برای دانش‌آموزان سال دوم

تابع جزء صحیح
(قسمت ۱)

●میرشهرام صدر
mir_sadr@yahoo.com

ورود به مطلب

زنگ دوم دوشنبه‌ی هفته‌ی آخر آذر، قرار بود تابع جزء صحیح را به دانش‌آموزان سال دوم تدریس کنم. با خود گفتم، قبل از تعریف جزء صحیح، بهتر است با مثالی ساده درس را شروع کنم؛ شاید دانش‌آموزان مفهوم جزء صحیح را با مثال روزمره بهتر درک کنند و بی‌درنگ این مثال را طرح کردم.

مثال: بچه‌ها فکر می‌کنید بین ۱ تا ۵۰۰، چند عدد وجود داشته باشد که بر ۱۳ بخش‌پذیر باشند؟

بعد از بحث میان بچه‌ها، اغلب آن‌ها بر این باور بودند که بهتر است، تعداد مضارب طبیعی ۱۳ را بین ۱ تا ۵۰۰ محاسبه کنیم و چنین عمل کردند:

...و$۴×۱۳$ و $۳×۱۳$ و $۲×۱۳$ و $۱×۱۳$

آن‌ها دنباله‌ای ساخته بودند که مضارب طبیعی ۱۳ را نشان می‌داد و آخرین جمله‌ی این دنباله، کوچک‌تر از ۵۰۰ بود؛ ولی مقدار آن را نمی‌دانستند. به آن‌ها گفتم، با توجه به تعریف تقسیم می‌توان، جمله‌ی آخر این دنباله را محاسبه کرد:

$$\begin{array}{ccc|c} ۵ & ۰ & ۰ & ۱۳ \\ \cline{4-4} ۳ & ۹ & & ۳۸ \\ \hline ۱ & ۱ & ۰ & \\ ۱ & ۰ & ۴ & \\ \hline & ۶ & & \end{array}$$

روشن است که آخرین عدد طبیعی کوچک‌تر از ۵۰۰ که بر ۱۳ بخش‌پذیر است، برابر با $۳۸×۱۳$ است.

بنابراین، دنباله‌ی اعداد دانش‌آموزان را کامل کردم:

$۳۸×۱۳$ و... و $۳×۱۳$ و $۲×۱۳$ و $۱×۱۳$

در نتیجه، از ۱ تا ۵۰۰ سی‌وهشت عدد وجود دارند که بر ۱۳ بخش‌پذیرند و مسأله حل شد.

اما به‌طور ساده‌تر و بدون تشکیل دنباله، و فقط با استفاده از الگوریتم تقسیم هم می‌توان به این موضوع پی برد.

$$۵۰۰=۳۸×۱۳+۶$$

$$\Rightarrow \frac{۵۰۰}{۱۳}=۳۸+\frac{۶}{۱۳} \qquad (۱)$$

رابطه‌ی ۱ به این معناست که در تقسیم ۵۰۰ بر ۱۳ سی‌وهشت عدد وجود دارند که مضرب ۱۳ هستند. اکنون به رابطه‌ی ۱ بیشتر توجه می‌کنیم. در این رابطه، ۳۸ را جزء صحیح یا بخش درست عدد $\frac{۵۰۰}{۱۳}$ و $\frac{۶}{۱۳}$ را جزء اعشاری یا بخش کسری $\frac{۵۰۰}{۱۳}$ می‌نامیم. جزء صحیح $\frac{۵۰۰}{۱۳}$ را با نماد $\left[\frac{۵۰۰}{۱۳}\right]$ نمایش می‌دهیم. بنابراین: $\left[\frac{۵۰۰}{۱۳}\right]=۳۸$

نتیجه: هرگاه n و k عددهایی طبیعی باشند، تعداد عددهای طبیعی از ۱ تا n که بر k بخش‌پذیرند، برابر با $\left[\frac{n}{k}\right]$ است. ❐

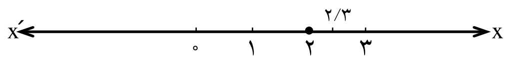
جزء صحیح

برای هر عدد حقیقی مانند x، عدد صحیحی مانند n وجود دارد، به‌طوری که: $n \le x < n+1$. در این صورت، جزء صحیح x را برابر با n تعریف می‌کنیم. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم:

