دانش‌آموزان با علاقه‌ی زیاد، تقاضای حل آن‌ها را کردند و پای تابلو دستورات آن را نوشتند و محاسبات را به این صورت انجام دادند:

$$(888)_9 = 9^3 - 1 = 729 - 1 = 728$$

$$(333333)_4 = 4^6 - 1 = 4095$$

$$(2222)_3 = 3^4 - 1 = 81 - 1 = 80$$

از دانش‌آموزان پرسیدم، آیا می‌توان دستوری کلی برای یک عدد چندرقمی در مبنای a که ارقام آن همگی b باشند و هریک از این bها بیشترین ارزش را در پایه‌ی آن، یعنی $b = a - 1$ داشته باشند، اجرا کرد؟ یعنی عدد $(\underbrace{bbbb\cdots bb}_{\text{تا } n})$ به شرطی که $b = a - 1$ باشد، برابر با چیست؟

دانش‌آموزی اجازه خواست تا جواب دهد. گفتم: «بفرمایید.»

گفت: «مبنای عدد یعنی عدد a را پایه‌ی عدد توان‌دار قرار می‌دهیم و تعداد bها را توان آن عدد توان‌دار، و سپس یک واحد کم می‌کنیم؛ یعنی: $a^n - 1$»

حال دانش‌آموزان از این‌که مطلبی جدید آموخته بودند، بسیار خوشحال به نظر می‌رسیدند. پس داریم:

$$(\underbrace{bbbb\cdots bb}_{\text{تا } n})_a = a^n - 1$$

این مطلب را می‌توان اثبات کرد. برای اثبات، ابتدا عددی را که در مبنای a نوشته شده است، با استفاده از همان مبنا بسط می‌دهیم. پس داریم:

$$(\overbrace{bbb\cdots bb}^{\text{تا } n})_a = b \times a^{n-1} + b \times a^{n-2} + \cdots + b \times a^2 + b \times a = b$$

در این مرحله به جای عدد b مقدار آن را که عبارت از $a - 1$ است، قرار می‌دهیم. پس داریم:

$$= (a-1)(a^{n-1}) + (a-1)(a^{n-2}) + \cdots + (a-1)a + (a-1)$$

$$= a^n - a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^2 - a + a - 1$$

$$= a^n - 1 \Rightarrow (\overbrace{bbbb\cdots bb}^{\text{تا } n})_a = a^n - 1$$

مسئله‌ی مسابقه‌ای ۴۲

● مجیدرضا نعمتی

اول راهنمایی

حاصل عبارت مقابل را محاسبه کنید.

$$\frac{3^{89} + 3^{89} + \cdots + 3^{15} + 3^{15} + 3^{14} + 3^{14} + 3^{13} + 3^{13} + 3^{13}}{3^{90}}$$

دوم راهنمایی

اگر $\sqrt{\frac{24}{a+2}} = \frac{2}{3}$ و $a + b = 26 \times 9 - 2$، حاصل $\sqrt{20b}$ را به‌دست آورید.

سوم راهنمایی

به کمک راهبرد رسم شکل ثابت کنید، اگر $x > 0$، در این صورت: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.