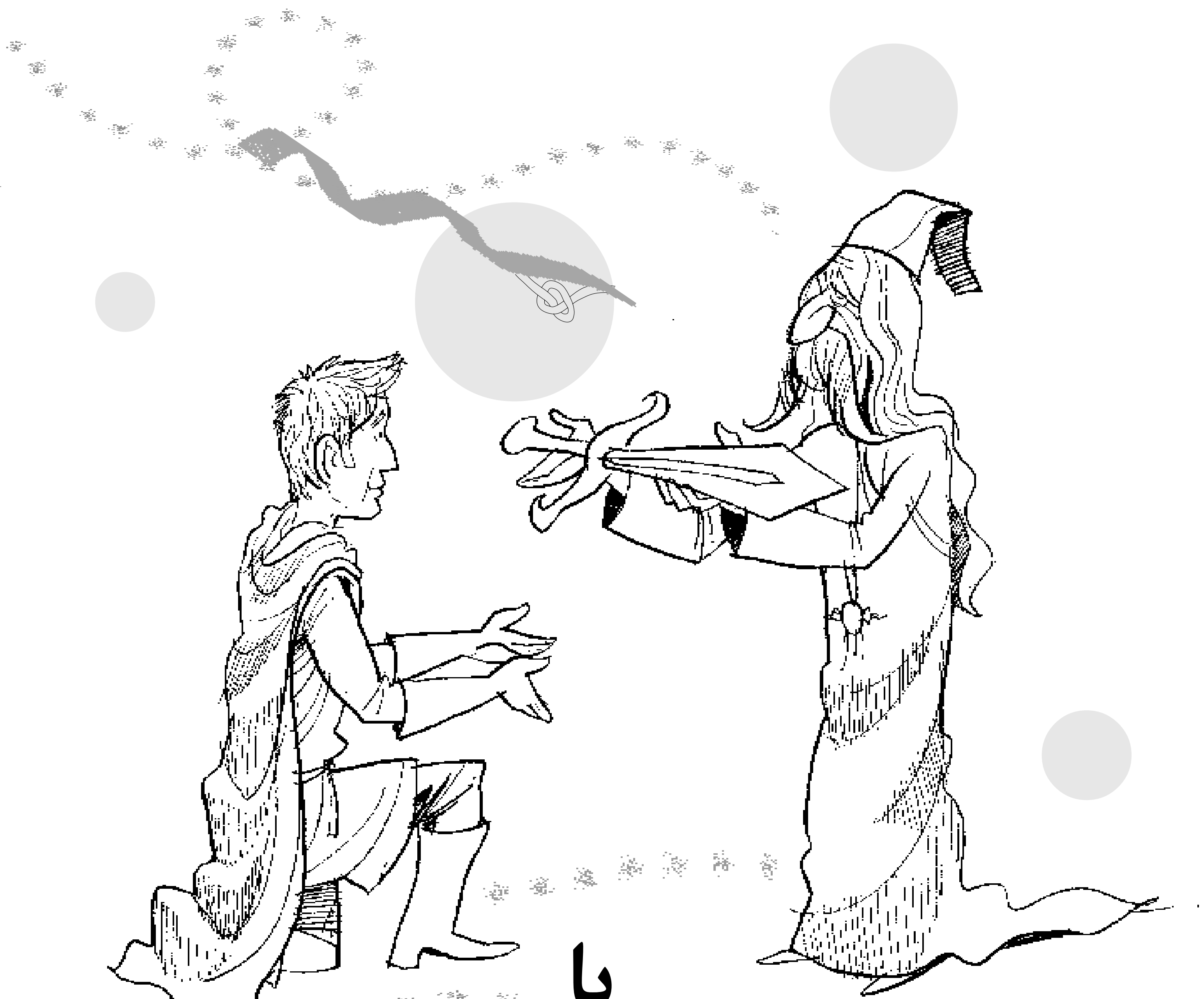


با راهیان المپیادهای ریاضی

قسمت ۵

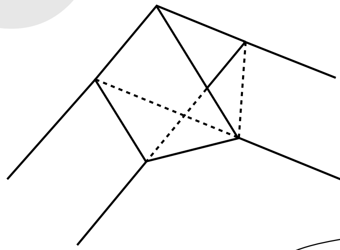
● غلامرضا یاسی‌پور

سؤال‌ها

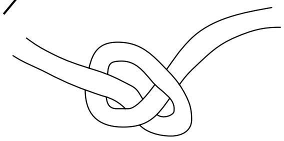
چندضلعی‌های منتظم

در این بخش، به بحث درباره‌ی دو روشی می‌پردازیم که برای حل مسائل مربوط به چندضلعی‌های منتظم به کار می‌روند.

