درخت تو گر بار دانش بگیرد
به زیر آوری چرخ نیلوفری را

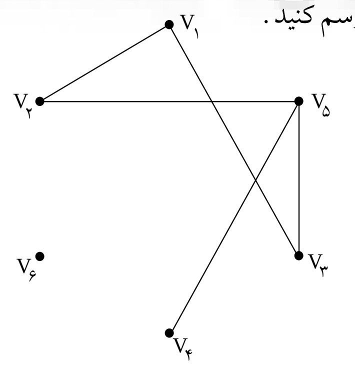
درخت چیست؟

برای دانش‌آموزان دوره‌ی پیش‌دانشگاهی

● حمیدرضا امیری

هر مجموعه‌ی n عضوی مانند V، و هر مجموعه شامل تعدادی یا هیچ یا همه‌ی زیرمجموعه‌های دوعضوی از V مانند E، گرافی چون $G=(V,E)$ را تعریف می‌کنند که این نمودار یا گراف، شامل تعدادی نقطه یا رأس، به تعداد اعضای V و تعدادی خط (یال) بین رئوس، به تعداد اعضای E می‌باشد؛ به طوری که بین دو رأس V_i و V_j یال رسم می‌شود، هرگاه $\{V_i, V_j\} \in E$، که در این حالت دو رأس مذکور را **رأس‌های مجاور** می‌نامند (می‌توان برای راحتی به جای $\{v_i, v_j\}$ نوشت: V_iV_j).

مثال: اگر $V=\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$ و $E=\{V_1V_2, V_1V_3, V_2V_5, V_3V_5, V_4V_5\}$ در این صورت گراف $G=(V,E)$ را رسم کنید.



اصطلاحات و قراردادهای مقدماتی

در هر گراف، تعداد رأس‌ها را **مرتبه‌ی** گراف و تعداد یال‌ها را **اندازه‌ی** گراف می‌نامند و به ترتیب با p و q نمایش می‌دهند. هم‌چنین، تعداد یال‌هایی که از رأس a عبور می‌کنند، درجه‌ی آن رأس نامیده و با (dega) نشان داده می‌شود. اگر درجه‌ی یک رأس عددی زوج باشد، آن رأس را **رأس زوج** و اگر فرد باشد، آن را **رأس فرد** می‌نامیم. چنان‌چه از یک رأس یالی عبور نکند، آن رأس را **ایزوله** می‌نامند. بزرگ‌ترین درجه‌ی یک رأس در یک گراف، ماکزیمم درجه‌ی گراف، و کوچک‌ترین درجه، می‌نیمم درجه‌ی گراف نامیده می‌شود. این دو عدد را به ترتیب با Δ و δ نشان می‌دهند.

در مثال قبل، گرافی رسم شده از مرتبه‌ی ۶ و با اندازه‌ی ۴ (۶ رأس و ۴ یال) که رأس V_6 ایزوله است و داریم:

$\deg V_6 = 0, \deg V_1 = 2, \deg V_2 = 2, \deg V_3 = 2$

$\deg V_4 = 1, \deg V_5 = 3$

رأس‌های V_6 و V_1 و V_2 و V_3 همگی زوج، و رأس‌های V_4 و V_5 فرد هستند. در این گراف، همواره $\Delta = 3$ و $\delta = 0$ (ماکزیمم و می‌نیمم درجه).

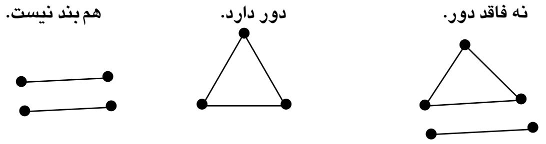
حال که یادآوری اجمالی روی مقدمات و تعاریف در

گراف‌های ساده انجام شد، آماده‌ایم تا به سراغ دسته‌ی خاصی از گراف‌ها به نام «درخت» برویم. ولی قبل از آن توصیه می‌کنم، مفاهیمی چون مسیر، دور، هم‌بندی گراف‌ها، گراف کامل، گراف‌های r-منتظم و گراف تهی را یک بار مطالعه کنید، تا آماده باشیم برای کشیدن درخت!

