برای دانش‌آموزان سال سوم پیش‌دانشگاهی

بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم

قسمت ۱

● محمدهاشم رستمی

معادله‌ی درجه‌ی سوم به صورت کلی زیر است.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$$

اگر ضریب‌های b، c و d نیز همگی مخالف صفر باشند، معادله‌ی درجه‌ی سوم را کامل می‌نامند؛ مانند معادله‌های زیر:

$$2x^3 - 5x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$x^3 + 2x^2 + 5x + 6 = 0$$

اما اگر یکی از ضریب‌های b یا c یا d مساوی صفر باشد، معادله‌ی درجه‌ی سوم را ناقص می‌نامند؛ مانند معادله‌های زیر:

الف) $d = 0$ ، $ax^3 + bx^2 + cx = 0$

ب) $c = 0$ ، $ax^3 + bx^2 + d = 0$

پ) $b = 0$ ، $ax^3 + cx + d = 0$

ت) $b = d = 0$ ، $ax^3 + cx = 0$

ث) $c = d = 0$ ، $ax^3 + bx^2 = 0$

ج) $b = c = d = 0$ ، $ax^3 = 0$

حل این معادله‌ها در حالت‌های (الف)، (ت)، (ث) و (ج) ساده است، زیرا با فاکتورگیری از عامل مشترک در حالت‌های (الف)، (ت) و (ث)، معادله‌ی درجه‌ی ۳ به حاصل ضرب یک معادله‌ی درجه‌ی اول و یک معادله‌ی درجه‌ی دوم تبدیل می‌شود که با حل آن‌ها، جواب‌های معادله به‌دست می‌آید و در حالت (ج)، نیز جواب معادله $x = 0$ است.

اما در حالت‌های (ب) و (پ)، حل معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص، مانند حالت‌های دیگر نیست و ما اینک در جست‌وجوی راه‌حل آن‌ها هستیم. یعنی، مسئله‌ای که ما با آن سروکار داریم، حل معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل و یا حل معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص به صورت‌های زیر است:

$ax^3 + bx^2 + d = 0$ یا $ax^3 + cx + d = 0$

با توجه به $a \neq 0$ ، با تقسیم کردن دو طرف معادله‌های (ب) و (پ) بر a داریم:

(ب´) $$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{d}{a} = 0$$

(پ´) $$x^3 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

معادله‌ی (ب´) با فرض $\frac{b}{a} = A$ و $\frac{d}{a} = B$ به صورت $x^3 + Ax^2 + B = 0$ ، و معادله‌ی (پ´) با فرض $\frac{c}{a} = p$ و $\frac{d}{a} = q$ به صورت $x^3 + px + q = 0$ درمی‌آید. نکته‌ی جالب توجه آن است که با تبدیل $x = \frac{1}{X}$ در معادله‌ی (ب´)، این معادله به صورت معادله‌ی (پ´) درمی‌آید. توجه کنید:

$$x=\frac{1}{X},\ x^3+Ax^2+B=0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{X}\right)^3+A\left(\frac{1}{X}\right)^2+B=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{X^3}+\frac{A}{X^2}+\frac{B}{1}=0\Rightarrow \frac{1+AX+BX^3}{X^3}=0\Rightarrow$$

$$BX^3+AX+1=0\Rightarrow X^3+\frac{A}{B}X+\frac{1}{B}=0$$

$$\Rightarrow X^3+PX+q=0$$

اما نکته‌ی جالب‌تر آن است که با تبدیل $x=X-\frac{b}{3a}$ ، معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل $ax^3+bx^2+cx+d=0$ نیز به معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص $X^3+PX+q=0$ تبدیل می‌شود. (چرا؟) توجه کنید:

