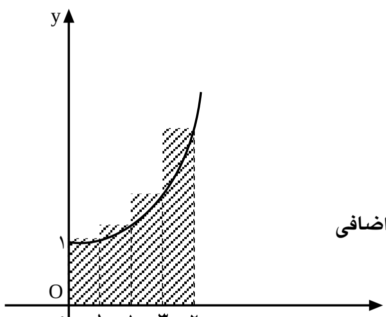
انتگرال مُعیّن

(قسمت اول)

● احمد قندهاری

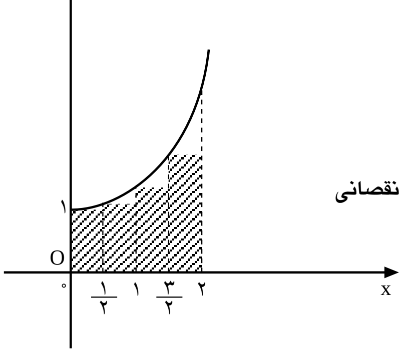
فرض کنید، می‌خواهیم اندازه‌ی مساحت زیرمنحنی به معادله‌ی $f(x) = x^2 + 1$ و محور xها را از خط $x = 0$ تا خط $x=2$ با تقریب محاسبه کنیم.

اندازه‌ی مساحت مورد نظر را A می‌نامیم. برای این کار، سطح زیر منحنی را به مستطیل‌های محیطی و محاطی با عرض‌های مساوی، مانند شکل‌های ۱ و ۲ تقسیم می‌کنیم.



تقریب اضافی

شکل۱



تقریب نقصانی

شکل۲

به طوری که در شکل‌ها ملاحظه می‌کنید، بازه‌ی $[0,2]$ را به چهار قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم.

در شکل۱، مستطیل‌ها محیطی و در شکل ۲ مستطیل‌ها محاطی‌اند و عرض هر مستطیل $\frac{1}{2}$ است. در شکل۱، مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محیطی، از مساحت سطح زیر منحنی بیشتر است (تقریب اضافی) و در شکل ۲، مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محاطی از مساحت سطح زیر منحنی کمتر است (تقریب نقصانی).

تذکر: مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محیطی را بالاریمان (U_nf) و مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محاطی را پایین ریمان (L_nf) می‌گوییم. در قسمت‌های بعد، در این باره بحث مفصلی خواهیم داشت. در محاسبه‌ی بالاریمان (تقریب اضافی) طول هر مستطیل در هر بازه برابر ماکزیمم مطلق تابع و در محاسبه‌ی پایین ریمان (تقریب نقصانی)، طول هر مستطیل در هر بازه برابر می‌نیمم مطلق تابع است. مثلاً دربازه‌ی $[\frac{1}{2},1]$ با توجه به شکل، ماکزیمم مطلق تابع $f(1)$ و می‌نیمم مطلق تابع $f(\frac{1}{2})$ است. حال به ادامه‌ی حل

می‌پردازیم:

$\frac{۲-۰}{۴}=\frac{۱}{۲}$ = عرض هر مستطیل

$$U_n f=\frac{۱}{۲}\left(f(\frac{۱}{۲})+f(۱)+f(\frac{۳}{۲})+f(۲)\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}(\frac{۵}{۴}+۲+\frac{۱۳}{۴}+۵)=۵/۷۵ \text{ واحد مربع}$$

$$L_n f=\frac{۱}{۲}\left(f(۰)+f(\frac{۱}{۲})+f(۱)+f(\frac{۳}{۲})\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}(۱+\frac{۵}{۴}+۲+\frac{۱۳}{۴})=۳/۷۵ \text{ واحد مربع}$$

بنابراین:

۵٫۷۵> مساحت سطح زیر منحنی=A> ۳٫۷۵

چنانچه بازه‌ی [۰,۲] را به جای چهار قسمت مساوی، به هشت قسمت مساوی تقسیم و مانند محاسبات بالا عمل کنیم، خواهیم داشت:

$U_n f=۵/۱۸۷۵$ = اندازه‌ی تقریب اضافی مساحت‌ها

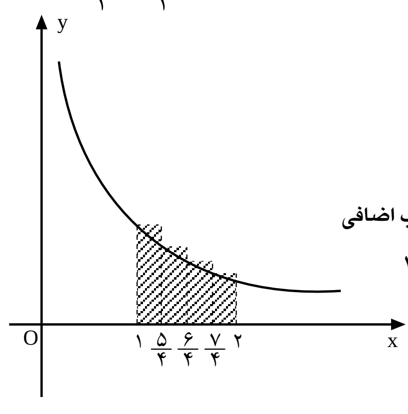
$L_n f=۴/۱۸۷۵$ = اندازه‌ی تقریب نقصانی مساحت‌ها