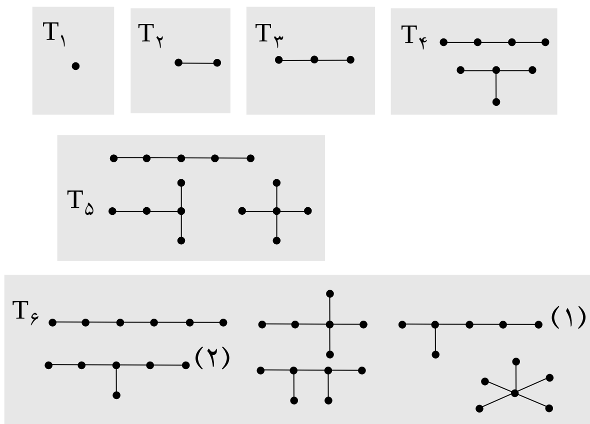
تعریف درخت

هر گراف هم‌بند که دور نداشته باشد، «درخت» نامیده می‌شود. پس در واقع درخت‌ها دسته‌ی خاصی از گراف‌های هم‌بند هستند که ویژگی‌های خاص خودشان را دارند. مهم‌ترین ویژگی آن‌ها، فاقد دور بودن است. از تعریف درخت چنین برمی‌آید که اگر گرافی هم‌بند نباشد یا دور داشته باشد، درخت نیست.

گراف‌های زیر درخت نیستند:



درخت از مرتبه‌ی P را با نماد T_p نشان می‌دهیم که درخت‌های T_1 و T_2 و T_3 درخت‌هایی منحصربه‌فرد هستند و از T_3 به بالا، یعنی T_4 و T_5 و...، منحصربه‌فرد نیستند. به درخت‌های زیر توجه کنید:



توجه دارید که در T_6، درخت‌های شماره‌ی (۱) و (۲) با هم فرق اساسی دارند. اگرچه تعداد رأس‌های درجه‌ی ۳، ۲ و ۱ در آن‌ها برابر است، ولی رأس درجه‌ی ۳، در (۱) با دو رأس درجه‌ی ۱ و یک رأس درجه‌ی ۲ مجاور است و در (۲) با دو رأس درجه‌ی ۲ و یک رأس درجه‌ی ۱ مجاورت دارد.

اگر اطلاعاتی راجع به هیدروکربن‌ها در شیمی آلی داشته باشید، شباهت‌های بسیاری را بین ساختمان مولکولی آن‌ها و درخت‌ها مشاهده می‌کنید. در واقع، اگر هر هیدروژن و کربن را در حکم یک رأس و پیوند مولکولی بین آن‌ها را یال تصور کنیم، هر هیدروکربن یک درخت است که در این صورت، از تمام قضایا و نکته‌هایی که در گراف‌ها بیان و اثبات می‌شود، می‌توان در این بخش از علم شیمی استفاده کرد.

نکته‌ی بسیار مهمی که از تعریف درخت می‌توان دریافت این است که چون درخت، گرافی هم‌بند است که دور ندارد، پس می‌توان گفت در بین گراف‌های هم‌بند از مرتبه‌ی P، درخت T_p کمترین تعداد یال را دارد و البته K_p (گراف کامل) دارای بیشترین یال ممکن است. در واقع، اگر حتی یک یال به یک درخت اضافه شود (بدون اضافه کردن رأس)، در آن دور ایجاد می‌شود و دیگر درخت نیست. و نیز اگر یک یال از هر جای آن حذف کنیم، گرافی ناهم‌بند پدید می‌آید که باز هم درخت نیست. همین خاصیت درخت‌ها ما را به یک شرط لازم برای هم‌بندی می‌رساند. بدین صورت که: «در هر گراف از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q، اگر $q < p - 1$ آن‌گاه این گراف همواره **ناهم‌بند** است.»

به بیان دیگر، اگر گراف G هم‌بند باشد، در این صورت حداقل مقدار برای تعداد یال‌های آن $q = p - 1$ است. (رابطه‌ی $p = q + 1$ یا $q = p - 1$ بین مرتبه و اندازه، در تمام درخت‌ها برقرار است که به صورت قضیه‌ای در درخت‌ها بیان و اثبات می‌شود.) بین درخت‌های از مرتبه‌ی $p \geq 3$، همواره برای هر $p \geq 3$ یک درخت وجود دارد که به صورت یک خط مستقیم است یا می‌توان آن را به یک خط مستقیم تبدیل کرد. برای مثال، برای $p = 5$ و $p = 4$ در شکل‌های قبل ملاحظه کردید که درخت‌های زیر:

ویژگی خط مستقیم را دارند که ما از این به بعد به چنین درخت‌هایی، «درخت ساده» می‌گوییم.

