۲

دنباله‌های عددی

دکتر محمدصادق عسگری
عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد مرکز

تعریف زیردنباله‌ی اعداد طبیعی

اگر $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ی اعداد طبیعی باشد، آن‌گاه با حذف تعداد متناهی یا تعداد نامتناهی از جملات این دنباله، دنباله‌ای جدید حاصل می‌شود که آن را زیردنباله‌ای از اعداد طبیعی می‌گویند. به عبارت دیگر، دنباله‌ی $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ را یک زیردنباله از دنباله‌ی $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند، هرگاه به ازای هر $t \in \mathbb{N}$ و k، اگر $k < t$، آن‌گاه $n_k < n_t$.

به اجمال می‌توان گفت، زیردنباله‌ی $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ از اعداد طبیعی، دنباله‌ای از اعداد طبیعی است که جملاتش رفته رفته بزرگ‌تر و بزرگ‌تر می‌شوند. مثلاً هریک از دنباله‌های:

۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ..., P_n, ...
۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴, ..., ۲n, ...
۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ..., ۲n − ۱, ...

زیردنباله‌هایی از $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ هستند.

تعریف زیردنباله

اگر $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد، آن‌گاه با حذف تعداد متناهی یا تعداد نامتناهی از جملات این دنباله، دنباله‌ای جدید به‌وجود می‌آید که آن را زیردنباله‌ای از دنباله‌ی $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند. همچنین، اگر $N = \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیردنباله‌ای از اعداد طبیعی باشد، در این صورت دنباله‌ی foN را یک زیردنباله از دنباله‌ی $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند که جمله‌ی عمومی آن به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad foN(k) = f(n_k) = f_{n_k}$$

بنابراین $foN = \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ را یک زیردنباله از دنباله‌ی $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند.

تعریف ساده‌تر زیردنباله

اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی و $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک زیردنباله از اعداد طبیعی باشد، در این صورت، دنباله‌ی $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ را یک زیردنباله از دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌گویند.

مثال: دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با جمله‌ی عمومی $a_n = (-1)^n$ مفروض است. می‌دانیم، این دنباله به صورت $-1, 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$ نیز نمایش داده می‌شود.

اگر زیردنباله‌ی $n_i = 2i$ از اعداد طبیعی را در نظر بگیریم، آن‌گاه $a_{n_i} = a_{2i} = (-1)^{2i} = 1$ یک زیردنباله از دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ است که به صورت $1, 1, 1, \dots$ و یا $\{a_{2i}\}_{i=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

هم‌چنین، اگر زیردنباله‌ی $n_i = 2i+1$ از اعداد طبیعی را در نظر بگیریم، آن‌گاه دنباله‌ی $a_{n_i} = a_{2i+1} = (-1)^{2i+1} = -1$ یک زیردنباله از دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ است که به صورت $-1, -1, -1, \dots$ یا $\{a_{2i+1}\}_{i=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

نکته: در هر دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$؛ زیردنباله‌ی $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ را زیردنباله‌ی حاصل از جملات با اندیس زوج و زیردنباله‌ی $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ را زیردنباله‌ی حاصل از جملات با اندیس فرد می‌گویند.

مثال: در دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ زیردنباله‌های حاصل از جمله‌های با اندیس زوج و اندیس فرد را مشخص کنید.

حل:

زیردنباله‌ی حاصل از جمله‌های با اندیس زوج، دنباله‌ی $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ است که a_{2k} به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k}$$

این زیردنباله به صورت $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{2k}, \dots$ و یا $\left\{\frac{1}{2k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

به طور مشابه، زیردنباله‌ی حاصل از جملات با اندیس فرد، دنباله‌ی $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ است که در آن a_{2k-1} برابر است با:

$$a_{2k-1} = \frac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} = \frac{-1}{2k-1}$$

این زیردنباله نیز به صورت $-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \dots, \frac{-1}{2k-1}, \dots$ و یا $\left\{\frac{-1}{2k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ نمایش داده می‌شود.

مثال: هریک از دنباله‌های زیر، یک زیردنباله از دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{n}{n+1}$ است.

$$a_n = \frac{n}{n+1} : \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$$

$$a_{2k} = \frac{2k}{2k+1} : \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \dots, \frac{2k}{2k+1}, \dots$$

$$a_{2k-1} = \frac{2k-1}{2k} : \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{2k-1}{2k}, \dots$$

$$a_{3k} = \frac{3k}{3k+1} : \frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{12}{13}, \dots, \frac{3k}{3k+1}, \dots$$

$$a_{3k+1} = \frac{3k+1}{3k+2} : \frac{4}{5}, \frac{7}{8}, \frac{10}{11}, \frac{13}{14}, \dots, \frac{3k+1}{3k+2}, \dots$$

$$a_{3k-1} = \frac{3k-1}{3k} : \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{11}{12}, \frac{14}{15}, \dots, \frac{3k-1}{3k}, \dots$$

$$a_{2^k} = \frac{2^k}{2^k+1} : \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{8}{9}, \frac{16}{17}, \frac{32}{33}, \dots, \frac{2^k}{2^k+1}, \dots$$

دنباله‌های کران‌دار و بی‌کران

اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشد، در این صورت، مجموعه‌ی $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ را بُرد دنباله می‌گویند. دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را از بالا یا پایین یا به طور کلی، کران‌دار خوانیم، هرگاه مجموعه‌ی بُرد دنباله از بالا یا پایین و یا به طور کلی کران‌دار باشد.

