

محاسبه‌ی کعب یک عدد

• حسین نریمانی
دبیر ریاضی مدرسه راهنمایی غیر انتفاعی
حضرت ابوالفضل (ع) ناحیه ۳ اصفهان

$$a = (n+x)^3 = n^3 + 3n^2x + 3nx^2 + x^3$$

با توجه به این که $0 \leq x < 1$ است، از حجم های x^3 و $3nx^2$ که کمتر از بقیه هستند، صرف نظر می کنیم و تساوی فوق را به یک تساوی تقریبی تبدیل می کنیم؛ یعنی:

$$a \approx n^3 + 3n^2x \Rightarrow x \approx \frac{a-n^3}{3n^2}$$

نتیجه‌ی این عملیات به صورت زیر است:

$$\sqrt[3]{a} = n+x = n + \frac{a-n^3}{3n^2}$$

کعب نقصانی و اضافی یک عدد

n کعب نقصانی و $n+1$ کعب اضافی عدد a با تقریب کمتر از ۱ واحد است.

الف) اگر عدد a به کعب نقصانی (یعنی n) نزدیک تر باشد، از دستور ۱ استفاده می کنیم:

$$\sqrt[3]{a} = n + \frac{a-n^3}{3n^2} \quad \text{دستور (۱)}$$

ب) اگر عدد a به کعب اضافی (یعنی $n+1$) نزدیک تر باشد از دستور ۲ استفاده می کنیم.

$$n+1 = m \Rightarrow \sqrt[3]{a} = m - \frac{m^3 - a}{3m^2} \quad \text{دستور (۲)}$$

مثال ۱: $\sqrt[3]{70} = \sqrt[3]{4^3 + 6} = 4 + \frac{6}{3 \times 4^2} = 4/125$

مثال ۲: $\sqrt[3]{120} = \sqrt[3]{5^3 - 5} = 5 - \frac{5}{3 \times 5^2} = 4/94$

مثال ۳. کعب عدد ۹۵ که تقریباً میانگین ۶۴ و ۱۲۵ از دو دستور یکی است.

$$\sqrt[3]{95} = 4 + \frac{95-64}{3 \times 4^2} = 4/6 \quad \text{دستور (۱)}$$

$$\sqrt[3]{95} = 5 - \frac{125-95}{3 \times 5^2} = 4/6 \quad \text{دستور (۲)}$$

روش محاسبه‌ی کعب یک عدد را به دو شیوه محاسبه شهودی هندسی و تکنیک مطرح است.

در این مقاله روش پیدا کردن کعب یک عدد را به روش شهودی هندسی بیان می کنیم. برای محاسبه‌ی کعب عددی مانند a که کعب نقصانی آن با تقریب کمتر از ۱ واحد، n است، داریم:

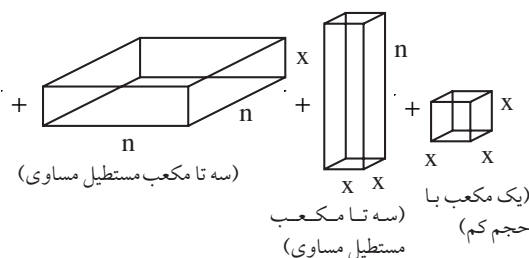
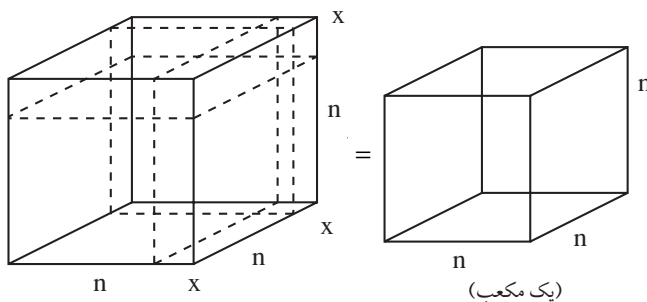
$$n^3 \leq a < (n+1)^3 \Rightarrow n \leq \sqrt[3]{a} < n+1$$

اکنون مکعبی را در نظر می گیریم که حجم آن برابر a و اندازه‌ی هر بعدش $n+x$ است.