واضح است که در هر درخت ساده از مرتبه‌ی p، همواره $\Delta = 2$ (ماکزیمم درجه‌ی درخت ۲ است) و چنین درخت‌هایی دارای ۲ رأس از درجه‌ی ۱ و $(p - 2)$ رأس از درجه ۲ هستند. و برعکس اگر در یک درخت از مرتبه‌ی p داشته باشیم: $\Delta = 2$، چنین درختی حتماً درخت ساده خواهد بود! بنابراین می‌توان گفت: «شرط لازم و کافی برای آن‌که درخت T از مرتبه‌ی p درختی **ساده** باشد، آن است که: $\Delta = 2$.»

حال به بیان و در مواردی اثبات قضیه‌های مقدماتی در درخت‌ها می‌پردازیم و سپس کاربردهای این قضایا را در حل آزمون‌ها و آزمون‌ها با هم بررسی می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱ : در هر درخت از مرتبه‌ی p، همواره بین هر دو رأس دقیقاً یک مسیر وجود دارد (اثبات این قضیه در کتاب درسیِ ریاضیات گسسته وجود دارد) .

نتیجه از قضیه‌ی۱ : تعداد کل مسیرهای متمایز در هر درخت از مرتبه‌ی p، برابر است با : $\binom{p}{۲}$. و می‌دانیم :

$$\binom{p}{۲}=\frac{p(p-۱)}{۲}$$

اثبات : مطابق قضیه‌ی ۱ ، بین هر دو رأس که بتوان از میان p رأس انتخاب کرد، فقط و فقط یک مسیر منحصر به فرد قابل تعریف است . لذا تعداد مسیرها برابر است با تعداد انتخاب‌های ۲ رأس از بین p رأس ؛ یعنی : $\binom{p}{۲}$.

آزمون : در درخت T از مرتبه‌ی p، ۳۶ مسیر متمایز بین رأس‌ها قابل تعریف است . در این درخت در حالت ساده چند رأس درجه‌ی ۲ وجود دارد؟

الف) ۹ ب) ۷ ج) ۶ د) ۸

حل : با توجه به نتیجه‌ی قبل داریم :

$$\binom{p}{۲}=\frac{p(p-۱)}{۲}=۳۶\Rightarrow p(p-۱)=۷۲\Rightarrow p=۹$$

(حاصل ضرب دو عدد صحیح و متوالی برابر با ۷۲ است ؛ یعنی : ۸×۹ .)

در درخت ساده‌ی $T_۹$ ، تعداد رأس‌های درجه‌ی ۲ برابر است با : ۷=۲−۹ . پس گزینه‌ی ب صحیح است .

قضیه‌ی ۲ : اگر در یک درخت داشته باشیم: $\Delta = k$ ، آن‌گاه این درخت حداقل k رأس از درجه‌ی ۱ دارد .

اثبات : می‌دانیم در هر درخت، هر یال که از یک رأس عبور کند، در نهایت حداقل به یک رأس درجه‌ی ۱ ختم خواهد شد . زیرا دو سر یال‌های از درجه‌ی ۱ در درخت‌ها نمی‌توانند به هم وصل باشند(چون دور ایجاد می‌شود که با تعریف درخت تناقض دارد) . لذا اگر $\Delta = k$ فرض شود، پس حداقل یک رأس در گراف وجود دارد که درجه‌ی آن k است و بنابراین k یال از آن رأس عبور می‌کند . چون هر یال حداقل به یک رأس درجه‌ی ۱ ختم می‌شود . پس حداقل k رأس از درجه‌ی ۱ در چنین درختی وجود خواهد داشت .

قضیه‌ی ۳ : در هر درخت از مرتبه‌ی $p \geq ۲$ ، حداقل دو رأس از درجه‌ی ۱ وجود دارد .

اثبات : حکم قضیه برای درخت از مرتبه‌ی ۲ برقرار است ؛ زیرا $T_۲$ ، دقیقاً دو رأس از درجه‌ی ۱ دارد . حال برای $p \geq ۳$ حکم را در دو حالت ثابت می‌کنیم :

I) اگر $\Delta = ۲$ ، طبق قضایای قبل درخت ساده است و دقیقاً دو رأس از درجه‌ی ۱ دارد .