بنابراین: ۵٫۱۸۷۵> A> ۴٫۱۸۷۵

اگر بازه‌ی [۰,۲] را به جای هشت قسمت مساوی به هشتاد قسمت مساوی یا به هشتصد قسمت مساوی تقسیم کنیم، آن‌گاه مقادیر عددی تقریب اضافی مساحت‌ها و تقریب نقصانی مساحت‌ها خیلی به‌هم نزدیک خواهد شد. چنانچه بازه‌ی [۰,۲] را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، سپس n را به سمت ∞ میل دهیم، آن‌گاه حدّ مجموع تقریب نقصانی مساحت‌ها برابر حد مجموع تقریب اضافی مساحت‌ها و برابر سطح زیر منحنی خواهد شد.

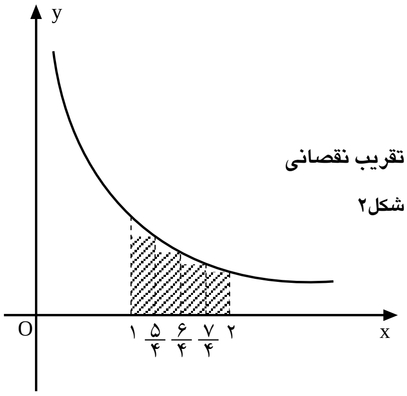
مثال۱. اندازه‌ی سطح زیر منحنی به معادله‌ی $f(x)=\frac{۱}{x}$ و محور xها را از خط x=۱ تا خط x=۲ با تقریب اضافی و تقریب نقصانی برای n=۴ بیابید.

حل: $\frac{۲-۱}{۴}=\frac{۱}{۴}$ = عرض هر مستطیل



تقریب اضافی

شکل۱



تقریب نقصانی

شکل۲

$$U_n f=\frac{۱}{۴}\left(f(۱)+f(\frac{۵}{۴})+f(\frac{۶}{۴})+f(\frac{۷}{۴})\right) \text{ = اندازه‌ی تقریب اضافی مساحت‌ها}$$

$$=\frac{۱}{۴}(۱+\frac{۴}{۵}+\frac{۴}{۶}+\frac{۴}{۷})=۰/۷۶ \text{ واحد مربع}$$

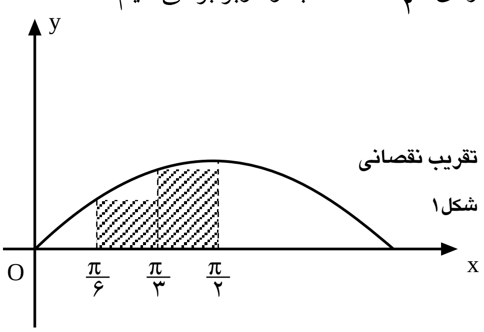
$$L_n f=\frac{۱}{۴}\left(f(\frac{۵}{۴})+f(\frac{۶}{۴})+f(\frac{۷}{۴})+f(۲)\right) \text{ = اندازه‌ی تقریب نقصانی مساحت‌ها}$$

$$=\frac{۱}{۴}(\frac{۴}{۵}+\frac{۴}{۶}+\frac{۴}{۷}+\frac{۱}{۲})=۰/۶۳ \text{ واحد مربع}$$

پس: ۰/۷۶ > اندازه‌ی سطح زیر منحنی= A > ۰/۶۳

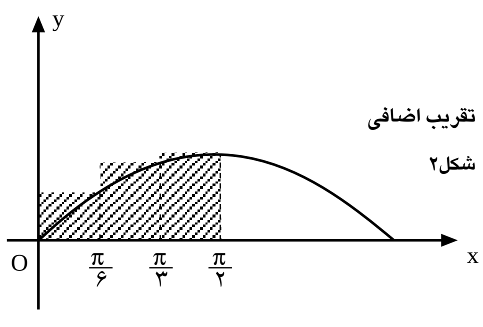
مثال۲. در تابع با ضابطه‌ی f(x)=sinx، مجموع اندازه‌های بالاریمان و پایین‌ریمان را در بازه‌ی [۰,π] برای n=۶ بیابید.

حل: تابع با ضابطه‌ی f(x)=sinx دربازه‌ی $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ صعودی اکید و نامنفی است، بنابراین مجموع بالاریمان و پایین‌ریمان را در بازه‌ی $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ محاسبه و دوبرابر می‌کنیم.



