مسائلی برای حل

ریاضیات ۱

مجتبی رفیعی

۱. اگر $A=\{1,2,3,\ldots,10\}$ ، $B=\{1,2,3,\ldots,20\}$ و $A\subset X\subseteq B$. به جای X چند مجموعه می‌توان قرار داد؟

۲. مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که دو عدد $M=18^{4}\times 125^{a-5}$ و $N=9^{b-2}\times 25^{2}$ نسبت به هم اول باشند.

۳. مقادیر m و n را چنان تعیین کنید که عبارت $x^{4}+mx+n$ بر عبارت $x^{2}-2x-3$ بخش‌پذیر باشد.

۴. اگر $x^{2}+x+1=0$ ، حاصل عبارت $x^{3}+\frac{1}{x^{3}}$ را حساب کنید.

۵. این عبارت‌ها را تجزیه کنید:

الف) $2x^{2}+5x-3$

ب) $y^{3}(a-x)-x^{3}(a-y)+a^{3}(x-y)$

۶. نشان دهید معادله‌ی خطی که از دو نقطه‌ی $A(p,0)$ و $B(0,q)$ می‌گذرد، به صورت $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ است.

۷. اگر $x=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$ باشد، حاصل $x^{3}-3x$ را بیابید.

۸. طول قطر مستطیلی ۸ سانتی‌متر و زاویه‌ی بین دو قطر آن 60° است. مساحت مستطیل چند سانتی‌متر است؟

۹. معادله‌ی $2x^{4}-13x^{3}+24x^{2}-13x+2=0$ را حل کنید.

۱۰. انتهای کمان مقابل به زاویه‌ی θ در کدام ناحیه باشد تا تساوی زیر به ازای هر $\theta\neq\frac{k\pi}{2},(k\in Z)$ برقرار باشد؟

$$\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\frac{1}{\cos\theta}-\tan\theta$$

۱۱. عددی را بر اعداد ۵ و ۷ و ۸ تقسیم کرده‌ایم. باقی‌مانده‌ها به ترتیب ۲ و ۵ و ۷ و مجموع خارج قسمت‌ها برابر ۲۰ شده است. این عدد کدام است.

۱۲. اگر رأس سهمی $y=ax^{2}+2ax-3$ روی نیمساز ناحیه‌های اول و سوم قرار داشته باشد، مقدار a را تعیین کنید.

۱۳. مقادیر طبیعی n را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$16^{2n-1}>8^{n+7}$$

ریاضیات ۲

میر شهرام صدر

۱. عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$\frac{x^{2}-4}{(3-2x)(4x^{2}-4x+1)}$$

۲. حدود m را طوری تعیین کنید که نامساوی زیر به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد.

$$(-3m)x^{2}+2mx+1>0$$

۳. نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$|2x+1|\leq|x-2|$$

۴. معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$\frac{x-1}{2x}-\frac{1}{2x+1}=\frac{7-3x}{4x^{2}+2x}$$

۵. اگر $f(x)=ax+b$ باشد، حاصل $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را حساب کنید.

۶. معکوس تابع زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{3x+7}{x+2}\\ R-\{2\}\to R-\{3\}\end{cases}$$

۷. اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ و $Ax=\begin{bmatrix}7 & 8\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ باشد، مطلوب است تعیین ماتریس x.

۸. به ازای چه مقدار m این دستگاه جواب دارد.

$$\begin{cases}2mx-4y=6\\ -4x+2my=2\end{cases}$$

۹. عبارات زیر را حساب کنید.

الف) $\log_{25}^{\sqrt{125}}$ ب) $\log_{7}^{49}$

۱۰. معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید. $2\log_{7}^{x}=\log_{7}^{81}$

۱۱. اگر جمله‌ی عمومی یک تصاعد حسابی $t_n=2n+1$ باشد، مجموع ۳ جمله‌ی اول این تصاعد را حساب کنید.

