اعداد گویای بین دو عدد گویا

● مهدی قربانی

آیا تا کنون فکر کرده‌اید، بین دو عدد گویا مانند $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۴}{۷}$ چند عدد گویا وجود دارد؟

شاید با استفاده از کسرهای مساوی و نوشتن آن‌ها به صورت:

$$\frac{۴}{۷}=\frac{۲۰}{۳۵} \text{ و } \frac{۲}{۵}=\frac{۲۴}{۳۵}$$

بگویید، اعداد $\frac{۲۳}{۳۵}$، $\frac{۲۲}{۳۵}$ و $\frac{۲۱}{۳۵}$ کسرهایی هستند که بین دو کسر $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۴}{۷}$ قرار دارند. در این جا توانستیم سه عدد گویا بیابیم که بین $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۴}{۷}$ هستند. اکنون اگر بخواهیم سه عدد گویا بنویسیم که بین $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۴}{۷}$ باشند، چه خواهید گفت؟ اگر مانند روش قبل عمل کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{۴}{۷}=\frac{۲۰}{۳۵} \text{ و } \frac{۳}{۵}=\frac{۲۱}{۳۵}$$

در این جا راهبرد قبل کارساز نیست. اما با اندکی دقت و با استفاده از اعداد اعشاری می توان نوشت:

$$\frac{۲۰/۱}{۳۵},\frac{۲۰/۲}{۳۵},\frac{۲۰/۳}{۳۵},\dots,\frac{۲۰/۹}{۳۵},\dots$$

و یا

$$\frac{۲۰۱}{۳۵۰},\frac{۲۰۲}{۳۵۰},\frac{۲۰۳}{۳۵۰},\dots,\frac{۲۰۹}{۳۵۰},\dots$$

کاربرد این روش نشان می‌دهد، بی‌شمار عدد گویا بین دو عدد وجود دارند، هرچند که آن دو عدد بسیار به‌هم نزدیک باشند. روش فوق می‌تواند، الگوی مناسبی برای تعیین و نوشتن اعداد گویای بین دو عدد گویای مفروض باشد. اما آیا روش‌های دیگری نیز وجود دارند؟

پاسخ این سؤال مثبت است. در ادامه روش‌های دیگری را می‌توانید ببینید.

۱. می‌دانیم که میانگین دو عدد بین آن دو عدد است. یعنی اگر a و b دو عدد باشند که $a<b$، آن‌گاه: $a<\frac{a+b}{۲}<b$

برای مثال: $\frac{۴}{۵}<\frac{۳}{۵}$ و با محاسبه‌ی میانگین آن‌دو خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}(\frac{۳}{۵}+\frac{۴}{۵})=\frac{۷}{۱۰}$$

و در نتیجه:

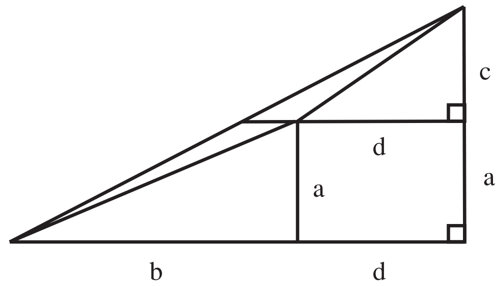
$$\frac{۳}{۵}<\frac{۷}{۱۰}<\frac{۴}{۵}$$

استفاده از این روش هنگامی که اعداد مورد نظر صحیح نباشند، قدری مشکل و وقت‌گیر است.

۲. روش دوم از این مطلب استفاده می‌کنیم که اگر در مورد دو کسر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ داشته باشیم: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$، آن‌گاه: $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$.

یعنی $\frac{a+c}{b+d}$، کسری که صورت آن مجموع صورت دو کسر و مخرج آن مجموع مخرج دو کسر است، عددی است که بین دو کسر قرار دارد. آیا می‌توانید استدلال بیاورید؟

یک روش می‌تواند، دلیل شهودی به صورت زیر باشد. آن را توصیف کنید.



$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

با استفاده از این ویژگی عددهای میانی، به سهولت می‌توان کسری نوشت که بین $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۴}{۷}$ باشد:

$$\frac{۴}{۷}<\frac{۴+۳}{۷+۵}<\frac{۳}{۵}$$

یا

$$\frac{۴}{۷}<\frac{۷}{۱۲}<\frac{۳}{۵}$$

با ادامه‌ی این روش خواهیم داشت:

$$\frac{۴}{۷}<\frac{۷}{۱۲}<\frac{۱۰}{۱۷}<\frac{۱۳}{۲۲}<\frac{۱۶}{۲۷}$$

متوجه شدید که با به‌کارگیری روش‌های متفاوت، عددهای متفاوتی به‌دست می‌آیند و پاسخ‌ها متفاوت می‌شوند. اما مشکلی ایجاد نمی‌شود، زیرا در هر روش عددهایی به‌دست می‌آیند که بزرگ‌تر از $\frac{۴}{۷}$ و کوچک‌تر از $\frac{۳}{۵}$ هستند و از این گونه عددها می‌توان به تعداد بی‌شماری یافت.

تا کنون چند روش را یاد گرفته‌اید که هریک در شرایط خاصی می‌تواند سودمند باشد. آیا روش‌های دیگری نیز وجود دارند؟

۳. با الهام گرفتن از روش استفاده از اعداد اعشاری در ابتدای بحث، می‌توان به روش جالبی رسید که آن را با مثالی توضیح می‌دهیم.

مثال: ۱۰۰ عدد بنویسید که هریک از آن‌ها از $\frac{۱۹}{۲۰}$ کوچک‌تر و از $\frac{۱۸}{۲۰}$ بزرگ‌تر باشند.

ابتدا صورت و مخرج هردو کسر را در ۱۰۱ (یک واحد بیشتر از تعداد اعداد) ضرب می‌کنیم:

$$\frac{۱۸}{۲۰}=\frac{۱۸۱۸}{۲۰۲۰} \text{ و } \frac{۱۹}{۲۰}=\frac{۱۹۱۹}{۲۰۲۰}$$

اکنون دقت کنید که بین دو عدد ۱۹۱۹ و ۱۸۱۸ صد عدد صحیح وجود دارد:

۱۹۱۸ و ۱۹۱۷ و ... و ۱۸۲۱ و ۱۸۲۰ و ۱۸۱۹

بنابراین صد عددی که از $\frac{۱۹}{۲۰}$ کوچک‌تر و از $\frac{۱۸}{۲۰}$ بزرگ‌تر هستند، می‌توانند چنین باشند:

$$\frac{۱۸۱۹}{۲۰۲۰},\frac{۱۸۲۰}{۲۰۲۰},\frac{۱۸۲۱}{۲۰۲۰},\ldots,\frac{۱۹۱۷}{۲۰۲۰},\frac{۱۹۱۸}{۲۰۲۰}$$