قسمت آخر

آموزش حسابان:
مشکلات موجود و نقش تکنولوژی

زهرا گویا، دانشگاه شهید بهشتی
حمیده سرشتی، کارشناس ارشد آموزش ریاضی

اشاره

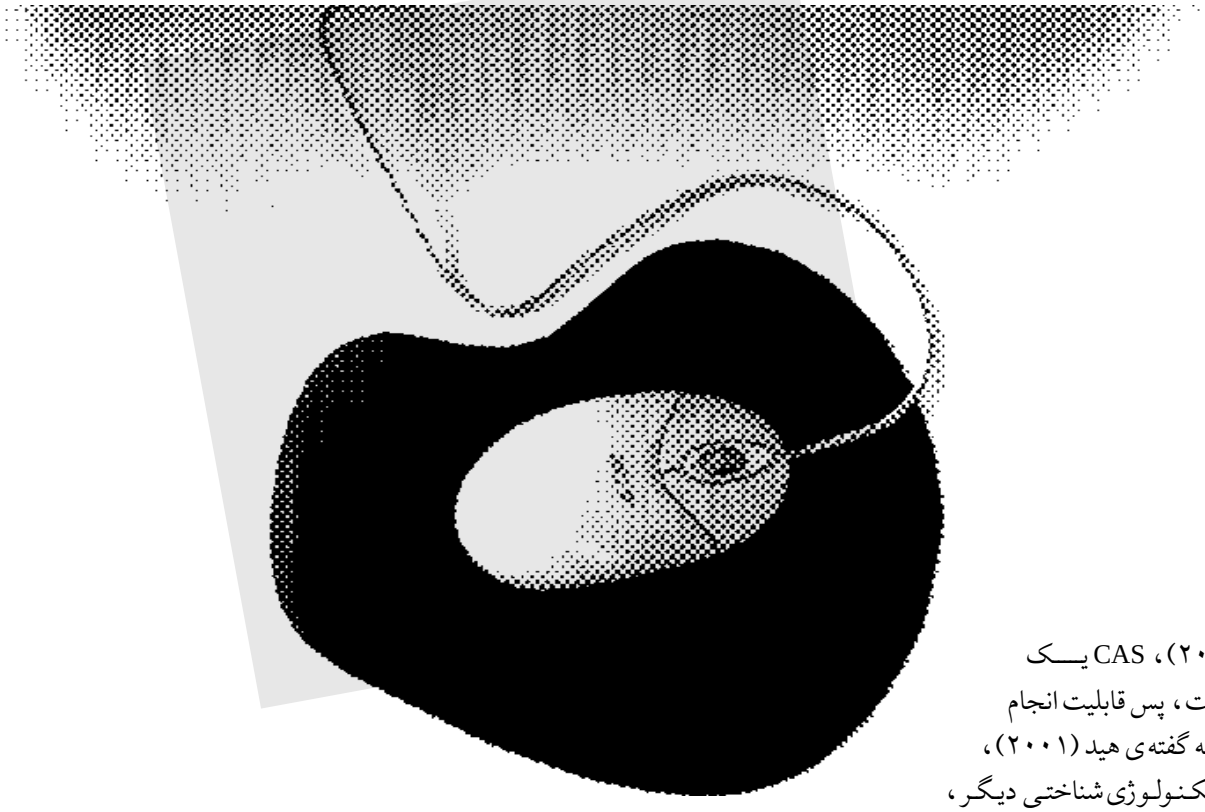
قرار بود قسمت سوم این مقاله، در شماره‌ی گذشته به چاپ برسد. از آن‌جا که شماره‌ی ۸۶ مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، به ویژه‌نامه‌ی «حل مسأله» اختصاص یافت، چاپ قسمت سوم (آخر) این مقاله را به این شماره موکول کردیم.

در قسمت‌های اول و دوم این مقاله، به مشکلات موجود در آموزش حسابان اشاره شد و نقش تکنولوژی در آموزش ریاضی، به‌ویژه آموزش حسابان، بررسی سیر تاریخی ورود تکنولوژی به آموزش ریاضی و تأثیر آن در اثبات‌های ریاضی، مورد بررسی قرار گرفت. هم‌چنین استفاده از محیط‌های کامپیوتری برای رشد و توسعه‌ی شناختی، مطرح شد. در این بخش، با سیستم‌های جبری کامپیوتری (CAS) بیش‌تر آشنا می‌شویم و نقش آن‌ها در آموزش ریاضی مورد بررسی دقیق‌تر قرار می‌گیرد.

تکنولوژی شناختی و سیستم‌های جبری کامپیوتری

هید (۲۰۰۱) به نقل از پی (۱۹۸۷)، تکنولوژی شناختی را به‌عنوان رسانه‌ای تعریف می‌کند که به چیره شدن بر محدودیت‌های ذهن در تفکر و یادگیری حل مسأله، کمک می‌نماید. هید در ادامه، به بحث راجع به چرایی تمایز بین CAS و سایر محیط‌های یادگیری ریاضی اشاره کرده و ابراز می‌دارد که نخستین ویژگی CAS این است که بالقوه می‌تواند یک تکنولوژی شناختی طبق تعریف پی (۱۹۸۷) باشد و دومین ویژگی این است که CAS قابلیت ایجاد تغییر را در ساختار و محتوای برنامه‌ی درسی ریاضی دارد. وی در توضیح ویژگی دوم به اجزای تشکیل دهنده‌ی جبر مدرسه‌ای در محیط CAS، تنوع روش‌های برخورد دانش‌آموزان با هستی‌های متفاوت ریاضی و چگونگی توسعه‌ی فهم و درک آن‌ها در این محیط جدید یادگیری، اشاره می‌کند. به عقیده‌ی هید (۲۰۰۱) بحث‌های گذار از ریاضی غیر صوری به ریاضی صوری، تعادل بین جنبه‌های رویه‌ای و مفهومی ریاضی، حرکت از فهم فرآیندی به فهم شیئی ریاضی، همه معانی جدیدی در یک محیط مبتنی بر CAS پیدا می‌کنند. CAS برای دانش‌آموزان و دانشجویان، دسترسی جدیدی به بازنمایی‌های ریاضی فراهم می‌کند. زیرا ظرفیت تکنولوژیکی CAS، قابلیت انجام دست‌ورزی‌ها را با بازنمایی‌های پویا و به‌هم پیوسته‌ی توابع ایجاد می‌نماید و شرایطی را فراهم می‌کند تا بتوان به بررسی ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف یک مفهوم ریاضی پرداخت.

پی برای تکنولوژی‌های شناختی، دو عمل متمایز **تقویت کننده**[1] و دوباره سازمان‌دهنده[2] را در نظر می‌گیرد. و چون به عقیده‌ی بسیاری از محققان از جمله هید (۲۰۰۱) و



دریجورز[3] (۲۰۰۳)، CAS یک تکنولوژی شناختی است، پس قابلیت انجام این دو عمل را دارد. به گفته‌ی هید (۲۰۰۱)، CAS نیز مانند هر تکنولوژی شناختی دیگر، فرآیندهای رسیدن به سطوح بالای تفکر را برای دانش‌آموزان و دانشجویان قابل دسترس می‌سازد. مثلاً آن‌ها می‌توانند با CAS، عبارت‌های جبری را ایجاد کنند و با آن‌ها دست‌ورزی نمایند که در غیاب CAS، این امر بسیار وقت‌گیر است. هید اشاره می‌کند که ظرفیت‌های CAS، می‌توانند برای تحقق اهداف آموزشی متفاوتی مورد استفاده قرار گیرند و نسبت به نقشی که نرم‌افزارها در یک زمینه‌ی آموزش ریاضی خاص به عهده می‌گیرند، تأثیر آن‌ها نیز متفاوت خواهد بود.

دریجورز (۲۰۰۳)، در توصیف عمل تقویت‌کنندگی[4] CAS، به تقویت امکانات مختلف از جمله جستجوی موارد زیادی از یک موقعیت مشابه و با سرعت بالا، اشاره می‌کند که در این حالت، مثال‌ها می‌توانند از نظر میزان پیچیدگی، تقویت شوند و بنابراین، امکان در نظر گرفتن دامنه‌ی وسیع‌تری از مثال‌های متنوع به وجود می‌آید. به علت قابلیت ایجاد ارتباط بین بازنمایی‌های مختلف و انجام دست‌ورزی‌های پیچیده و حجیم، یک سیستم جبر کامپیوتری این فرصت را به کاربر می‌دهد تا مثال‌های متفاوت را در یک موضوع خاص جستجو کرده و بسیاری از خواص آن‌ها را کشف کند. علاوه بر این‌ها، هید (۲۰۰۱) معتقد است که می‌توان برنامه‌ی درسی و محتوای ریاضی موجود را با استفاده از CAS جرح و تعدیل کرده و به گونه‌ای ارایه کرد که باعث تسهیل یادگیری ریاضی دانش‌آموزان و دانشجویان شود. درواقع، هنگامی که تکنولوژی برای بسط و توسعه‌ی برنامه‌ی درسی موجود مورد استفاده قرار می‌گیرد، به‌عنوان تقویت‌کننده عمل می‌کند. بالاخره، بعضی محققان بر این باورند که استفاده از این تکنولوژی‌ها، باعث گسترش دامنه‌ی تقریبی رشد[5] یادگیرندگان می‌شود به گونه‌ای که آن‌ها، می‌توانند از CAS، به عنوان یک همکار هوشمند استفاده کنند که باعث افزایش دامنه‌ی تقریبی رشد آن‌ها می‌شود (دریجورز، ۲۰۰۳).

