

هندسه ی کروی

● اعظم کچوئی

● فاطمه آریان

حال فرض کنید روی سطح یک کره راه می روید. اگر مسیر خود را به طور مستقیم پیش گیرید، به کجا خواهید رسید؟ آیا به مکان اول خود باز نخواهید گشت؟

هدف: آشنایی دانش آموزان با هندسه ی کروی و کاربردهای آن.
وسایل مورد نیاز: کره ی جغرافیایی، عکس (یا رایانه)، نخ.

□ اندکی تأمل

تا کنون با سطوح صاف و تخت سروکار داشتیم و روی این سطوح، خطوط راست رسم می کردیم. اما آیا روی سطح کروی هم، خطوط راست وجود دارند؟

به کره ی جغرافیایی دقت کنید (شکل ۱).

۱. آیا می توانید خط راستی روی آن رسم کنید؟

۲. تجسم کنید که روی سطح صافی، به طور مستقیم راه می روید. مسیر شما چگونه است؟

□ معرفی درس

ویژگی های سطح کروی با ویژگی های سطح صاف و تخت تفاوت دارد. بنابراین برای پاسخ به سؤالات فوق، در مورد سطوحی که مانند سطح کاغذ صاف نیستند، مجبوریم نوع دیگری از هندسه را به کار بندیم. در این درس با یکی از هندسه های جدید به نام هندسه ی کروی آشنا خواهیم شد. اما در ابتدا مقدمه ی کوتاهی از تاریخچه ی هندسه بیان می کنیم.

□ مقدمه

تا کنون از اصولی استفاده می کردیم که اقلیدس آن ها را حدود ۳۰۰ سال پیش از میلاد مسیح برای اولین بار در کتاب «اصول» خود جمع آوری کرده بود و بر اساس این اصول که آن ها را بدون اثبات پذیرفته بود، قضایا را اثبات می کرد. به این نوع هندسه، هندسه ی اقلیدسی گویند. پنج اصل مهم این هندسه عبارت اند از:

۱. از هر دو نقطه ی مشخص فقط یک خط راست می گذرد.

۲. هر پاره خط را می توان به میزان دلخواه امتداد داد.

۳. با هر نقطه و هر طولی می توان دایره ای به مرکز آن نقطه و به شعاع آن طول رسم کرد.

۴. همه ی زوایای قائمه با هم برابرند.

۵. از هر نقطه ی خارج از یک خط، فقط یک خط موازی با خط مذکور می توان رسم کرد.

(برای هر اصلی یک مثال ذکر شود.)

همان طور که می بینید، اگر فضای مورد نظرمان را بدون هیچ مانع



شکل ۱. نمایی از کره ی جغرافیایی

به گونه‌ای به هم وصل شوند که اگر نخ به طور کامل دور کره یا توپ را بگیرد، یکی از بزرگ‌ترین دایره‌های روی سطح کره را نشان دهد.

بنابراین، در هندسه‌ی کره‌ی:

«خطوط راست، بزرگ‌ترین دایره‌های روی سطح

کره‌ی اند و قطر آن‌ها با قطر کره برابر است.»

توازی

اگر از شما پرسند که از یک نقطه‌ی خارج یک خط، چند خط موازی با آن می‌توان رسم کرد، چه پاسخی می‌دهید؟
قبل از پاسخ به این سؤال، اجازه دهید دو خط موازی را تعریف کنیم:

«دو خط را موازی گویند، هرگاه در هیچ نقطه‌ای همدیگر را

قطع نکنند.»

اینک به سؤال فوق پاسخ می‌دهیم. تا کنون فرا گرفته ایم که:

«از یک نقطه‌ی خارج از یک خط، فقط یک خط موازی با آن

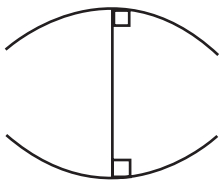
می‌توان رسم کرد» (شکل ۲-الف)

این اصل را «اصل توازی» در هندسه‌ی اقلیدسی گویند. اما در هندسه‌ی کره‌ی چه می‌توان گفت؟ همان‌طور که روی کره‌ی جغرافیایی می‌بینید، همه‌ی نصف‌النهارها، همدیگر را در قطب شمال و قطب جنوب قطع می‌کنند و خطوطی هم‌گرا هستند. از طرف دیگر، اشاره شد که در هندسه‌ی کره‌ی، نصف‌النهارها را خطوط راست می‌نامند. بنابراین بر یک سطح کره‌ی، همه‌ی خطوط راست همدیگر را قطع می‌کنند. به عبارت دیگر، در هندسه‌ی کره‌ی هیچ دو خط راست موازی وجود ندارد.