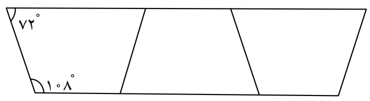
روش اول شامل استفاده از تقارن‌های این چندضلعی‌هاست. این روش را با واقعیت جالب مربوط به ترسیم پنج ضلعی منتظم توضیح می‌دهیم. البته روش کلاسیک ترسیم این چندضلعی با خط‌کش و پرگار موجود است، اما راه ساده‌تری نیز برای انجام این کار وجود دارد. بر نواری کاغذی، ساده‌ترین گره، گره‌ی یک پیچی را انجام می‌دهیم. سپس آن را مانند شکل ۱ تسطیح می‌کنیم. پس از بریدن دو سر نوار، پنج ضلعی منتظم به دست می‌آید.



شکل ۱



برای متقاعد شدن در این مورد که پنج‌ضلعی به‌دست آمده منتظم است، شکل۲ را ملاحظه کنید. در این شکل، پنج‌ضلعی مزبور از تا کردن ذوزنقه‌های متساوی‌الساقین برابر حاصل شده است. ویژگی توضیح‌دهنده‌ی این پدیده آن است که با دوران پنج‌ضلعی، اقطار پنج‌ضلعی را می‌توان به یکدیگر تبدیل کرد و به این ترتیب، ذوزنقه‌های تعیین شده با سه ضلع و یک قطر را می‌توان با عمل دوران، یکی از دیگری به دست آورد.



شکل ۲

در روش دوم از مثلثات استفاده می‌کنیم. این روش یا از تحویل روابط متری به اتحادهای مثلثاتی بهره می‌گیرد، یا به استفاده از اعداد مختلطی رجوع می‌کند که به صورت مثلثاتی نوشته شده‌اند. مثال استفاده از مثلثات را با مسأله‌ی زیر به‌دست می‌دهیم؛ مثالی که به توصیف رابطه‌ای می‌پردازد که در چندضلعی منتظمی با ۱۴ ضلع برقرار است:

فرض می‌کنیم $A_1A_2A_3\ldots A_{14}$، چندضلعی منتظمی با ۱۴ ضلع و محاط در دایره‌ای به شعاع R باشد. ثابت کنید:

$$A_1A_3^2 + A_1A_7^2 + A_3A_7^2 = 7R^2$$

طول‌های سه قطعه‌ی مورد بحث را بر حسب زوایا، و R (شعاع دایره‌ی محیطی چندضلعی) بیان می‌کنیم. از آن‌جا که وترهای A_1A_3، A_3A_7 و A_1A_7 در کمان‌هایی به ترتیب به اندازه‌های $\pi/7$، $2\pi/7$ و $3\pi/7$ محاط شده‌اند (شکل۳)، طول‌هایشان برابر $2R\sin\pi/7$، $2R\sin 2\pi/7$ و $2R\sin 3\pi/7$ است. درنتیجه، اتحاد مورد اثبات با اتحاد زیر هم‌ارز است.

$$4R^2\left(\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}\right)=7R^2$$

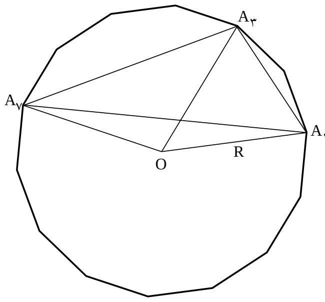
با استفاده از فرمول‌های دو برابر زاویه به‌دست می‌آوریم:

$$4R^2\left(\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^2\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$=2R^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}+1-\cos\frac{4\pi}{7}+1-\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

برای محاسبه‌ی مجموع:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$$



شکل۳

آن را در $\sin 2\pi/7$ ضرب و از فرمول‌های ضرب به جمع استفاده می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2}\left(\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}\right)=-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{7}$$

در این مورد از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که:

$$\sin 8\pi/7=\sin(2\pi-6\pi/7)=-\sin 6\pi/7$$

درنتیجه، مجموع فوق برابر $-\frac{1}{2}$ است، و اتحاد به دست می‌آید.

در ادامه مسائلی را در این زمینه به خوانندگان تقدیم می‌کنیم.