روش دومی که در آن، CAS به عنوان تکنولوژی شناختی عمل می‌کند، نقش آن به عنوان دوباره سازمان‌دهنده است، به گونه‌ای که ماهیت برنامه‌ی درسی و سازمان‌دهی محتوا، تغییر می‌کند. بنابر اظهار دریجورز (۲۰۰۳)، عمل تقویت‌کنندگی، ذاتاً روی برنامه‌ی درسی تأثیر نمی‌گذارد، اما وقتی که تکنولوژی به عنوان یک سازمان‌دهنده یا دوباره سازمان‌دهنده عمل می‌کند، می‌تواند بر برنامه‌ی درسی نیز اثر بگذارد. وی برای شاهد این ادعا، به تحقیق هیل و همکاران[6] (۱۹۹۲) اشاره می‌کند که در آن، محققان به بررسی و توصیف چگونگی تغییر رویکردهای آموزشی نسبت به تابع، با استفاده از امکان نمایش هم‌زمان پنجره‌های گرافیکی و نمادین، پرداختند. هید (۲۰۰۱) نیز با تأکید بر اهمیت نقش تکنولوژی به عنوان دوباره سازمان‌دهنده، به نقل از کیل پاتریک و دیویس (۱۹۹۳)، ابراز می‌دارد که کامپیوترها، تقویت‌کننده‌ی صرف مباحث برنامه‌ی درسی به طور عام و برنامه‌ی درسی ریاضی به طور خاص نیستند. ... [بلکه] در تلاش برای دوباره‌نگری در برنامه‌های درسی ریاضی کامپیوتر، سؤال‌های بنیادی را تغییر می‌دهد. سؤال‌هایی از قبیل این‌که «ریاضی چیست؟»، «جامعه‌ی فردا چه نوع دانش ریاضی

را طلب می‌کند؟»، «برای این‌که دانش‌آموز/ دانشجو یک شهروند خردمند جامعه شود، به چه نوع دانش ریاضی نیازمند است؟»

هید در ادامه اظهار می‌دارد که اگرچه، CAS به عنوان یک تکنولوژی شناختی، در دو مقوله‌ی تقویت‌کننده و دوباره سازمان‌دهنده می‌گنجد، با این وجود، مطالعات انجام شده با استفاده از CAS، کمتر به بررسی مستقل این تکنولوژی به عنوان تقویت‌کننده یا دوباره سازمان‌دهنده پرداخته‌اند. در حالی که این دو مقوله به شناخت عمیق‌تر ویژگی‌های CAS و چگونگی تأثیر آن بر جریان تدریس و یادگیری ریاضی کمک می‌کند.

به طور نمونه، یک وجه بارز **سازمان‌دهنده‌ی تولیدکننده‌ی** تال، تقویت‌کنندگی آن است، زیرا می‌تواند با استفاده از تجارب قبلی دانش‌آموزان و دانشجویان، مثال‌ها و ضدمثال‌های فراوانی را برای توسعه‌ی ساختارهای شناختی آن‌ها فراهم کند. هم‌چنین هید (۱۹۸۸) در مطالعه‌ی خود نشان داد که تدریس ریاضی عمومی برای دانشجویان سال اول دانشگاه با استفاده از CAS، فرصت تغییر ترتیب و توالی برنامه‌ی درسی را برای وی، فراهم می‌کند. علاوه بر این‌ها، بعضی از مطالعات نشان دادند که با تغییر ترتیب و توالی برنامه‌های درسی ریاضی عمومی (هید، ۱۹۹۸؛ پالمیتر، ۱۹۹۱) و جبر مقدماتی (هید و همکاران، ۱۹۸۸؛ هید، ۱۹۹۲) دانشجویان قادر شدند تا تقریباً برای بیش‌تر دست‌ورزی‌های نمادین، ترسیم نمودارها، تشکیل جدول‌های مقادیر، برازش منحنی و نظایر آن‌ها از CAS استفاده کنند. و درنتیجه، بیش‌تر زمانی که به طور سنتی صرف انجام دست‌ورزی‌های معمول و ایجاد مهارت در دانشجویان برای انجام رویه‌های معمولی می‌شد، صرف توسعه‌ی توانایی‌های آن‌ها برای تفسیر نتایج نمادین و توسعه‌ی مفاهیم جبر مقدماتی ریاضی عمومی گردید.

ویژگی‌های سیستم‌های جبر کامپیوتری

سیستم‌های جبر کامپیوتری در مورد چگونگی به دست آوردن جواب هیچ توضیحی نمی‌دهند و فقط، جواب آخر را ارایه می‌کنند که در پیشینه‌ی تحقیق، این ویژگی، به **جعبه‌ی سیاه**[۷] تعبیر شده است، یعنی درون آن پیدا نیست (هید، ۲۰۰۱؛ پیرس، ۲۰۰۱؛ دریجورز، ۲۰۰۲). درواقع، در چنین سیستمی، همه‌ی نتایج قبلاً به دست آمده و در سیستم، تعبیه شده است. به همین دلیل ممکن است برای کسانی که هنوز در بعضی محاسبات و دست‌ورزی‌های جبری خبره نشده‌اند، چندان مفید نباشد. پس این نگرانی وجود دارد که آیا دانش‌آموزان و دانشجویانی که از CAS استفاده می‌کنند، به فهم و درک مناسبی از مفاهیم ریاضی رسیده‌اند یا خیر. دریجورز (۲۰۰۳) معتقد است که هنگامی که در یک مفهوم، خبرگی به‌وجود آمد، می‌توان از تکنولوژی برای انجام ریاضی، به‌خصوص هنگام یادگیری موضوعی جدید در سطح بالاتر استفاده کرد. وی چنین رویکردی را نسبت به استفاده از تکنولوژی CAS، **جعبه‌ی سفید/ جعبه‌ی سیاه**[۸] می‌نامد.

یکی دیگر از ویژگی‌های سیستم‌های جبر کامپیوتری این است که جنبه‌های جبری فراوانی را از جمله دست‌ورزی با نمادها و رویه‌های جبری، در اختیار کاربر قرار می‌دهند و این امکان، برای کاربر مجالی فراهم می‌کند تا نسبت به مسایل جبری، تسلط پیدا کند. این جنبه‌ی جبری، دو نتیجه‌ی مهم دارد: اول این‌که چون نمادگذاری‌ها و نتایج به دست آمده توسط CAS از نظر ریاضی درست هستند، باعث می‌شوند که دانش‌آموزان و دانشجویان به آن‌ها اعتماد کرده و با آن‌ها احساس راحتی کنند. دست‌ورزی عبارت‌های جبری همراه با نتایج دقیق می‌تواند یک

رویکرد کشفی نسبت به جبر فراهم کند به طوری که این رویکرد بتواند منبعی برای تعمیم باشد. علاوه بر این‌ها، با استفاده از CAS، بازنمایی‌های جبری می‌توانند به بازنمایی‌های گرافیکی و عددی متصل شوند و تلفیقی از بازنمایی‌ها را برای مفاهیم ریاضی ایجاد کنند.

از این گذشته، با وجود CAS، دانشجویان می‌توانند از محاسبات کسالت‌بار جبری آزاد شوند و وقت بیش‌تری را به استراتژی‌های حل مسأله و ساختن مفاهیم اختصاص دهند. به طور مثال، هنگامی که دانش‌آموزان و دانشجویان همراه با CAS مشغول حل یک مسأله هستند، می‌توانند در هر مرحله به مرحله‌ی بعد فکر کنند و نگران اشتباهاتی که در محاسبات کرده‌اند نباشند (پیرس، ۲۰۰۱). دریجورز (۲۰۰۳) به نقل از پوزی (۱۹۹۴) اظهار می‌دارد که «با واگذار کردن بیش‌تر دست‌ورزی‌های جبری به کامپیوتر از طریق CAS، می‌توان از یادگیری طوطی‌وار، به سمت فهم و درک مفهومی حرکت کرد و جبران تعادل از دست‌رفته را کرد» (ص ۸۹). هم‌چنین، به نظر هید (۲۰۰۱)، سیستم‌های جبر کامپیوتری ابزارهای تکنولوژیکی ایده‌الی برای سرعت بخشیدن به فهم و درک مفاهیم ریاضی هستند.

در سال ۱۹۹۹، آلن و همکاران برای مدرسان ریاضی عمومی دانشگاهی در مورد چگونگی استفاده از سیستم‌های جبر کامپیوتری در این درس‌ها کارگاهی برگزار کردند. در پایان این کارگاه، آلن و همکاران توصیه‌های زیر را برای استفاده از CAS در درس‌های ریاضی عمومی دانشگاهی، ارایه نمودند که می‌توانند به عنوان یک راهنمای عمومی برای بهینه کردن تجربه‌های کلاسی با استفاده از CAS، در نظر گرفته شوند:

۱ـ به دانشجویانتان توضیح دهید که چرا استفاده از CAS، یادگیری را ارتقا می‌دهد و چرا توانایی آن‌ها را در درک ریاضی، افزایش می‌دهد. آن‌ها را متقاعد کنید که استفاده از نرم‌افزار برای مطالعات بعدی آن‌ها مفید است. آن‌گاه، به سهولت می‌توانید از دانشجویانتان درخواست کنید تا بیش‌تر یاد بگیرند.

۲ـ از CAS به طور مناسب استفاده کنید. از مثال‌های مقدماتی شروع کنید و به طور ساده به دانشجویان کمک کنید تا یاد بگیرند که چگونه از نرم‌افزار استفاده کنند تا قدردان آن شوند. نباید از دانشجویان انتظار داشت که از CAS، تنها برای انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری استفاده کنند. آن‌ها باید به CAS به عنوان یک ابزار با ارزش نگاه کنند نه یک عصا!