$ax^3+bx+cx+d=0$ و $x=X-\frac{b}{3a}$

$$\Rightarrow a\left(X-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(X-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(X-\frac{b}{3a}\right)+d=0$$

$$\Rightarrow a\left(X^3-3X^2\times\frac{b}{3a}+3\left(\frac{b}{3a}\right)^2X-\frac{b^3}{27a^3}\right)$$

$$+b\left(X^2+\frac{b^2}{9a^2}-\frac{2b}{3a}X\right)+cX-\frac{bc}{3a}+d=0$$

$$\Rightarrow aX^3-bX^2+\frac{b^2}{3a}X-\frac{b^3}{27a^2}+bX^2+\frac{b^3}{9a^2}$$

$$-\frac{2b^2}{3a}X+cX-\frac{bc}{3a}+d=0$$

$$\Rightarrow aX^3+\left(\frac{-b^2}{3a}+c\right)X+\left(\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d\right)=0$$

$$\Rightarrow X^3+\left(-\frac{b^2}{3a^2}+\frac{c}{a}\right)X+\left(\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}\right)=0 \quad (*)$$

با فرض $p=\frac{-b^2}{3a^2}+\frac{c}{a}$ و $q=\frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a}$ خواهیم داشت:

$$X^3+pX+q=0$$

مثال. معادله‌های درجه‌ی سوم زیر را به صورت معادله‌ی درجه‌ی سوم $X^3+PX+q=0$ درآورید.

الف) $2x^3-12x^2+5x-7=0$

ب) $3x^3+9x^2+5=0$

حل: داریم:

الف. در این معادله، $a=2$ ، $b=-12$ ، $c=5$ و $d=-7$ است و داریم:

$$x=X-\frac{b}{3a}\Rightarrow x=X-\frac{-12}{3(2)}=X+2\Rightarrow x=X+2$$

پس در معادله‌ی داده شده x را به $X+2$ تبدیل می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$2(X+2)^3-12(X+2)^2+5(X+2)-7=0$$
$$\Rightarrow 2(X^3+6X^2+12X+8)-12(X^2+4X+4)$$
$$+5X+10-7=0$$
$$\Rightarrow 2X^3+12X^2+24X+16-12X^2-48X$$
$$-48+5X+10-7=0$$
$$\Rightarrow 2X^3-19X-29=0$$

طرفین این معادله را بر ضریب X^3 یعنی بر ۲ تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$X^3-\frac{19}{2}X-\frac{29}{2}=0$$

و این معادله به صورت $X^3+pX+q=0$ است $\left(p=-\frac{19}{2}\quad q=\frac{-29}{2}\right)$.

نکته: می‌توانستیم در دستور (*) به جای a، b، c و d مقدار قرار دهیم تا معادله‌ی بالا به دست آید. اما حفظ کردن دستور (*) مشکل است، پس ترجیح دارد، به روش مستقیم عمل کنیم.

ب) در معادله‌ی درجه‌ی سوم $3x^3+9x^2+5=0$ ، داریم:

$a=3$ و $b=9$ و $c=0$ و $d=5$

$$x=X-\frac{b}{3a}\Rightarrow x=X-\frac{9}{9}=X-1\Rightarrow x=X-1$$

$$x=X-1\xrightarrow{\text{در معادله ی داده شده}}3(X-1)^3+9(X-1)^2+5=0$$
$$\Rightarrow 3(X^3-3X^2+3X-1)+9(X^2-2X+1)+5=0$$

$$\Rightarrow ۳X^۳ - ۹X^۲ + ۹X - ۳ + ۹X^۲ - ۱۸X + ۹ + ۵ = ۰$$

$$۳X^۳ - ۹X + ۱۱ = ۰$$

دو طرف این معادله را بر ضریب $X^۳$ یعنی بر ۳ تقسیم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$X^۳ - ۳X + \frac{۱۱}{۳} = ۰$$

و این معادله به صورت $X^۳ + PX + q = ۰$ است $(q = \frac{۱۱}{۳}\ ,\ P = -۳)$.