۱. فرض می‌کنیم ABC و BCD دو مثلث متساوی‌الاضلاع مشترک در یک ضلع است. خطی گذرنده از D، AC را در M و AB را در N قطع می‌کند. ثابت کنید زاویه‌ی بین خطوط BM و CN 60° است.

۲. فرض می‌کنیم ABCDE یک پنج‌ضلعی منتظم و M نقطه‌ای درون آن و چنان است که $\angle MBA=\angle MEA=42^\circ$. ثابت کنید: $\angle CMD=60^\circ$.

۳. بر اضلاع یک شش ضلعی دارای مرکز تقارن، مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی بیرون از آن رسم می‌کنیم. رأس‌هایی از این مثلث‌ها که رئوس شش‌ضلعی درونی نیستند، یک شش‌ضلعی منتظم می‌سازند. ثابت کنید که وسط‌های اضلاع این شش‌ضلعی، رأس‌های یک شش‌ضلعی منتظم‌اند.

۴. فرض می‌کنیم $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ یک هفت‌ضلعی منتظم است. ثابت کنید:

$$\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}$$

۵. فرض می‌کنیم $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$، $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ و $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$، هفت‌ضلعی‌های منتظمی با سطوح به ترتیب S_A، S_B و S_C هستند و نیز فرض می‌کنیم: $A_1A_2=B_1B_3=C_1C_4$. ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}<\frac{S_B+S_C}{S_A}<2-\sqrt{2}$$

۶. فرض می‌کنیم $P_1P_2P_3 \ldots P_{12}$ یک دوازده‌ضلعی منتظم است. ثابت کنید که P_1P_5، P_4P_8 و P_3P_6 متقارب‌اند.

۷. درون مربع ABCD، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABK، BCL، CDM و DAN را رسم می‌کنیم. ثابت کنید، وسط‌های قطعات KL، LM، MN و NK، و وسط‌های AN، AK، BK، BL، CL، CM، DM و DN رأس‌های یک دوازده‌ضلعی منتظم‌اند.

جواب‌ها

۱. به‌خاطر بیاورید اگر نقطه‌ی B را حول نقطه‌ی A به اندازه‌ی زاویه‌ی 60° به نقطه‌ی C دوران دهیم، مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است. این موضوع، مستلزم آن است که مثلث متساوی‌الساقین با زاویه‌ی 60° متساوی‌الاضلاع است. این ملاحظه این مطلب را مطرح می‌کند که بسیاری از مسائل شامل مثلث‌های متساوی‌الاضلاع را می‌توان با یافتن دوران 60° پنهانی حل کرد. و همانطور که در زیر خواهیم دید، این همان وضعیت مسئله‌ی مورد بحث‌مان است. فرض می‌کنیم که نقطه‌ی Q محل تقاطع BM با موازی از A با BC است (شکل ۴). ابتدا ثابت می‌کنیم، مثلث AQN متساوی‌الاضلاع است. از آن‌جا که $\angle QAN=60^\circ$، کافی است نشان دهیم دو ضلع این مثلث برابرند. از مثلث‌های مشابه MQA و MBC نتیجه می‌گیریم:

$$AQ/BC=MA/MC=MA/(MA+BC)$$

نیز، از مثلث‌های مشابه NMA و NDB نتیجه می‌گیریم:

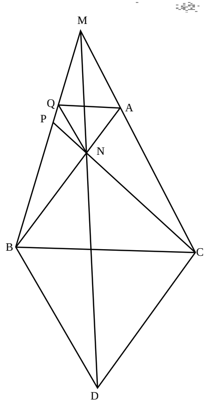
$$NA/NB=MA/BD$$

از آن‌جا که:

$$AB=BC=BD$$

نتیجه می‌شود:

$$NA/AB=MA/(MA+BC)=AQ/AB$$



شکل ۴

بنابراین: AQ=NA. از آن‌جا که مثلث AQN متساوی‌الاضلاع است، Q را می‌توان از N با دورانی 60° حول A به‌دست آورد. و نیز از آن‌جا که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، B را می‌توان از C با همین دوران حاصل کرد. درنتیجه، BM را می‌توان از CN با دورانی 60° به دست آورد که نشان می‌دهد، دو خط مورد بحث زاویه‌ی 60° می‌سازند [کتاب درسی دبیرستانی رومانی].