۳ـ نوع CAS و روشی را که از آن استفاده می‌کنید، به دقت انتخاب کنید. زیرا اغلب دانشجویان، نسبت به استفاده از کامپیوتر حرفه‌ای هستند و ممکن است قبلاً با نرم‌افزاری آشنا شده باشند که به مراتب قدرتمندتر از نرم‌افزار انتخابی شما باشد.

۴ـ کار نرم‌افزاری دانشجویان را به عنوان قسمتی از ارزش‌یابی درس به حساب آورید. این عمل، انگیزه‌ی آن‌ها را برای مطالعه‌ی آن‌چه باید یاد گرفته شود، بیش‌تر می‌کند.

۵ـ مثال‌های خود را در سطح دانشجویان تنظیم کنید و بدانید که الزاماً دانشجویان با آن‌چه که شما را شگفت‌زده می‌کند، شگفت‌زده نمی‌شوند.

۶ـ هر برنامه‌ی نرم‌افزاری و کاربرگی[9] را که در کلاس مورد استفاده قرار می‌دهید، در دسترس دانشجویان نیز قرار دهید.

۷ـ نمایش‌های خود را آن‌قدر طولانی نکنید که خارج از ظرفیت دانشجویان شود.

۸ـ تکالیف CAS به صورتی نباشند که دانشجویان، آن را به‌عنوان کار اضافی تلقی کنند، زیرا در این صورت، دانشجویان تکلیف را به عنوان یک کار پردردسر دیده و درنتیجه، فواید استفاده از نرم‌افزار از بین می‌رود (ص ۴۱۵).

نقش سیستم‌های جبر کامپیوتری در آموزش ریاضی

از سال ۱۹۸۰ که با ورود ماکسیما، سیستم‌های جبر کامپیوتری به جهان معرفی شدند، تحقیق در مورد استفاده از این سیستم‌ها در آموزش و یادگیری ریاضی شروع شد و طی سه دهه، تحقیقات متعددی انجام شدند. با این حال، هنوز بسیاری از سؤالات بی‌پاسخ مانده‌اند و یا سؤالات جدیدی مطرح شده‌اند که نیازمند پاسخ هستند.

مثلاً، لین و همکاران[10] (۱۹۸۶)، برای کشف اصول ریاضی[11] روش‌هایی را در مورد استفاده از سیستم‌های نمادین پیشنهاد کردند. هم‌چنین، اسمال و همکاران[12] (۱۹۸۶)، تأثیرات استفاده از یک سیستم جبر کامپیوتری را در یک درس ریاضی دانشگاهی گزارش کردند. دوبینسکی و تال (۱۹۹۱) نیز، با استفاده از CAS، فعالیت‌هایی طراحی کردند که در آن‌ها دانشجویان از این سیستم‌ها، برای تعمیم یک تکنیک خاص به

موارد پیچیده‌تر که قبلاً آن را در موارد ساده‌تری بررسی کرده و فهمیده بودند، استفاده کردند و به نتایج مثبتی رسیدند.

البته، باید توجه داشت که در دهه‌ی ۱۹۸۰ و اوایل دهه‌ی ۱۹۹۰ میلادی، سیستم‌های جبر کامپیوتری به شکل امروزی نبوده و فاقد قابلیت‌های گرافیکی بودند و تنها قابلیت انجام دست‌ورزی‌های نمادین را داشتند.

چار[13] (۱۹۸۶) در گزارشی در مورد تجربه‌های استفاده از سیستم نمادین مِیپل[14] در یک درس دوره‌ی کارشناسی، اظهار کرد که دانشجویان در این درس، به طور اختیاری به دست‌ورزی‌های نمادین دسترسی داشتند و می‌توانستند از آن، برای اطمینان از درستی کار خود یا برای حل مسایل نمادینی که انتخاب آن‌ها داوطلبانه بود، استفاده کنند. او ضمن اشاره به پذیرش نسبتاً محدود میپل توسط دانشجویان اظهار داشت که «توضیحات زیادی برای چنین واکنشی قابل ذکر است که از آن جمله می‌توان زمان کم، بازدهی فوری، ضعف سیستم‌های نمادین در مورد بعضی از مسایل، فقدان تعامل گرافیکی و عددی و کاربرپسند نبودن این سیستم‌ها را برشمرد. حل این معما تنها از طریق تلفیق کامل سیستم‌های نمادین با محتوای ریاضی‌ای که در کلاس تدریس می‌شود امکان‌پذیر است، به گونه‌ای که استفاده از آن‌ها به عنوان فعالیت اضافی تدریس و یادگیری تلقی نشود» (نقل شده در دوبینسکی و تال، ۱۹۹۱، ص ۲۳۶).

دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰، شاهد تحقیقات فراوانی در این حوزه بودند. به طور نمونه، یکی از معروف‌ترین تحقیقاتی که در این زمینه انجام شد و اغلب نویسندگان از آن به عنوان شروع تحقیقات جدی در مورد سیستم‌های جبر کامپیوتری در آموزش ریاضی یاد می‌کنند، مطالعه‌ای بود که در سال ۱۹۸۸، توسط هید انجام گرفت (دوبینسکی و تال، ۱۹۹۱؛ پیرس، ۲۰۰۱؛ دریجورز، ۲۰۰۳). این پژوهش در دو کلاس ۴۰ نفری ریاضی عمومی برای دانشجویان سال اول دانشگاه انجام شد که یک کلاس به عنوان گروه آزمایش و دیگری به عنوان گروه شاهد بود. بعدها، هید (۲۰۰۱)، اظهار داشت که در آن تحقیق، دانشجویان گروه آزمایش به دست‌ورزی‌های نمادین دسترسی داشتند و برای بازنمایی‌های گرافیکی و عددی از برنامه‌هایی که توسط خود پژوهشگر نوشته شده بود، استفاده می‌کردند. هم‌چنین سیستم کامپیوتری موجود برای آن تحقیق، ۴ کامپیوتر اپل II[15] بود که دانشجویان در مواقع بیکاری هم می‌توانستند از آن‌ها استفاده کنند. دانشجویان در این درس به مدت ۱۲ هفته و با استفاده از سیستم نمادین و با تأکید بر مفاهیم حسابان، آموزش دیدند و تنها در ۳ هفته‌ی آخر، قسمت‌های محاسباتی و رویه‌ها به آن‌ها گفته شد. نتیجه‌ی قابل توجه کار هید این بود که دانشجویانی که از CAS استفاده می‌کردند، در انجام تکالیف مفهومی امتحان پایانی، از دانشجویان گروه کنترل بهتر بودند و در تکالیف محاسباتی که باید با دست انجام می‌گرفت، در سطح گروه کنترل قرار داشتند، و این درحالی بود که استراتژی‌های محاسباتی در آخر نیم‌سال و به طور خلاصه ارایه شده بود. نتیجه‌ی این تحقیق نشان داد که دانشجویان گروه آزمایش، استفاده از CAS را جانشین کار محاسباتی کرده بودند، نسبت به کارشان مطمئن‌تر شده، و به علاوه، CAS به آن‌ها کمک کرده بود تا بر فرآیندهای عمومی‌تر حل مسأله، متمرکز شوند (هید، ۲۰۰۱).

مطالعه‌ی معروف دیگر دهه‌ی ۹۰، تحقیق پالمیتر[16] (۱۹۹۱)، است که در آن، از نرم‌افزار نمادین ماکسیما، برای تدریس انتگرال به یک گروه آزمایش در یک درس ریاضی عمومی پیش‌نیاز[17] به مدت ۵ هفته استفاده شد. هم‌زمان با این، برای گروه کنترل، تدریس انتگرال به شیوه‌ی سنتی و در مدت ۱۰ هفته‌ی کامل، انجام شد. در این درس دانشجویان گروه آزمایش، از نرم‌افزار ماکسیما برای دست‌ورزی‌های معمولی

امتحان	ماکسیما	سنتی	T^2	P<?
مفهومی	(۱۵/۹)	(۲۰/۴)	۱/۲۰	P<0.001
	۸۹/۸	۷۲/۰		
محاسباتی	(۱۳/۳)	(۲۴/۲)	۰/۹۲	P<0.001
	۹۰/۰	۶۹/۶		

جدول ۱. نتایج به دست آمده از تحقیق پالمیتر (۱۹۹۱)

سؤال‌ها	جواب‌ها	جواب‌ها	جواب‌ها	جواب‌ها
آیا آزمایشگاه این درس را در سال بعد به دوستانتان توصیه می‌کنید؟	بله نخیر	بله نخیر	بله نخیر	بله نخیر
رتبه‌بندی شما از این آزمایشگاه‌ها در مقابل سایر حالت‌های یادگیری چیست؟	بالا پایین	بالا پایین	بالا پایین	بالا پایین
ارزیابی شما دانشجویان از آزمایشگاه‌ها برای کمک به یادگیری چیست؟	بالا پایین	بالا پایین	بالا پایین	بالا پایین
میزان اعتماد به نفس شما در مورد قدرت موفقیت در این درس چقدر است؟	بالا پایین	بالا پایین	بالا پایین	بالا پایین
آیا از انجام ریاضی لذت می‌برید؟	بالا پایین	بالا پایین	بالا پایین	بالا پایین

جدول ۲ . نتایج به دست آمده از پروژه‌ی مولر (تال، ۹۰ـ۱۹۸۸)