$n \le x < n+۱ \Leftrightarrow [x]=n$

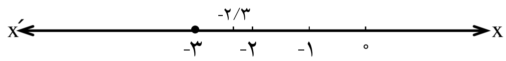
برای مثال، وقتی عدد $x=۲/۳$ را در نظر می‌گیریم، ملاحظه می‌کنیم که عدد صحیح $n=۲$ موجود است، به‌طوری‌که:

$$۲ \le ۲/۳ < ۲+۱ \Rightarrow [۲/۳]=۲$$



به‌همین‌صورت، وقتی عدد $x=-۲/۳$ را در نظر می‌گیریم، ملاحظه می‌کنیم که عدد صحیح $n=-۳$ موجود است، به‌طوری‌که:

$$-۳ \le -۲/۳ < -۳+۱ \Rightarrow [-۲/۳]=-۳$$



به عبارت دیگر، می‌توان جزء صحیح x را به این صورت تعریف کرد: «بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x را، جزء صحیح x می‌گوییم.»

مثال:

الف) $[-۱/۷]=-۲$؛ زیرا: $-۲ \le -۱/۷ < -۱$.

ب) $[۵]=۵$؛ زیرا: $۵ \le ۵ < ۶$.

ج) هرگاه داشته باشیم: $۴ \le x < ۵$، در این صورت $[x]=۴$.

د) هرگاه داشته باشیم: $[x]=۷$، در این صورت $۷ \le x < ۸$.

هـ) $[\sqrt{۲}]=۱$؛ زیرا: $۱ \le \sqrt{۲} \simeq ۱/۴ < ۲$.

و) $[-\pi]=-۴$؛ زیرا: $-۴ \le -\pi \simeq -۳/۱۴ < -۳$.

ز) $\left[\frac{۱۷}{۳}\right]=۵$؛ زیرا: $۵ \le \frac{۱۷}{۳}=۵/\overline{۶} < ۶$.

ح) $\left[\frac{۳}{\pi}\right]=۰$؛ زیرا: $۰ \le \frac{۳}{\pi} \simeq ۰/۹۵ < ۱$، با توجه به این که $\pi \simeq ۳/۱۴$.

مثال: معادله‌ی $۲+۲[x]=۸$ را حل کنید.

$$۲+۲[x]=۸ \Rightarrow ۲[x]=۶ \Rightarrow [x]=۳ \Rightarrow ۳ \le x < ۴ \Rightarrow x \in [۳,۴)$$

جزء اعشاری

هرگاه x یک عدد حقیقی باشد، به‌طوری‌که $[x]=k$، می‌توان نوشت:

$x = k+\alpha \;;\; (۰ \le \alpha < ۱)$

اکنون اگر در این رابطه قرار دهیم $k=[x]$، خواهیم داشت:

$x=[x]+\alpha \;;\; (۰ \le \alpha < ۱)$

$$\Rightarrow x-[x]=\alpha \;;\; (۰ \le \alpha < ۱) \qquad (۲)$$

بنابه‌تعریف، مقدار $x-[x]$ را که همان مقدار α است؛ جزء اعشاری یا بخش کسری x تعریف می‌کنیم. با توجه به رابطه‌ی ۲ ملاحظه می‌کنیم، جزء اعشاری هر عدد حقیقی همواره نامنفی و کوچک‌تر از ۱ است.

مثال: جزء اعشاری عددهای $۳\sqrt{۲}$ و $-۲\sqrt{۳}$ را به‌دست آورید.

حل: فرض کنیم: $x=۳\sqrt{۲}$ و $y=-۲\sqrt{۳}$. بنابراین داریم:

$x=۳\sqrt{۲} \simeq ۴/۲ \Rightarrow [x]=[۴/۲]=۴$

جزء اعشاری $۳\sqrt{۲}$ $= x-[x] \simeq ۴/۲-۴=۰/۲$

$y=-۲\sqrt{۳} \simeq -۳/۴ \Rightarrow [x]=[-۳/۴]=-۴$

جزء اعشاری $-۲\sqrt{۳}$ $= x-[x] \simeq -۳/۴-(-۴)=۰/۶$

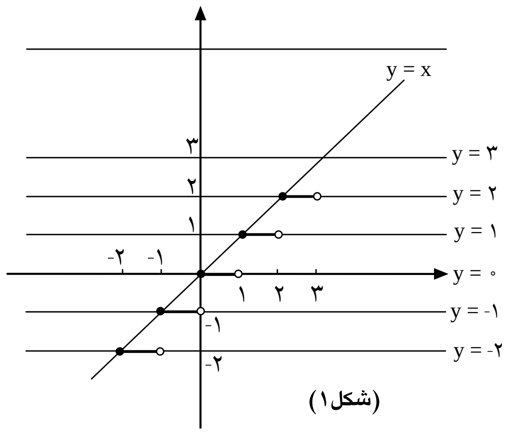
❐

تابع جزء صحیح

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ که دامنه‌ی آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ و برد آن مجموعه‌ی اعداد صحیح Z است، تابع جزءصحیح گفته می‌شود. بنابراین تابع جزء صحیح به‌این صورت است:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \longrightarrow Z \\ f(x)=[x] \end{cases}$$

می‌دانیم که نمودار تابع جزء صحیح چنین است:



(شکل۱)

در این‌جا می‌خواهیم به بررسی خواص و رفتار تابع جزءصحیح بپردازیم. بنابراین موارد زیر را تحقیق می‌کنیم.

❏ یک به‌یک بودن تابع؛

- فرد یا زوج بودن تابع؛
- متناوب بودن تابع؛
- معکوس‌پذیری تابع؛
- صعودی یا نزولی بودن تابع

بررسی یک‌به‌یک بودن تابع

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ یک‌به‌یک نیست، زیرا برای هر $x_1,x_2\in D_f$ داریم:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow [x_1]=[x_2]\not\Rightarrow x_1=x_2$$

از طرف دیگر، با توجه به شکل ۱ ملاحظه می‌کنیم، (برای مثال) خط به معادله‌ی $y=1$ نمودار تابع را در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند.

فرض کنید: $x_1=1/7$ و $x_2=1/3$ $(x_1\neq x_2)$. ملاحظه می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x_1)=[1/7]=1 \\ f(x_2)=[1/3]=1 \end{cases}\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

بنابراین در تابع، جزء صحیح $f(x_1)$ می‌تواند برابر با $f(x_2)$ باشد، در حالی که $x_1\neq x_2$.

بررسی فرد یا زوج بودن تابع

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ فرد یا زوج نیست، زیرا برای هر $x\in D_f$ داریم:

$$\begin{cases} -x\in D_f=\mathbb{R} \\ f(-x)\neq \pm f(x) \end{cases}$$

از یک طرف، با توجه به شکل ملاحظه می‌کنیم، نمودار این تابع نسبت به محور yها متقارن نیست، پس این تابع نمی‌تواند زوج باشد. از طرف دیگر، مبدأ مختصات مرکز تقارن این تابع نیست، پس این تابع نمی‌تواند فرد باشد.

برای مثال فرض کنیم: $x=2/3$. بنابراین داریم:

$$x=2/3\Rightarrow \begin{cases} f(-x)=[-2/3]=-3 \\ \pm f(x)=\pm[2/3]=\pm 2 \end{cases}\Rightarrow f(-x)\neq \pm f(x)$$

بررسی متناوب بودن تابع

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ متناوب نیست، زیرا برای هر $T\neq 0, x\in D_f$ داریم:

$$\begin{cases} (x\pm T)\in D_f=\mathbb{R} \\ f(x+T)=[x+T]\neq [x]\Rightarrow f(x+T)\neq f(x) \end{cases}$$

نکته: تابع به معادله‌ی $f(x)=ax-[ax]$ متناوب و دوره‌ی تناوب اصلی آن $T=\frac{1}{a}$ است $(a\neq 0)$. زیرا برای هر $x\in D_f=\mathbb{R}$ داریم: $(x\pm T)\in D_f$ و هم‌چنین:

$$\begin{aligned} f(x+T)&=f(x+\frac{1}{a})=a(x+\frac{1}{a})-\left[a(x+\frac{1}{a})\right] \\ &=ax+1-[ax+1] \\ &=ax+1-([ax]+1)=ax-[ax]=f(x) \\ &\Rightarrow f(x+T)=f(x) \end{aligned}$$

بررسی معکوس‌پذیری تابع

چنان‌که ملاحظه کردید، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ یک‌به‌یک نیست. در نتیجه، این تابع معکوس‌پذیر نمی‌باشد.

