فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی

شمارهٔ ۲۵(پاییز ۱۳۷۹)، صص. ۱ تا ۱۰

شمارش مرکزسازها در گروه‌های متناهی

علی‌رضا اشرفی و حمیدرضا صفری

چکیده

در [۴] سارابل کاسترو و گری شرمن $\#Cent(G)$ را به عنوان تعداد مرکزسازهای متمایز گروه متناهی G تعریف کرده‌اند. آنها ثابت کرده‌اند که در یک گروه غیرآبلی G، $\#Cent(G) \geqslant ۴$ و $\#Cent(G) = ۴$ اگر و تنها اگر $\frac{G}{Z(G)} \cong Z_۲ \times Z_۲$. به‌علاوه $\#Cent(G) = ۵$ اگر و تنها اگر $\frac{G}{Z(G)}$ با $S_۳$ یا $Z_۳ \times Z_۳$ یکریخت باشد.

هدف این مقاله مطالعهٔ دو مسئلهٔ طرح شده در مرجع [۴] می‌باشد. ما ثابت خواهیم کرد که برای هر عدد طبیعی $n \geqslant ۴$، گروهی چون G وجود دارد به طوری که $\#Cent(G) = n$ و چندین مثال نقض برای یکی از مسائل مطرح شده در مقالهٔ فوق‌الذکر ارائه خواهیم کرد. در پایان احکام متنوعی برای گروه‌های متناهی با n مرکزساز متمایز اثبات خواهیم کرد.

۱. مفاهیم اولیه و نتایج مقدماتی

در این بخش ما به بررسی مطالبی می‌پردازیم که در سراسر مقاله آنها را مورد استفاده قرار خواهیم داد. تمامی گروه‌های مورد بررسی متناهی می‌باشند و برای تعاریف و مفاهیم مقدماتی می‌توان به مراجع استاندارد نظریهٔ گروه‌ها مراجعه کرد.

تعریف ۱.۱. تعداد مرکزسازهای متمایز گروه متناهی G را با $\#Cent(G)$ نشان داده و احتمال اینکه دو عضو مرکزساز یکسانی داشته باشند را با

$$PrCent(G) = \frac{\#Cent(G)}{|G|}$$

تعریف می‌کنیم.

برای خودشمول بودن مقاله احکام زیر را که در مرجع [۴] اثبات شده‌اند بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۲.۱. اگر G گروهی غیرآبلی باشد در این صورت $\#Cent(G) \geqslant ۴$، به علاوه $\#Cent(G) = ۴$ اگر و تنها اگر $\frac{G}{Z(G)} \cong Z_۲ \times Z_۲$.

قضیهٔ ۳.۱. $\#Cent(G) = ۵$ اگر و تنها اگر $\frac{G}{Z(G)}$ با $S_۳$ یا $Z_۳ \times Z_۳$ یکریخت باشد. این بخش را با لم مقدماتی زیر و یک تعریف به پایان می‌بریم.

لم ۴.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی و x و y عناصری از G باشند. در این صورت $C(x) = C(y)$ اگر و تنها اگر $Z(C(x)) = Z(C(y))$.

اثبات. ثابت می‌کنیم $C(x) \subseteq C(y)$ اگر و تنها اگر $Z(C(y)) \subseteq Z(C(x))$. لزوم حکم فوق بدیهی است. برای اثبات کفایت فرض کنیم $Z(C(y)) \subseteq Z(C(x))$ و $z \in C(x)$ دلخواه باشد. چون $y \in Z(C(y)) \subseteq Z(C(x))$ لذا $y \in Z(C(x))$ و چون $z \in C(x)$، $yz = zy$. بنابراین $z \in C(x)$ و از آنجا $C(x) \subseteq C(y)$. با جایگزینی $C(x)$ به جای $C(y)$ و استفاده مجدد از حکم فوق، قضیه ثابت می‌شود.

