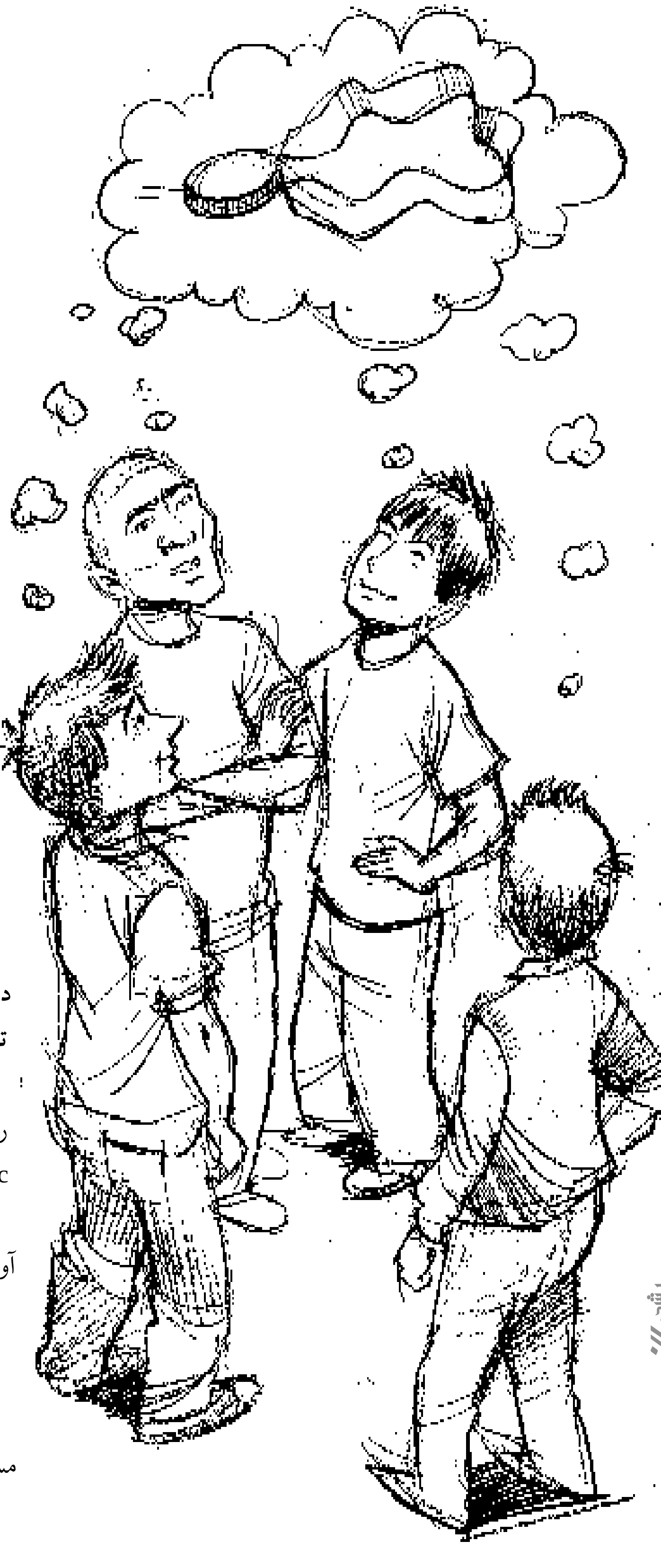
مسابقه‌های ریاضی در

● هوشنگ شرقی



منتخبی از مسائل مسابقات ریاضی دبیرستان‌های آمریکا

اشاره

مسابقات ریاضی دبیرستانی آمریکا در سه سطح متفاوت برگزار می‌شود:

● سطح مقدماتی: که با ۳۰ سؤال پنج گزینه‌ای نسبتاً آسان برگزار می‌شود.

● سطح متوسط: که با ۱۵ سؤال تشریحی متوسط برگزار می‌شود.