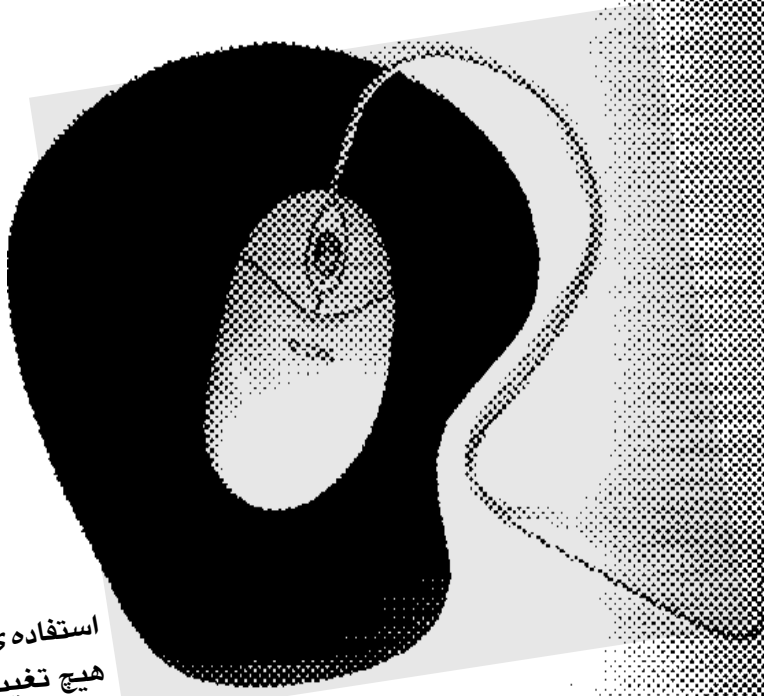
استفاده کردند، ولی به گروه کنترل، تکنیک‌های انتگرال‌گیری تدریس شد. پس از پایان تدریس، هر دو گروه در یک امتحان محاسباتی و یک امتحان مفهومی شرکت کردند. امتحان مفهومی برای هر دو گروه، در شرایط یکسان برگزار شد. اما برای امتحان محاسباتی، دانشجویان گروه آزمایش از نرم‌افزار ماکسیما به مدت یک ساعت استفاده کردند، و به دانشجویان گروه کنترل دو ساعت وقت برای انجام محاسبات داده شد. نتایج پژوهش نشان داد که پیشرفت دانشجویان گروه آزمایش ـ کسانی که از نرم‌افزار ماکسیما استفاده کرده بودند ـ نسبت به گروه کنترل، به شکل معنی‌داری بیش‌تر بود (جدول ۱).

پالمیتر (۱۹۹۱)، جدول بالا را دلیل روشنی برای این ادعا معرفی کرد که «دانش‌جو + ابزار دست‌ورزی» در انجام تکلیف‌های محاسباتی و مفهومی، موفق‌تر از دانشجویی است که در یک محیط سنتی کار می‌کند.

هم‌چنین به گفته‌ی تال (۱۹۹۲)، در سال‌های ۱۹۸۸ تا ۱۹۹۰، پروژه دیگری نیز با عنوان **مولر**[۱۸]، و با هدف استفاده از نرم‌افزار کامپیوتری میپل برای یادگیری مفاهیم حسابان انجام شد. این پروژه در سطح دانشگاه و برای دانشجویانی بود که یک درس مقدماتی را در حسابان گذرانده بودند. تحقیق در سه سال پیاپی انجام شد. شرکت در پروژه‌ی سال اول (۱۹۸۸) به صورت اختیاری بود و بر روی داوطلبان علاقه‌مند به این سیستم‌ها اجرا شد. ولی در دو سال بعدی، شرکت در این پروژه اجباری شد. تال (۱۹۹۲) به نتایج این پروژه‌ی تحقیقی در جدول ۲، اشاره کرده است.[۱۹]

این جدول نشان می‌دهد که نتایج به‌دست آمده در سال‌های ۱۹۸۹ و ۱۹۹۰ که شرکت در پروژه اجباری بود، با نتایج سال ۱۹۸۸ که شرکت در پروژه اختیاری بود، تفاوت محسوسی داشت. به عقیده‌ی تال (۱۹۹۲)، این تفاوت، بیانگر حالت واقع‌گرایانه‌تری است.[۲۰]

اتفاق دیگری که در دهه‌های ۱۹۹۰ رخ داد و بر تحقیقات انجام‌شده در این حوزه اثر گذاشت، پیشرفت صنعت نرم‌افزار و سیستم‌های دست‌ورزی نمادین بود. به طور مشخص، سیستم عامل ویندوز به جهان معرفی شد و به تبع آن سیستم‌های جبر کامپیوتری نیز همانند سایر نرم‌افزارها، دچار دگرگونی‌های زیادی شدند؛ قابلیت‌های گرافیکی فراوان به آن‌ها افزوده شد و قدرت آن‌ها را افزایش داد. همراه با این تغییر در نرم‌افزارها، به‌کارگیری آن‌ها هم در عمل، ساده‌تر شد و آن‌ها به مراتب کاربرپسندتر[۲۱] شدند. سیستم‌های نمادینی نظیر میپل که در پروژه‌ی مولر از آن استفاده شده بود، در سال‌های بعد از این



استفاده‌ی نامناسب از تکنولوژی، هیچ تغییر معناداری در یادگیری به‌وجود نمی‌آورد

پروژه، به طور چشم‌گیری پیشرفت کردند و به ابزارهای گرافیکی و عددی قدرتمندی مجهز شدند. به همراه این پیشرفت‌ها، دهه‌ی ۹۰ شاهد به اوج رسیدن تحقیقات در مورد استفاده از تکنولوژی به‌خصوص نرم‌افزارهای ریاضی در آموزش و یادگیری بودند، و این درحالی بود که گاهی تحقیقات، نتایج متفاوتی را نیز نشان می‌دادند. به گفته‌ی تال (۱۹۹۶)، بعضی از تحقیقات انجام شده نشان می‌دهند که «بسیاری از دانش‌آموزانی که از سیستم‌های جبر کامپیوتری استفاده می‌کنند، روابط درونی مفاهیم و عملیات را درست نمی‌فهمند و ایده‌های ریاضی را مانند کسانی که بیش‌تر در ریاضی سنتی تجربه دارند، به یکدیگر ربط نمی‌دهند. برای مثال، دانش‌آموزان ممکن است از رسام‌ها برای دیدن جواب‌های معادلات استفاده کنند، اما لزوماً آن‌ها را با مفهوم نمادین مسأله، مرتبط نسازند» (ص ۱۶). وی سپس، به نتایج تحقیقات کالدول (۱۹۹۵) و هانتر و همکاران (۱۹۹۳)، اشاره کرده و ابراز می‌دارد:

کالدول (۱۹۹۵) انتظار داشت که دانش‌آموزان بتوانند ریشه‌ها و مجانب‌های تابع گویای $f(x)=\frac{x(x-4)}{(x+2)(x-2)}$ را توسط روش‌های جبری و فقط با تعداد قابل توجهی از جواب‌های تقریبی داده شده مانند ۰/۰۱ و ۳/۹۸، که از روی نمودار خوانده شده بود، بیابند. حال آن‌که هانتر و همکاران[۲۲] (۱۹۹۳) متوجه شدند که یک‌سوم دانشجویانی که از یک سیستم جبر کامپیوتری استفاده می‌کردند، قبل از درس می‌توانستند به سؤال زیر پاسخ دهند:

اگر $U=1$ و $V=U+3$ در مورد U چه می‌توانید بگویید؟

اما این توانایی پس از درس کمتر شد. به نظر می‌رسید که دانش‌آموزان در طول درس، به دلیل نداشتن تمرین روی جای‌گذاری مقادیر در عبارت‌ها و عدم استفاده از این مهارت‌ها، آن‌ها را از دست داده‌اند (ص ۲۱).

درواقع، هانتر و همکاران می‌خواستند نشان دهند که واقعیت کلاس درس، با امکاناتی که مشتاقان تکنولوژی در ذهن ترسیم کرده‌اند، متفاوت است.

اسمیت، تال و همکاران (۲۰۰۱)، با جمع‌بندی نتایج به‌دست آمده از مقاله‌های تحقیقی منتشر شده در مورد استفاده از تکنولوژی در کلاس‌های درس ریاضی عمومی و گزارش رساله‌های دکتری در دهه‌ی ۹۰ و تجزیه و تحلیل آن‌ها، به سه نکته‌ی اصلی اشاره می‌کنند:

- استفاده‌ی نامناسب از تکنولوژی، هیچ تغییر معناداری در یادگیری به‌وجود نمی‌آورد؛
- اگر تکنولوژی، هوشمندانه با برنامه‌ی درسی و پداگوژی تلفیق شود، دست‌آوردهای یادگیری قابل توجهی را به‌بار خواهد آورد؛
- شواهد بسیار کمی وجود دارد که نشان دهد تغییر در نوع تکنولوژی استفاده شده، تغییر معناداری را در یادگیری ریاضی یادگیرنده ایجاد می‌کند. اگرچه این یک حقیقت است که بعضی از تکالیف به ابزارهای قدرتمندتری نیاز دارند. بعضی از ابزارها هم‌چون متمتیکا یا میپل محیط‌های بازتری را ارایه می‌دهند.

درواقع، آن‌چه که اسمیت، تال و همکاران (۲۰۰۱) از

بررسی خود نتیجه گرفتند این بود که در تدریس ریاضی، مهم نیست چه نوع ابزار تکنولوژیکی استفاده می‌شود. در واقع، به‌کارگیری تکنولوژی به طور صرف، رمز موفقیت یک برنامه نیست؛ بلکه چگونگی به کارگیری آن تکنولوژی مهم است.