نکته‌ی۱. برای تبدیل معادله‌ی $۳x^۳ + ۹x^۲ + ۵ = ۰$ به معادله‌ی درجه‌ی سوم به‌صورت $X^۳ + PX + q = ۰$، می‌توانیم از تغییر متغیر $x = \frac{۱}{X}$ استفاده کنیم. توجه کنید:

$$۳x^۳ + ۹x^۲ + ۵ = ۰, x = \frac{۱}{X} \Rightarrow ۳(\frac{۱}{X})^۳ + ۹(\frac{۱}{X})^۲ + ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{X^۳} + \frac{۹}{X^۲} + ۵ = ۰ \Rightarrow \frac{۳ + ۹X + ۵X^۳}{X^۳} = ۰$$

$$\Rightarrow ۳ + ۹X + ۵X^۳ = ۰ \Rightarrow ۵X^۳ + ۹X + ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow X^۳ + \frac{۹}{۵}X + \frac{۳}{۵} = ۰$$

و این معادله به صورت $X^۳ + pX + q = ۰$ است.

نکته‌ی۲. چون در روش اول $x = X - ۱$ و در روش دوم $x = \frac{۱}{X}$ اختیار شده است، پس معادله‌های ناقص به‌دست آمده در دو روش بالا، از نظر ضرایب عددی، متفاوت خواهند بود؛ یعنی نباید این تصور را داشته باشیم که در هر دو راه‌حل، به یک معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص به صورت $X^۳ + pX + q = ۰$ و با ضرایب یکسان می‌رسیم.

نکته‌ی۳. به طور کلی، معادله‌ی درجه‌ی سوم $ax^۳ + bx^۲ + d = ۰$، با تغییر متغیر $x = \frac{۱}{X}$، به معادله‌ی درجه‌ی سوم به صورت $X^۳ + pX + q = ۰$ تبدیل می‌شود.

نکته‌ی مهم۱. با توجه به مطالب بیان شده، هر معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل را می‌توان با استفاده از تغییر متغیر، به معادله‌ی درجه‌ی سوم به صورت $X^۳ + pX + q = ۰$ تبدیل کرد. بنابراین، برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل $ax^۳ + bx^۲ + cx + d = ۰$ کافی است در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم ناقص $X^۳ + pX + q = ۰$ بحث کنیم.

برای این کار، معادله‌ی بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$X^۳ + pX + q = ۰ \Rightarrow X^۳ + pX = -q$$

اما این معادله، معادله‌ی تقاطع منحنی تابع $y = X^۳ + pX$ و خط $y = -q$ است.

$$\begin{cases} y = X^۳ + pX \\ y = -q \end{cases}$$

بنابراین، برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم $X^۳ + pX + q = ۰$ کافی است، طول‌های نقطه‌های برخورد منحنی $y = X^۳ + pX$ و خط $y = -q$ را تعیین کنیم. برای این کار، این منحنی و خط را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم و به ازای مقدارهای متفاوت p و q، تعداد نقطه‌های برخورد آن‌ها و اندازه‌ی جبری طول این نقطه‌های برخورد را تعیین می‌کنیم.

نکته‌ی مهم۲. هرگاه معادله‌ی درجه‌ی سوم داده شده، خود به صورت $x^۳ + px + q = ۰$ باشد، برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های آن نیازی به تغییر متغیر نیست و این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x^۳ + px = -q$$

این معادله، معادله‌ی تقاطع منحنی تابع $y = x^۳ + px$ و خط راست $y = -q$ است. بنابراین، برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^۳ + px + q = ۰$، منحنی تابع $y = x^۳ + px$ و خط $y = -q$ را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم و تعداد نقطه‌های برخورد آن‌ها و همچنین اندازه‌ی جبری طول نقطه‌های برخوردشان را به ازای مقدارهای متفاوت p و q مشخص می‌سازیم.