تقریب نقصانی

شکل۱



تقریب اضافی

شکل۲

عرض هر مستطیل $\Delta_x = \frac{\pi - ۰}{۶} = \frac{\pi}{۶}$

$$U_nf = ۲\times\Delta x\left(f(\frac{\pi}{۶})+f(\frac{\pi}{۳})+f(\frac{\pi}{۲})\right)$$

$$= ۲\times\frac{\pi}{۶}(\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱) = \frac{(۳+\sqrt{۳})\pi}{۶}$$

$$L_nf = ۲\times\Delta x\left(f(۰)+f(\frac{\pi}{۶})+f(\frac{\pi}{۳})\right)$$

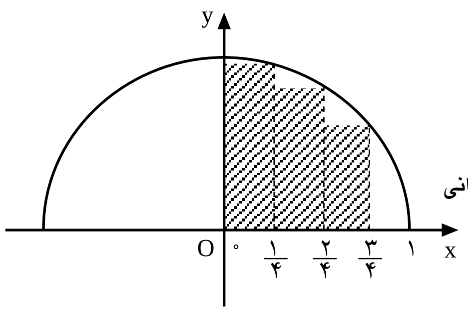
$$= ۲\times\frac{\pi}{۶}(۰+\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \frac{(۱+\sqrt{۳})\pi}{۶}$$

مثال۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ ، مجموع بالاریمان و پایین‌ریمان را در بازه‌ی [۱,۱-] برای n=۸ بیابید.

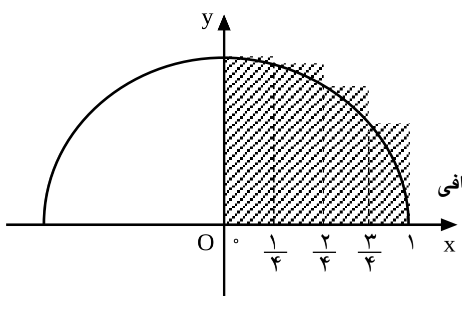
حل: نمودار این تابع یک نیم‌دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ است.

مجموع بالاریمان، پایین‌ریمان را دربازه‌ی[۰,۱] که تابع نزولی اکید و نامنفی است، محاسبه و آن‌گاه آن را دوبرابر می‌کنیم.

عرض هر مستطیل $\Delta x = \frac{۱-(-۱)}{۸} = \frac{۲}{۸} = \frac{۱}{۴}$



تقریب نقصانی



تقریب اضافی

$$L_nf = ۲\times\Delta x\left(f(\frac{۱}{۴})+f(\frac{۲}{۴})+f(\frac{۳}{۴})+f(۱)\right)$$

$$=۲(\frac{۱}{۴})(\sqrt{۱-\frac{۱}{۱۶}}+\sqrt{۱-\frac{۴}{۱۶}}+\sqrt{۱-\frac{۹}{۱۶}}+۰)$$

$$=\frac{۱}{۲}(\sqrt{\frac{۱۵}{۱۶}}+\sqrt{\frac{۱۲}{۱۶}}+\sqrt{\frac{۷}{۱۶}}) = \frac{۱}{۲}(\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}+\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}+\frac{\sqrt{۷}}{۴})$$

$\simeq \frac{۱}{۲}(۰/۹۷+۰/۸۷+۰/۶۶) = ۱/۲۴$ واحد مربع

$$U_nf = ۲\times\Delta x\left(f(۰)+f(\frac{۱}{۴})+f(\frac{۲}{۴})+f(\frac{۳}{۴})\right)$$

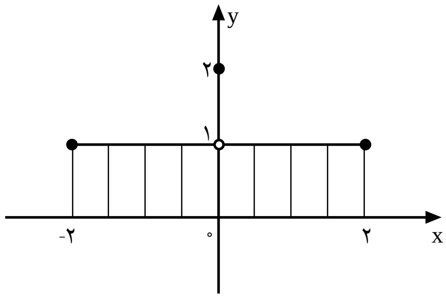
$$=۲(\frac{۱}{۴})(۱+\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}+\frac{۲\sqrt{۳}}{۴}+\frac{\sqrt{۷}}{۴})$$

$\simeq\frac{۱}{۲}(۱+۰/۹۷+۰/۸۷+۰/۶۶) = ۱/۷۴$ واحد مربع

مثال۴. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ۲ & \text{اگر } x=۰ \\ ۱ & \text{اگر } x\neq ۰\end{cases}$ مفروض است. مجموع بالاریمان و پایین‌ریمان این تابع در بازه‌ی [۲ , ۲-] را تعیین کنید.