۲. ثابت می‌کنیم مثلث MCD متساوی‌الاضلاع است. از آن‌جا که مثلث متساوی‌الاضلاع شکل متقارن‌تری نسبت به مثلث متساوی‌الساقین دارد، ساده‌تر آن است که مسأله را قهقرایی درنظر بگیریم و از یکتایی شکل هندسی مورد بحث استفاده کنیم. به این منظور، فرض می‌کنیم M' نقطه‌ای درون پنج ضلعی منتظم و چنان است که $\overset{\Delta}{M'CD}$ متساوی‌الاضلاع است (شکل ۵). در این صورت، مثلث‌های $CM'B$ و $DM'E$، هر دو با داشتن دو ضلع برابر متساوی‌الساقین‌اند. داریم:

$$\angle M'CB=\angle DCB-\angle DCM'=108^\circ-60^\circ=48^\circ$$

و بنابه تقارن:

$$\angle M'DE=48^\circ$$

بنابراین:

$$\angle M'BC=\angle M'ED=(180^\circ-48^\circ)/2=66^\circ$$

نتیجه می‌شود که:

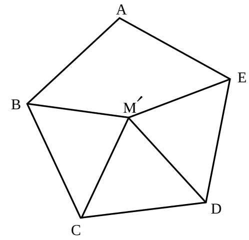
$$\angle M'BA=\angle M'EA=42^\circ$$

بنابراین، $M=M'$ و مطلب به اثبات می‌رسد.

۳. برای حل مسأله، از مثلثات و دقیق‌تر، از اعداد مختلط نوشته شده به صورت مثلثاتی استفاده می‌کنیم. با قرار دادن شکل هندسی مورد بحث در صفحه‌ی مختلط، هر رأس را به مختصات اعداد مختلطی وابسته می‌کنیم که آن را به عنوان یک نقطه با همان حرف نمایش می‌دهیم. فرمول‌های جمع مربوط به سینوس و کسینوس مبین آن هستند که ضرب در $e^{i\alpha}$، دوران

پاد ساعتگردی به اندازه‌ی زاویه‌ی α حول مبدأ به دست می‌دهد.

دستگاه مختصاتی چنان اختیار می‌کنیم که مبدأ آن در مرکز تقارن شش‌ضلعی منتظم باشد. فرض می‌کنیم، $A_۱A_۲A_۳A_۴A_۵A_۶$ شش‌ضلعیی در جهت ساعتگرد، و $A_۲A_۳B_۲$ ، $A_۳A_۴B_۳$ ، $A_۴A_۵B_۴$ ، $A_۵A_۶B_۵$ ، $A_۶A_۱B_۶$ و $A_۱A_۲B_۱$ مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع، و $C_۱$ ، $C_۲$ ، $C_۳$ ، $C_۴$ ، $C_۵$ و $C_۶$ به ترتیب، وسط‌های قطعات $B_۱B_۲, B_۲B_۳, \ldots, B_۶B_۱$ باشند. از آن‌جا که $B_۱$ از دوران $A_۲$ حول $A_۱$ ، به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۳}$ ، در جهت پاد ساعتگرد به دست آمده است.



شکل ۵

$$B_۱ = A_۱ + e^{i\frac{\pi}{۳}}(A_۲ - A_۱) = (۱ - e^{i\frac{\pi}{۳}})A_۱ + e^{i\frac{\pi}{۳}}A_۲$$
$$= e^{-i\frac{\pi}{۳}}A_۱ + e^{i\frac{\pi}{۳}}A_۲$$

به همین ترتیب،

$$B_۲ = e^{-i\frac{\pi}{۳}}A_۲ + e^{i\frac{\pi}{۳}}A_۳$$

نتیجه می‌گیریم که:

$$C_۱ = \frac{۱}{۲}(e^{-i\frac{\pi}{۳}}A_۱ + A_۲ + e^{i\frac{\pi}{۳}}A_۳)$$

$$C_۲ = \frac{۱}{۲}(e^{-i\frac{\pi}{۳}}A_۲ + A_۳ + e^{i\frac{\pi}{۳}}A_۴)$$

از طرف دیگر، اگر $C_۱$ را حول مبدأ، در جهت ساعتگرد، به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۳}$ دوران دهیم، نقطه‌ای به مختصات $\frac{۱}{۲}(e^{-i\frac{۲\pi}{۳}}A_۱ + e^{-i\frac{\pi}{۳}}A_۲ + A_۳)$ را به دست می‌آوریم که همان $C_۲$ است؛ زیرا بنابه تقارن: $A_۴ = -A_۱$ ، و:

$$e^{-۲\pi i/۳} = -e^{\pi i/۳}$$

همین استدلال را برای نشان دادن این موضوع به کار می‌بریم که C_i از دوران $C_{i+۱}$ حول مبدأ، در جهت ساعتگرد، به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۳}$ ، به‌دست می‌آید. درنتیجه، $C_۱C_۲C_۳C_۴C_۵C_۶$ شش‌ضلعی منتظمی به مرکز مبدأ است.