بررسی صعودی یا نزولی بودن تابع

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=[x]$ در بازه‌های $n\in z;[n,n+1)$ صعودی و نزولی است، زیرا برای هر $x_1,x_2\in[n,n+1)$ که $x_1<x_2$ خواهیم داشت:

$$n\le x_1<x_2<n+1\Rightarrow [x_1]=[x_2]$$

بنابراین، رابطه‌ی $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$ برقرار است. پس تابع f صعودی است.

هم‌چنین، رابطه‌ی $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$ برقرار است. پس تابع f نزولی است.

❐

خاصیت‌های تابع جزء صحیح

خاصیت ۱. $[x]\le x<[x]+1$

زیرا با فرض این‌که $[x]=n\in z$، داریم:

$$n\le x<n+1$$

و این رابطه برقراری است.

مثال: مقدار x را از این معادله به‌دست آورید:

$$\left[\frac{6x+5}{8}\right]=\frac{15x-7}{5}$$

حل: چون $\left[\frac{6x+5}{8}\right]$ عددی صحیح است، بنابراین:

$$\frac{15x-7}{5}=k\in Z\ \ (1)\Rightarrow 15x-7=5k$$

$$\Rightarrow x=\frac{5k+7}{15}\ \ (2)$$

با جایگزینی رابطه‌های ۱ و ۲ در معادله داریم:

$$\left[\frac{\frac{6(5k+7)}{15}+5}{8}\right]=k\Rightarrow \left[\frac{10k+39}{40}\right]=k\in Z$$

$$\Rightarrow k\le \frac{10k+39}{40}<k+1$$

اکنون باید دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases}\dfrac{۱۰k+۳۹}{۴۰}\ge k\\[2mm] \dfrac{۱۰k+۳۹}{۴۰}<k+۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k\le\dfrac{۱۳}{۱۰}\\[2mm] k>-\dfrac{۱}{۳۰}\end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{۱}{۳۰}<k\le\frac{۱۳}{۱۰}\quad (۳)$$

چون k عددی درست است و در رابطه‌ی ۳ صدق می‌کند، پس $k=۰$ یا $k=۱$ که با قرار دادن این مقدارها به جای k در رابطه‌ی ۲، مقدارهای x به دست می‌آیند.

$$k=۰\Rightarrow x=\frac{۷}{۱۵}$$

$$k=۱\Rightarrow x=\frac{۴}{۵}$$

در نتیجه، معادله‌ی مفروض دارای دو ریشه‌ی $\frac{۷}{۱۵}$ و $\frac{۴}{۵}$ است.

خاصیت ۲. هرگاه $n\in Z$ و $x\in\mathbb{R}$ داریم.

$$[x+n]=[x]+n$$

زیرا اگر $m\le x<m+۱$، آن‌گاه $[x]=m$ و هم‌چنین:

$$m\le x<m+۱\Rightarrow m+n\le x+n<(m+n)+۱$$
$$\Rightarrow [x+n]=m+n=[x]+n$$

مثال:

$$[-۵/۳+۲]=[-۵/۳]+۲=-۶+۲=-۴$$
$$[x+۷]=[x]+۷$$
$$[۳x-۴]=[۳x]-۴$$
$$[x+[x]+۱]=[x]+[x]+۱=۲[x]+۱$$

مثال: معادله‌ی $\left[\frac{x}{۲}+۱\right]-۲\left[\frac{x}{۲}-۳\right]=۴$ را حل کنید.

حل:

$$\left[\frac{x}{۲}+۱\right]-۲\left[\frac{x}{۲}-۳\right]=۴\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}\right]+۱-۲\left(\left[\frac{x}{۲}\right]-۳\right)=۴$$

$$\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}\right]+۱-۲\left[\frac{x}{۲}\right]+۶=۴\Rightarrow-\left[\frac{x}{۲}\right]=-۳$$

$$\Rightarrow\left[\frac{x}{۲}\right]=۳\Rightarrow ۳\le\frac{x}{۲}<۴\Rightarrow ۶\le x<۸$$

در نتیجه مجموعه جواب این معادله به صورت $[۶,۸)$ است.

