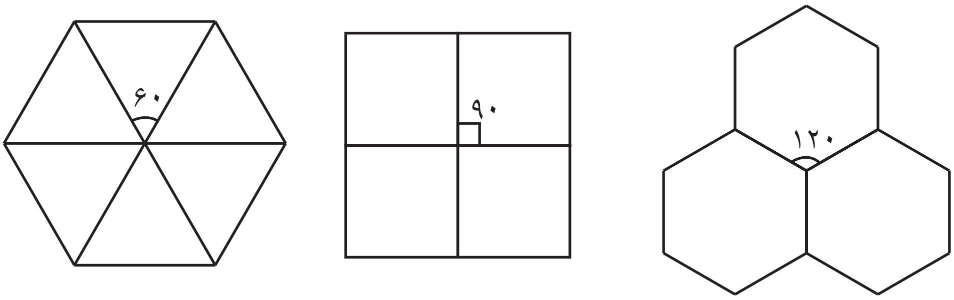
زنبور عسل، معماری ریاضی‌دان

● ط. سالمیان‌فر

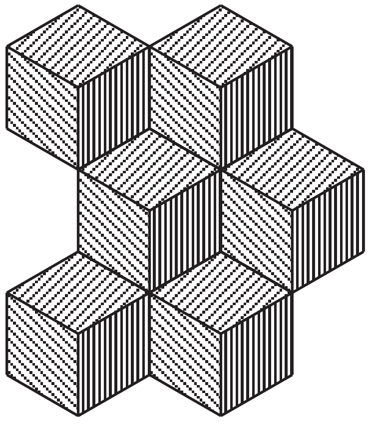
در این مقاله، ما شاهد تلاش برای مصرف کردن حداقل سطح در داخل یک گوشه‌ی تنگ هستیم. قبل از همه باید چندضلعی را به شکلی انتخاب کرد که با تکرار آن بتوان سطح کندو را بدون هیچ فاصله یا شکافی پوشاند. چه شکل‌های منتظمی برای این منظور مناسب‌اند؟

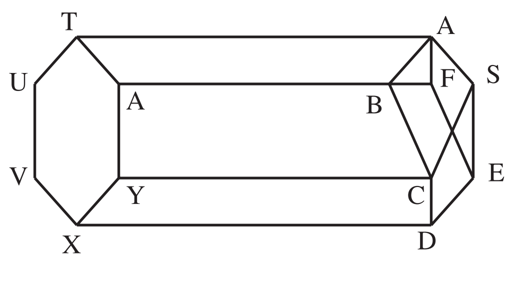
فیثاغورث برای نخستین‌بار به این مطلب توجه کرد که صفحه را دور یک نقطه، تنها با سه نوع از چندضلعی‌های منتظم می‌توان پوشاند. یعنی: مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و شش‌ضلعی منتظم.



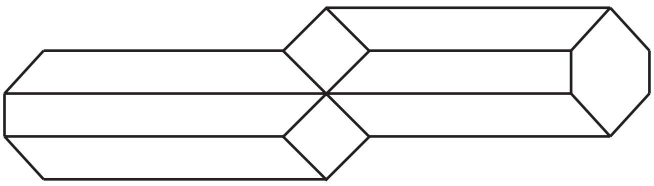
اگر حشره‌ای می‌تواند، با حل سریع و درست یک مسئله‌ی هندسی، ما را دچار شگفتی کند، می‌توان آن‌چه را که ساکنین کندوهای عسل می‌سازند، شاهکار ریاضی نامید و خود زنبورها را معمارانی ریاضی‌دان دانست.

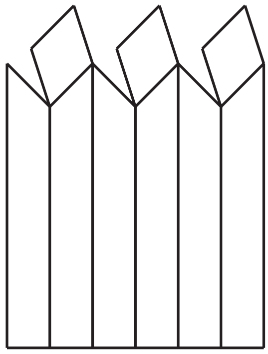
ساختمان شانه‌های کندو را بررسی می‌کنیم. این شانه‌ها از یک رشته شبکه‌های مومی شش‌وجهی تشکیل شده‌اند که در دو قشر چیده شده‌اند و با کف‌های مشترکی به‌هم مربوط‌اند. شکل۱، نمایشی از سوراخ‌ها و شکل کف‌های این شبکه را نشان می‌دهد. کف‌ها مسطح نیستند. هر کف شکستگی دارد و از سه لوزی مساوی درست شده است.