۱۲. چهار واسطه‌ی هندسی بین $\frac{3}{8}$ و $\frac{128}{81}$ درج کنید.

۱۳. اگر $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ و $\cos\beta=\frac{1}{5}$ (α و β حاده هستند)، عبارات $\cos(\alpha+\beta)$ را محاسبه کنید.

۱۴. هرگاه $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}3\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}$ و $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}2\sqrt{3}\\ -2\end{bmatrix}$ باشد، زاویه‌ی بین دو بردار را محاسبه کنید.

۱۵. ارقام ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۶ و ۷ را داریم. تعیین کنید:

الف) با آن‌ها چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت.

ب) چه تعداد از این اعداد فرد هستند.

ج) چه تعداد از آن‌ها کوچک‌تر از ۴۰۰ هستند.

هندسه ی ۱

● هوشنگ شرقی

۱ . به کمک استدلال استنتاجی ثابت کنید، دو زاویه‌ی متقابل به رأس با هم برابرند .

۲ . از دو زاویه‌ی متمم، اندازه‌ی یکی چهاربرابر دیگری است . اندازه های دو زاویه را به‌دست آورید .

۳ . ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویه‌ی خارجی رأس، موازی قاعده است .

۴ . از نقطه‌ی M وسط ضلع AB از مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) ، عمود MD را بر وتر BC وارد می‌کنیم . ثابت کنید : $DC^۲ - DB^۲ = AC^۲$

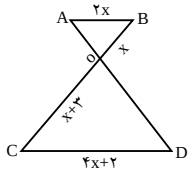
۵ . از نقاط P و Q عمودهای PA و QB را بر خط d رسم می‌کنیم (P و Q یک طرف d قرار دارند) . خطوط QA و PB یکدیگر را در نقطه‌ی R قطع می‌کنند و از R عمود RC را بر d رسم می‌کنیم .

ثابت کنید : $\frac{۱}{RC} = \frac{۱}{PA} + \frac{۱}{QB}$

۶ . مساحت ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی را که طول دو قاعده‌ی آن ۸ و ۱۴ سانتی‌متر و طول هر یک از دو ساق آن ۵سانتی‌متر است، به‌دست آورید .

۷ . در مثلث ABC ($\hat{C} > \hat{A}$) ، نقطه‌ی D را روی ضلع AB طوری در نظر می‌گیریم که $A =< BCD < C$ باشد . اگر $BC=۲$ و $AB=۵$ ، طول AD را به‌دست آورید .

۸ . در شکل زیر ، $AB||CD$ و اندازه‌ی پاره‌خط‌ها برحسب x روی شکل مشخص شده است . نسبت مساحت مثلث OAB به مساحت مثلث OCD را به‌دست آورید .



۹ . ظرفی به‌شکل منشور قائم داریم که قاعده‌ی آن مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۲۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن $۱۰\sqrt{۳}$ سانتی‌متر است . این ظرف را پر از آب می‌کنیم و سپس محتویات آن را در ظرف دیگری به شکل استوانه و به شعاع قاعده‌ی ۵ سانتی‌متر خالی می‌کنیم . سطح آب تا چه ارتفاعی در این ظرف بالا می‌آید؟

۱۰ . حجم و مساحت کل هرمی را به‌دست آورید که قاعده‌ی آن مربعی به ضلع ۲سانتی‌متر و ارتفاع آن $\sqrt{۷}$ سانتی‌متر باشد و وجه‌های جانبی آن، مثلث‌هایی متساوی‌الساقین و هم‌نهشت باشند .

حسابان

● احمد قندهاری

۱ . تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳-۳x^۲+۳x+۴$ مفروض است :

الف) ثابت کنید این تابع در $\mathbb{R}$ یک به یک است .

ب) ضابطه‌ی تابع معکوس را بیابید .

۲ . تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ مفروض است، تابع را چنان مشخص کنید، تا نمودار آن محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کند و خط‌های $x=-۲$ و $y=۱$ معادله‌های مجانب‌های آن باشند .