تعریف ۵.۱. فرض کنید G گروهی متناهی بوده و $Norm(G)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$Norm(G) = \{N_G(\langle x\rangle)|x \in G\}$$

مرتبهٔ $Norm(G)$ را با $\#Norm(G)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:

$$PrNorm(G) = \frac{\#Norm(G)}{|G|}$$

۲. شمارش مرکزسازهای متمایز چند گروه متناهی

در [۴] بل کاسترو و شرمن این سؤال را مطرح کرده‌اند که «آیا می‌توان برای هر عدد طبیعی $n \geqslant ۴$ گروهی متناهی چون G یافت که $\#Cent(G) = n$؟» ما در این بخش به این سؤال جواب مثبت خواهیم داد.

لم ۱.۲. فرض کنید $D_{۲n}$ گروه دو وجهی از مرتبهٔ $۲n$ باشد. در این صورت

$$\#Cent(D_{۲n}) = \begin{cases} n+۲ & ۲\nmid n \\ \frac{n}{۲}+۲ & ۲|n \end{cases}$$

همچنین

$$\#Norm(D_{۲n}) = \#Cent(D_{۲n}) - ۱$$

اثبات. نمایش زیر برای گروه D_{2n} را در نظر می‌گیریم:

$$D_{2n} = \langle a, b | a^n = b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

ابتدا فرض می‌کنیم n عددی فرد باشد در این صورت $|Z(D_{2n})| = 1$. به سادگی می‌توان دید که در این حالت، $C(a^i b) = \{e, a^i b\}$ که $0 \leqslant i < n$ و $C(a) = \langle a \rangle$. بنابراین در این حالت $\#Cent(D_{2n}) = n + 2$. حال اگر nزوج باشد، آنگاه $Z(D_{2n}) = \langle a^n \rangle$ و برای $0 \leqslant i \leqslant n - 1$، $C(a^i b) = \{e, a^i b, a^n, a^{n+i} b\}$. با توجه به مطلب اخیر $C(a^i b) = C(a^j b)$ اگر و تنها اگر $i = j, j \pm n$ بنابراین $\#Cent(D_{2n}) = \frac{n}{2} + 2$. نهایتاً چون $N(\langle a \rangle) = G$ لذا خواهیم داشت:

$$\#Norm(D_{2n}) = \#Cent(D_{2n}) - 1$$

در ادامه تعداد مرکزسازهای متمایز گروه‌هایی را خواهیم یافت که نمایشی از آنها در دست است. برای مطالعهٔ گروههایی که در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرند می‌توان به مرجع [۶] مراجعه نمود.

لم ۲.۲. فرض کنید U_{6n} گروهی با نمایش زیر باشد:

$$U_{6n} = \langle a, b | a^{2n} = b^3 = 1, a^{-1} b a = b^{-1} \rangle$$

در این صورت $\#Cent(U_{6n}) = 5$ و

$$\#Norm(U_{6n}) = \begin{cases} 4 & 3 \nmid n \\ 5 & 3 | n \end{cases}$$

اثبات. به سادگی می‌توان دید که $Z(U_{6n}) = \langle a^2 \rangle$. اکنون چون $|U_{6n} : Z(U_{6n})| = 6$ و U_{6n} گروهی غیرآبلی است لذا $\frac{U_{6n}}{Z(U_{6n})} \cong S_3$ و از این رو بنابر قضیهٔ ۳.۱، $\#Cent(U_{6n}) = 5$. برای اثبات قسمت دوم حکم ابتدا توجه کنیم که برای هر $0 \leqslant i < 2n$ ، $\langle a^i \rangle \trianglelefteq \langle a \rangle$ و لذا $\langle a \rangle \subseteq N(\langle a^i \rangle)$، که دو نرمال‌ساز متمایز به‌دست می‌آید. حال تعریف می‌کنیم $X_i = \langle a^i b \rangle$. به سادگی می‌توان دید که اگر $2|j$ آنگاه $a^j \in N(X_i)$. حال فرض کنیم i عددی فرد باشد ثابت می‌کنیم در این حالت عکس حکم فوق نیز درست است. فرض کنیم $a^j \in N(X_i)$، در این صورت $a^{-j} a^i b a^j = (a^i b)^k = a^{ik} b^{[\frac{k+1}{2}] + [\frac{k}{2}](-1)^i}$ و لذا $a^i b(-1)^j = a^{ik} b^{[\frac{k+1}{2}] + [\frac{k}{2}](-1)^i}$. حال این نتیجه می‌دهد که $a^{i(k-1)} = b^{[\frac{k+1}{2}] + [\frac{k}{2}](-1)^i + (-1)^{j+1}} = e$ بنابراین k باید عددی فرد باشد که در این صورت j عددی زوج است. بنابراین ثابت کردیم که اگر i فرد باشد آنگاه $a^j \in N(X_i)$ اگر و تنها اگر $2|j$. وقتی که i عددی فرد است با محاسباتی مشابه ثابت می‌شود که $a^j b \in N(X_i)$ اگر و تنها اگر $2 \nmid j$. حال عناصر به شکل $a^j b^{-1}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با محاسباتی کم و بیش طولانی می‌توان دید که چنین عناصری به $N(X_i)$ تعلق ندارند و

از این رو برای عدد فرد i، $N(X_i) = \{a^r|۲|r\} \cup \{a^r b|۲ \nmid r\}$. مشابهاً اگر $Y_i = \langle a^i b^{-۱} \rangle$، i عددی فرد است، آنگاه می‌توان دید که $N(Y_i) = \{a^r|۲|r\} \cup \{a^r b^{-۱}|۲ \nmid r\}$. حال فرض کنیم i عددی زوج باشد و قرار می‌دهیم $Z_i = \langle a^i b \rangle$. در این صورت اگر مجموعه A را به صورت $A = \{a^{۲r}|۰ \leqslant r \leqslant n-۱\} \cup \{a^{۲r}b|۰ \leqslant r \leqslant n-۱\}$ تعریف کنیم آنگاه $A \subseteq N(Z_i)$ و بنابراین $|N(Z_i)| \geqslant ۳n$. اگر $۳|n$ آنگاه می‌توان دید که $|N(Z_i)| = ۳n$ (در واقع $a \notin N(\langle a^۲ b \rangle)$) و از این رو $\#Norm(G) = ۵$ و اگر $۳ \nmid n$ آنگاه $\langle a^i b \rangle \trianglelefteq G$ و لذا $\#Norm(G) = ۴$.

لم ۳.۲. فرض کنید $Q_{۴n}$ گروه کواترنیون‌های تعمیم‌یافته باشد، در این صورت داریم:

$$\#Cent(Q_{۴n}) = n + ۲ = \#Norm(Q_{۴n}) + ۱$$

اثبات. ابتدا نمایش زیر را برای گروه $Q_{۴n}$ در نظر می‌گیریم:

$$Q_{۴n} = \langle a, b | a^{۲n} = ۱, b^۲ = a^n, bab^{-۱} = a^{-۱} \rangle$$

بنابر قضیه‌ای در نظریهٔ گروه‌ها $Z(Q_{۴n}) = \langle b^۲ \rangle$. حال به سادگی می‌توان دید که برای $۰ \leqslant i \leqslant n$، $C(a^i) = \langle a \rangle$ و برای $i = ۰, n$، $C(a^i) = G$. لذا از این طریق دو مرکزساز متمایز حاصل می‌شود. به سادگی می‌توان دید که $C(a^i b) = \{e, a^i b, a^n, a^{n+i} b\}$ و با توجه به مطلب فوق $\#Cent(Q_{۴n}) = n + ۲$. چون $\langle a \rangle \trianglelefteq Q_{۴n}$ از این رو

$$\#Norm(Q_{۴n}) = \#Cent(Q_{۴n}) - ۱ = n + ۱$$

با توجه به لم اخیر اگر $n \geqslant ۴$ عددی طبیعی باشد آنگاه $\#Cent(Q_{۴n-۸}) = n$. و از این رو برای هر عدد طبیعی $n \geqslant ۴$، گروهی چون G با دقیقاً n مرکزساز وجود دارد. حکم مشابه برای $\#Norm(G)$ نیز برقرار است.