II) اگر $\Delta \geq ۳$ طبق قضیه‌ی۲ ، درخت حداقل سه رأس از درجه‌ی۱ و درنتیجه حداقل دو رأس از درجه‌ی ۱ خواهد داشت .

قضیه‌ی ۴ : در هر درخت از مرتبه‌ی p و با اندازه‌ی q داریم : $p = q + ۱$. (اثبات این قضیه در کتاب درسی ریاضیات گسسته وجود دارد .)

نتیجه‌ی مهم : در هر درخت، همواره مجموع مرتبه و اندازه‌ی عددی فرد است .

اثبات) روش اول : چون $p = q + ۱$ ، پس : $p - q = ۱$. بنابراین p و q می‌باید دو عدد نامنفی و متوالی باشند . و می‌دانیم، از هر دو عدد صحیح و متوالی، همواره یکی زوج و دیگری فرد است و مجموع یک عدد زوج با یک عدد فرد، همواره فرد است .

روش دوم:

$$p=q+۱\Rightarrow p+q=q+۱+q\Rightarrow p+q=\underbrace{۲q+۱}_{\text{فرد}}$$

قضیه‌ی ۵ : در هر درخت از مرتبه‌ی p و با اندازه‌ی q، همواره تعداد رأس‌های درجه۱ از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید :

$$\text{تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱} = ۲ + \sum_{d_i\geq ۳}(d_i-۲)$$

اثبات : فرض کنیم، x تعداد رأس‌های درجه‌ی۱ در گراف T از مرتبه‌ی p و با اندازه‌ی q باشد . در این صورت با توجه به قضیه‌ی اصلی در گراف‌ها (مجموع درجات رئوس دو برابر تعداد یال‌هاست) داریم :

$$\sum_{i=۱}^{p}d_i=۲q\xrightarrow{q=p-۱}\sum_{i=۱}^{p}d_i=۲p-۲\Rightarrow\sum_{i=۱}^{p}d_i-۲p=-۲$$

$$\xrightarrow{\sum_{i=۱}^{p}۲=۲p}\sum_{i=۱}^{p}d_i-\sum_{i=۱}^{p}۲=-۲\Rightarrow\sum_{i=۱}^{p}(d_i-۲)=-۲$$

$$\Rightarrow\sum_{d_i=۱}(d_i-۲)+\sum_{d_i=۲}(d_i-۲)+\sum_{d_i\geq ۳}(d_i-۲)=-۲$$

$$\Rightarrow -x+\circ+\sum_{d_i\geq ۳}(d_i-۲)=-۲\Rightarrow x=\sum_{d_i\geq ۳}(d_i-۲)+۲$$

آزمون : اگر $S: ۴,۴,x,۳,y,۲,۱,۱,۱,۱,۱,۱,۱,۱,۱$ دنباله‌ی

درجه‌ی رئوس یک درخت باشد، در این صورت (x^2+y^2) کدام است؟

الف) ۱۷ ب) ۱۳ ج) ۲۵ د) ۱۶

حل: با توجه به رابطه‌ی $p=q+1$ در هر درخت، چون در این درخت تعداد رئوس $p=14$ است، پس $q=13$ و $2q=26$. در صورتی که مجموع درجات رئوس یا مجموع جملات دنباله عبارت است از:

$$5+4+x+3+y+2+1+1+\dots+1=26\Rightarrow x+y=5$$

و با توجه به نزولی بودن دنباله و این که تعداد رأس‌های فرد باید زوج باشد، یکی از دو عدد x و y باید فرد باشد. لذا تنها حالت ممکن $x=3$ و $y=2$ حاصل می‌شود که در این صورت $x^2+y^2=13$ پس گزینه‌ی ب صحیح است.