۳ . مطلوب است محاسبه‌ی $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[۳]{x^۳+۶x^۲}-x)$

۴ . تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{۲\sqrt{۲}\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}} & , x<۰\\ \left[x-\frac{۵}{۲}\right]+a & , x=۰\\ \frac{|x|}{x}+b & , x>۰\end{cases}$

مفروض است . a و b را چنان بیابید تا این تابع در $x=۰$ پیوسته باشد .

۵ . تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲-۴x+۳$ مفروض است . در نقطه‌ی به طول ۳ واقع بر منحنی، قائمی بر منحنی رسم می‌کنیم . این خط قائم نمودار تابع f را در نقطه‌ی دیگری به نام B قطع می‌کند . اندازه‌ی OB را بیابید .

۶ . این معادله‌های مثلثاتی را حل کنید و جواب‌های کلی آن‌ها را بنویسید .

الف) $۲\sin ۲x - ۲\sqrt{۲}\cos x - ۲\sin x + \sqrt{۲} = ۰$

ب) $\cos ۲x + ۵\sin x - ۴ = ۰$

۷ . در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\tan^۴ ۴x + \cot^۲ ۲x$ ، $f'(\frac{\pi}{۱۲})$ را بیابید .

۸ . در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax^۳+bx & , x\geq ۲\\ x^۲-۴x & , x<۲\end{cases}$ ، a و b را چنان بیابید که تابع در $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد .

۹ . نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\cos^۲ x+\cos x-۲$ را وقتی $۲\leq x\leq ۰$ رسم کنید .

۱۰ . در کره‌ای به شعاع $R=۶$ ، مخروط دوّاری به حجم ماکزیمم محاط کرده‌ایم . ارتفاع مخروط را بیابید .

جبر و احتمال

هوشنگ شرقی

۱ . با استفاده از قضیه‌ی استقرای ریاضی ثابت کنید :

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}=۱-\frac{۱}{۲^n}\ (n\in|N)$$

۲ . اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید :

$$x^۲+y^۲\geq ۲(x+y-۱)$$

۳ . می‌دانیم $\sqrt{۳}$ عدد گنگ است . ثابت کنید عدد $۱+\sqrt{۳}$ نیز گنگ است .

۴ . از ۸۰۰ نفر دانش‌آموزان یک مدرسه، حداقل چند دانش‌آموز در یک روز سال متولد شده‌اند؟ چرا؟ (سال را ۳۶۵روز در نظر بگیرید .)

۵ . با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر هفت برابر یک عدد زوج را با یک عدد فرد جمع کنیم، حاصل همواره عددی فرد است .

۶ . با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید :

$$(A\cup B)-(B\cup C)=(A-B)-C$$

۷ . اگر $A=\{۴^x|x\in Z\ ,\ -۱\leq x\leq ۱\}$ و $B=\{x|x\in Z\ ,\ x^۲\leq ۳\}$ عضوهای مجموعه‌ی $(A\times B)-A^۲$ را مشخص و نمودار آن را رسم کنید .

۸ . رابطه‌ی R روی $|R^۲$ به این صورت تعریف شده است :

$$(x,y)R(z,t)\Leftrightarrow x^۳-t^۲=z^۳-y^۲$$

الف) ثابت کنید R همواره یک رابطه‌ی هم‌ارزی است .

ب) کلاس هم‌ارزی [(۳و۲-)] را مشخص کنید .

۹ . نمودار رابطه‌ی $R=\{(x,y)\in|R^۲|x|\leq ۱\ ,\ |y|\leq ۱\}$ را در دستگاه مختصات رسم کنید .

۱۰ . سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم . اگر رو بیاید، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دوبار دیگر پرتاب می‌کنیم . مطلوب است تعیین :

الف) فضای نمونه‌ای این پیشامد .

ب) پیشامد A که در آن دقیقاً یک‌بار سکه رو بیاید .