لم ۴.۲. فرض کنید $V_{۸n}$ گروهی با نمایش زیر باشد:

$$\langle a, b | a^{۲n} = b^۴ = ۱, ba = a^{-۱} b^{-۱}, b^{-۱} a = a^{-۱} b \rangle$$

که در آن n عددی فرد است، در این صورت داریم:

$$\#Norm(V_{۸n}) + ۱ = \#Cent(V_{۸n}) = ۲n + ۲$$

اثبات. به سادگی می‌توان دید که $Z(V_{۸n}) = \langle b^۲ \rangle$. با محاسباتی خسته‌کننده می‌توان دید

$$C(a^i b) = \{e, b^۲, a^i b, a^i b^۳\}$$

و در این صورت برای $0 \leqslant i \leqslant 2n-1$، تمامی مرکزسازهای $C(a^ib)$ متمایز هستند. حال چون $b^2 = a^k$ و $C(a^ib) = C(a^ib^3)$ لذا تنها مرکزسازهای V_{8n} می‌باشند و داریم $\#Cent(V_8n) = 2n + 2$ چون $\langle a\rangle \trianglelefteq G$ لذا $\#Norm(V_{8n}) = 2n + 1$و حکم ثابت است.

لم ۵.۲. گروه نیم دووجهی SD_{2n} را با نمایش $\langle a, b | a^{2n-1} = b^2 = e, b^{-1}ab = a^{-1+2^{n-2}}\rangle$ در نظر بگیرید. در این صورت $\#Cent(G) = 2^{n-2} + 2$ و $\#Norm(SD_{2n}) = 1 + 3 \cdot 2^{2n-4}$.

اثبات. به سادگی می‌توان دید که $Z(SD_{2n}) = \langle a^{2^{n-2}}\rangle$. چون SD_{2^n} غیرآبلی است لذا $C(a) = \langle a\rangle$ و به طور کلی برای هر $0 < i < 2^{n-1}$، $C(a^i) = \langle a\rangle$. از طرف دیگر $C(a^ib) = \{e, a^{2^{n-2}}, a^ib, a^{i+2^{n-2}}b\}$ و با توجه به مطلب فوق $C(a^ib) = C(a^{i+2^{n-2}}b)$ و از این رو $\#Cent(G) = 2^{n-2} + 2$. چون $\langle a\rangle \trianglelefteq G$ لذا $N(\langle a\rangle) = G$. حال $N(\langle a^ib\rangle)$ را به دست می‌آوریم. اگر i عددی زوج باشد $o(a^ib) = 2$ و از این رو $N(\langle a^ib\rangle) = C(a^ib)$. حال چون $0 \leqslant i < 2^{n-1}$ لذا 2^{n-2} انتخاب برای i وجود دارد و از این رو 2^{n-3} نرمال‌ساز متمایز از G به دست می‌آید. اگر i فرد باشد آنگاه می‌توان دید که $\langle a^ib\rangle = \{e, a^ib, a^{2^{n-2}}, a^{i+2^{n-2}}b\}$. با توجه به مطلب فوق داریم:

$$N(\langle a^ib\rangle) = \{e, a^ib, a^{2^{n-2}}, a^{2^{n-3}}, a^{i+2^{n-2}}b, a^{i+2^{n-3}}b, a^{i\pm 2^{n-3}}\}$$

حال چون برای i، 2^{n-2} انتخاب داریم لذا برای $N(\langle a^ib\rangle)$، 2^{n-4} نرمال‌ساز متمایز خواهیم داشت و لذا $\#Norm(SD_{2n}) = 1 + 3 \cdot 2^{n-4}$.

