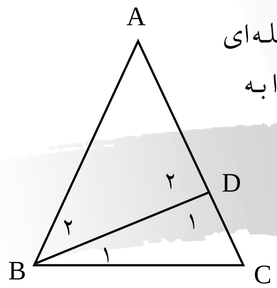
یک مسئله و چند راه‌حل

پاسخ‌های زیادی برای مسئله‌های مسابقه‌ای شماره‌ی ۳۹ به‌دست ما رسیده است. از بین جواب‌ها، تعدادی را به این شرح انتخاب کرده‌ایم:

آقا یا خانم **ط. سالمیان**، مسئله‌ای مربوط به کلاس اول راهنمایی را به صورت زیر حل کرده‌اند:



$\overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \hat{C} = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \quad (1)$

متساوی‌الساقین است

$AD = BD$

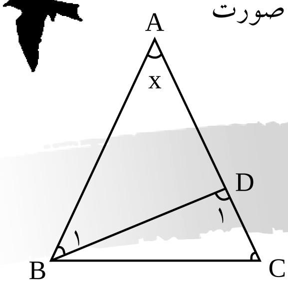
$BD = BC \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C} \quad (2)$

$(3)\ \hat{D}_1 = \hat{A} + \hat{B}_2$ خارجی و (2) و $(1) \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{D}_1$

(1) و (2) و $(3) \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}_1$

ایشان مقدار زاویه‌ی A را پیدا نکردند.

خانم **مرضیه‌ی مروتی** به این صورت نوشته‌اند:



$$\left.\begin{array}{l} BD = BC \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C} \\ AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}_1$$

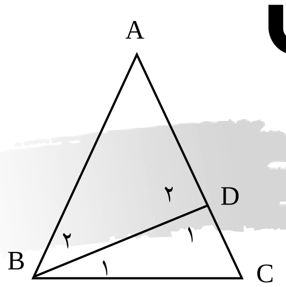
$$\hat{B}_2 + \hat{D}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \hat{C} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{C}}{2} + \hat{C} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \frac{5}{2}\hat{C} = 180^\circ \Rightarrow C = 72^\circ$$

$$\hat{A} = 180 - (\hat{B} + \hat{C}) \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (\hat{C} + \hat{C}) \Rightarrow \hat{A} = 36^\circ$$

اشکال راه‌حل ایشان را پیدا کنید.

اکنون به پاسخ آقای **مراد حسین سالمی‌پور** که این مسئله را از دو روش حل کرده‌اند، توجه کنید. راه‌حل‌های ایشان چه‌طور است؟



■ راه‌حل اول:

$AD = DB \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}_2$

$\hat{D}_1 = \hat{A} + \hat{B} \Rightarrow \hat{D}_1 = 2\hat{A}$

$BD = BC \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = C\hat{A} \Rightarrow \hat{B}_1 = 2\hat{A}$

$\hat{B}_1 + \hat{D}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{A} + 2\hat{A} + 2\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ$

■ راه‌حل دوم: با توجه به شکل داریم:

$\overset{\Delta}{ABD}\ ;\ \hat{A} = \hat{B}_2$

$\hat{D}_1 = \hat{A} + \hat{B}_2 \Rightarrow \hat{A} = \hat{D}_1 - \hat{B}_2 \quad (1)$

$\hat{A} + \hat{D}_2 + \hat{B}_2 = 180^\circ \quad (2) \qquad \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ \quad (3)$

$$\left.\begin{array}{l} B\hat{C}D : \hat{D}_1 = \hat{C} \\ \hat{D}_2 = \hat{B}_1 + \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{B}_1 + \hat{D}_1 \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_2 - \hat{D}_1 \quad (4)$$

$\hat{B}_1 + \hat{D}_1 + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow (4) \quad \hat{D}_2 + \hat{C} = 180^\circ \quad (5)$

$$\left.\begin{array}{l} (3),(5) \Rightarrow 2\hat{D}_2 + \hat{D}_1 + \hat{C} = 360^\circ \\ \hat{D}_2 = \hat{B}_1 + \hat{C} \Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{D}_1 + \hat{C} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow 3\hat{D}_2 = 360^\circ \\ \Rightarrow \hat{D}_2 = 120^\circ \end{array}$$

بنابراین داریم: $\hat{D}_1 = 60^\circ$ و $\hat{C} = 60^\circ$ و $\hat{B}_1 = 60^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B}_2 + \hat{D}_2 = 180^\circ \\ \hat{A} = \hat{B}_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow C\hat{B}_1 + 120^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{B}C = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ \\ \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \end{array}$$

اما به مسئله‌ی مربوط به کلاس دوم راهنمایی، آقای **حسین احمدبیگی** به این صورت پاسخ داده‌اند:

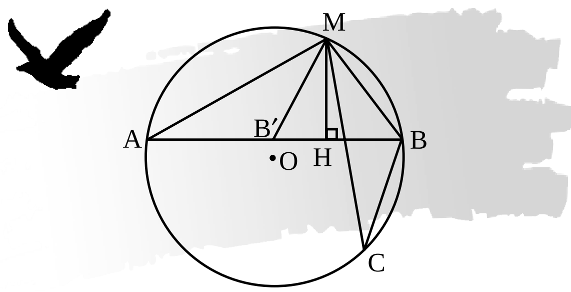
$$\begin{aligned} A &= 50 \times 125^8 + 75 \times 25^8 + 100 \times 5^8 + 15 \\ &= 5^2 \times 2 \times (5^3)^8 + 5^2 \times 3 \times (5^2)^8 + 5^2 \times 4 \times 5^8 + 3 \times 5 \\ &= 5^2 \times 2 \times 5^{24} + 5^2 \times 3 \times 5^{16} + 5^2 \times 4 \times 5^8 + 3 \times 5 \\ &= 5^{26} \times 2 + 5^{18} \times 3 + 5^{10} \times 4 + 3 \times 5 \\ &= (200000003000000040000000030)_5 \end{aligned}$$

سایر پاسخ‌های دریافتی نیز به همین صورت هستند و راه‌حل‌ها تفاوت زیادی ندارند.