خاصیت ۳. برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$۰\le x-[x]<۱$$

اگر فرض کنیم: $[x]=n$، بنابراین:

$$\begin{cases}n\le x<n+۱\\ [x]=n\end{cases}\Rightarrow [x]\le x<[x]+۱$$

$$\Rightarrow [x]-[x]\le x-[x]\le [x]+۱-[x]\Rightarrow ۰\le x-[x]<۱$$

مثال: اگر $x-k=۲\left[\frac{x}{۲}+۱\right]$، در این صورت مجموعه مقادیر k را به دست آورید.

حل:

$$x-k=۲\left(\left[\frac{x}{۲}\right]+۱\right)\Rightarrow x-k=۲\left[\frac{x}{۲}\right]+۲$$

$$\Rightarrow\frac{x}{۲}-\frac{k}{۲}=\left[\frac{x}{۲}\right]+۱\Rightarrow\frac{x}{۲}-\left[\frac{x}{۲}\right]=\frac{k}{۲}+۱$$

چون $۰\le\frac{x}{۲}-\left[\frac{x}{۲}\right]<۱$، بنابراین داریم:

$$۰\le\frac{k}{۲}+۱<۱\Rightarrow-۱\le\frac{k}{۲}<۰\Rightarrow-۲\le k<۰$$

در نتیجه، مجموعه مقادیر k به صورت $[-۲,۰)$ است.

خاصیت ۴. برای هر عدد حقیقی مانند x داریم:

$$[-x]=\begin{cases}-[x] & x\in Z\quad \text{حالت اول}\\ -[x]-۱ & x\notin Z\end{cases}$$

برهان:

حالت اول: اگر $x=n\in Z$، در این صورت $[x]=n$ و داریم:

$$x=n\Rightarrow -x=-n\Rightarrow[-x]=[-n]=-n\Rightarrow[-x]=-n$$

از طرف دیگر، $[x]=n$. بنابراین داریم:

$$[-x]=-[x]$$

حالت دوم: اگر $x\notin Z$، بنابراین $n\in Z$ موجود است، به طوری که $n<x<n+۱$. در نتیجه $[x]=n$ و داریم:

$$n<x<n+۱\xrightarrow[\text{۱- ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را در}}-(n+۱)<-x<-n$$

$$\Rightarrow -n-۱<-x<-n$$

از طرف دیگر $[x]=n$ یا $-[x]=-n$. در نتیجه داریم:

$$-[x]-۱<-x<-[x]\Rightarrow[-x]=-[x]-۱$$

مثال: معادله‌ی $۳-۲[-x]=۱$ را حل کنید.

$$۳-۲[-x]=۱\Rightarrow-۲[-x]=-۲\Rightarrow[-x]=۱$$

حالت اول: اگر $x\in Z$، در این صورت $[-x]=-[x]$. پس داریم:

$$[-x]=۱ \text{ و } x\in Z\Rightarrow-[x]=۱\Rightarrow[x]=-۱$$
$$\Rightarrow-۱\le x<۰\Rightarrow x\in[-۱,۰)$$
$$x\in[-۱,۰) \text{ و } x\in Z\Rightarrow x=-۱$$

حالت دوم: اگر $x\notin Z$ ، در این صورت $[-x]=-[x]-1$. پس داریم:

$[-x]=1$ و $x\notin Z\Rightarrow -[x]-1=1\Rightarrow[x]=-2$

$\Rightarrow -2\le x<-1\Rightarrow x\in[-2,1)$

$x\in[-2,1)$ و $x\notin Z\Rightarrow x\in(-2,-1)$

مجموعه جواب معادله $=(-2,-1)\cup\{-1\}=(-2,-1]$

خاصیت۵. برای هر عدد حقیقی مانند x داریم:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in Z \quad \text{حالت اول}\\ -1 & x\notin Z \quad \text{حالت دوم}\end{cases}$$

برهان:

حالت اول: اگر $x\in Z$ ، با توجه به خاصیت ۴ داریم:

$[-x]=-[x]\Rightarrow[x]+[-x]=[x]-[x]=0$

حالت دوم: اگر $x\notin Z$ با توجه به خاصیت ۴ داریم:

$[-x]=-[x]-1\Rightarrow[x]+[-x]=[x]-[x]-1=-1$

مثال: مجموعه جواب معادله‌ی $3[x]+2[-x]=6$ را به‌دست آورید.