یعنی می توان نوشت:

$$n^3 \leq a \Rightarrow a = (n+x)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{a} = n+x$$

این مکعب را با سه برش، یک برش از پهلو راست (یا چپ)، یک برش از بالا (یا پایین) و یک برش هم از پشت (یا جلو) به دو مکعب و شش مکعب مستطیل تبدیل می کنیم. در این شکل خطوط قرمز محل برش ها را نشان می دهد.



محاسبه‌ی کعب یک عدد «تکنیک»

می‌خواهیم از عدد هفت رقمی $\overline{abcdefg}$ کعب بگیریم. آن را به صورت $\sqrt[3]{\overline{abcdefg}}$ می‌نویسیم و از سمت راست سه رقم سه رقم جدا می‌کنیم.

فرض کنید کعب عدد a ، x است. مکعب x را از a کم می‌کنیم. فرض کنید اولین باقی مانده‌ی جزئی r است.

سه رقم بعدی را پایین می‌آوریم، کنار r می‌نویسیم و از سمت راست دو رقم جدا می‌کنیم. عدد \overline{rb} را در نظر می‌گیریم، x را مجذور و در عدد 3 ضرب می‌کنیم.

| | |
|-----------------------|------------------------|
| $\sqrt[3]{123456789}$ | 498 |
| -64 | $4^3 = 64$ |
| 59456 | $3 \times 4^2 = 48$ |
| 123456 | $49^3 = 117649$ |
| -117649 | $3 \times 49^2 = 7203$ |
| 005807789 | $498^3 = 123456192$ |
| 123456789 | |
| -123456192 | |
| 0097 | |

$$\frac{594}{48} \approx 9 \quad \frac{58077}{7203} \approx 8$$

مثال ۵. کعب عدد $79,507$ را حساب می‌کنیم.

| | | |
|--------------------|---------------------|----------------------------|
| $\sqrt[3]{79/507}$ | 4/3 | |
| -64 | $4^3 = 64$ | |
| 15507 | $3 \times 4^2 = 48$ | $\frac{155}{48} \approx 3$ |
| 79507 | $43^3 = 79507$ | |
| -79507 | | |
| 00000 | | |

توجه داشته باشید که برای محاسبه‌ی کعب عددهای اعشاری، تعداد ارقام اعشاری باید مضرب ۳ باشد. اگر تعداد ارقام اعشاری مضربی از ۳ نباشد، با اضافه کردن صفر جلوی آن ارقام، تعداد ارقام اعشاری را به مضرب ۳ تبدیل می‌کنیم.

مثال ۶. کعب عدد 85 را تا یک رقم اعشار حساب کنید.

| | | |
|-------------------|---------------------|----------------------------|
| $\sqrt[3]{85000}$ | 4/3 | |
| -64 | $4^3 = 64$ | |
| 21020 | $3 \times 4^2 = 48$ | $\frac{210}{48} \approx 4$ |
| 85000 | $44^3 = 85184$ | |
| -79507 | $43^3 = 79507$ | |
| 5493 | | |

کعب تقریبی $4/3$ و باقی مانده $5/493$ است.

| | |
|-----------------------|-----------------------|
| $\sqrt[3]{a'bcd'efg}$ | xh |
| $-x^3$ | x^3 |
| $rbcd'$ | $x^2 \times 3 = 3x^2$ |
| $abcd'$ | $(xh)^3$ |
| $-(xh)^3$ | |
| | |
| | |

خارج قسمت $\overline{rb} \div 3x^2$ را می‌یابیم. توجه کنید که خارج قسمت باید یک رقمی باشد و اگر بیشتر شد، حداکثر عدد ۹ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید خارج قسمت « h » باشد. h را جلوی x می‌نویسیم و مکعب عدد دو رقمی \overline{xh} را می‌یابیم. \overline{abcd} را پایین می‌آوریم و $(\overline{xh})^3$ را از آن کم می‌کنیم. توجه کنید اگر $(xh)^3$ از \overline{abcd} بیشتر باشد، باید از h یک واحد کم کنیم تا مکعب عدد جدید، مساوی یا کمتر از \overline{abcd} شود.

باقی مانده جزئی بعدی را به دست می‌آوریم و مانند قبل عمل می‌کنیم و سه رقم سه رقم ارقام را پایین می‌آوریم و عمل را ادامه می‌دهیم تا به باقی مانده‌ی اصلی برسیم.

مثال ۴. کعب عدد 123456789 را حساب می‌کنیم.