با وجود خوش‌بینی و مثبت‌اندیشی ابتدایی که در بسیاری از مطالعات دهه‌ی ۱۹۹۰ در مورد تلفیق سیستم‌های جبر کامپیوتری با آموزش ریاضی وجود داشت و با وجود تحقیقات فراوانی که در مورد استفاده از CAS در کلاس درس در این دهه انجام شد، هنوز سؤالات بسیاری بدون پاسخ مانده‌اند و سؤالات جدیدی به همراه توسعه‌ی تحقیقات مطرح شده‌اند. به‌خصوص این‌که ادبیات تحقیقی این حوزه نشان می‌دهد پژوهش در مورد استفاده از سیستم‌های جبر کامپیوتری، به سال‌های پایین‌تر و موضوعات دیگر ریاضی نیز سرایت کرده است و بسیاری از تحقیقات انجام شده در سال‌های پایانی دهه ۹۰ و شروع قرن جدید، به موضوع جبر دبیرستانی گسترش پیدا کرده است، درحالی‌که در دهه‌های ۱۹۸۰ و قسمت عمده‌ی دهه ۱۹۹۰، تحقیقات این حوزه منحصر به درس حسابان و ریاضی عمومی و دوره‌های دانشگاهی بود.

در دوازدهمین مطالعه‌ی منتشر شده‌ی کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی (ICMI-12)[۲۳] که موضوع آن، آینده‌ی تدریس و یادگیری جبر بود، در رابطه با سیستم‌های جبر کامپیوتری، سؤال‌های زیر مطرح شد:

ـ رابطه‌ی بین کار در یک محیط کاغذ و مدادی با کار در یک محیط کامپیوتری چیست؟

ـ سیستم‌های جبر کامپیوتری چگونه بر برنامه‌ی درسی اثر می‌گذارند؟

ـ سیستم‌های جبر کامپیوتری چگونه بر فهم و درک مفهومی اثر می‌گذارند؟

ـ دانش مقدماتی مورد نیاز به منظور استفاده از CAS در یک روش سودمند چیست؟

ـ معرفی یک سیستم جبر کامپیوتری، برای کدام دانش‌آموزان و در چه زمانی مناسب است؟

ـ چه زمانی، فواید استفاده از یک سیستم جبر کامپیوتری بر تلاشی که برای یادگیری استفاده از آن لازم دارد، ارجحیت پیدا می‌کند؟

ـ آیا فعالیت‌هایی هست که از این سیستم‌ها استفاده کنند و بتوانند به طور مفید، توسط دانش‌آموزان کم‌سن‌تر مورد استفاده قرار گیرند؟

ـ کاربر سیستم‌های جبر کامپیوتری به چه بینش‌های جبری و درک نمادینی، نیاز دارد؟ و استفاده از این سیستم‌ها، چه بینش‌هایی را به همراه می‌آورد؟

ـ چگونه می‌توان از قدرت و توانایی سیستم‌های جبر کامپیوتری در پشتیبانی از بازنمایی‌های چندگانه‌ی[۲۴] مفاهیم ریاضی به خوبی استفاده کرد؟ آیا امکان استفاده‌ی مفرط از این سیستم‌ها وجود دارد؟

ـ رابطه و تعامل بین رویکردها و فلسفه‌های تدریس ریاضی مختلف با استفاده از سیستم‌های جبر کامپیوتری چیست؟

ـ تأثیر این واقعیت که دانش‌آموزانی که از ابزارهای محاسباتی مختلف استفاده می‌کنند، مسأله‌ها را به گونه‌های متفاوتی حل می‌کنند و در مورد مفاهیم، برداشت‌های متفاوتی دارند و همین‌طور این حقیقت که معلمان گزینه‌های بیش‌تری برای چگونگی تدریس در اختیار دارند، بر یادگیری و تدریس ریاضی چیست؟ چه سیستم تکنولوژیکی برای چه نوع یادگیری مناسب است؟ آیا این تفاوت‌ها می‌توانند از لحاظ نظری توصیف شوند؟

بعد از مطالعه‌ی دوازدهم ICMI نیز، پیرس[۲۵] (۲۰۰۱) پژوهشی را با عنوان «بینش جبری و استفاده‌ی مؤثر از CAS» انجام داد. او این تحقیق را در یک کلاس ریاضی عمومی پیش‌نیاز، که برای دانشجویان سال اول دانشگاه ارائه شده بود، با استفاده از سیستم جبر کامپیوتری درایو انجام داد. نتایج پژوهش نشان داد که رابطه‌ی دو طرفه‌ای بین دست‌یابی به بینش جبری و استفاده‌ی مؤثر از CAS وجود دارد. پیرس چارچوبی را برای استفاده‌ی مؤثر از CAS و هم‌چنین چارچوبی را برای بینش جبری مورد نیاز برای یادگیری در یک محیط جبر کامپیوتری ارایه کرد.

هم‌چنین دریجورز (۲۰۰۳)، تحقیقی را با عنوان «یادگیری مفهوم پارامتر در محیط سیستم‌های جبر کامپیوتری» و در پایه‌های نهم و دهم انجام داد. سیستم CAS مورد استفاده در این تحقیق، ماشین حساب گرافیکی ـ نمادین TI-89[۲۶] بود.

روش این تحقیق کیفی بود و تجزیه و تحلیل داده‌ها با استفاده از تجزیه و تحلیل پروتکلی انجام شد. نتایج به دست آمده از این پژوهش نشان داد که در صورت ایجاد شرایط مناسب برای یادگیری، مانند طراحی فعالیت‌های مناسب، درک دانش‌آموزان از مفهوم پارامتر، به‌طور مطلوبی ارتقا پیدا می‌کند.

تکنولوژی و درک مفاهیم ریاضی بر مبنای فرآیند[۲۷] و شیء[۲۸]

برای توصیف فرآیند تفکر، رشد و توسعه‌ی مفاهیم ریاضی و چگونگی ساخته شدن آن‌ها در ذهن، نظریه‌هایی مطرح شده‌اند که در مورد ماهیت درک مفاهیم ریاضی و تعامل بین درک فرآیندی و درک شیئی مفاهیم ریاضی توضیح می‌دهند. زیرا این بحث، یکی از کلیدی‌ترین بحث‌ها هنگام توصیف درک ریاضی است. محققان مختلفی در مورد ماهیت فرآیندها و اشیای ریاضی و چگونگی ساخته شدن آن‌ها در ذهن بحث کرده‌اند، که به طور مثال می‌توان به پیاژه (۱۹۷۲)، دیینز[۲۹] (۱۹۶۰)، گرینو[۳۰] (۱۹۸۳)، دیویس (۱۹۸۴)، دوبینسکی (۱۹۹۱ و ۱۹۸۶)، اسفارد (۱۹۹۱) و گری و تال (۱۹۹۴)، اشاره نمود.

به طور مثال، اسفارد[۳۱] (۱۹۹۱) دو رویکرد عملیاتی[۳۲] و ساختاری[۳۳] را برای توسعه‌ی مفهوم در نظر می‌گیرد که رویکرد عملیاتی، بر فرآیندها و رویکرد ساختاری، بر اشیاء متمرکز است. طبق نظر اسفارد، یک الگوی سه مرحله‌ای ثابت در هر گذار موفقیت‌آمیز از رویکرد عملیاتی به ساختاری یا به عبارتی تبدیل فرآیند به شیء می‌تواند مشخص شود. در ابتدا وجود فرآیندی که روی اشیای ایجاد شده‌ی قبلی انجام شود، لازم است. سپس ایده‌ی تبدیل این فرآیند به یک کل جامع فشرده‌تر پدیدار می‌شود و در پایان باید توانایی دیدن این هستی جدید به عنوان یک شیء پایدار، ایجاد شود. وی این سه مؤلفه‌ی توسعه‌ی مفهوم را درونی‌سازی[۳۴]، چگالش[۳۵] و جسمیت دادن[۳۶] نامیده است.

علاوه بر این، دوبینسکی (۱۹۹۱)، دوبینسکی و همکاران (۱۹۹۶)، و دوبینسکی و همکاران (۲۰۰۴)، تبدیل یک فرآیند به شیء را در سه مرحله از یک نظریه‌ی ۴ مرحله‌ای عمل، فرآیند، شیء و طرحواره که با APOS[۳۷] نشان داده می‌شود، صورت‌بندی می‌کنند. درک یک مفهوم ریاضی، با دست‌ورزی اشیای فیزیکی و ذهنی که قبلاً ساخته شده است و برای تشکیل عمل‌ها، آغاز می‌شود، سپس عمل‌ها درونی می‌شوند تا فرآیندها را تشکیل دهند و این فرآیندها می‌توانند مورد دست‌ورزی واقع شوند تا اشیاء را تشکیل دهند. در مرحله‌ی بعد این اشیاء می‌توانند به فرآیندهایی که از آن‌ها تشکیل شده‌اند، گسسته شوند و بالاخره عمل‌ها و فرآیندها و اشیاء در طرحواره‌ها سازمان‌دهی می‌شوند. هنگامی که یک طرحواره تشکیل شد، فرد می‌تواند بر روی آن بازتاب داشته و بر آن عمل کند که نتیجه‌ی این عمل بر روی طرحواره، تشکیل یک شیء جدید است. بنابراین، حداقل دو راه برای ساختن اشیای ریاضی وجود دارد؛ یکی با استفاده از فرآیندها و دیگری با استفاده از طرحواره‌ها. دوبینسکی و همکاران (۲۰۰۴) توضیح می‌دهند که به عنوان مثال، در سطح عمل، دانش‌آموزان یک رویه را مرحله به مرحله انجام می‌دهند و اغلب به نتایج یک مرحله برای رسیدن به مرحله‌ی بعد اشاره می‌کنند. در این سطح، آن‌ها قادر نیستند تا یک رویه را بدون این‌که آن را واقعاً انجام دهند، درک کنند. در سطح فرآیند، دانش‌آموزان می‌توانند بدون این‌که واقعاً یک رویه را انجام دهند، مراحل آن را توصیف کنند و در سطح شیء می‌توانند عمل‌ها را بر فرآیندها اعمال کنند، مثلاً برای تشکیل ترکیب دو تابع، دانش‌آموزان نیاز دارند تا در سطح شیء، درکی از تابع داشته باشند.

