک نیاز عمومی است و می‌توان در آموزش‌های عمومی، جایگاهی را برای آن در نظر گرفت.

این مقاله، در مورد چگونگی عملی نمودن این پیشنهاد، صحبتی به میان نیاورده است و آن را نیازمند کارهای تحقیقی وسیع‌تری می‌داند.



پیوست الف: روش اصل موضوعی در توابع مثلثاتی

در این پیوست، روش اصل موضوعی توابع مثلثاتی، به عنوان توابعی که دارای خواص مشخصی هستند و می‌توان همه‌ی خواص دیگر را از این خواصِ اولیه به دقت نتیجه گرفت، آورده شده است.

کسینوس تحلیلی و سینوس تحلیلی را توابعی می‌دانیم که:

۱. به ازای همه‌ی مقادیر حقیقی x، معین باشند.

۲. به ازای هر x و y حقیقی، در رابطه‌ی تابعی زیر صدق کنند:

$$\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)$$

۳. در فاصله‌ی $0<x<\lambda$ (که در آن λ عدد مثبتی است)، مثبت باشند، یعنی:

$$\cos(x)>0 \quad \text{و} \quad \sin(x)>0$$

۴. در دو انتهای فاصله‌ی $(0,\lambda)$، تساوی‌های زیر برقرار باشند:

$$\cos(0)=\sin(\lambda)=1$$

این اصول، به این سؤال جواب نمی‌دهد که آیا لااقل یک دستگاه توابع وجود دارد که در شرایط بالا صدق کند و برای این‌که به وجود این تابع‌ها پی ببریم، کافی است یکی از نمونه‌های مشخص چنین توابعی را بسازیم. چنین توابعی را می‌توان با روش‌های گوناگون ساخت، که البته می‌توان ثابت کرد توابع تولید شده همگی معادلند. یعنی این اصول، توابع sin و cos را به‌صورت یکتایی مشخص می‌کنند.

تمام خواص توابع مثلثاتی را می‌توان با استفاده از این اصول، ثابت کرد. در این‌جا به چندتا از این قضیه‌ها اشاره می‌کنیم.

قضیه۱. برای مقادیر حدی، روابط زیر برقرار است

$$\sin(0)=\cos(\lambda)=0$$

اثبات. در اصل ۲ فرض می‌کنیم، $x=y=0$، که به‌دست می‌آید:

$$\cos(0)=\cos^2(0)+\sin^2(0)$$

از آن‌جا بنا بر اصل ۴ خواهیم داشت:

$$1=1+\sin^2(0)\Rightarrow \sin(0)=0$$

حالا اگر در اصل ۲ فرض کنیم $x=y=\lambda$، بدست می‌آید:

$$\cos(0)=\cos^2(\lambda)+\sin^2(\lambda)$$

از آن‌جا نتیجه می‌گیریم:

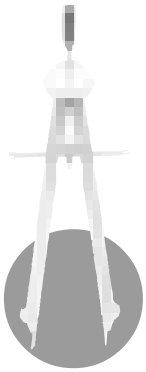
$$1+\cos^2(\lambda)=1\Rightarrow \cos(\lambda)=0$$

قضیه۲. به ازای هر عدد حقیقی x،

$$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$$

اثبات. در اصل ۲ فرض کنیم $x=y$ و اصل ۴ را هم در نظر بگیریم.

نتیجه. توابع cos و sin کران دار هستند. یعنی به ازای هر عدد حقیقی x، $|\sin(x)|\le 1$ و $|\cos(x)|\le 1$.



پیوست ب:

یک تجربه‌ی کلاسی در درس هندسه: دانش‌آموزان، لزوم وجود اصول را کشف می‌کنند.

این تجربه مربوط به یک کلاس پایه‌ی دوم راهنمایی در یکی از مدارس استعدادهای درخشان است. دانش‌آموزان این کلاس، از شهود هندسی خوبی برخوردار بوده و به لزوم اثبات و روش برهان خلف آشنا بودند. (هرچند که در این زمینه، آموزش رسمی ندیده بودند.)

از دانش‌آموزان کلاس خواستم راجع به درستی گزاره‌ی زیر نظر بدهند:

«از هر نقطه خارج یک خط، فقط یک خط موازی با آن می‌توان رسم کرد».

با وجودی که تمام دانش‌آموزان، درستی این گزاره را قبول داشتند، از آن‌ها خواستم آن را اثبات کنند. پس از این‌که

دانش‌آموزان مدتی راجع به این مسأله با یکدیگر بحث کردند، به نتیجه‌ی خوبی رسیدند: «اگر از آن دو نقطه بتوان دو خط موازی با خط مورد نظر رسم کرد، آن‌وقت آن دو خط یکدیگر را قطع کرده‌اند، در حالی که باید با هم موازی باشند». از آن‌ها پرسیدم چرا «اگر دو خط که هر دو با خطِ سومی موازی باشند، لزوماً با هم موازیند»؟

آن‌ها انتظارِ چنین سؤالی را نداشتند، اما به هر حال اقدام به اثبات این گزاره کردند. مسأله‌ی آن‌ها شکل جدیدی به خود گرفته بود. آن‌ها بالاخره توانستند اثباتی را برای آن گزاره ارائه دهند. اما باز هم با چرایی دیگر مواجه شدند. زیرا از گزاره‌ی زیر استفاده کرده بودند:

«اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع خواهد کرد».

