قواعد بخش‌پذیری بر اعداد $۱۰k \pm ۱$ و کاربردهای آن

علی حسین‌زاده زارعی ـ دبیر ریاضی کاشان
اسماعیل بابلیان ـ عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

چکیده

در این مقاله **حدس** آقای حسین‌زاده زارعی، دبیر ریاضی محترم دبیرستان امام محمدباقر(ع) کاشان، در مورد بخش‌پذیری بر اعدادی که یکان آن‌ها ۹ می‌باشد، اثبات و تعمیم داده شده است. سپس کاربرد قواعد به‌دست آمده در تعیین اول بودن یا نبودن یک عدد نشان داده شده است. قواعد به‌دست آمده به راحتی با قلم و کاغذ (بدون استفاده از ماشین حساب یا کامپیوتر) قابل پیاده‌سازی است و آموزش آن به دانش‌آموزان سال چهارم ابتدایی به بعد، آسان است. البته اثبات برقراری قواعد برای دانش‌آموزان سال سوم رشته‌ی ریاضی، قابل ارایه است.

مقدمه

آقای حسین‌زاده از عدد ۱ شروع نموده آن را مرتب در عدد ۲ ضرب می‌کنند. هرگاه به عدد دو رقمی رسیدند یکان آن را در ۲ ضرب و با دهگان آن جمع می‌کنند و به همین ترتیب ادامه می‌دهند تا مجدداً به عدد ۱ برسند!

همان‌گونه که در زیر ملاحظه می‌کنید.

$$۱ \to ۱\times۲ = ۲ \to ۲\times۲ = ۴ \to ۴\times۲ = ۸ \to ۸\times۲ = ۱۶$$
$$\to ۱+۶\times۲ = ۱۳$$
$$\to ۱+۳\times۲ = ۷ \to ۷\times۲ = ۱۴ \to ۱+۴\times۲ = ۹ \to ۹\times۲ = ۱۸$$
$$\to ۱+۸\times۲ = ۱۷$$
$$\to ۱+۷\times۲ = ۱۵ \to ۱+۵\times۲ = ۱۱ \to ۱+۱\times۲ = ۳ \to ۳\times۲ = ۶$$
$$\to ۶\times۲ = ۱۲$$
$$\to ۱+۱\times۲ = ۵ \to ۵\times۲ = ۱۰ \to ۱+۰\times۲ = ۱$$

ایشان می‌گویند به این ترتیب اعداد ۱ تا ۱۸ ایجاد می‌شوند (که چنین است) و بخش‌پذیری بر عدد ۱۹ (یعنی عدد بعد از ۱۸) با این قاعده به‌دست می‌آید که در عدد دلخواه N اگر دو برابر یکان N را با تعداد ده‌تایی‌های N جمع کنیم و این کار را روی عدد جدید انجام دهیم و این فرایند را تکرار کنیم در صورتی که به عدد ۱۹ رسیدیم N بر ۱۹ بخش‌پذیر است ولی اگر به عددی کمتر از ۱۹ رسیدیم N بر ۱۹ بخش‌پذیر نیست!! امتحان می‌کنیم:

مثال۱. عدد ۲۷۱۷ را درنظر می‌گیریم. یکان این عدد، ۷ و تعداد ده‌تایی‌های آن ۲۷۱ است زیرا،

$$۲۷۱۷ = ۲۷۱۰ + ۷ = ۲۷۱\times۱۰ + ۷$$

لذا، اگر طبق قاعده‌ی ارایه شده توسط آقای حسین‌زاده عمل کنیم، به دنباله‌ی اعداد زیر می‌رسیم:

$$۲۷۱۷ \to ۲۷۱ + ۷\times۲ = ۲۸۵ \to ۲۸ + ۵\times۲ = ۳۸$$
$$\to ۳ + ۸\times۲ = ۱۹$$

مثال۲. آیا عدد ۴۶۶۷ بر ۱۹ بخش‌پذیر است؟ برای بررسی این امر، طبق قاعده‌ی بالا عمل می‌کنیم. داریم:

$$۴۶۶۷ \to ۴۶۶ + ۷\times۲ = ۴۸۰ \to ۴۸ + ۰\times۲ = ۴۸$$
$$\to ۴ + ۸\times۲ = ۲۰ \to ۲ + ۰\times۲ = ۲$$

پس عدد ۴۶۶۷ بر ۱۹ بخش‌پذیر نیست.