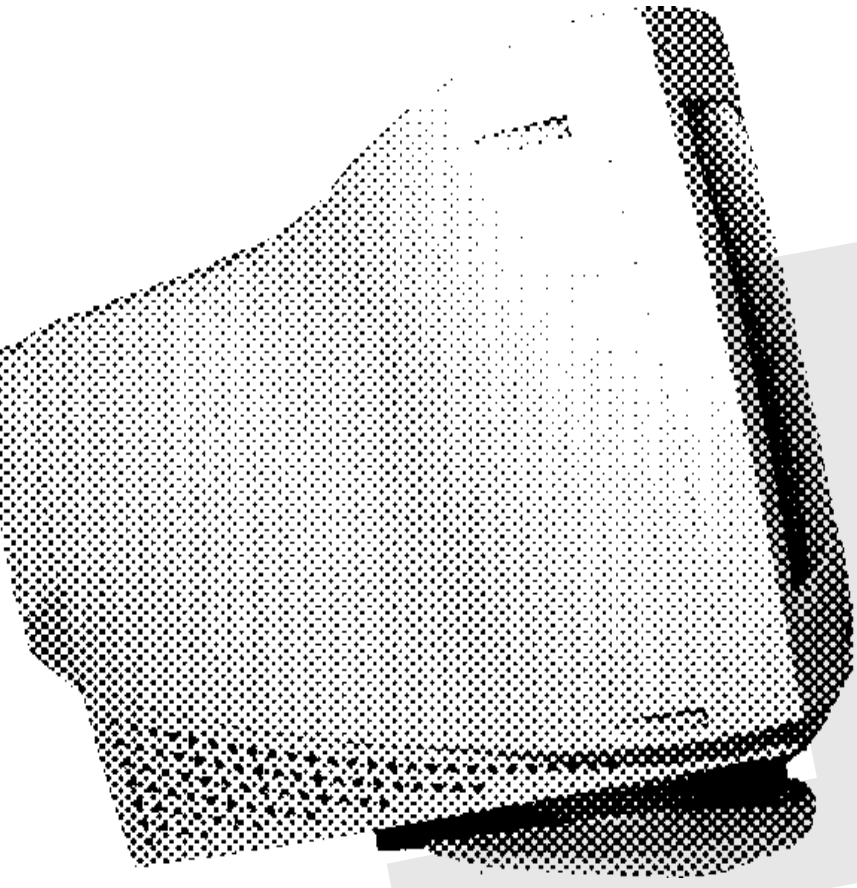
تکنولوژی نقش مهمی را در بعضی تحقیقاتی که هدف آن‌ها، مشخص کردن چگونگی فهم فرآیندی و فهم شیئی مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان است، بازی کرده است. به طور مثال، دوبینسکی و همکاران (۱۹۹۰)، یک زبان برنامه‌نویسی ریاضی به نام ISETL اختراع کردند که فرمول توابع را به عنوان ورودی می‌پذیرد و می‌تواند فرمول تابع را به عنوان خروجی بدهد. آن‌ها از ISETL در مطالعاتی که برای تسریع فراگیری فهم شیئی تابع و دسته‌ی دیگری از مفاهیم حسابان انجام شده بود، استفاده کردند. درواقع، دوبینسکی و همکاران (آزیلا، کاتریل و...، ۲۰۰۴)، چارچوبی را برای تحقیق و توسعه‌ی برنامه‌ی درسی معرفی کردند که در آن، رشد و توسعه‌ی مفاهیم ریاضی براساس مدل APOS تجزیه و تحلیل می‌شد. آن‌ها چرخه‌ی **فعالیت، بحث کلاسی و تمرین** (ACE)[۳۸] را برای توسعه‌ی مفهوم در نظر

گرفتند که در هر تکرار، فعالیت‌های مناسب یادگیری براساس مدل APOS، طراحی می‌شد. برای انجام فعالیت‌ها نیز استفاده از تکنولوژی و کار گروهی را پیشنهاد کردند. این چارچوب، نتایج موفقیت‌آمیزی را در بسیاری از مطالعات تحقیقی نشان داده است که برای مثال، می‌توان به مطالعه‌ی رپو[۳۹] ۱۹۹۴ در رابطه با مفهوم مشتق اشاره کرد.

به هر حال به نظر می‌رسد که سیستم‌های جبر کامپیوتری، تکنولوژی‌های ایده‌آلی برای سرعت بخشیدن به توسعه‌ی فهم و درک مفاهیم ریاضی هستند. به گفته‌ی هید (۲۰۰۱)، دانش‌آموزان با استفاده از CAS، می‌توانند بدون نیازمندی به انجام دستی رویه‌ها، به عمل‌های انجام شده بر روی هستی‌های ریاضی معنا بخشند. یک سیستم جبر کامپیوتری که به کاربر اجازه می‌دهد تا توابع و برنامه‌های متنوع را طراحی کند، می‌تواند ابزاری فراهم کند که به وسیله‌ی آن، فرآیندها به شیء تبدیل شوند و روی آن‌ها، عمل انجام گیرد. هید (۲۰۰۱) اظهار می‌کند که نمی‌توان ادعا کرد که چون دانش‌آموز می‌تواند یک دستور عادی را برای انجام یک رویه بنویسد، می‌تواند بر آن رویه به عنوان شیء نیز عمل کند. بلکه منظور این است که صحت اعمال انجام‌شده توسط CAS و راحتی این وسیله در خلاصه کردن یک فرآیند با تنها یک دستور، این توانایی بالقوه را دارد که به عنوان واسطه‌ای بین درک فرآیندی و درک شیئی عمل کند. به گفته‌ی وی، «اگر دانش‌آموزی بتواند یک کار معمولی را با تنها یک دستور بنویسد، در مرحله‌ی بعد، ممکن است در مورد فرآیندی که با آن دستور ارایه شده است، به عنوان هستی‌ای که می‌تواند مورد دست‌ورزی قرار گیرد، فکر کند.»

سیستم‌های جبر کامپیوتری و درک نمادین

بازنمایی‌های ریاضی در توسعه‌ی فهم و درک ریاضی، نقش اساسی دارند و CAS یک ابزار بازنمایی قدرتمند است که با داشتن قابلیت‌های عددی، گرافیکی و نمادین، محیط ایده‌آلی را برای توسعه‌ی فهم ایده‌های ریاضی از چندین زاویه فراهم می‌کند. به گفته‌ی هید (۲۰۰۱)، ممکن است بیش‌تر دانش‌آموزان و دانشجویان، قادر باشند که رویه‌ها را در بازنمایی‌های عددی، گرافیکی یا نمادین اجرا کنند، ولی تعداد



در واقع، آن چه که اسمیت، تال و همکاران (۲۰۰۱) از بررسی خود نتیجه گرفتند این بود که در تدریس ریاضی، مهم نیست چه نوع ابزار تکنولوژیکی استفاده می‌شود. در واقع، به کارگیری تکنولوژی به طور صرف، رمز موفقیت یک برنامه نیست؛ بلکه چگونگی به کارگیری آن تکنولوژی مهم است

کمی از آن‌ها می‌توانند بین این بازنمایی‌ها ارتباطات مناسبی برقرار سازند. وی به نقل از سانتوس[40] (۲۰۰۰)، اظهار می‌دارد که دانش‌آموزان هنگامی می‌توانند بین بازنمایی‌ها ارتباط مناسبی بسازند که بتوانند در مورد این‌که چطور اطلاعات به دست آمده از یک بازنمایی، می‌تواند اطلاعاتی در مورد بازنمایی دیگری بدهد، تأمل کنند. هم‌چنین، پیرس (۲۰۰۱) معتقد است که «کار کردن با بازنمایی‌های مختلف توابع، فهم دانش‌آموزان را به گونه‌ای توسعه می‌دهد تا آن‌ها بتوانند به طرحواره‌های مفهومی خود، تصاویر ذهنی متفاوت را اضافه کنند. توانایی CAS برای اتصال بازنمایی‌های عددی، گرافیکی و نمادین، باعث ایجاد تفکر متنوع[41] می‌شود» (ص ۱۱).