این اتفاق، متوالیاً تکرار شد. دیگر، دانش‌آموزان می‌دانستند که در مقابل هر ادعای جدید، با یک **چرا** مواجه خواهند شد. آن‌ها راجع به این مسأله کنجکاو شده بودند و دوست داشتند به جواب نهایی برسند. دیگر لازم نبود **چراها** را من بپرسم. خودشان سؤال‌ها را مطرح می‌کردند. گاهی اوقات بعضی‌ها برای اثبات یک گزاره، از گزاره‌های قبلی استفاده می‌کردند، یعنی دور می‌زدند. با بحث‌هایی که راجع به این موضوع انجام شد، متوجه شدند که چنین کاری، از نظر علمی درست نیست و به قول خودشان، «کلک زدن» است! تعداد این گزاره‌ها حدوداً به هشت مورد رسیده بود و وقت کلاس هم داشت تمام می‌شد. ناگهان در گوشه‌ای از کلاس، همهمه‌ای به‌پا شد. یکی می‌گفت: «این طوری که نمی‌شه؛ همیشه، **چرا** هست. همگی سرِ کاریم.» و آن دیگری اضافه می‌کرد که «پس چه چیزی رو می‌شه ثابت نکرد؟»

حالا دیگر خود دانش‌آموزان فهمیده بودند که حتی اگر کلاس آن‌ها روزها و سال‌ها ادامه داشته باشد و آن‌ها هم از استدلال کردن خسته نشوند، باز هم این کار تمام شدنی نیست. **اصول**، لزومِ وجود خود را در کلاس فریاد می‌کردند و بچه‌ها سرمست از کشفِ دنیایی جدید، شادیِ حاصل از یک فهم، در نگاهشان برق می‌زد.

وقتی جلسه‌ی بعد با هم کمی راجع به اصول فکری آدم‌ها صحبت کردیم و کمی هم وارد مسایل اجتماعی شدیم، دیگر بچه‌ها ول‌کنِ معامله نبودند. بچه‌ها از آن پس از معلمِ ریاضیِ خود، اصولِ دین هم می‌پرسیدند!

زیرنویس‌ها

۱. از استاد گرانقدرم، خانم دکتر زهرا گویا که با دقت و حوصله‌ی فراوان این نوشته را مطالعه نموده و در تکمیل و تصحیح آن مرا یاری نمودند، سپاس فراوان دارم.

2. Ethica, More Geometrico Demonstrata

3. De Villiers

4. Freudenthal

5. Hersh

6. Human

7. Kline

8. Fischbein

9. Lakatos

10. Van Hiele

11. Circular Definition

12. Lane

13. Fawcett

14. Foundations of Critical Thinking

منابع

1. Clements, M.A.("Ken") & Ellerton, Nerida F. (1996). **Mathematics Education Research: Past, Present and Future**. Unesco Principal Regional Office for Asia and the Pacific, Bangkok, Thailand.

2. De Villirers, Michael. (1986). **The Role of Axiomatisation in Mathematics and Mathematics Teaching**. Originally Published in 1986 Research Unit for Mathematics Education (RUMEUS) University of Stellenbosch, South Africa. Mzone. mweb.co.za/residents/profmd/axiom.pdf.

3. Hanna, Gila. (1983). **Rigorous Proof in Mathematics Education**. The Ontario Institute for Studies in Education. Printed in Canada.

4. Jones, Royce P. (2001). **Foundations of Critical Thinking**. Harcourt College Publishers. Printed in the United States of America.

5. Lane, Erica. (?). **The Nature of Proof in Today's Classroom**. TMME,Vol 1,no. 58-65.www.montanamath. org/TMME/TMMEv1n2brev2.pdf.

۶. ادافر، فارز ج. و ثورنکویست، بروس ا. (۱۹۹۳). **تفکر انتقادی، استدلال ریاضی و اثبات**. ترجمه: جواد حاجی‌بابایی. وزارت آموزش و پرورش، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، گروه ریاضی.

۷. دوبونو، ادوارد. (۱۹۹۲). **من درست می‌گویم، تو غلط**. ترجمه: پوراندخت مجلسی (۱۳۸۲). انتشارات سپیده سحر.

۸. شافرسمن، استیون دی. (۱۹۹۱). مقدمه‌ای بر تفکر انتقادی. ترجمه و تلخیص: پروانه زاهدی‌فر. **مجله‌ی رشد آموزش علوم اجتماعی**. دوره‌ی نهم. شماره۱، وزارت آموزش‌وپرورش، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی.

۹. شیروانی، علی. (۱۳۸۳). **درآمدی بر آموزش منطق (روش نقد اندیشه)**. مرکز نشر هاجر.

۱۰. کورانت، ریچارد و رابینز، هربرت. (۱۹۹۵). **ریاضیات چیست؟** ویراست دوم: استیوارت. ترجمه: سیامک کاظمی (۱۳۷۹). نشر نی.

۱۱. نووسلو، سرگی ایوسیفویچ. (؟). **مثلثات مستقیم‌الخط و کروی**. ترجمه: پرویز شهریاری. نشر دانش امروز، وابسته به موسسه‌ی انتشارات امیرکبیر. چاپ چهارم، ۱۳۷۸.