الف) برای n=۸   ب) برای n=۹   ج) برای n=n

حل:



$L_nf = \Delta x(\underbrace{۱+۱+۱+\cdots+۱}_{۸}) = \frac{۱}{۲}(۸)=۴$ واحد مربع

$U_nf=\Delta x(۱+۱+۱+۲+۲+۱+۱+۱)=\frac{۱}{۲}(۶+۴)=۵$ واحد مربع

توجه فرمایید، در دو مستطیلی که محور yها یک ضلع آن‌هاست، ماکزیمم مطلق تابع در هریک برابر ۲ است.

ب) n=۹؛ عرض هر مستطیل $\Delta x = \frac{۲-(-۲)}{۹}=\frac{۴}{۹}$

$L_nf=\Delta x(\underbrace{۱+۱+۱+\cdots+۱}_{۹})=\frac{۴}{۹}(۹)=۴$ واحد مربع

$L_nf = \Delta x(۱+۱+۱+۱+۲+۱+۱+۱+۱)=\frac{۴}{۹}(۱۰)=\frac{۴۰}{۹}$

واحد مربع

ج) n=n؛ اگر n فرد باشد: $\Delta x=\frac{۴}{n}$

$L_nf=\Delta x(\underbrace{۱+۱+۱+\cdots+۱}_{n}) = \frac{۴}{n}(n)=۴$ واحد مربع

$$U_n f = \Delta x(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n-1}+2) = \frac{4}{9}(n+1) = \frac{4(n+1)}{9}$$

واحد مربع

اگر n زوج باشد: $\Delta x = \frac{4}{n}$

$$L_n f = \Delta x(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n}) = \frac{4}{n}(n) = 4$$ واحد مربع

$$U_n f = \Delta x(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n-2}+2+2) = \frac{4}{n}(n+2) = \frac{4(n+2)}{n}$$

واحد مربع

مجموع n جمله

۱) $\sum_{i=p}^{n} a = (n-p+1)a \qquad n, p \in N \quad , \quad a \neq 0$

۲) $\sum_{i=1}^{n} a = an \qquad n \in N \quad , \quad a \neq 0$

۳) $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

۴) $\sum_{i=1}^{n} ki = k\sum_{i=1}^{n} i \qquad k \in \mathbb{R} \quad , \quad k \neq 0$

۵) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

۶) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

مثال۱. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 5x - 2$، مطلوب است محاسبه‌ی $\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$.

حل:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) = \sum_{i=1}^{n}(\frac{5i}{n}-2) = \sum_{i=1}^{n}\frac{5i}{n} - \sum_{i=1}^{n}2 = \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n}2$$

$$= \frac{5}{n}\times\frac{n(n+1)}{2} - 2n = \frac{5}{2}(n+1) - 2n = \frac{5n+5-4n}{2} = \frac{n+5}{2}$$

مثال۲. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 6x^2 + 3$، مطلوب است محاسبه‌ی $\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$.

حل:

$$\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) = \sum_{i=1}^{n}(\frac{6i^2}{n^2}+3) = \sum_{i=1}^{n}\frac{6i^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}3 = \frac{6}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3n$$

$$= \frac{6}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3n = \frac{(n+1)(2n+1)}{n} + 3n$$

$$= \frac{2n^2+3n+1+3n^2}{n} = \frac{5n^2+3n+1}{n}$$

مثال۳. در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 6x^2 + 4x$، مطلوب است محاسبه‌ی $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$.

حل: ابتدا $\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$ را مانند مثال۲ محاسبه می‌کنیم.

$$\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) = \sum_{i=1}^{n}(\frac{6i^2}{n^2}+\frac{4i}{n}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{6i^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{4i}{n}$$

$$= \frac{6}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{6}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{n} + 2(n+1) = \frac{4n^2+5n+1}{n}$$

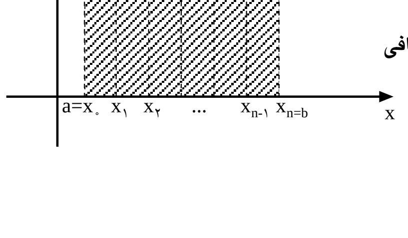
حال $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{4n^2+5n+1}{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+5n+1}{n^2} = 4$$

مجموع ریمان‌ها

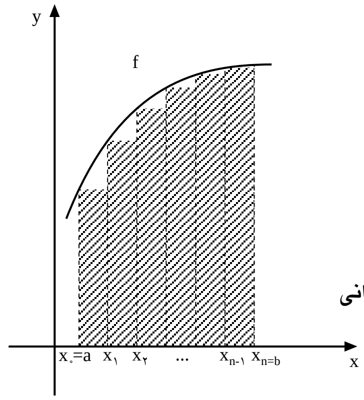
فرض می‌کنیم تابع با ضابطه‌ی $y=f(x)$، تابعی پیوسته و در بازه‌ی $[a,b]$ نامنفی و صعودی اکید باشد. می‌خواهیم اندازه‌ی سطح زیر نمودار تابع را با محور xها، در فاصله‌ی دو خط $x=a$ و $x=b$ به‌طور دقیق محاسبه کنیم.