آزمون: در یک درخت، چهار رأس درجه‌ی ۳ و دو رأس درجه‌ی ۴ و سه رأس درجه‌ی ۵ موجود است و $\Delta=5$، این گراف چند رأس از درجه‌ی ۱ دارد؟

الف) ۱۴ ب) ۱۳ ج) ۱۵ د) ۱۶

حل: گزینه‌ی د صحیح است، زیرا:

$$\text{تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱}=2+\sum_{d_i\ge 3}(d_i-2)$$

$$=2+(3-2)+(3-2)+(3-2)+(3-2)+(4-2)+(4-2)$$
$$+(5-2)+(5-2)+(5-2)=2+4+4+6=16$$

آزمون: در یک درخت از مرتبه‌ی p و با اندازه‌ی q داریم: $2q-p=6$. در این درخت حاصل $(p+q)$ کدام است؟

الف) ۱۳ ب) ۱۵ ج) ۱۶ د) ۱۸

حل: گزینه‌ی ب صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{cases}2q-p=6\\ p-q=1\end{cases}\qquad q=7\Rightarrow p=8\Rightarrow p+q=15$$

(توجه دارید که گزینه‌های ج و د اعداد زوج هستند و مجموع مرتبه و اندازه هیچ‌گاه نمی‌تواند زوج باشد.)

آزمون: اگر در درخت T، همه‌ی رأس‌ها فرد باشند، کدام گزینه درست است؟

الف) اندازه‌ی T فرد است.

ب) اندازه‌ی T زوج است.

ج) T حداقل سه رأس درجه‌ی ۱ دارد.

د) درخت T ساده است.

حل: گزینه‌ی الف صحیح است، زیرا تعداد رأس‌های فرد باید زوج باشد. طبق فرض، همه‌ی رأس‌ها فرد هستند و اگر p تعداد آن‌ها باشد، باید p زوج باشد و چون p و q متوالی هستند، پس q فرد است.

آزمون: میانگین درجات رئوس یک درخت ۱/۸ است. در این درخت مجموع مرتبه و اندازه کدام است؟

الف) ۱۷ ب) ۱۹ ج) ۲۱ د) ۱۳

حل: میانگین درجات رئوس عبارت است از مجموع درجات رئوس تقسیم بر تعداد رئوس؛ یعنی:

$$\text{میانگین درجات رئوس}=\frac{2q}{p}$$

پس داریم:

$$\frac{2q}{p}=1/8\Rightarrow\frac{2q}{q+1}=1/8\Rightarrow 2q=1/8q+1/8$$

$$\Rightarrow 0/2q=1/8\Rightarrow q=\frac{1/8}{0/2}=9\Rightarrow p=10\Rightarrow p+q=19$$

پس گزینه‌ی ب صحیح است.

آزمون: در یک درخت، درجه‌ی هر رأس ۱ یا ۲ است و تعداد رئوس درجه‌ی۲، سه برابر تعداد رئوس درجه‌ی ۱ است. مجموع درجات رئوس زوج در این گراف کدام است؟

الف) ۱۰ ب) ۱۲ ج) ۱۴ د) ۱۶

حل: گزینه‌ی ب صحیح است؛ زیرا فرض می‌کنیم x و y به ترتیب تعداد رأس‌های درجه‌ی ۱ و درجه‌ی ۲ باشند. در این صورت، طبق فرض داریم: $y=3x$ و می‌توان نوشت:

$$\text{تعداد رئوس}=x+y=p$$

$$\text{مجموع درجات رئوس}=x+2y=2q=2(p-1)=2p-2$$

$$\Rightarrow {-2}\begin{cases}x+y=p\\ x+2y=2p-2\end{cases}\Rightarrow -x=-2\Rightarrow x=2\xrightarrow{3x=y}y=6$$

پس این درخت شش رأس از درجه‌ی ۲ (رأس زوج) دارد و مجموع درجات رئوس زوج برابر است با: ۱۲=۲×۶.

آزمون: اگر به گرافی هم‌بند، ۴ یال اضافه شود، گراف k_5 حاصل می‌شود. از این گراف چند یال حذف کنیم تا به درختی از مرتبه‌ی ۵، یعنی T_5 تبدیل شود؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴

حل: گزینه‌ی ب صحیح است؛ زیرا فرض کنیم، گراف موردنظر G باشد و اندازه‌ی G، همان q باشد. پس طبق فرض:

$$q+4=\frac{5\times 4}{2}\Rightarrow q=10-4=6$$

و می‌دانیم، درخت از مرتبه‌ی ۵ دارای ۴ یال است، پس باید از ۶ یال، ۲ یال کم کنیم تا به درخت مرتبه‌ی ۵ تبدیل شود.