یکی از مهم‌ترین بازنمایی‌هایی که سیستم‌های جبری ارایه می‌کنند و چیزی که سیستم‌های جبر کامپیوتری را از ماشین‌حساب‌های گرافیکی و یا بسیاری از نرم‌افزارهای دیگر متمایز می‌سازد، در قابلیت‌های جبری این نرم‌افزارها و توانایی آن‌ها برای دست‌ورزی‌های نمادین و به عبارتی، بازنمایی نمادین است. به همین دلیل است که نقش نمادها در درک مفاهیم ریاضی، در تحقیقات مختلف و به شکل‌های متفاوت، مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر این، ریاضی‌دان‌ها از نمادها برای تفکر در مورد ریاضی و برای انجام ریاضی، برای ارتباط برقرار کردن بین ایده‌های ریاضی و بیان نتایج ریاضی، استفاده می‌کنند. وقتی که آن‌ها به یک عبارت جبری نگاه می‌کنند، یک تصویر ذهنی از آن عبارت، در ذهنشان شکل می‌گیرد. اما این تصویر ذهنی برای بعضی معلمان، و برای دانش‌آموزانی که در دست‌ورزی عبارت‌های جبری خبره نیستند، به یک شکل نیست. از طرفی، نوع نمادگذاری‌های جبری مورد استفاده در سیستم‌های جبر کامپیوتری، و نمادگذاری در روش معمول کاغذ و مدادی هم به یک صورت نیست. به همین علت، در این بخش به تعریف درک نمادین و صورت‌های مختلف آن و رابطه‌ی این درک با سیستم‌های جبر کامپیوتری پرداخته می‌شود.

به گفته‌ی دریجورز (۲۰۰۳)، درک نمادین «اصطلاحی است که به طور دقیق تعریف نشده است، اما به توانایی معنی دادن به نمادها، فرمول‌ها و عبارت‌ها گفته می‌شود» (ص ۴۹). به نظر وی، این توانایی معمولاً بدیهی و خودآشکار نیست و به جنبه‌های نمادین جبر برمی‌گردد، درحالی‌که حس نمادین، یکی از وجوه مهم یادگیری جبر است. پیرس (۲۰۰۱) نیز ابراز می‌دارد که همان‌گونه که برای استفاده‌ی مناسب از ماشین‌حساب‌های چهار عملی، داشتن درک عددی و مهارت‌های تخمین عددی لازم است، برای کار با سیستم‌های جبر کامپیوتری نیز، مقداری درک نمادین لازم است.

به این دلیل محققان مختلف تلاش کرده‌اند تا درک نمادین را تعریف کرده و جنبه‌های مختلف آن را مشخص کنند که به گفته‌ی پیرس (۲۰۰۱) و دریجورز (۲۰۰۳)، یکی از مهم‌ترین این مطالعات توسط آرکاوی[42] (۱۹۹۴) انجام گرفته است. آن‌ها اشاره می‌کنند که آرکاوی (۱۹۹۴)، هفت مؤلفه را برای درک نمادین پیشنهاد کرده است، اگرچه معتقد است که این هفت مؤلفه، کامل و جامع نیستند و حس نمادین، به طور کامل با این هفت مؤلفه تعریف نمی‌شود. با این وجود، به دلیل اهمیت مؤلفه‌های پیشنهادی آرکاوی، به آن‌ها به نقل از پیرس (۲۰۰۱) (ص ۲۵)، اشاره می‌شود:

- درک نمادین یعنی این‌که چه‌طور و چه زمانی از نمادها برای نمایش روابط، تعمیم‌ها و غیره، می‌توان استفاده کرد؛
- توانایی این که در زمان مناسب و درحالی‌که شرایط مسأله ایجاب می‌کند، نمادها را کنار گذاشته و برای پیدا کردن جواب مسأله، از بازنمایی‌های دیگر استفاده کرد؛
- توانایی دست‌ورزی و خواندن عبارت‌های جبری به عنوان دو وجه مکمل حل مسایل جبری، جدا از زمینه‌ی مسأله و توانایی نگریستن به عبارت‌های جبری به طور عمومی؛
- آگاهی از این مسأله که فرد می‌تواند برای اطلاعات گرافیکی و اطلاعات شفاهی که برای پیشرفت یک مسأله لازم است، عبارت‌های جبری طراحی کند و توانایی انجام این کار را داشته باشد؛
- توانایی انتخاب یک بازنمایی جبری مناسب برای یک مسأله؛
- درک این مسأله که معنی نماد در حین حل یک مسأله باید مورد بررسی قرار گرفته و آن معنی، با شهود شخصی فرد و نتایج مورد انتظار مسأله، مقابل هم قرار گرفته و مقایسه شوند؛
- معنادار ساختن نقش‌هایی که یک نماد در زمینه‌های مختلف، می‌تواند بازی کند.

برای استفاده از CAS، داشتن مقداری از درک نمادین و کار با نمادها ضروری است، زیرا نوشتن عبارت‌های جبری و

تفسیر نتایج به دست آمده از خروجی های CAS، نیازمند توانایی کار با نمادها و معنا بخشیدن به آن هاست. درک نمادین و وجود سیستم های جبر کامپیوتری، سؤالات پژوهشی مهمی را در مورد یادگیری جبر، مطرح کرده اند. سؤالاتی نظیر این که «آیا می توان از سیستم های جبر کامپیوتری برای یادگیری جبر استفاده کرد؟» یا این که «رویکرد مناسب برای یادگیری جبر در عصر CAS چیست؟» و «چه زمانی می توان، استفاده از سیستم های جبر کامپیوتری را شروع کرد؟»، همگی نیازمند کارهای پژوهشی جدی هستند.

علاوه بر اهمیت نقش درک نمادین در چگونگی استفاده ی دانش آموزان/ دانشجویان از CAS، یکی دیگر از مهارت های ضروری برای کارآمدی این استفاده، شناخت CAS به عنوان یک ابزار معنی دار، برای ارتقای فهم و درک مفاهیم ریاضی است.

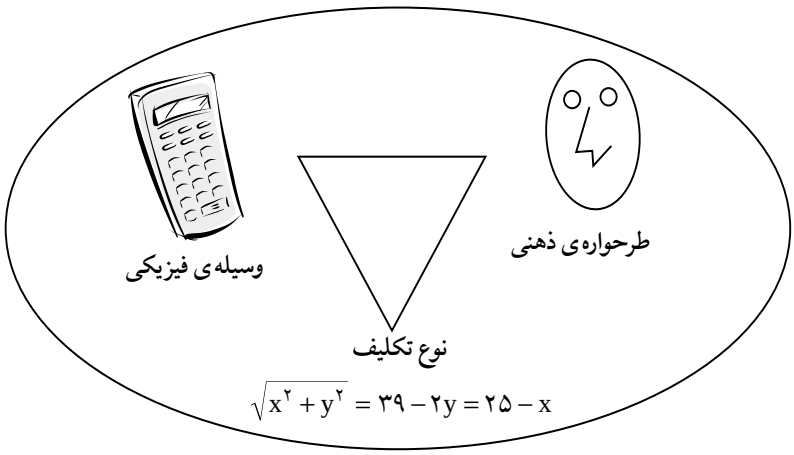
نظریه ی ابزار

در این بخش به معرفی نظریه ی ابزار[۴۳] پرداخته می شود، که به گفته ی دریجورز (۲۰۰۳)، در زمینه ی تحقیقات آموزشی در مورد تلفیق سیستم های جبری کامپیوتری با آموزش ریاضی و توسط محققان فرانسوی (آرتیگ، ۱۹۹۷؛ تروچ[۴۴] و گین، ۲۰۰۲) توسعه پیدا کرده است. از آن جایی که این نظریه برای تجزیه و تحلیل مشکلاتی که دانش آموزان و دانشجویان در حین کار در یک محیط تکنولوژیکی و به خصوص سیستم های جبری کامپیوتری با آن مواجه می شوند، نقش اساسی بازی می کند، در این قسمت معرفی می شود. در مورد نظریه ی ابزار بیش تر به نظریات دریجورز ارجاع داده شده است.

به گفته ی دریجورز (۲۰۰۳)، اولین پیش زمینه ی نظریه ی ابزار، کار ویگوتسکی (۱۹۸۷)، در مورد استفاده از وسیله ها[۴۵]ست و دومین پیش زمینه، مفهوم طرحواره است. بحث اساسی کار ویگوتسکی در این است که وسیله ها، واسطه ی بین عمل بشری و محیط واقعی هستند. این مصنوعات فرهنگی- تاریخی می توانند هم وسایل مادی و هم وسایل شناختی شبیه زبان یا نمادهای جبری، باشند. به گفته ی هویلز[۴۶] و ناس[۴۷] (۱۹۹۶)، وسایل تکنولوژیکی می توانند واسطه ی بین یادگیرنده و دانشی که قرار است یاد گرفته شود، باشند. به گفته ی دریجورز (۲۰۰۳)، از دیدگاه ویگوتسکی، سؤال اصلی این است که چطور وسایل تکنولوژیکی می توانند به عنوان واسطه ای برای ساختن دانش جدید، عمل کنند. دو تا از مؤلفه های اصلی نظریه ی ابزار، دوگان وسیله- ابزار و فرآیند تکوین ابزاری و طرحواره ها هستند که در زیر معرفی می شوند.