بدیهی است که به تعداد نقطه‌های برخورد منحنی تابع $y = x^۳ + px$ و خط $y = -q$، معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^۳ + px + q = ۰$ دارای جواب است و علامت ریشه‌ها را نیز با توجه به محل نقطه‌های تقاطع می‌توان تعیین کرد. برای رسم نمودار تابع $y = x^۳ + px$، مشتق این تابع را محاسبه می‌کنیم و مساوی صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$y = x^۳ + px \Rightarrow y' = ۳x^۲ + p\ ,\ y' = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ + p = ۰$$

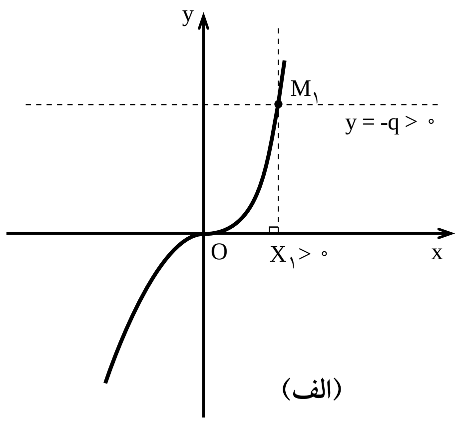
دو حالت وجود دارد:

حالت اول: $p > 0$ است. در این صورت، مشتق ریشه ندارد، زیرا:

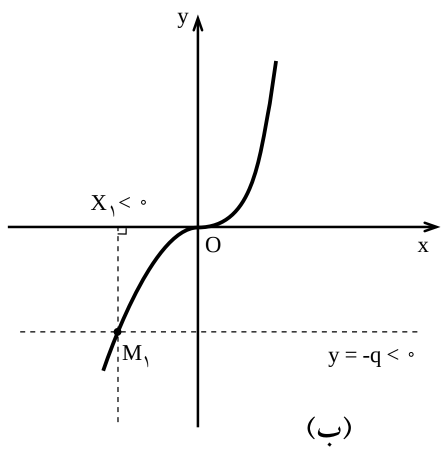
$$3x^2 + p = 0 \Rightarrow 3x^2 = -p \Rightarrow x^2 = \frac{-p}{3} < 0$$

بنابراین، جهت تغییرات تابع در این حالت ثابت است که چون ضریب x^2 در مشتق مثبت است، مشتق تابع همواره مثبت و نمایش تغییرات آن همواره صعودی است. جدول تغییرات این تابع در این حالت به صورت زیر و نمودار آن به صورت شکل زیر است.

x	$-\infty$				$+\infty$
y′		+	+	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$



(الف)



(ب)

خط $y = -q$، نمودار تغییرات تابع $y = x^3 + px$ را تنها در یک نقطه قطع می‌کند که:

۱. اگر $-q > 0$، یعنی $q < 0$ باشد، طول نقطه‌ی تلاقی مثبت است. لذا معادله‌ی $x^3 + px + q = 0$ تنها یک ریشه‌ی مثبت دارد (شکل الف).

۲. اگر $-q < 0$، یعنی $q > 0$ باشد، طول نقطه‌ی تلاقی منفی است. لذا معادله‌ی $x^3 + px + q = 0$، تنها یک ریشه‌ی منفی دارد (شکل ب).

پس در حالت اول، یعنی وقتی $p > 0$ است، معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + px + q = 0$ تنها یک ریشه دارد که علامت آن مخالف علامت q است و اندازه‌ی این ریشه از دستور زیر که به دستور «کاردان» معروف است به‌دست می‌آید:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

حالت دوم: $p < 0$ است. در این حالت مشتق دو ریشه دارد:

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + p = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-p}{3} > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

چون دو ریشه متمایزند، پس تابع دو نقطه‌ی ماکزیمم و می‌نیمم دارد. برای تعیین اندازه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم تابع باید ریشه‌های مشتق، یعنی $x = \sqrt{\frac{-p}{3}}$ و $x = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ را در تابع قرار دهیم. داریم:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}} \xrightarrow{\text{در تابع}} y_1 = \left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$$