حل:

حالت اول: اگر $x\in Z$ ، در این صورت $[x]+[-x]=0$. بنابراین داریم:

$3[x]+2[-x]=6\Rightarrow[x]+2([x]+[-x])=6$

$\Rightarrow[x]=6\Rightarrow 6\le x<7$

$6\le x<7$ و $x\in Z\Rightarrow x=6$

حالت دوم: اگر $x\notin Z$ ، آن‌گاه $[x]+[-x]=-1$. بنابراین داریم:

$3[x]+2[-x]=6\Rightarrow[x]+2([x]+[-x])=6$

$\Rightarrow[x]-2=6\Rightarrow[x]=8\Rightarrow 8\le x<9$

$8\le x<9$ و $x\notin Z\Rightarrow x\in(8,9)$

مجموعه جواب معادله $=(8,9)\cup\{6\}$

مثال: معادله‌ی $\left[\frac{5}{3x-7}\right]+\left[\frac{-5}{3x-7}\right]=0$ چند جواب دارد؟

حل: فرض کنیم $k=\frac{5}{3x-7}$ ، بنابراین داریم:

$[k]+[-k]=0$

رابطه‌ی اخیر برای هر $k\in Z$ برقرار است. بنابراین معادله بی‌شمار ریشه به‌صورت زیر دارد:

$k=\frac{5}{3x-7}\Rightarrow x=\frac{7k+5}{3k}$

برای هر $k\in z$ $\neq 0$ ریشه‌ای از معادله به‌دست می‌آید.

خاصیت۶. اگر x و y دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$[x+y]=[x]+[y]+1$ یا $[x+y]=[x]+[y]$

برهان: برای هر $y\in\mathbb{R}$ و x داریم:

$x=[x]+\alpha\ ;\ 0\le\alpha<1$

$y=[y]+\beta\ ;\ 0\le\beta<1$

اکنون فرض کنیم $[x]=n$ و $[y]=m$ که $m\in Z$ و n؛ پس:

$x+y=[x]+[y]+\alpha+\beta$

$\Rightarrow x+y=n+m+\alpha+\beta$

$\Rightarrow[x+y]=[n+m+\alpha+\beta]$

$\Rightarrow[x+y]=n+m+[\alpha+\beta]$

$\Rightarrow[x+y]=[x]+[y]+[\alpha+\beta]\quad(1)$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{cases}0\le\alpha<1\\0\le\beta<1\end{cases}\Rightarrow 0\le\alpha+\beta<2$$

بنابراین دو حالت را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: اگر $0\le\alpha+\beta<1$ ، بنابراین $[\alpha+\beta]=0$. در نتیجه با توجه به رابطه‌ی ۱ داریم:

$[x+y]=[x]+[y]$

حالت دوم: اگر $1\le\alpha+\beta<2$ ، پس $[\alpha+\beta]=1$. در نتیجه با توجه به رابطه‌ی ۱ داریم:

$[x+y]=[x]+[y]+1$

نتیجه: با توجه به خاصیت۶ برای عددهای حقیقی x و y می‌توان نوشت:

$[x+y]\le[x]+[y]$

منابع

۱. امیری، حمیدرضا و صدر، میرشهرام و حسینی، سیدعلی. خودآموز ریاضیات۲. مؤسسه‌ی آموزش از راه دور. چاپ دوم. ۱۳۸۵.

۲. قندهاری، احمد و امیری، حمیدرضا. تابع. انتشارات مدرسه‌ی برهان. چاپ اول. ۱۳۷۶.

۳. فرهنگ ریاضیات. گروه ریاضی انتشارات مدرسه. انتشارات مدرسه‌ی برهان. چاپ سوم. ۱۳۸۵.

۴. شهریاری، پرویز. ریاضیات محاسبه‌ای۳. انتشارات مجید. چاپ دوم. ۱۳۷۵.