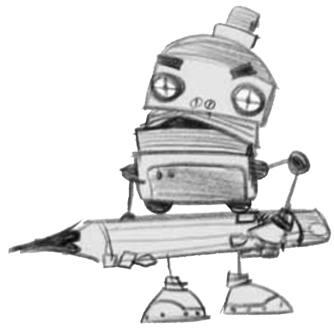




این مطلب را خیلی روشن‌تر می‌توان در یک شبکه‌ی جداگانه (شکل ۲)، و هم‌چنین در دو شبکه‌ای که به یکدیگر متصل شده‌اند (شکل ۳)، ملاحظه کرد. زاویه‌ی ABC لوزی و CSA مساوی ′۵۸ °۱۰۹ و زاویه‌های SCB و SAB مساوی ′۳۲ °۷۰ اند. عمق شبکه ۱۱٫۳ میلی‌متر، عرض هر یک از دیواره‌ها ۲٫۷۱ میلی‌متر و ضخامت آن مساوی ضخامت یک کاغذ تحریر معمولی است. اگر کسی می‌خواهد نمونه‌ی بزرگ شده‌ی شبکه‌ی کندوی زنبور عسل را بسازد، می‌تواند از باز شده‌ی طرح آن در شکل ۴ استفاده کند.

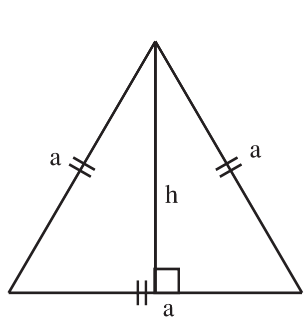






ابتدا به شش گوش بودن شکل شبکه می‌پردازیم. بررسی این مطلب جالب است که چرا زنبور عسل برای مقطع منشور مومی خود، این شکل را انتخاب کرده است. به همین مناسبت، زنبورهای هوشمند درباه‌ی چند ضلعی‌های دیگر حتی فکر هم نکرده‌اند. زیرا در این صورت برای پر کردن سطح کندو می‌باید از دو تا چند نوع متفاوت شبکه استفاده می‌کردند که مستلزم کار بیشتر و پیچیده‌تر می‌بود. به این ترتیب آن‌ها توانستند از یکی از این سه نوع شکل استفاده کنند و آن‌ها از این سه حالت ممکن، شش ضلعی را انتخاب کردند. چرا؟ برای این‌که در بین این سه شکل، وقتی که مساحت‌های مساوی داشته باشند، شش ضلعی کمترین محیط را دارد. یعنی وقتی که خانه‌ها را با قاعده‌ی شش ضلعی می‌سازند، با حداقل مصرف موم، حداکثر حجم را به‌دست می‌آورند.

مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع و شش ضلعی منتظمی را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که مساحت‌های این سه شکل برابر باشد. ببینیم از مقایسه‌ی محیط آن‌ها چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید. برای مثلث داریم:



$$h^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow s = \frac{a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

$$\Rightarrow 4s = a^2\sqrt{3} \Rightarrow a = 2\sqrt{\frac{s}{3}}$$

محیط $p_1 :\ 6\sqrt{\frac{s}{3}}$

$p_2 :\ 4\sqrt{s}$

در مربع با محیط p_2 داریم:

و بالاخره مساحت شش ضلعی منتظم با ضلع b عبارت است از (شش برابر مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع):

$$s = \frac{3b^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2s = 3b^2\sqrt{3} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{2s}{3\sqrt{3}}}$$

$$p_3 :\ 6b = 6\sqrt{\frac{2s}{3\sqrt{3}}}$$

با ساده‌کردن نسبت محیط‌های این شکل خواهیم داشت:

$$p_1 = 6\sqrt{\frac{s}{\sqrt{3}}} \qquad p_2 = 4\sqrt{s} \qquad p_3 = 6\sqrt{\frac{2s}{3\sqrt{3}}}$$

هر سه نسبت را به ۱۶s ساده می‌کنیم

$$\frac{36}{\sqrt{3}}s \qquad 16s \qquad \frac{24}{\sqrt{3}}$$

۱/۲۹   ۱   ۸/۶۶

یعنی کمترین محیط متعلق به همان شش ضلعی است که به وسیله‌ی زنبور عسل انتخاب شده است. آیا به نظر شما گزاف نیست که بگوییم: زنبورها معمارهایی ریاضی‌دان هستند؟