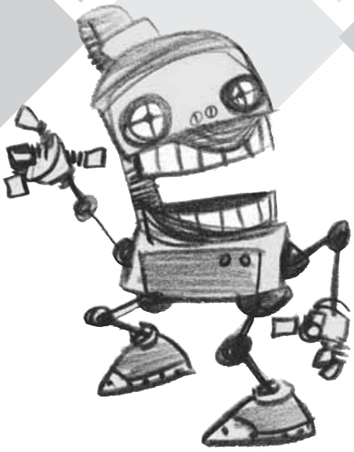


یک مسئله، چند راه‌حل

● امیر رسولی

خانم **مهشید فاضلی کبریا**، پاسخ سؤال اول راهنمایی مسئله‌ی مسابقه‌ای شماره‌ی ۴۰ را برای ما این‌گونه فرستاده‌اند:

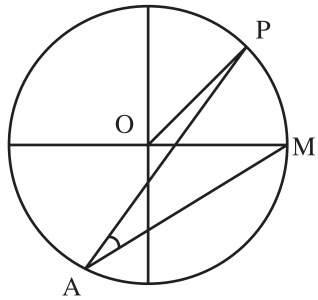
اگر $\frac{۹}{۱۵}$ معکوس عدد ۴/۵ باشد، پس $\frac{۱۵}{۹}$ که مساوی $\frac{۵}{۳}$ است، برابر عدد ۴/۵ است. عدد $(\frac{۱۹}{۵۷})^{۲}$ را هم اگر ساده کنیم، حاصل $(\frac{۱}{۳})^{۲}$ که همان $\frac{۱}{۹}$ است، به‌دست می‌آید. حاصل عدد ۴/۵ هم به صورت کسری $\frac{۹}{۲}$ است. پس داریم:

$$\begin{array}{c|c} \frac{۵}{۳} & \frac{۹}{۲} \\ \hline \frac{۱}{۹} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{\frac{۱}{۹} \times \frac{۹}{۲}}{\frac{۵}{۳}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۳}{۱۰}$$

حاصل $(\frac{۱۹}{۵۷})^{۲}$ برحسب a برابر عدد ۰/۳ است.

خانم **زهرا عزتی**، پاسخ مسئله‌ی سوم راهنمایی آن شماره را به‌شیوه‌ی زیر حل کرده‌اند:

نقاطی که طول و عرض آن‌ها مساوی است، روی نیم‌ساز ربع اول و سوم هستند. پس: $P\hat{O}M = ۴۵^\circ$. و چون کمان PM روبه‌رو به زاویه‌ی مرکزی $P\hat{O}M = ۴۵^\circ$ است، پس: $PM = ۴۵^\circ$. در این صورت زاویه‌ی محاطی A می‌شود: $\hat{A} = \frac{۴۵}{۲} = ۲۲/۵^\circ$.



آقای **حسین احمدبیگی** هر سه سؤال را به این صورت حل کرده‌اند:

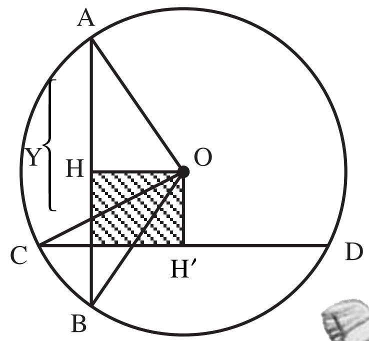
اول راهنمایی:

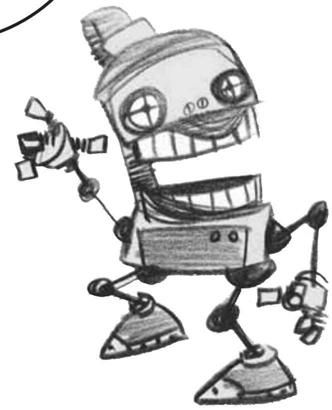
$$\frac{۱}{۴/۵} = ۴/۵ \text{ معکوس} \quad \frac{a}{۱/۵} = \frac{۱}{۴/۵} \Rightarrow a = \frac{۱/۵ \times ۱}{۴/۵} = \frac{۱}{۳}$$

$$(\frac{۱۹}{۵۷})^{۲} = (\frac{۱۹}{۳ \times ۱۹})^{۲} = (\frac{۱}{۳})^{۲} = a^{۲}$$

دوم راهنمایی:

از O به دو سر وتر AB وصل می‌کنیم . فرض می‌کنیم : HF=k .





$$\left.\begin{array}{l} AH = AF - HF = y - k \\ HB = BF + FH = x + k \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ OH = OH \\ H_۱ = H_۲ = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \overset{\text{وتر یک ضلع}}{\Rightarrow} O\overset{\Delta}{A}H = O\overset{\Delta}{H}B$$

$$\Rightarrow AH = HB \Rightarrow y - k = x + k$$

$$y - x = k + k \Rightarrow y - x = ۲k \Rightarrow \frac{y - x}{۲} = k$$

به همین ترتیب، به دو سر وتر CD نیز وصل می‌کنیم و خواهیم داشت :

$$CH' = H'D$$

فرض می‌کنیم $FH' = L$

$$\left.\begin{array}{l} CH' = cF + FH' = t + L \\ H'D = FD - FH' = z - L \end{array}\right\} ct + L = z - L$$

$$\Rightarrow z - t = L + L \Rightarrow z - t = ۲L \Rightarrow L = \frac{z - t}{۲}$$

مساحت قسمت هاشورخورده $S = k \times L = \frac{y - x}{۲} \times \frac{z - t}{۲} = \frac{(y - x)(z - t)}{۴}$

سوم راهنمایی:

چون نقطه‌ی P طول و عرض مساوی دارد، پس از دو محور به یک فاصله است و روی نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم قرار دارد؛ یعنی :

$$DP = MP = \frac{۹۰}{۲} = ۴۵^\circ$$

و چون زاویه‌ی A یک زاویه‌ی محاطی است، پس نصف کمان مقابلش است :

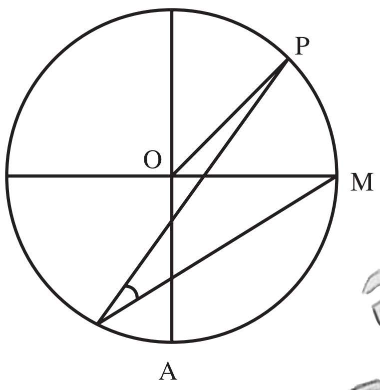
$$\hat{A} = \frac{PM}{۲} = \frac{۴۵^\circ}{۲} = ۲۲/۵^\circ$$

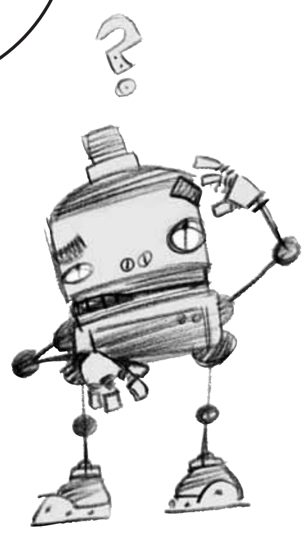
آقای **پویا آقازاده** همین مسئله را به روش زیر حل کرده‌اند :

چون نقطه‌ی P طول و عرض مختصاتی یکسانی دارد، درنتیجه روی نیم‌ساز ربع اول قرار دارد، یعنی P روی نیم‌ساز زاویه‌ی ۹۰ درجه است (درواقع P وسط M و x است) :

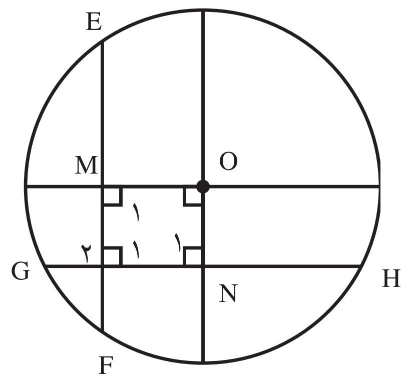
$$P\hat{M}O = \frac{۹۰^\circ}{۲} = ۴۵^\circ$$

زاویه‌ی A محاطی است و طبق قضیه‌ی «زاویه‌ی محاطی با نصف کمان مقابلش مساوی است» می‌گوییم : زاویه‌ی A نصف زاویه‌ی O است؛ یعنی مساوی $\frac{۴۵^\circ}{۲}$. پس: $A = ۲۲/۵^\circ$.





آقای **علی حنفی** مسئله‌ی دوم راهنمایی را این گونه حل کرده‌اند :



$$\left.\begin{array}{l} OM \parallel GH \\ \text{مورب } EF \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{P}_۲ = \hat{M}_۱$$

$$\hat{P}_۱ = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{P}_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{M}_۱ = ۹۰^\circ$$

$y=EP$
$z=PH$
$x=PF$
$t=GP$

$$\Rightarrow \hat{P}_۱ = \hat{O} = ۹۰^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} MO \parallel PN \\ NO \overset{=}{\underset{=}{\parallel}} PM \end{array}\right\} \Rightarrow$$ چهارضلعی MONP متوازی‌الاضلاع است

چهارضلعی MONP مستطیل است

$$\hat{M}_۱ = \hat{O}_۱ = \hat{P}_۱ = ۹۰^\circ \Rightarrow \hat{N}_۱ = ۹۰^\circ \Rightarrow$$

می‌دانیم ON بر وتر GH عمود است و هم‌چنین ثابت می‌شود که چون OM با GH موازی و زاویه‌ی O ۹۰ درجه است، و نقطه‌ی O در وسط قطر دایره قرار دارد، N در وسط GH است. درنتیجه ON عمودمنصف GH است و بنابراین اندازه‌ی GH برابر نصف وتر GH، یعنی $\frac{۱}{۲}(t+z)$ است. و هم‌چنین می‌دانیم GP برابر t است.

پس PN برابر است با :

$$PN = \frac{۱}{۲}(t+z) - t \Rightarrow PN = \frac{z}{۲} - \frac{t}{۲} = \frac{z-t}{۲} \qquad (۱)$$

علاوه بر این، می‌دانیم OM بر وتر EF عمود است و هم‌چنین ثابت می‌شود که چون ON با EF موازی و زاویه‌ی O ۹۰ درجه است و نقطه‌ی O در وسط دایره قرار دارد، M در وسط EF است. درنتیجه OM عمودمنصف EF است و اندازه‌ی FM برابر نصف وتر EF، یعنی $\frac{۱}{۲}(x+y)$ است. هم‌چنین می‌دانیم FP برابر x است،

پس PM برابر است با :

$$PM = \frac{۱}{۲}(x+y) - x \Rightarrow PM = \frac{y-x}{۲} \qquad (۲)$$

با توجه به این‌که MONP مستطیل است، از نتایج ۱ و ۲ می‌فهمیم که مساحت مستطیل برابر است با :

$$S_{MONP} = PN \times PM = (\frac{z-t}{۲})(\frac{y-x}{۲}) = \frac{(z-t)(y-x)}{۴}$$

آقای **حسام نوجوان**، مسئله‌ی اول را به روشی مشابه روش دوستان حل کرده‌اند.

آقا یا خانم **مروتی** (اسم کوچکشان را ننوشته بودند)، مسئله‌ی سوم راهنمایی را به روشی شبیه دیگر دوستان حل کرده بودند.