۴. این مسئله شباهت بسیاری با مسئله‌ای دارد که در مقدمه‌ی این بخش حل کردیم، و از همان نوع اعمال مثلثاتی باید استفاده کنیم. شش‌ضلعی مورد بحث را در دایره‌ای به شعاع R محاط می‌کنیم. اضلاع AB، AC و AD مقابل کمان‌هایی به اندازه‌های $۲\pi/۷$ ، $۴\pi/۷$ و $۶\pi/۷$ هستند. درنتیجه:

$$AB = ۲R\sin\pi/۷$$
$$AC = ۲R\sin۲\pi/۷$$
$$AD = ۲R\sin۳\pi/۷$$

اتحادی که می‌خواهیم اثبات کنیم، هم‌ارز اتحاد مثلثاتی زیر است:

$$\frac{۱}{\sin\frac{\pi}{۷}} = \frac{۱}{\sin\frac{۲\pi}{۷}} + \frac{۱}{\sin\frac{۳\pi}{۷}}$$

با حذف مخرج‌ها به دست می‌آوریم:

$$\sin\frac{۲\pi}{۷}\sin\frac{۳\pi}{۷} = \sin\frac{\pi}{۷}\sin\frac{۳\pi}{۷} + \sin\frac{\pi}{۷}\sin\frac{۲\pi}{۷}$$

به اثبات این برابری می‌پردازیم. فرمول ضرب به جمع را در مورد هریک از این جملات به کار می‌بریم و به دست می‌آوریم:

$$-\cos\frac{۵\pi}{۷} + \cos\frac{\pi}{۷} = -\cos\frac{\pi}{۷} + \cos\frac{۲\pi}{۷} - \cos\frac{۳\pi}{۷} + \cos\frac{\pi}{۷}$$

از آن‌جا که:

$$۲\pi/۷ + ۵\pi/۷ = ۳\pi/۷ + ۴\pi/۷ = \pi$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\cos۲\pi/۷ = -\cos۵\pi/۷$$
$$\cos۳\pi/۷ = -\cos۴\pi/۷$$

که برابری را اثبات می‌کند [کتاب درسی دبیرستانی رومانی].

تبصره: این اتحاد از قضیه‌ی بطلمیوس که در مورد چهارضلعی محاطی ABCD به کار رفته است نیز به دست می‌آید.

۵. فرض می‌کنیم: $A_۱A_۳ = b$ ، $A_۱A_۴ = c$ و $A_۱A_۲ = a$. مسأله‌ی پیشین نشان می‌دهد:

$$a/b + a/c = ۱$$

از آن‌جا که مثلث‌های $A_۱A_۲A_۳$ و $B_۱B_۲B_۳$ مشابه‌اند:

$$B_۱B_۲ / B_۱B_۳ = a/b$$

درنتیجه:

$$B_۱B_۲ = a^۲/b$$

به همین ترتیب:

$C_1C_2 = a^2 / c$

بنابراین :

$$\frac{S_B + S_C}{S_A} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}$$

در این صورت :

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} > \frac{1}{2}(\frac{a}{b} + \frac{a}{c})^2 = \frac{1}{2}$$

توجه داشته باشید که برابری به این علت ممکن نیست که : $a / b \neq a / c$. این مطلب نیمی از نابرابری را اثبات می‌کند. از طرف دیگر،

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} = (\frac{a}{b} + \frac{a}{c})^2 - \frac{2a^2}{bc} = 1 - \frac{2a^2}{bc}$$

در مثلث $A_1A_3A_4$ ، $A_3A_4 = a$. درنتیجه، با استفاده از قانون سینوس‌ها رابطه‌ی

$$\frac{a^2}{bc} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{7}}{8\sin^2\frac{\pi}{7}\cos^2\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}}$$

$$= \frac{1}{8\cos^2\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}} = \frac{1}{4(\cos\frac{2\pi}{7} + 1)\cos\frac{2\pi}{7}}$$

را به‌دست می‌آوریم که مخرج آن را با استفاده از فرمول‌های دو برابر زاویه، تبدیل کرده‌ایم. از آن‌جا که :