در مرجع [۵]، کوهن بعد از تعریف گروه‌های nـجمعی، گروه‌های nـجمعی اولیه را تعریف کرده است. در زیر ما در تشابه با کار کوهن، گروه‌های $n-$مرکزساز اولیه را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۶.۲. گروه G را nـمرکزساز اولیه می‌نامیم هرگاه

$$\#Cent(G) = \#Cent(\frac{G}{Z(G)}) = n$$

بنا بر لم ۱.۲، برای هر عدد فرد $n \geqslant 3$، D_{2n} یک گروه $n-2$ـمرکزساز اولیه است. از این رو برای اعداد فرد n، گروه‌های nـمرکزساز اولیه وجود دارند. محاسباتی که با استفاده از نرم‌افزار GAP و برای گروه‌های تا مرتبهٔ ۱۰۰۰ صورت پذیرفته است حدس زیر را مطرح می‌سازد.

حدس: گروه ۸- مرکزساز اولیه وجود ندارد.

در لم ۱.۲ مقدار $\#Cent(G)$ برای گروه دووجهی از مرتبه $2n$ محاسبه شد. در مرجع [۴] این حدس مطرح شده است که تنها گروه‌های متناهی G با شرط $PrCent(G) \geqslant \frac{1}{2}$ عبارتند از گروه کواترنیون از مرتبه ۸ و گروه دووجهی از مرتبه $2p$ که در آن p عددی اول است. ما با استفاده از نرم‌افزار کامپیوتری GAP مقدار $PrCent(G)$ را برای تمامی گروه‌های غیر دووجهی که مرتبه کمتر از ۱۰۰۰ دارند به دست

آورده و چندین مثال نقض برای سؤال فوق یافتیم. در جدول ۱ تمامی مثال‌های نقض سؤال فوق با مرتبه کمتر از ۱۰۰ فهرست شده‌اند، در اینجا $S(m,n)$ معرف $m-$امین گروه حل‌پذیر از مرتبه n است.

جدول ۱: مقادیر $\#Cent(G)$ برای گروه‌های غیر دووجهی G با مرتبه کمتر از ۱۰۰

G	#	G	#
$S(۱۲,۵)$	۶	$S(۱۸,۳)$	۱۱
$S(۱۸,۵)$	۱۱	$S(۲۴,۱۵)$	۱۴
$S(۳۰,۴)$	۱۷	$S(۳۲,۴۲)$	۱۶
$S(۳۲,۴۳)$	۱۶	$S(۳۶,۱۳)$	۲۵
$S(۴۲,۶)$	۲۳	$S(۵۰,۳)$	۲۷
$S(۵۰,۵)$	۲۷	$S(۵۴,۱۳)$	۲۹
$S(۵۴,۱۴)$	۲۹	$S(۵۴,۱۵)$	۲۹
$S(۶۰,۱۱)$	۳۵	$S(۶۶,۴)$	۳۵
$S(۷۰,۴)$	۳۷	$S(۷۲,۴۷)$	۴۷
$S(۷۲,۴۸)$	۳۸	$S(۷۸,۶)$	۴۱
$S(۸۲,۲)$	۴۳	$S(۸۴,۱۴)$	۴۵
$S(۹۰,۹)$	۴۷	$S(۹۰,۱۰)$	۴۷