وسیله و ابزار. نظریه ی ابزار از علم طراحی ماشین شناختی[۴۸] که توسط رابارדل معرفی شد، سرچشمه می گیرد و مرتبط با کار کردن با وسیله هاست (دریجورز، ۲۰۰۳). یک نکته ی کلیدی در نظریه ی ابزار، این ایده است که یک وسیله یا مصنوع ساده به طور خودکار یک ابزار واسطه گر نیست. به طور مثال یک چکش ممکن است در ابتدا برای شخص یک چیز بی معنی باشد، مگر این که آن شخص قبلاً آن وسیله را دیده و با آن کار کرده باشد و یا کس دیگری را در حین استفاده از آن دیده باشد. تنها بعد از این که فرد نیاز به چیزی شبیه چکش را پیدا

اگر تکنولوژی، هوشمندانه با برنامه ی درسی و پداگوژی تلفیق شود، دست آوردهای یادگیری قابل توجهی را به بار خواهد آورد



شکل ۱ : سه‌گانه‌ی وسیله‌ی فیزیکی، طرحواره‌ی ذهنی و نوع تکلیف (دریجورز، ۲۰۰۳)

کرد و بعد از این‌که تجربه‌ی کار کردن با آن را به دست آورد، به تدریج، این وسیله تبدیل به یک ابزار با ارزش و مفید می‌شود که واسطه‌ی بین فرد و فعالیتی است که فرد انجام می‌دهد. به گفته‌ی دریجورز (۲۰۰۳)، تمایز بین وسیله و ابزار می‌تواند در مورد سایر مصنوعات تکنولوژیکی مانند ماشین‌حساب و کامپیوتر هم گذاشته شود. هم‌چنین وی به نقل از راباردل اظهار می‌دارد که هنگامی یک وسیله به ابزار تبدیل می‌شود که یک رابطه‌ی معنی‌دار بین آن وسیله یا قسمتی از آن، کاربری که از آن وسیله استفاده می‌کند و نوع وظیفه‌ای که قرار است انجام شود، موجود باشد. بر طبق این دیدگاه، ابزار نه‌تنها قسمتی از وسیله‌ی تکنولوژیکی ـ مثل CAS ـ است، بلکه شامل طرحواره‌های ذهنی کاربر یعنی کسی که می‌داند چگونه از آن وسیله برای هدف مورد نظر خود استفاده کند، نیز است.

تکوین ابزاری و طرحواره‌ها. یکی از مهم‌ترین سؤالات در مورد نظریه‌ی ابزار این است که چطور دسترسی به یک مصنوع یا وسیله منجر به توسعه‌ی یک ابزار مفید و معنی‌دار می‌شود. فرآیند توسعه‌ی معنی برای استفاده از یک وسیله در یک روش مناسب و معقول، **تکوین ابزاری** نامیده می‌شود. به گفته‌ی دریجورز (۲۰۰۳)، نتایج این تکوین ابزاری در **طرحواره‌های استفاده**[۴۹]، خلاصه می‌شوند؛ به بیان دیگر، تکوین ابزاری شامل ساختن طرحواره‌هایی برای استفاده از آن وسیله است.

دریجورز (۲۰۰۳)، بین دو نوع طرحواره‌ی استفاده، تمایز قایل می‌شود. از نظر وی، اولین نوع شامل طرحواره‌های سودمندی[۵۰] است که یک وسیله را با هدف‌های خاص، سازگار می‌کند و کارکردهای آن را تغییر یا توسعه می‌دهد. به طور مثال، یک برنامه‌ی واژه‌پرداز با به بازار آمدن نسخه‌ی جدید آن ارتقا می‌یابد و برنامه‌های جدید یا کاربردهای بیش‌تری به آن اضافه می‌شوند. نوع دوم شامل طرحواره‌هایی هستند که به عنوان طرحواره‌های ذهنی مرتبط و معنی‌دار برای استفاده از ابزار تکنولوژیکی و برای حل نوع خاصی از مسایل، مورد استفاده قرار می‌گیرند. بررسی‌ها نشان می‌دهد که طرحواره‌های نوع دوم به معنی طرحواره‌های ابزار، استفاده شده است. در مورد یک وسیله‌ی تکنولوژیکی مانند CAS، یک وجه طرحواره‌ی ابزار، خروجی‌های ظاهر شده بر صفحه‌ی نمایش است که مرئی و تکنیکی هستند و ناشی از اعمالی است که ماشین انجام می‌دهد و وجه دیگر طرحواره‌ی ابزار، بخش ذهنی ـ شناختی آن است. برای مثال، فرض کنید یک دانش‌آموز می‌خواهد با استفاده از CAS، جواب معادله‌ی $3^x = 2x^2 - 5$ را با روش ترسیم نمودار به دست آورد. طرحواره‌ی حل گرافیکی شامل قسمت ذهنی دیدن هر دو طرف معادله به صورت توابع $y_1(x) = 2x^2 - 5$ و $y_2(x) = 3^x$، و رسم کردن آن‌ها است. به کار بردن این طرحواره مستلزم دانستن این مطلب است که جواب معادله، مختصات x نقطه‌ی تقاطع دو نمودار است. این عمل‌ها از نوع فعالیت‌های ذهنی هستند و به جنبه‌های تکنیکی، شبیه وارد کردن دو تابع و رسم نمودارها، معنی می‌دهند. این مثال نشان می‌دهد که طرحواره‌ی ابزار، تعامل بین عمل و تفکر است و هم‌چنین این طرحواره، تکنیک‌های ماشین و مفاهیم ذهنی را به هم مرتبط می‌کند. به گفته‌ی دریجورز (۲۰۰۳)، مهارت‌های تکنیکی و الگوریتم‌ها از یک طرف، و بینش‌های مفهومی از طرف دیگر، اجزای جدانشدنی در طرحواره‌ی ابزار هستند. در مورد وسایل تکنولوژیکی ریاضی نیز، قسمت ذهنی، شامل اشیای ریاضی درگیر، تصویر ذهنی از فرآیند حل مسأله، و عمل‌های ماشین است. بنابراین، قسمت

مفهومی طرحواره‌های ابزار، هم شامل اشیای ریاضی و هم شامل بینش‌هایی در مورد ریاضی برای ماشین است. در طول فرآیند تکوین ابزار، چنین فهم‌های ذهنی ریاضی می‌توانند به موازات توسعه‌ی طرحواره‌های مفهومی، توسعه پیدا کنند.

نظریه‌ی ابزار می‌تواند در مشخص کردن نقش تکنولوژی در یک زمینه‌ی آموزشی خاص، کمک مفیدی باشد. با استفاده از این نظریه می‌توان موانع و مشکلات تکنیکی به خصوص مشکلات جبری دانش‌آموزان را در یک محیط مبتنی بر CAS بررسی کرده و آن‌ها را تجزیه و تحلیل کرد. سپس با استفاده از آن می‌توان فعالیت‌های آموزشی مناسبی را طراحی کرد تا فرآیند تکوین ابزاری به نحو مطلوبی انجام شود و طرحواره‌های ذهنی ریاضی دانش‌آموزان به شکل مناسبی بسط یافته و توسعه پیدا کنند.

زیرنویس‌ها

1. Amplifier
2. Reorganizer
3. Drijevers
۴. این تقویت‌کننده با Reinforcement که در روان‌شناسی رفتاری به آن اشاره می‌شود، متفاوت است.
5. Zone of Proximal Development (ZPD)
6. Heal et al
7. Black Box
8. White Box/ Black Box
9. Worksheet
10. Lane et al
11. Mathematical Principles
12. Small et al
13. Char
14. Maple
15. Apple ll Plus
16. Palmiter
17. Precalculus
18. Muler
۱۹. منظور از آزمایشگاه میپل، همان پروژه‌ی میپل برای یادگیری ریاضی بود.
۲۰. نگارنده در مورد پروژه‌ی مولر و چگونگی فعالیت‌های انجام‌شده در آزمایشگاه میپل این پروژه، به اطلاعات بیش‌تری دست نیافت.
21. Users' Friendly
22. Hunter et al
23. International Commision on Mathematical Instruction (ICMI)
24. Multiple Representation
25. Pierce
26. Texas Instrument
27. Process
28. Object
29. Dienes
30. Greeno
31. Sfard
32. Operational
33. Structural
34. Interiorization
35. Condensation
36. Reification
۳۷. APOS به ترتیب، حروف اول کلمات Action، Process، Object، Schema است.
۳۸. ACE حروف اول کلمات Activity، Class Discussion و Exercises است.
39. Repo
40. Santos
41. Versatile
42. Arcavi
43. Instrumentation Theory
44. Trouch
45. Tools
46. Hoyles
47. Noss
۴۸. رابادل مخترع نظریه‌ی ماشین‌شناختی است.
49. Utilization Schema
50. Utility Schema

منابع

[1] Allen, G. D. (1999). Strategies and Guidelines for Using a Computer Algebra System in the Classroom, **Int. J. Engng Ed**. Vol. 15, No. 6, PP. 411-416.

[2] Drijvers, P. (2002). **Learning Algebra in a Computer Algebra Environment**, Published doctoral Thesis, ww. Fi. uu. nl/ ~ pauld/ dissertation.

[3] Dubinsky, E. Tall, D. (1991). Advanced Mathematical Thinking And The Computer, in Tall, D. (ed.) **Advanced Mathematical Thinking**, Kluwer, Dordrecht, PP. 231-248.

[4] Heid, K. M. (2001). Theories that Inform the Use of CAS in the Teaching and Learning of Mathematics, **CAME Symposium 2001, theme 3 Presentation**, www. lonklab. ac. uk/ came/ events/ reims/ 1- Presentation.

[5] Palmiter, J. (1991). Effects of Computer Algebra Systems on Concept and Skill Acquisition in Calculus, **Journal of Research in Mathematics Education**, 22, PP. 151-156.

[6] Pierce, R. U. (2001). **An Exploration of Algebraic Insight and Effective Use of Computer Algebra Systems**, Submitted in total fulfilment of the Requirements of the Degree of Doctor Philosophy, Department of Science and Mathematics Education, the University of Melborne.

[7] Tall, D. &. Smith, D. &. Pies, C. (2001). Technology and Calculus, **in Research on Technology and Learning of Mathematics**, by Kathy Heid and Glume Blume, Information Age Publishing, Inc. 2003, http:// fds. duke. edu/ db/ aas/ math/ faculty/ smith.