در مورد سؤال کلاس سوم نیز چند پاسخ به این شرح دریافت شده است:

آقایان **حسین احمدبیگی** و **مراد حسین سالمی پور** هر دو مسئله را به صورت زیر نوشته‌اند:

روی وتر AB از A به اندازه‌ی BC جدا کرده و B' می‌نامیم و نشان می‌دهیم دو مثلث MBC و AMB' مساوی‌اند.



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{BM}}{\text{۲}}\\ \hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{BM}}{\text{۲}}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}=\hat{C}\\ \overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MC}\Rightarrow AM=MC\\ AB'=BC \quad \text{خودمان مساوی جدا کرده‌ایم.}\end{array}\right\}\overset{\text{(ض ز ض)}}{\Longrightarrow} M\overset{\Delta}{B}C=M\overset{\Delta}{A}B'\Rightarrow MB'=MB$$

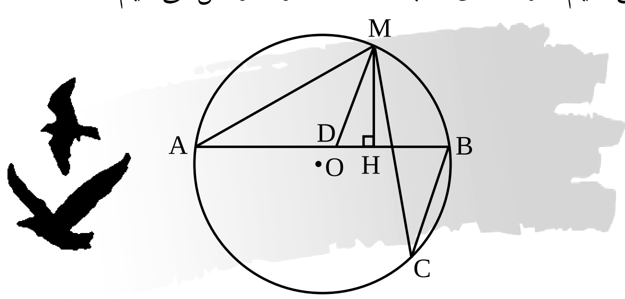
$$\left.\begin{array}{l}MB=MB'\\ MH=MH\\ \hat{H}_{\text{۱}}=\hat{H}_{\text{۲}}\end{array}\right\}\overset{\text{وتر یک ضلع}}{\Longrightarrow} M\overset{\Delta}{B}H=M\overset{\Delta}{B'}H\Rightarrow HB'=BH$$

با توجه به شکل: $AM=AB'+B'M$

با جایگزینی داریم: $AH=BC+BH$

خانم **مهدیه آماس‌زاده** این مسئله را به این صورت حل کرده‌اند:

به اندازه‌ی BC از نقطه‌ی A روی AH جدا می‌کنیم و آن را D می‌نامیم. از نقطه‌ی M به B، C، D و A وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{r}\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MC}\Rightarrow AM=MC\\ \text{زاویه‌های مقابل به یک کمان}\ \hat{A}=\hat{C}\\ BC=AD\end{array}\right\}\Rightarrow M\overset{\Delta}{A}D=M\overset{\Delta}{B}C\Rightarrow BM=MD$$

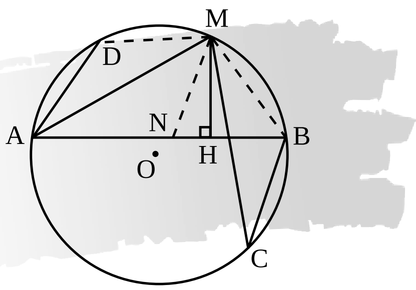
$$BM=DM\Rightarrow M\overset{\Delta}{B}D\ \text{متساوی‌الساقین}\Rightarrow MH\ \text{عمود منصف}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}DH=HB\\ AD=BC\end{array}\right\}\Rightarrow AH=MB+BC$$

آقا یا خانم **ط. سالمیان‌فر** نیز این مسئله را حل کرده‌اند و چون راه‌حل ایشان متفاوت بود، آن را هم ذکر می‌کنیم.

نقاط D و N را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$MD=MN=MB \qquad (\text{۱})$$



$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}_{\text{۱}}=\hat{H}_{\text{۲}}=\text{۹۰}\\ \text{مشترک}\ MH\\ MN=MB\end{array}\right\}\Rightarrow M\overset{\Delta}{N}H=M\overset{\Delta}{B}H\Rightarrow MH=HB \qquad (\text{۲})$$

با توجه به (۱) $MD=MN\Rightarrow \overset{\frown}{MD}=\overset{\frown}{MB}\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}D\overset{\Delta}{A}M=N\overset{\Delta}{A}M\\ \text{مشترک}\ AM\\ MD=MN\end{array}\right\}\Rightarrow D\overset{\Delta}{A}M=N\overset{\Delta}{A}M\Rightarrow AN=AD \qquad (\text{۳})$$

با توجه به (۱) $MD=MB\Rightarrow MA-\underbrace{MD}_{\text{صورت مسئله}}=\overset{\text{رابطه(۱)}}{MC-MB}$

$$\Downarrow$$

$$AD=BC \qquad (\text{۴})$$

(۳) و $(\text{۴})\Rightarrow AN=BC \qquad (\text{۵})$

$$AH=\underbrace{AN}_{(\text{۵})}+\overset{(\text{۲})}{NH}=BC+HB\Rightarrow AH=BC+HB$$