۳. احکام و قضایا

لم ۱.۳. اگر G گروهی متناهی بوده و $G'\cap Z(G)=۱$ در این صورت

$$\#Cent(G)=\#Cent(\frac{G}{Z(G)})$$

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $C(aZ)=\frac{C(a)}{Z}$. فرض کنیم $yZ\in\frac{C(a)}{Z}$ در این صورت $y\in C(a)$ و لذا $ay=ya$. بنابراین $yZ\in C(aZ)$ یعنی $\frac{C(a)}{Z}\subseteq C(aZ)$. به عکس، فرض‌کنیم $yZ\in C(aZ)$ در این صورت $ayZ=yaZ$ و از این رو $[a,y]\in Z\cap G'=۱$. بنابراین $ay=ya$ یعنی $y\in C(a)$ و از آنجا $yZ\in\frac{C(a)}{Z}$. بنابراین $C(aZ)=\frac{C(a)}{Z}$. حال چون $\#Cent(G)=n$ لذا $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n

وجود دارند که $Cent(G) = \{C(x_1), \ldots, C(x_2)\}$. قرار می‌دهیم $A = \{\frac{C(x_1)}{Z}, \ldots, \frac{C(x_2)}{Z}\}$ و ثابت می‌کنیم $A = Cent(\frac{G}{Z})$. فرض کنیم aZ عضو دلخواهی از $\frac{G}{Z}$ باشد. بنابر مطلب فوق $C(aZ) = \frac{C(a)}{Z}$ و لذا $C(aZ) \in A$. برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم که عناصر A دو به دو متمایز هستند. فرض کنیم

$$\frac{C(x_i)}{Z} = \frac{C(x_j)}{Z}$$

در این صورت $C(x_i) = C(x_j)$ و چون اینها مرکزسازهای متمایز بودند لذا $x_i = x_j$ یعنی $i = j$، بنابراین

$$n = \#Cent(G) = \#Cent(\frac{G}{Z(G)})$$

بنابر قضیه‌ای معروف در نظریهٔ گروه‌های متناهی اگر تمامی زیرگروه‌های سیلوی یک گروه متناهی G آبلی باشند آنگاه $G'Z(G) = 1$. بنابراین اگر چنین گروهی nـمرکزساز باشد، nـمرکزساز اولیه نیز خواهد بود.

در ادامه فرض کنیم G و H دو گروه باشند. به سادگی می‌توان دید

$$\#Cent(G \times H) = \#Cent(G).\#Cent(H)$$

در لم زیر تعمیمی از این حکم را به دست می‌آوریم.

لم ۲.۳. فرض کنید G و H دو گروه متناهی باشند و $A \subseteq Z(G)$ و $B \subseteq Z(H)$ چنان هستند که $\theta : A \to B$ یک ایزومورفیسم است. به فرض $X = \{(x, \theta(x)^{-1}) | x \in A\}$. تعریف می‌کنیم $T = \frac{G \times H}{X}$، یعنی T را حاصلضرب مرکزی G و H درنظر می‌گیریم. اگر $G' \cap A = 1$ آنگاه

$$\#Cent(T) = \#Cent(G).\#Cent(H)$$

اثبات. فرض کنیم $(a, b) \in G \times H$ عضوی دلخواه باشد. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} C_T((a,b)X) &= \{(\alpha,\beta)X | (\alpha,\beta)(a,b)X = (a,b)(\alpha,\beta)X\} \\ &= \{(\alpha,\beta)X | (\alpha^{-1}a^{-1}\alpha a, \beta^{-1}b^{-1}\beta b) \in X\} \\ &= \{(\alpha,\beta)X | (\alpha, a) \in A, \theta((\alpha, a)) = (b, \beta)\} \end{aligned}$$

حال چون $G' \cap A = 1$ از این رو

$$C_T((a,b)X) = \{(\alpha,\beta)X | \alpha \in C_G(a), \beta \in C_H(b)\}$$

حال ادعا می‌کنیم که $C_T((a,b)X) = C_T((r,s)X)$ اگر و تنها اگر $C_G(a) = C_G(r)$ و $C_G(b) = C_G(s)$.