آقای حسین‌زاده با شروع از عدد ۱ و ضرب آن متوالیاً در ۳ و ادامه‌ی روند بالا، به اعداد ۱ تا ۲۸ می‌رسند و قاعده‌ی بخش‌پذیری بر ۲۹ را به‌دست می‌آورند و بعد قاعده‌ی کلی را **حدس** می‌زنند که با ارایه‌ی مثال‌های عددی، صحت آن را تأیید می‌کنند.

خوشبختانه حدس ایشان قابل اثبات و تعمیم است. می‌دانیم که هر عدد مختوم به ۹ را می‌توان به صورت $۱۰k - ۱$ نوشت. قضیه‌ی زیر را بیان و ثابت می‌کنیم.

قضیه‌ی۱. فرض کنید $N = ۱۰A + b$ (b یکان N و A تعداد ده‌تایی‌های N است). شرط لازم و کافی برای آن‌که N بر $۱۰k - ۱$ بخش‌پذیر باشد آن است که عدد $A + kb$ بر $۱۰k - ۱$ بخش‌پذیر باشد.

اثبات. عدد N را در k ضرب می‌کنیم، داریم:

$$kN = k(۱۰A + b) = ۱۰kA + kb = (۱۰k - ۱)A + (A + kb)$$

بدیهی است که چون $(۱ - ۱۰k)$ و k نسبت به هم اولند (چرا؟) شرط لازم و کافی برای آن‌که N بر $(۱ - ۱۰k)$ بخش‌پذیر باشد آن است که $A + kb$ بر $۱۰k - ۱$ بخش‌پذیر باشد.

کاربردها

چون همواره $N > ۱۰k - ۱$، همیشه عدد $A + kb$ از عدد N (به مراتب) کوچک‌تر است (چرا؟) یعنی وقتی قضیه را به جای N، روی $A + kb$ اجرا کنیم، عدد کوچک‌تری به‌دست می‌آید و درنهایت به عدد $۱۰k - ۱$ یا عددی کوچک‌تر از آن می‌رسیم. جالب است که وقتی به عددی کوچک‌تر از $۱۰k - ۱$ رسیدیم از آن به بعد عدد حاصل از اعمال قاعده‌ی مذکور، کوچک‌تر از $۱۰k - ۱$ خواهد بود. این مطلب در قضیه‌ی زیر آمده است و اثبات آن با توجه به اینکه $b \leq ۹$ بدیهی است.

قضیه‌ی۲. اگر $N > ۱۰k - ۱$ و $N = ۱۰A + b$ در این صورت $A + kb < ۱۰k - ۱$.

مثال۳. آیا عدد ۱۶۹۳۷۷ بر عدد ۱۲۹ بخش‌پذیر است؟

حل. اولاً ۱۲۹=۱-۱۳۰ یعنی $k = ۱۳$. اینک براساس قضیه‌ی ۱ عمل می‌کنیم:

$$۱۶۹۳۷۷ \rightarrow ۱۶۹۳۷ + ۷ \times ۱۳ = ۱۷۰۲۸ \rightarrow ۱۷۰۲ + ۸ \times ۱۳ = ۱۸۰۶$$
$$\rightarrow ۱۸۰ + ۶ \times ۱۳ = ۲۵۸ \rightarrow ۲۵ + ۸ \times ۱۳ = ۱۲۹$$

تعمیم ساده‌ای از قضیه‌ی ۱، قاعده‌ی مشابهی برای بخش‌پذیری بر اعداد مختوم به یک، یعنی اعداد به صورت $۱۰k + ۱$، به‌دست می‌دهد.

قضیه‌ی۳. اگر $N = ۱۰A + b$، شرط لازم و کافی برای آن‌که N بر $۱۰k + ۱$ بخش‌پذیر باشد آن است که عدد $A - kb$ بر $۱۰k + ۱$ بخش‌پذیر باشد.

اثبات. کافی است ملاحظه کنید که

$$kN = k(۱۰A + b) = ۱۰kA + kb = (۱۰k + ۱)A - (A - kb)$$

مثال۴. آیا عدد ۳۷۹۷۷۹۴ بر ۲۷۱ بخش‌پذیر است؟

حل. در اینجا $k = ۲۷$ و طبق قضیه‌ی ۳ داریم:

$$۳۷۹۷۷۹۴ \rightarrow ۳۷۹۷۷۹ - ۴ \times ۲۷ = ۳۷۹۶۷۱$$
$$\rightarrow ۳۷۹۶۷ - ۱ \times ۲۷ = ۳۷۹۴۰$$
$$\rightarrow ۳۷۹۴ \rightarrow ۳۷۹ - ۴ \times ۲۷ = ۲۷۱$$

تذکر۱. اگر در یک مرحله، عدد N به صفر ختم شود صفر را حذف و روند را ادامه دهید.