همچنین دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را بی‌کران خوانیم، هرگاه بُرد آن حداقل از یک طرف بی‌کران باشد. کران‌داری یک دنباله را به صورت‌های زیر نیز می‌توان تعریف کرد.

تعریف دنباله‌ی از بالا کران‌دار

گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا کران‌دار است، اگر عدد حقیقی M موجود باشد؛ به طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n \le M$، در این صورت، عدد حقیقی M را یک کران بالای دنباله (کران بالای بُرد دنباله) می‌گویند.

مثال ۱: دنباله‌های $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و

$\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا کران‌دار هستند، زیرا:

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \ n<n+1\Rightarrow\frac{n}{n+1}<1$$

$$\forall n\in\mathbb{N};\ \ -1\le(-1)^n\le 1$$

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \ 2>0\Rightarrow 2n+2>2n\Rightarrow\frac{2n}{n+1}<2$$

مثال ۲: دنباله‌های $\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{2n+1\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{2^n-1\}_{n=1}^{\infty}$ از بالا بی‌کران هستند، زیرا بُرد هر کدام، از بالا بی‌کران است:

$$\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\left\{\frac{n^2+1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$$

$$=\left\{2,\frac{5}{2},\frac{10}{3},\frac{17}{4},\frac{26}{5},\dots\right\}$$

$$\{2n+1\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\{2n+1:n\in\mathbb{N}\}=\{3,5,7,9,11,\dots\}$$

$$\{2^n-1\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\{2^n-1:n\in\mathbb{N}\}=\{0,3,7,15,31,\dots\}$$

تعریف دنباله‌ی از پایین کران‌دار

دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ را یک دنباله‌ی از پایین کران‌دار خوانیم، اگر عدد حقیقی N موجود باشد؛ به طوری که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $N\le a_n$. در این صورت، عدد حقیقی N را یک کران پایین دنباله (کران پایین بُرد دنباله) می‌گویند.

مثال ۱: دنباله‌های $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{n^2+1\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ از پایین کران‌دار هستند، زیرا:

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \ -1\le(-1)^n\le 1$$

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \ n\ge 1\Rightarrow n^2+1\ge 2$$

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \ \frac{3}{4}\le\frac{n+2}{n+3}<1$$

مثال ۲: دنباله‌های $\{-n^2\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{1-3^n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{-n^2}{n+1}\right\}$ از پایین بی‌کران است، زیرا بُرد این دنباله‌ها از پایین بی‌کران است:

$$\{-n^2\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\{-n^2:n\in\mathbb{N}\}=\{\dots,-9,-4,-1\}$$

$$\{1-3^n\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\{1-3^n:n\in\mathbb{N}\}=\{\dots,-26,-8,-2\}$$

$$\left\{\frac{-n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\left\{\frac{-n^2}{n+1}:n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{\dots,\frac{-9}{4},\frac{-4}{3},\frac{-1}{2}\right\}$$

تعریف دنباله‌ی کران‌دار

گوییم دنباله‌ی $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ کران‌دار است، اگر این دنباله از بالا و پایین کران‌دار باشد. به عبارت دیگر، دنباله‌ی فوق را کران‌دار گوییم، اگر عدد حقیقی $M>0$ موجود باشد؛ به طوری که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $-M\le a_n\le M$ یا $|a_n|\le M$.

مثال ۱: دنباله‌های $\left\{\frac{n+1}{2n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ کران‌دار هستند، زیرا:

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \ \frac{1}{2}<\frac{n+1}{2n+1}\le\frac{2}{3}\Rightarrow-\frac{2}{3}\le\frac{n+1}{2n+1}\le\frac{2}{3}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \ \frac{2}{3}\le\frac{n^2+n}{n^2+n+1}<1\Rightarrow-1<\frac{n^2+n}{n^2+n+1}<1$$

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ \ 0<\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}<\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{2}$$

مثال ۲: دنباله‌های $\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{2^n+n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ بی‌کران هستند، زیرا بُرد این دنباله‌ها حداقل از یک طرف بی‌کران است:

$$\{(-1)^n n\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\{\dots,-3,-1,2,4,\dots\}$$

$$\{2^n+n\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\{3,6,11,20,\dots\}$$

$$\left\{\frac{(-1)^n n^2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}\ :\text{بُرد دنباله}=\left\{\dots,\frac{-25}{6},\frac{-9}{4},\frac{-1}{2},\frac{4}{3},\frac{16}{5},\dots\right\}$$

تعاریف کران‌داری یک دنباله را می‌توان با علائم ریاضی به شکل زیر بیان کرد:

a_n از بالا کران‌دار است $\Leftrightarrow \exists M\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{N}:\ a_n\le M$

a_n از بالا بی‌کران است $\Leftrightarrow \forall M\in\mathbb{R}\ \ \exists n\in\mathbb{N}:\ a_n>M$

a_n از پایین کران‌دار است $\Leftrightarrow \exists N\in\mathbb{R}\ \ \forall n\in\mathbb{N}:\ N\le a_n$

a_n از پایین بی‌کران است $\Leftrightarrow \forall N\in\mathbb{R}\ \ \exists n\in\mathbb{N}:\ a_n<N$

a_n کران‌دار است $\Leftrightarrow \exists M>0\ \ \forall n\in\mathbb{N}:\ |a_n|\le M$

a_n بی‌کران است $\Leftrightarrow \forall M>0\ \ \exists n\in\mathbb{N}:\ |a_n|>M$