در هندسه‌ی کره‌ی اصل توازی به این صورت است (شکل ۲-ب):

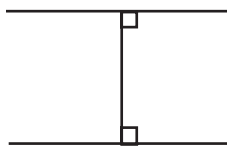
«از یک نقطه‌ی خارج از یک خط، هیچ خط موازی با آن

نمی‌توان رسم کرد.»



الف) خطوط همگرا در هندسه‌ی

کره‌ی



ب) خطوط موازی در هندسه‌ی

اقلیدسی

شکل ۲. وضعیت خطوط در دو هندسه

و محدودیتی در نظر بگیریم، همه‌ی این اصول بدیهی و کاملاً واضح هستند. هم چنین، در فضای اطرافمان که در آن زندگی می‌کنیم، همه‌ی این اصول درست خواهند بود. اما اگر بخواهیم در مورد فواصل بسیار بزرگ صحبت کنیم، چه‌طور؟ آیا خطوط همیشه به همین شکل خواهند بود؟ آیا در هر سطحی و با هر ویژگی، این اصول صادق خواهند بود؟

ریاضی دانان در طول تاریخ، فقط با هندسه‌ی اقلیدسی آشنا بودند، تا این که حدود ۲۰۰ سال پیش دریافتند، با تغییر کوچکی در اصول اقلیدس می‌توان انواع جدیدی از هندسه را معرفی کرد. هم چنین ثابت کردند که هندسه‌های جدید، همانند هندسه‌ی اولیه (هندسه‌ی اقلیدسی) صحیح هستند و با توجه به شرایط باید از یکی از انواع هندسه استفاده کرد. قابل توجه است که تلاش دانشمندان ایرانی از جمله خواجه نصیرالدین طوسی، به ایجاد این شاخه از هندسه کمک زیادی کرده است.^۱

یکی از این هندسه‌های جدید «هندسه‌ی کره‌ی» است که در ادامه با آن آشنا می‌شوید.

ارائه‌ی درس

خط راست

بر سطح یک کاغذ دو نقطه تعیین کنید و فاصله‌ی دو نقطه از یکدیگر را اندازه بگیرید. آیا می‌توان برای تعیین فاصله‌ی بین دو نقطه، آن دو را با خطی خمیده به هم وصل کرد و طول خط خمیده را اندازه گرفت؟

همان‌طور که می‌دانیم، برای تعیین فاصله‌ی بین دو نقطه از یک صفحه‌ی تخت، باید خط کش را روی خطی گذاشت که از این دو نقطه می‌گذرد. به عبارت دیگر، باید قسمتی از خطی را اندازه گرفت که این دو نقطه را به‌طور مستقیم به هم وصل می‌کند. در این صورت است که می‌توانیم کمترین طول ممکن را به دست آوریم. به این خط، خط راست گویند. حال کره‌ی جغرافیایی را در نظر بگیرید و روی آن قطب شمال را به قطب جنوب وصل کنید. به نحوی باید این دو نقطه به هم وصل شود که خط واصل کمترین طول را داشته باشد. همان‌طور که می‌بینید، به وسیله‌ی قسمتی از یک نصف‌النهار می‌توان این دو نقطه را به هم وصل کرد. در فضای کره‌ی، به هر یک از این نصف‌النهارها یک خط راست گویند. هم چنین خط استوا یکی از خطوط راست است. توجه کنید که این خطوط همگی یک ویژگی مشترک دارند؛ همه‌ی آن‌ها بزرگ‌ترین دایره‌های موجود بر سطح کره هستند (شکل ۱).

فعالیت: روی کره‌ی جغرافیایی (و یا یک توپ) دو نقطه مشخص کنید و با استفاده از نخ، آن دو را به هم وصل کنید. دو نقطه باید

تعامد

هم چنین با توجه به نوع خطوط، در هندسه ی کروی مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ درجه نیست، بلکه برخلاف آن که در هندسه ی اقلیدسی: «مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است»، در هندسه ی کروی داریم:

«مجموع زوایای داخلی هر مثلث بیش از ۱۸۰ درجه است.»