حال برای اثبات لزوم فرض کنیم $y \in C_G(a)$ در این صورت $(y, e)X \in C_T((a,b)X)$ و لذا

$(y,e)X \in C_T((r,s)X$ و بنا بر تعریف $y \in C_G(r)$ یعنی $C_G(a) \subseteq C_G(r)$. مشابهاً $C_G(r) \subseteq C_G(a)$ و لذا $C_G(a) = C_G(r)$. به طور مشابه می‌توان دید که $C_G(b) = C_G(s)$.
برای اثبات عکس حکم فوق فرض کنیم $(\alpha,\beta)X \in C_G(s)$در این صورت $\alpha \in C_G(a) = C_G(r)$ و $\beta \in C_H(b) = C_H(s)$و از این رو $(\alpha,\beta)X \in C_T(r,s)X$. عکس حکم نیز به طور مشابه برقرار می‌باشد.

لم ۳.۳. اگر $G = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} | a,b,c \in GF(q)\}$ در این صورت G گروهی از مرتبهٔ q^3 است و داریم $\#Cent(G) = q+2$ و به علاوه $\frac{G}{Z(G)} \cong F \times F$.

اثبات. برای سادگی قرار می‌دهیم $(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$ در این صورت به سادگی می‌توان دید که $(a,b,c).(x,y,z) = (a+x, b+y+cx, c+z)$ و G گروهی غیر آبلی است. حال مرکزسازهای عناصر G را تعیین می‌کنیم. عضو دلخواه (a,b,c) را در نظر می‌گیریم و چند حالت اختیار می‌کنیم.

الف. $a = c = 0$.

به وضوح $Z(G) = \{(0,b,0) | b \in GF(q)\}$ بنابراین در این حالت، $C_G((0,b,0)) = G$.

ب. $a = 0$ و $c \neq 0$. در این حالت

$$C_G((0,b,c)) = \{(0,y,z) | y,z \in GF(q)\}$$

توجه کنید که مرکزساز به b و c بستگی ندارد.

پ. $a \neq 0$. در این حالت

$$\begin{aligned} C_G(a,b,c) &= \{(x,y,z) | cx = az\} \\ &= \{(x,y,z) | z = a^{-1}cx\} \\ &= \{(x,y,a^{-1}cx) | x,y \in GF(q)\} \end{aligned}$$

در حالتی که $c = 0$

$$C_G((a,b,0)) = \{(x,y,0) | x,y \in GF(q)\}$$

واگر $c \neq 0$

$$C_G((a,b,c)) = \{(x,y,a^{-1}cx) | x,y \in GF(q)$$

حال فرض کنیم $c \neq 0$ و $a \neq 0$. ثابت می‌کنیم

$$C_G((a,b,c)) = C_G((x,y,z)) \longleftrightarrow a = x$$

فرض کنیم طرف اول برقرار باشد چون $az = cx$ و $z = c$ لذا $x = a$. عکس مطلب نیز به سادگی به دست می‌آید. با انتخاب $c = 1$، $C_G((a, b, 1))$ باقی مرکزسازهای G را به دست می‌دهد زیرا $C_G((a, b, c)) = C_G((a_{c-1}, b, 1))$ و با تغییر a، تمام $C_G((a, b, 1))$ها متمایز هستند. همچنین $a = x \longleftrightarrow C_G((a, b, 1)) = C_G((x, y, 1))$ بنابراین

$$\#Cent(G) = q - 1 + 1 + 1 + 1 = q + 2$$

برای اثبات قسمت دوم به سادگی می‌توان دید که نگاشت $\zeta : \frac{G}{z(G)} \to F \times F$، که $\zeta((a, b, c)Z) = (a, c)$ یک یکریختی است.