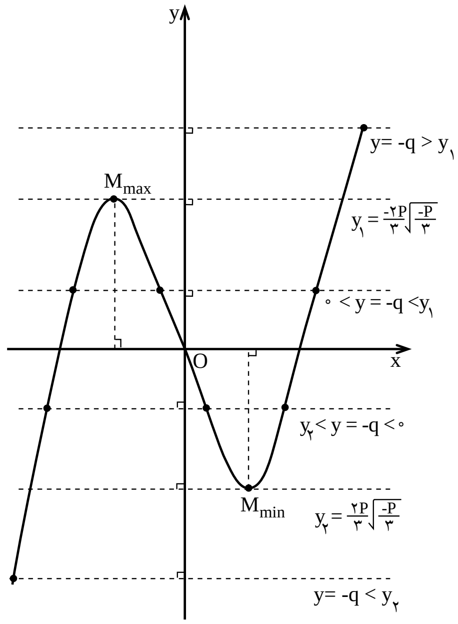
$$\Rightarrow y_1 = \frac{+p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} - p\sqrt{\frac{-p}{3}} = \frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

$$x_2 = +\sqrt{\frac{-p}{3}} \xrightarrow{\text{در تابع}} y_2 = \left(+\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\left(+\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{-p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} + p\sqrt{\frac{-p}{3}} = +\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$$

جدول تغییرات تابع در این حالت به صورت زیر است:

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$\sqrt{-\frac{p}{3}}$		$+\infty$
y′		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$	↘	$\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$	↗	$+\infty$
			max		min		



نمودار تغییرات تابع در این حالت، به صورت شکل بالا است. اکنون اگر خط $y=-q$ را در همین دستگاه محورهای مختصات رسم کنیم، وقتی q در بازه‌ی $(-\infty,+\infty)$ تغییر کند، حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

۱. اگر $\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} < y=-q < \frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$، یا $q^2 < \frac{-4p^3}{27}$ یا $4p^3+27q^2 < 0$ باشد، خط $y=-q$، نمودار تغییرات تابع $y=x^3+px$ را در سه نقطه قطع می‌کند؛ یعنی معادله‌ی $x^3+px+q=0$ سه ریشه دارد. در این صورت، اگر $-q>0$، یعنی $q<0$ باشد، معادله دارای یک ریشه‌ی منفی و دو ریشه‌ی مثبت است. و اگر $-q<0$، یعنی $q>0$ باشد، یک ریشه‌ی مثبت و دو ریشه‌ی منفی خواهد داشت.

۲. اگر خط $y=-q$ بر نمودار تغییرات تابع مماس باشد، یعنی $-q=\frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$، و یا $-q=\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$، یعنی $q^2=\frac{-4p^3}{27}$ و یا $4p^3+27q^2=0$ باشد، معادله‌ی $x^3+px+q=0$ یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف دارد که:

● اگر $-q>0$، یعنی $q<0$ باشد، ریشه‌ی ساده منفی و ریشه‌ی مضاعف مثبت است.

● و اگر $-q<0$، یعنی $q>0$ باشد، ریشه‌ی ساده مثبت و ریشه‌ی مضاعف منفی است.

در این حالت، ریشه‌ی ساده و ریشه‌ی مضاعف از دستورهای زیر به دست می‌آیند:

ریشه‌ی ساده $= x_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$

ریشه‌ی مضاعف $= x_2 = x_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$

۳. اگر q- خارج بازه‌ی $[y_2,y_1]$، یعنی $-q>y_1=\frac{-2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ و یا $-q<y_2=\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}}$ و یا $q^2>\frac{-4p^3}{27}$ و یا $4p^3+27q^2>0$ باشد، خط $y=-q$ نمودار تغییرات تابع را تنها در یک نقطه قطع می‌کند که:

● اگر $-q>0$، یعنی $q<0$ باشد، طول نقطه‌ی تقاطع منفی است.

● اگر $-q<0$، یعنی $q>0$ باشد، طول نقطه‌ی تقاطع مثبت است.

پس در این حالت معادله تنها یک ریشه دارد که اگر $q>0$ باشد، ریشه‌ی معادله منفی است و اگر $q<0$ باشد، ریشه‌ی معادله مثبت است.

نکته: با توجه به این‌که وقتی $p>0$ است، $4p^3+27q^2>0$ است، می‌توان گفت که اگر در معادله‌ی $x^3+px+q=0$، $4p^3+27q^2>0$ باشد، معادله تنها یک ریشه دارد که علامت آن مخالف علامت q است.

ادامه دارد...