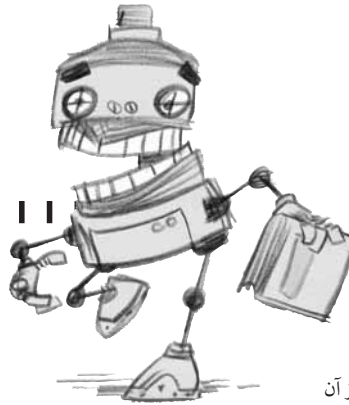


ب) مثلث در هندسه ی کروی



الف) مثلث در هندسه ی اقلیدسی

شکل ۵. مثلث ها در دو هندسه

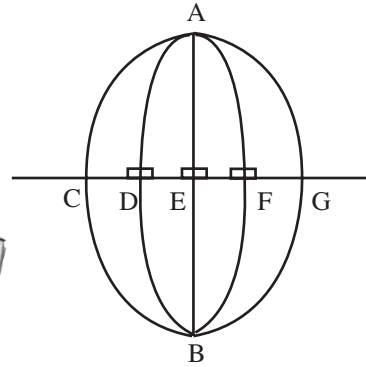


شکل ۳. عمودهای وارد بر یک خط از یک نقطه ی خارج از آن

حال شما را با نکته ی جالب دیگری آشنا می کنیم. در هندسه ی اقلیدسی، از هر نقطه ی خارج از یک خط، چند خط عمود بر آن می توان رسم کرد؟ در هندسه ی اقلیدسی داریم:

«از هر نقطه ی خارج از خط، فقط یک خط عمود بر آن می توان رسم کرد.»

حال به حالت قرار گرفتن نصف النهارها نسبت به خط استوا دقت کنید. نسبت به خط استوا چگونه هستند؟ همه ی نصف النهارها بر خط استوا عمود هستند. این نصف النهارها، عمودهایی هستند که از نقطه ی واقع در قطب شمال (یا قطب جنوب) بر خط استوا وارد شده اند (شکل ۳).



توجه کنید که این تفاوت نیز از تفاوت دو هندسه در اصل توازی نتیجه می شود.

بنابراین برخلاف هندسه ی اقلیدسی، در هندسه ی کروی داریم:

«از هر نقطه ی خارج از یک خط، بی شمار خط عمود بر آن می توان رسم کرد.»

کاربردهای هندسه ی کروی

۱. کاربردهای هندسه ی اقلیدسی آشنا هستیم، اما هندسه ی کروی نیز کاربردهای فراوانی دارد که در ادامه برخی از آن ها را نام می بریم:
۱. خلبان ها و ناخداهای کشتی برای تعیین مسیر از هندسه ی کروی بهره می برند.^۲
۲. برای تعیین جهت قبله روی کره ی زمین، از این نوع هندسه استفاده می شود.^۳
۳. هندسه ی کروی، در فیزیک و مکانیک جدید به کار گرفته می شود (بد نیست بدانید که)
- مطالعه ی هندسه ی کروی، به انیشتین برای ارائه ی نظریه ی نسبیّت عام کمک زیادی کرد.^۴

۱. رجوع کنید به: گرینبرگ، ۱۹۷۹.

۲. رجوع کنید به: <http://www.cs.unm.edu/~joel/Non-Euclid/noneuclidean.html>

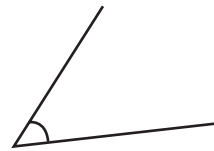
۳. رجوع کنید به: عدالتی و فرخی، ۱۳۸۰.

زوایا و مثلث

با توجه به نوع خطوط و تفاوت خطوط در دو هندسه، شکل زوایا و مثلث ها هم تغییر می یابد. در شکل های ۳ و ۴ این تفاوت را مشاهده می کنید.



ب) زاویه در هندسه ی کروی



الف) زاویه در هندسه ی اقلیدسی

شکل ۴. زاویه ها در دو هندسه

خلاصه

در هندسه ی کروی :

۱. بزرگ ترین دایره های ممکن روی سطح کروی را که قطری برابر با قطر کره دارند، خط راست می نامند.
۲. از یک نقطه ی خارج از یک خط، هیچ خط موازی با آن نمی توان رسم کرد.
۳. از هر نقطه ی خارج از یک خط، بی شمار خط عمود بر آن می توان رسم کرد.
۴. مجموع زوایای داخلی هر مثلث، بیش از 180° درجه است.