$2\pi / 7 > \pi / 4, \cos 2\pi / 7 < \cos \pi / 4 = \sqrt{2} / 2$

خواهیم داشت :

$$\frac{a^2}{bc} > \frac{1}{4\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$$

نتیجه می‌شود :

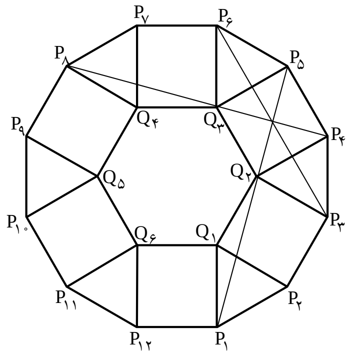
$a^2 / b^2 + a^2 / c^2 < 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$

که سمت راست نابرابری مسأله را به اثبات می‌رساند [المپیاد ریاضی بلغارستان، ۱۹۹۵].

۶. حل مسأله مبتنی بر این ویژگی دوازده ضلعی منتظم است که می‌توان آن را مطابق شکل ۶، به شش مثلث متساوی‌الاضلاع $P_3P_4Q_2$, $P_5P_6Q_3$, $P_7P_8Q_4$, $P_9P_{10}Q_5$, $P_{11}P_{12}Q_6$ و $P_1P_2Q_1$ ، شش مربع $P_{12}P_1Q_1Q_6$ ، $P_{10}P_{11}Q_6Q_5$, $P_8P_9Q_5Q_4$, $P_6P_7Q_4Q_3$, $P_4P_5Q_3Q_2$ و $P_2P_3Q_2Q_1$ ، و یک شش ضلعی منتظم $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ تجزیه کرد. در مثلث متساوی‌الساقین $Q_1P_1Q_2$ ، $\angle P_1Q_1Q_2 = 150^\circ$. درنتیجه: $\angle Q_1Q_2P_1 = 15^\circ$. از آن‌جا که :

$\angle Q_1Q_2P_1 + \angle Q_1Q_2Q_3 + \angle Q_3Q_2P_5 = 15^\circ + 120^\circ + 45^\circ = 180^\circ$

نقاط P_1 ، Q_2 و P_5 بر یک خط راست واقع‌اند. به همین ترتیب، P_4 ، Q_3 و P_8 بر خط راست قرار دارند. آنچه باقی می‌ماند، نشان دادن این نکته است که خط P_3P_6 از مرکز مربع $P_4P_5Q_3Q_2$ می‌گذرد، و این موضوع، از این واقعیت سرچشمه می‌گیرد که شش ضلعی $P_3P_4P_5P_6Q_3Q_2$ نسبت به مرکز این مربع متقارن است [23rd W.L. Putnam Mathematical Competition, 1963].



شکل ۶

۷. راه‌حلی صرفاً هندسی ممکن است، اما اعداد مختلط، تنظیم اطلاعات داده شده را بهتر امکان‌پذیر می‌کنند. با رأس‌های مربع داده شده، مختصات زیر را وابسته می‌کنیم :

$A(-1 - i), B(1 - i), C(1 + i), D(-1 + i)$

در این صورت، مختصات K، L، M و N، به‌ترتیب عبارت‌اند از :

$(\sqrt{3} - 1)i, -(\sqrt{3} - 1), -(\sqrt{3} - 1)i, (\sqrt{3} - 1)$

درنتیجه، وسط‌های قطعات KL، LM، MN و NK دارای مختصات $\pm(\sqrt{3} - 1) \pm (\sqrt{3} - 1)i$ و وسط‌های قطعات AK، BK، BL، CL، CM، DM، DN و AN دارای مختصات زیرند :

$\pm 1 \pm (2 - \sqrt{3})i$ و $\pm(2 - \sqrt{3}) \pm i$

اگر تمام موارد را توسط عامل $(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2} / 2$ ساده کنیم، ملاحظه خواهیم کرد که دوازده رأس دوازده ضلعی، با تمام اختیارات علامت‌های بعلاوه و منها، عبارت‌اند از :

$$\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i, \pm\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \pm \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i, \pm\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \pm \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$$

با نوشتن این اعداد به صورت مثلثاتی ملاحظه می‌کنیم که می‌شوند :

$\cos 2k\pi / 12 + i \sin 2k\pi / 12, k = 0, 1, 2, \ldots, 11$

درنتیجه، مختصات مختلط رئوس دوازده ضلعی موردنظر، ریشه‌های دوازدهم واحدند که ثابت می‌کند، دوازده‌ضلعی، منتظم است [19th IMO, 1977].