● سطح عالی: که همان المپیاد ملی ریاضی کشور آمریکاست و مشابه المپیاد بین‌المللی برگزار می‌شود.

اینک سؤال‌های منتخب سطح متوسط (AIME) در دهه‌ی ۱۹۸۰ میلادی را به شرح زیر همراه با راه‌حل آن‌ها تقدیم می‌کنیم.

۱. تعداد عددهای صحیح پنج رقمی به فرم «۳۷abc» را در مبنای ۱۰ به‌دست آورید، به طوری که عددهای ۳۷abc، ۳۷bca و ۳۷cab، بر ۳۷ بخش‌پذیر باشند.

۲. مقدار $10(x+y)$ را از دستگاه معادلات زیر به دست آورید.

$$\begin{cases}\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+y=43/8\\ x+y-\lfloor x\rfloor=18/4\end{cases}$$

توضیح: $\lfloor z\rfloor$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی z است.

کشورهای گوناگون دنیا (۵)

۳. در جدول ۳×۳ ذیل، هر حرف معرف یک عدد صحیح متمایز غیرصفر است. هریک از اعداد سه رقمی abc، def، ghi، adg، beh، cfi و aei بر ۱۱ بخش‌پذیر هستند. حداکثر مقدار ممکن برای عدد سه رقمی ceg چیست؟

a	b	c
d	e	f
g	h	i

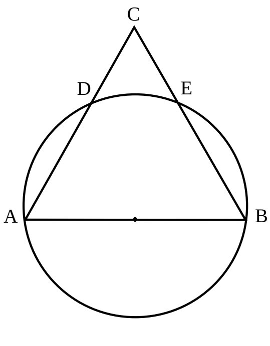
۴. در مثلث ABC، فرض کنید D و E به ترتیب نقاطی روی اضلاع AC و BC باشند، به طوری که DE موازی AB باشد و فرض کنید P نقطه‌ی برخورد AE و BD باشد. اگر مساحت مثلث ABP، ۳۶ واحد و مساحت مثلث EDP، ۲۵ واحد سطح باشد، مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

۵. فرض کنید x و y عددهای حقیقی باشند با قدرمطلق‌های متفاوت که در معادلات $\begin{cases} x^۳ = ۱۳x + ۳y \\ y^۳ = ۳x + ۱۳y \end{cases}$ صدق کنند. مقدار عددی $(x^۲ - y^۲)^۲$ را به‌دست آورید.

۶. برای هر آرایش از اعداد ۱، ۴، ۷، ۱۰، ۱۳، ۱۶، ۱۹، ۲۲، ۲۵ و ۲۸ روی محیط یک دایره، فرض کنید N معرف بزرگ‌ترین ده عددی باشد که از جمع هر عدد و دو عدد همسایه‌اش به‌دست می‌آید. کمترین مقدار N که قابل نمایش است، چیست؟

۷. اگر x، y و z عددهای صحیح مثبت متمایزی باشند، به طوری که $y^۲ - zx = -۱۰۳$ و $z^۲ - xy = ۲۲$، مقدار $x^۲ - yz$ را به‌دست آورید.

۸. در شکل ذیل در مثلث ABC، $AB = ۳۰$ قطر دایره است. اگر $AD = \frac{AC}{۳}$ و $BE = \frac{BC}{۴}$، مساحت مثلث چه‌قدر است؟



۹. عدد طبیعی N را دارای خاصیت «جمع وارون» گوییم هرگاه عدد صحیح سه رقمی abc یافت شود، به طوری که a و c غیرصفر باشند و $N = abc + cba$. چند عدد طبیعی با خاصیت جمع وارون وجود دارند؟

حل مسائل

۱. اگر x، y و z را به ترتیب معادل با عددهای سه رقمی abc، bca و cab درنظر بگیریم، به راحتی می‌توان دید که:

$۱۰x - y = ۹۹۹a$ و $۱۰y - z = ۹۹۹b$ و $۱۰z - x = ۹۹۹c$

و چون ۹۹۹ بر ۳۷ بخش‌پذیر است، با توجه به روابط بالا نتیجه می‌شود که اگر از میان x، y و z، یکی بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد، دوتای دیگر هم‌چنین خواهند بود. بنابراین کافی است، مضرب‌های ۳۷ را به جای سه رقم سمت راست عدد قرار دهیم:

۳۷۰۰۰ و ۳۷۰۳۷ و ۳۷۰۷۴ و ۳۷۱۱۱ و ... و ۳۷۹۹۹

و چون $۲۷ \times ۳۷ = ۹۹۹$، لذا ۲۸ عدد متفاوت وجود دارند.

۲. فرض کنید p و q جزء اعشاری عددهای x و y باشند؛ یعنی: $x = \lfloor x \rfloor + p$ و $y = \lfloor y \rfloor + q$. با جایگزینی در معادله‌ها داریم:

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor + ۲\lfloor y \rfloor + q = ۴۳/۸ \\ \lfloor y \rfloor + p + q = ۱۸/۴ \end{cases}$$

و از این دو معادله نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} q = ۰/۸ \\ p + q = ۱/۴ \end{cases}$$

و درنتیجه: $p=۰/۶$ و: $\begin{cases}\lfloor x\rfloor+۲\lfloor y\rfloor=۴۳\\ \lfloor y\rfloor=۱۷\end{cases}$

و از آن‌جا: $\lfloor x\rfloor=۹$ و: $y=۱۷/۸$ ، $x=۹/۶$ و:

$۱۰(x+y)=۲۷۴$

۳. با توجه به قوانین بخش‌پذیری بر ۱۱ (به کتاب‌های تئوری اعداد مراجعه کنید)، می‌توان نوشت:

$$a+c\overset{۱۱}{\equiv}b \text{ و } d+f\overset{۱۱}{\equiv}e \text{ و } g+i\overset{۱۱}{\equiv}h \text{ و } a+g\overset{۱۱}{\equiv}d$$

$$b+h\overset{۱۱}{\equiv}e \text{ و } c+i\overset{۱۱}{\equiv}f \text{ و } a+i\overset{۱۱}{\equiv}e$$

و از جمع چند مورد از روابط بالا خواهیم داشت:

$$(a+c)+(g+i)+(d+f)+(b+h)+e\overset{۱۱}{\equiv}b+h+e+e+e\overset{۱۱}{\equiv}۴e$$

و درنتیجه: $۴e\overset{۱۱}{\equiv}۱$ (زیرا سمت چپ، مجموع همه‌ی رقم‌های جدول و برابر است با: $۱+۲+۳+...+۹=۴۵\overset{۱۱}{\equiv}۱$)

و بنابراین: $e=۳$ و درنتیجه از برابری‌های: $d+f\overset{۱۱}{\equiv}b+h\overset{۱۱}{\equiv}a+i\overset{۱۱}{\equiv}۳$ خواهیم داشت:

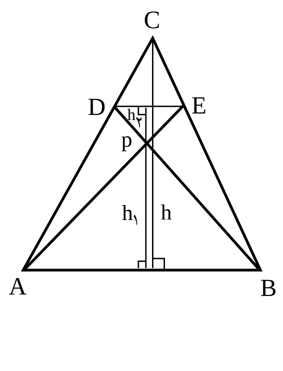
$$\{\{d,f\},\{b,h\},\{a,i\}\}=\{\{۱,۲\},\{۵,۹\},\{۶,۸\}\}$$

که از آن‌جا داریم: $\{c,g\}=\{۴,۷\}$

برای حداکثر کردن ceg، باید $c=۷$ و $g=۴$ باشد. این کار مقدور است و آرایش زیر شرایط مسأله را تأمین می‌کند. بنابراین حداکثر ceg، ۷۳۴ است.