ج) پیشامد B که حداقل دوبار سکه پشت بیاید .

د) $A\cap B'$

۱۱ . سه لامپ را از میان ۱۵ لامپ که پنج عدد آن‌ها بدون هیچ اثر خارجی معیوب هستند، انتخاب می‌کنیم . تعیین کنید احتمال این‌که :

الف) هیچ کدام معیوب نباشند .

ب) فقط یکی از لامپ‌ها معیوب باشد .

۱۲ . تاسی به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال آمدن عددهای فرد آن، پنج برابر احتمال آمدن عددهای زوج است . احتمال آمدن هر کدام از اعداد را حساب کنید .

۱۳ . نقطه‌ی (x,y) را درون دایره‌ی $S=\{(x,y)\in|R^۲|x^۲+y^۲\leq ۴\}$ به تصادف انتخاب می‌کنیم . احتمال این‌که نقطه‌ی مورد نظر در $A=\{(x,y)\in|R^۲|x^۲+y^۲\leq ۱\}$ باشد را تعیین کنید .

۱۴ . سکه‌ی سالمی را ۱۰بار پرتاب می‌کنیم . مطلوب است احتمال آن‌که هفت‌بار رو بیاید .

۱۵ . برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ی S ثابت کنید :

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$$

۱۶ . اگر $P(A\cup B)=\frac{۳}{۴}$ ، $P(A\cap B)=\frac{۱}{۳}$ و $P(A')=\frac{۳}{۸}$ باشند، مطلوب است :

الف) $P(B)$ ب) $P(B-A)$

هندسه‌ی ۲

حسین کریمی

۱ . از نقطه‌ی o محل تلاقی قطرهای لوزی ABCD، چهار عمود OA' و OB' و OC' و OD' را بر ضلع‌های لوزی فرود می‌آوریم . ثابت کنید چهارضلعی $A'B'C'D'$ مستطیل است .

۲ . در چهارضلعی محدب، کدام نقطه است که مجموع فاصله‌های آن تا رأس‌ها می‌نیمم است؟

۳ . از مثلثی، دو میانه و یک ضلع نظیر یکی از میانه‌ها معلوم است . مثلث را رسم کنید .

۴ . از نقطه‌ی تماس دو دایره‌ی مماس خارجی، دو خط چنان رسم می‌کنیم تا دو دایره را در چهار نقطه‌ی دیگر قطع کنند . ثابت کنید این چهار نقطه، چهار رأس یک ذوزنقه‌اند .

۵ . کمانی از یک دایره معلوم است . مرکز آن را پیدا کنید .

۶ . از نقطه‌ی مفروض A وتری به طول a در دایره‌ی $C(O,R)$ رسم کنید . $(a<۲R)$

۷ . نگاشتی بنویسید که تصویر هر نقطه‌ای عبارت باشد از تصویر قائم آن نقطه بر نیمساز ناحیه‌های اول و سوم .

۸ . نقاط $A(۳,۸)$ و $B(۶,۷)$ مفروض‌اند، معادله‌ی محور تقارن آن‌ها را بنویسید .

۹ . ثابت کنید نقطه‌ی $A(۲,۱)$ مرکز تقارن نمودار به معادله‌ی $y=\frac{x+۱}{x-۲}$ است .

۱۰ . چند خط می‌توان رسم کرد که دو خط موازی و خطی را که با هر دو خط متنافر است، قطع کند؟

۱۱ . دو نقطه‌ی O و O' و دو خط راست D و D' در فضا مفروض‌اند . دو خط متوازی معین کنید که یکی از آن‌ها از نقطه‌ی O بگذرد و خط D را قطع کند، و دیگری از نقطه‌ی O' بگذرد و خط D' را قطع کند .

۱۲ . ثابت کنید مکان هندسی نقاطی از فضا که از دو نقطه‌ی معلوم A و B به یک فاصله هستند، صفحه‌ای است که از وسط قطعه خط AB می‌گذرد و بر AB عمود است .