تذکر۲. متأسفانه اگر عدد N بر $۱۰k \pm ۱$ بخش‌پذیر نباشد، نمی‌توان باقیمانده‌ی تقسیم N بر $۱۰k \pm ۱$ را به روش‌های ذکر شده به‌دست آورد.

کاربرد مهم قضیه‌های ۱ و ۳ در تعیین اول بودن یا نبودن یک عدد طبیعی با قلم و کاغذ است. می‌دانیم که برای اثبات این‌که عدد N اول است کافی است ثابت کنیم N بر اعداد اول کوچک‌تر یا مساوی $\left[\sqrt{N}\right]$ (جزء صحیح جذر N) بخش‌پذیر نیست. ضمناً، می‌دانیم که یکان یک عدد اول (غیر از عدد۵) یکی از ارقام ۱، ۳، ۷ یا ۹ است. برای اعداد اولی که یکان آن‌ها ۱ یا ۹ است به ترتیب از قواعد حاصل از قضیه‌های ۳ و ۱ می‌توان استفاده کرد. اما اگر یکان عدد اول ۳ باشد کافی است آن را در ۳ ضرب کنیم تا یکان آن ۹ شود (و از قضیه‌ی۱، استفاده کنیم) و اگر یکان آن ۷ باشد آن را در ۳ ضرب کنیم تا یکان آن ۱ شود (و بازهم از قضیه‌ی ۳، استفاده کنیم). البته در این دو حالت باید عدد N را نیز در ۳ ضرب کنیم و قضیه‌های ۱ و ۳ را روی 3N پیاده کنیم.

مثال۵. آیا عدد ۳۹۷ اول است؟

حل. $N = ۳۹۷$ و $۳N = ۱۱۹۱$. از عدد اول ۷ شروع می‌کنیم تا $۱۹ = \left[\sqrt{۳۹۷}\right]$.

$$۷ \rightarrow ۷ \times ۳ = ۲۱ \Rightarrow ۱۱۹۱ \rightarrow ۱۱۹ - ۱ \times ۲ = ۱۱۷$$
$$\rightarrow ۱۱ - ۷ \times ۲ = -۳ \quad \times$$
$$۱۱ \rightarrow ۳۹۷ \rightarrow ۳۹ - ۷ \times ۱ = ۳۲ \rightarrow ۳ - ۲ \times ۱ = ۱ \quad \times$$
$$۱۳ \rightarrow ۱۳ \times ۳ = ۳۹ = ۴ \times ۱۰ - ۱ \Rightarrow ۱۱۹۱ \rightarrow ۱۱۹ + ۱ \times ۴ = ۱۲۳$$
$$\rightarrow ۱۲ + ۳ \times ۴ = ۲۴ \quad \times$$
$$۱۷ \rightarrow ۱۷ \times ۳ = ۵۱ \Rightarrow ۱۱۹۱ \rightarrow ۱۱۹ - ۱ \times ۵ = ۱۱۴$$
$$\rightarrow ۱۱ - ۴ \times ۵ = -۹ \quad \times$$
$$۱۹ \rightarrow ۳۹۷ \rightarrow ۳۹ + ۷ \times ۲ = ۵۳ \rightarrow ۵ + ۲ \times ۳ = ۱۱ \quad \times$$

بنابراین، عدد ۳۹۷ اول است. (نماد × به معنی بخش‌پذیر نبودن N بر عدد اول سمت چپ است). توجه کنید که بنابر قضیه‌ی ۲، به محض رسیدن به عدد کوچک‌تر از $۱۰k \pm ۱$، عملیات را متوقف می‌کنیم. لازم به ذکر است که برخلاف تصور آقای حسین‌زاده زارعی این روش سریع نیست و اصلاً قابل رقابت با کامپیوتر نمی‌باشد.

از خوانندگان محترم دعوت می‌شود که مقاله‌ی زیر را نیز مطالعه و روش‌های آن را با روش‌های این مقاله مقایسه کنند.

بیداروطن و بابلیان، قواعد بخش‌پذیری، رشد آموزش ریاضی