۱	۸	۷
۵	۳	۹
۴	۶	۲

۴. چون مثلث‌های ABC و ABP قاعده‌ی مشترک AB را دارند، لذا اگر بتوانیم نسبت ارتفاع‌های آن‌ها (h و $h_۱$) را به‌دست آوریم، می‌توانیم مساحت مثلث ABC را بیابیم. فرض کنید $h_۲$ ارتفاع مثلث DEP باشد. چون $\Delta DEP\sim\Delta ABP$ (با نسبت مساحت‌های $\frac{۲۵}{۳۶}$)، لذا نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر نسبت تشابه آن‌ها، یعنی $\frac{۵}{۶}$ است. علاوه بر آن، مثلث‌های DEC و ABC با نسبت تشابه $\frac{۵}{۶}$، متشابه هستند. درنتیجه:



$$h_۱+h_۲=\frac{۱}{۶}h \ , \ h_۱=\frac{۶}{۱۱}(h_۱+h_۲)=\frac{۱}{۱۱}h$$

$$\Rightarrow S_{ABC}=۱۱S_{ABP}=۳۹۶$$

۵. با جمع و تفریق دو معادله‌ی مسئله نتیجه می‌گیریم:

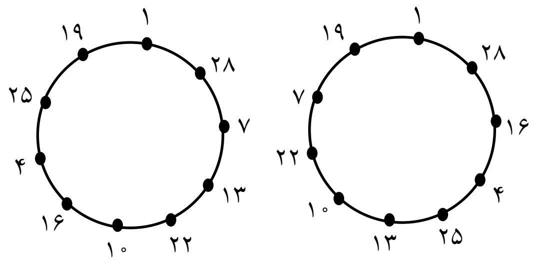
$$\begin{cases}x^۳+y^۳=۱۶(x+y)\\ x^۳-y^۳=۱۰(x-y)\end{cases}\overset{(x\neq\pm y)}{\Rightarrow}\begin{cases}x^۲-xy+y^۲=۱۶\\ x^۲+xy+y^۲=۱۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^۲+y^۲=۱۳ \ , \ xy=-۳$$

$$(x^۲+y^۲)^۲=(x^۲-y^۲)^۲+(۲xy)^۲\Rightarrow ۱۶۹=(x^۲-y^۲)^۲+۳۶$$

$$\Rightarrow (x^۲-y^۲)^۲=۱۳۳$$

۶. با کمی دقت درمی‌یابیم که این عددها جملات یک تصاعد حسابی با قدرنسبت ۳ (و جمله‌ی اول ۱) هستند. مجموع همه‌ی این عددها به جز ۱، مساوی ۱۴۴ است. چون $۴۸=\frac{۱۴۴}{۳}$، پس اگر ۱ را جدا کنیم و بقیه‌ی عددها را در سه بخش سه‌تایی منظم کنیم، میانگین مقدار هر بخش مساوی ۴۸ خواهد بود و درنتیجه، جواب مسئله حداقل ۴۸ می‌شود و می‌توان با آرایش‌های زیر نشان داد که همین جواب مسئله است:



۷. با تفریق معادله‌ی اول از معادله‌ی دوم به تساوی زیر می‌رسیم:

$$(x+y+z)(z-y)=۵^۳$$

و چون حاصل $x+y+z$ مثبت و از $z-y$ بزرگ‌تر است، نتیجه می‌شود که: ۵ یا $z-y=۱$ و یا $z=y+۱$ یا $z=y+۵$

در حالت اول، $x+y+z=۱۲۵$ و درنتیجه:

$$x=۱۲۵-y-z=۱۲۵-y-(y+۱)$$

یعنی: $x=۱۲۴-۲y$. با جایگزینی x و z در معادله‌ی اولیه خواهیم داشت: $۳y^۲-۱۲۲y-۲۱=۰$ و با حل این معادله درمی‌یابیم که برای y جواب صحیح به‌دست نمی‌آید.

در حالت دوم $x+y+z=۲۵$ و درنتیجه:

$$x=۲۵-y-z=۲۵-y-(y+۵)=۲۰-۲y$$

با جایگزینی x و z در معادله‌ی اولیه به معادله‌ی