قضیهٔ ۴.۳. فرض کنید $\#Cent(G) = n$ که در آن $n - 2 = p^2$. نیز فرض کنید $X_2, \dots, X_n$ مرکزسازهای متمایز G باشند چنان که

$$(G : X_2) = \dots = (G : X_n) = n - 2$$

در این صورت اگر حداقل دو تا از X_iها نرمال باشند آنگاه

$$\frac{G}{Z(G)} \cong Z_p \times Z_p \times Z_p \times Z_p$$

اثبات. چون $G = X_2 \cup X_3 \cup \dots \cup X_n$ و $(G : X_2) = (G : X_3) = \dots = (G : X_n) = n - 2$ بنابراین

$$|X_3| + \dots + |X_n| = \frac{1}{n-2}|G| + \frac{1}{n-2}|G| + \ldots + \frac{1}{n-2}|G| = |G|$$

حال بنا بر قضیهٔ ۱ از مقالهٔ کوهن [۵] برای $2 \leqslant i \neq j \leqslant n$، $X_i \cap X_j \subseteq X_2$. با تغییر مکان X_iها نتیجه می‌شود که $Z(G) = X_2 \cap X_3 \cap \dots \cap X_n = X_2 \cap X_3$ و لذا $(G : Z) = P^4$. حال $\frac{G}{Z} = \frac{X_1}{Z}.\frac{X_2}{Z}$ و از این رو با فرض نرمال بودن این دو زیرگروه از $\frac{G}{Z}$ داریم $\frac{G}{Z} \cong \frac{X_1}{Z} \times \frac{X_2}{Z}$. اگر $\frac{X_2}{Z} \ncong \frac{X_1}{Z}$ آنگاه $Z_p \times Z_p \times Z_{p^2}$ یک گروه توانا (Capable) خواهد بود که بنا بر تبصره ۸.۲۰ از مرجع [۶] این تناقض است. پس $\frac{G}{Z(G)}$ با $Z_p \times \ldots \times Z_p$ یا $Z_{p^2} \times Z_{p^2}$ یکریخت است. در صورتی که $\frac{G}{Z(G)} \cong Z_{p^2} \times Z_{p^2}$، $\frac{G}{Z(G)}$، $p^2(p^2 - 1)$ عضو از مرتبهٔ p^2 خواهد داشت که اینها $p(p + 1)$ زیرگروه از مرتبه p^2 به‌دست می‌دهند. فرض کنیم $\frac{A_1}{Z(G)}, \frac{A_2}{Z(G)}, \dots, \frac{A_{p(p+1)}}{Z(G)}$ این زیرگروهها باشند. عناصر $a_i \in A_i - Z(G)$، $1 \leqslant i \leqslant p(p+1)$ را در نظر می‌گیریم. به موجب فرض $A_i = C(a_i)$، $1 \leqslant i \leqslant p(p+1)$ و A_iها مرکزسازهای متمایز G هستند و این متناقض با این مطلب است که تعداد مرکزسازهای G، p^2 است. بنابراین $\frac{G}{Z(G)} \cong Z_p \times Z_p \times Z_p \times Z_p$.

مراجع

[1] A. R. Ashrafi, On the n-sum group, n=6, 7, Southeast Asian Bulletin of mathematics, 2(1998) 111-114.

[2] A. R. Ashrafi, on finite groups with a given number of centralizers, To appear in Algebra Colloquium.

[3] A. R. Ashrafi, Counting the centralizers of some finite groups, To appear in Korean J. of Comput. Appl. Math.

[4] S. M. Belcastro and G. J. Sherman, Counting centralizers in finite groups, Math.Mag. 5(1994) 366-374

[5] J. H. E. Cohn, On n-sum group, Math.Scand 75(1994) 44-58

[6] G. Karpilovsky, Group Representations, Volume 2, North-Holland Mathematical Studies, Vol. 177, Amesterdam-New York-Oxford-Tokyo.

علی‌رضا اشرفی
گروه ریاضی- دانشگاه کاشان
پست الکترونیک:Ashrafi@kashanu.ac.ir
حمیدرضا صفری
گروه ریاضی- دانشگاه کاشان
پست الکترونیک: jahanipu@kashanu.ac.ir