برای این کار، سطح زیر منحنی را به n مستطیل محیطی و محاطی تقسیم بندی می‌کنیم.



تقریب اضافی

شکل۱

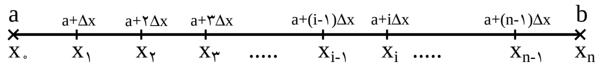


تقریب نقصانی

شکل۲

به طوری که در شکل‌ها ملاحظه می‌کنید، هرچه تعداد مستطیل‌ها زیادتر شود، مجموع مساحت‌های مستطیل‌های محیطی و محاطی، به اندازه‌ی سطح زیر منحنی در بازه‌ی [a,b] نزدیک‌تر خواهد شد.

اگر $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$، عرض مستطیل‌ها باشد، بازه‌ی [a,b] دارای تقسیمات زیر است:



در قسمت پایین خط، اسم نقطه‌ها و در قسمت بالای خط، طول نقطه‌ها نوشته شده است.

مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تقریب نقصانی=

$$\Delta x\big(f(x_۰)+f(x_۱)+f(x_۲)+\cdots+f(x_{n-۱})\big)=\Delta x\sum_{i=۱}^{n}f(x_{i-۱})$$

مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تقریب اضافی=

$$\Delta x\big(f(x_۱)+f(x_۲)+f(x_۳)+\cdots+f(x_n)\big)=\Delta x\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)$$

مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تقریب نقصانی را پایین ریمان و مجموع مساحت‌های مستطیل‌های تقریب اضافی را بالاریمان گویند.

در این مثال:

مجموع پایین ریمان = $\Delta x\sum_{i=۱}^{n}f(x_{i-۱})$

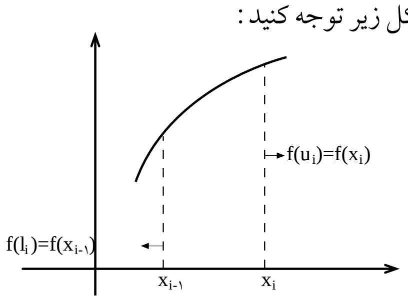
مجموع بالاریمان = $\Delta x\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)$

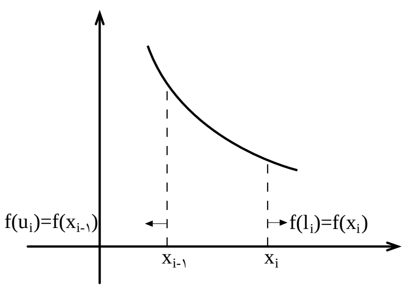
در حالت کلی، اگر ماکزیمم مطلق تابع f در بازه‌ی $[x_{i-۱},x_i]$ را با $f(u_i)$ و می‌نیمم مطلق تابع f را در این بازه با $f(l_i)$ نشان دهیم، آن‌گاه:

مجموع پایین ریمان= $\Delta x\sum_{i=۱}^{n}f(l_i)$

مجموع بالاریمان= $\Delta x\sum_{i=۱}^{n}f(u_i)$

به دو شکل زیر توجه کنید:





بنابراین می‌توان نوشت، اگر تابع f صعودی اکید باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases}\text{مجموع بالاریمان}=\Delta x\sum_{i=۱}^{n}f(u_i)=\Delta x\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\\ \text{مجموع پایین ریمان}=\Delta x\sum_{i=۱}^{n}f(l_i)=\Delta x\sum_{i=۱}^{n}f(x_{i-۱})\end{cases}$$

اگر تابع f نزولی اکید باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases}\text{مجموع بالا ریمان}=\Delta x\sum_{i=۱}^{n}f(u_i)=\Delta x\sum_{i=۱}^{n}f(x_{i-۱})\\ \text{مجموع پایین ریمان}=\Delta x\sum_{i=۱}^{n}f(l_i)=\Delta x\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\end{cases}$$

اگر C_i نقطه‌ی دلخواهی در بازه‌ی $[x_{i-۱},x_i]$ باشد، آن‌گاه:

مجموع ریمان= $\Delta x\sum_{i=۱}^{n}f(c_i)$