نتیجه گیری

با توجه به این که مهندسان، از جمله مهندسان ساختمانی و عمران، همواره از هندسه ی اقلیدسی استفاده کرده اند و از آن بهره برده اند، لذا نمی توان با ایجاد هندسه ی جدید، ارزش اساسی هندسه ی اقلیدسی را نادیده گرفت. تنها می توان گفت، این نوع هندسه برای هر مکان و فضایی قابل استفاده نیست و فقط در برخی موارد از هندسه های دیگری نظیر هندسه ی کروی باید استفاده کرد. با ایجاد این نوع هندسه ها، ریاضی دانان خود را آزادتر یافتند و دریافتند که با بنا نهادن اصولی صحیح، می توان هندسه هایی جدید به وجود آورد، که همگی درست باشند؛ البته هر کدام در فضای مربوط به خودشان. امروزه از هر دو نوع هندسه در علوم گوناگون استفاده می شود.

ارزش یابی پایانی

۱. درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید:

الف) در هر سطحی از یک نقطه ی خارج از یک خط، فقط یک خط موازی با آن می توان رسم کرد.

ب) در هندسه ی کروی، خطوط رفته رفته به هم نزدیک می شوند.

پ) در هندسه ی کروی، از یک نقطه ی خارج از یک خط، هیچ خط عمودی بر آن خط نمی توان رسم کرد.

ت) در هندسه ی کروی، مجموع زوایای داخلی مثلث بیش از 180° درجه است.

۲. اگر در نقطه ی مقابل مکه باشید، جهت قبله کدام است؟ (راهنمایی: جهت قبله در جهت خط راستی است که نقطه ی مورد نظر را به محل مکه می رساند.)

۳. مدلی از یک مثلث در سطح کروی رسم کنید.

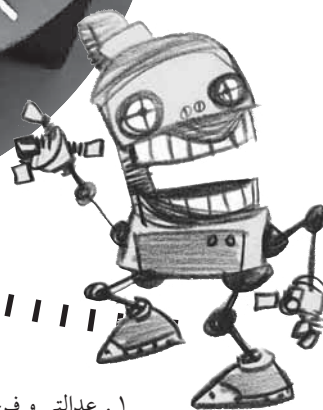
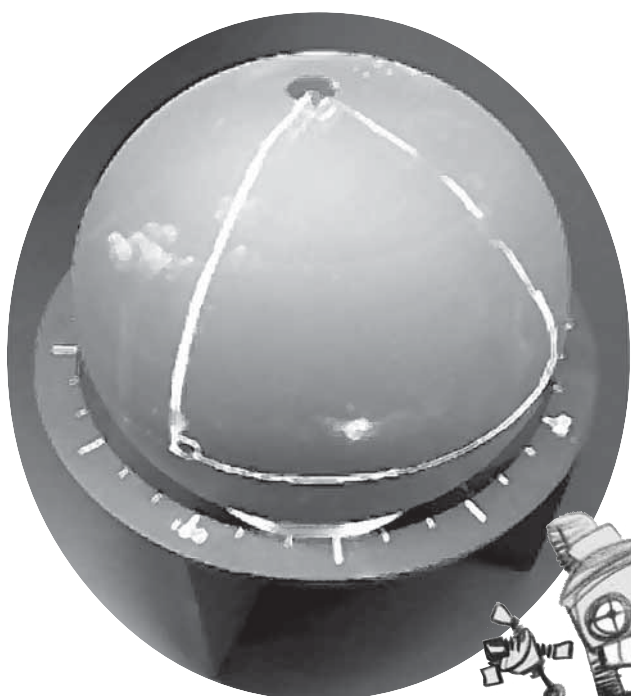
۴. از هر دو نقطه ی مشخص در هندسه ی اقلیدسی، چند خط راست می گذرد؟ در هندسه ی کروی چه طور؟

تحقیق کنید

۱. آیا در هندسه ی کروی چهارضلعی وجود دارد؟ مربع و مستطیل چه طور؟

۲. آیا هندسه ی دیگری وجود دارد که در آن اصل توازی به این صورت باشد:

«از هر نقطه ی خارج از یک خط، بی شمار خط موازی با آن می توان رسم کرد.»



منابع

۱. عدالتی و فرخی (۱۳۸۰). اصول و مبانی جغرافیای ریاضی (زمین در فضا). مشهد. بنیاد پژوهش های اسلامی.
۲. گرینبرگ (۱۹۷۹). هندسه های اقلیدسی و نااقلیدسی، ۱۹۷۹، ترجمه ی شفیعیه (۱۳۶۳). چاپ دوم. تهران. مرکز نشر دانشگاهی.
3. <http://www.columbia.edu/cu/physics>
4. <http://www.cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/noneuclid.html>
5. <http://en.wikipedia.org/wiki/Image://Noneuclid.png>
6. <http://math.rice.edu/~pcmi/sphere>
7. <http://yosefelmy.blogfa.com>