ریاضیات در زندگی و عمل

● پرویز شهریاری

چرا ریاضی‌دان می‌کوشد چیزی را ثابت کند که برای همگان روشن است؟

یکی از مربیان ریاضیات به نام **تیسوف**، روایت جالبی از گفت‌وگوی دو دانش‌آموز را نقل می‌کند:

«...آن‌ها از درس‌ها» معلم‌ها و دوستان خود صحبت می‌کردند... دختر بزرگ‌تر که از درس هندسه گیج شده بود، گفت: خیلی عجیب است! معلم وارد کلاس می‌شود، دو مثلث برابر روی تخته می‌کشد و بعد، تمامی وقت کلاس را تلف می‌کند تا ثابت کند، آن‌ها با هم برابرند. من که هیچ سر درنمی‌آورم!

دختر کوچک‌تر پرسید: حالا چه‌طور می‌خواهی درس را پاسخ بدهی؟

ـ ناچارم از روی کتاب حفظ کنم. البته کار دشواری است که آدم درس را واژه به واژه حفظ کند.

عصر همان روز او را دیدم که کنار پنجره، سخت مشغول حفظ کردنِ درس هندسه‌ی خود بود. پشت‌سرهم تکرار می‌کرد: برای اثبات، مثلث $A'B'C'$ را روی مثلث ABC می‌گذاریم... مثلث $A'B'C'$ را روی مثلث ABC می‌گذاریم...».

روایتِ این مربی ریاضی تازگی ندارد. دبیر ریاضی می‌کوشد برای دانش‌آموزان روشن کند: «عمل جمع دارای ویژگیِ جابه‌جایی است» و مثال می‌آورد: «۷+۴ با ۴+۷ یکی است؛ جابه‌جا کردن جمله‌های جمع، درنتیجه‌ی عمل، یعنی حاصل جمع، تأثیری ندارد...» و اغلب دانش‌آموزان شگفت‌زده‌اند که: «مگر لازم است درباره‌ی مطلب به این روشنی، وقت کلاس گرفته شود؟!»

روزی دانش‌آموزی در راهروی یکی از دبیرستان‌ها از من پرسید: «خب، وقتی باید دو کار را انجام دهیم، مگر فرق می‌کند

---

۵. گزینه‌ی د درست است. با قرینه کردن تمام اعضای Z، به مجموعه‌ی Z- به صورت زیر می‌رسیم. همان‌طور که می‌بینید این مجموعه، اعداد صحیح مثبت را هم دارد.

$-Z=\{\cdots,۲,+۱,۰,-۱,-۲,\cdots\}$

در مورد گزینه‌ی ج نیز باید بدانیم، اعداد منفی اصلاً طبیعی نیستند. در مورد گزینه‌ی د هم باید بدانیم، می‌توانیم اعضای یک مجموعه را جابه‌جا کنیم. پس مجموعه Z همان Z- است.

۶. گزینه‌ی ج درست است.

$$\frac{(-۵)+(+۷)}{۲}=\frac{۷-۵}{۲}=\frac{۲}{۲}=+۱$$

کدام کار را اول و کدام را بعد انجام دهیم؟»

به او گفتم: «می‌خواهی روی صندلی بنشینی. چیزی نوک‌تیز روی صندلی است. اول آن را برمی‌داری، بعد می‌نشینی. آیا می‌توانی اول بنشینی و بعد آن چیز را برداری؟»

و تازه دانش‌آموز متوجه شد، برای انجام دو عمل، همیشه نمی‌توان آن‌ها را نسبت به هم جابه‌جا کرد. ویژگی «جابه‌جایی» همه‌جا برقرار نیست. در خودِ ریاضیات، به جای پیدا کردن حاصل تقسیم ۱۴ بر ۷، نمی‌توان حاصل تقسیم ۷ بر ۱۴ را به‌دست آورد. تقسیم دارای ویژگی جابه‌جایی نیست.

دانش‌آموز، هنوز قانع نشده بود. گفت: «ما هم شعور داریم و هم تجربه. خودمان می‌فهمیم کجا باید از این یا آن ویژگی استفاده کرد و کجا نمی‌توان. چرا این همه **اصل** و **قضیه** را که برای همگان روشن است، باید یاد گرفت و حفظ کرد؟ خودتان می‌گویید: **اصل**؛ یعنی چیزی که واضح است و همه آن را قبول دارند. یا باید همه‌چیز را از همان آغاز ثابت کرد، یا اثبات را از جایی آغاز کرد که درستی مطلب، برای همگان روشن نیست و به استدلال عقلانی و منطقی نیاز دارد.»

گفتم: «حالت اول ممکن نیست. همه چیز را از همان آغاز نمی‌توان ثابت کرد. وقتی شما با دوستتان درباره‌ی موضوعی که با هم اختلاف دارید، به گفت‌وگو نشسته‌اید، ناچارید برای اثبات درستیِ عقیده‌ی خودتان، بر چیزی یا چیزهایی تکیه کنید که او هم قبول دارد. ولی اگر دوست شما هیچ چیزی را، هر قدر واضح باشد، قبول نکند و برای آن دلیل بخواهد، گفت‌وگوی شما به‌جایی نمی‌رسد. برای نمونه، اگر به او بگویید: می‌پذیری که امروز روزِ روشنی است؟ و او بگوید: نه! دلیل بیار. توضیح دهید: خورشید در آسمان است. از آن گذشته، تو همه چیز را می‌بینی؛ مثلاً مرا می‌بینی که رو به روی تو نشسته‌ام. و او پاسخ بدهد: دیدن کافی نیست، باید ثابت کنی! در این‌جا شما از گفت‌وگو با دوستتان درمی‌مانید. برای قانع کردن او باید به چیزی یا چیزهایی تکیه کنید که او هم قبول داشته باشد. و اگر برای هر مطلبی (هر قدر که واضح باشد) از شما دلیل بخواهد، به هیچ‌جا نمی‌رسید. در ریاضیات هم، برای استدلال، به چنین تکیه‌گاه‌هایی نیاز داریم که به آن‌ها **اصل** یا **اصل موضوع** می‌گویند.

اگر در جایی اصلی را عوض کنیم و خلاف آن را بپذیریم، آن‌وقت با نوع دیگری از ریاضیات سروکار پیدا می‌کنیم. اگر عدد ۳ را با عدد ۴ جمع کنیم، عدد ۷ به‌دست می‌آید. ولی اگر به وزنه‌ای دو طناب بسته باشید و کسی با نیروی ۳ کیلوگرم آن را به سمت شرق، و دیگری با نیروی ۴ کیلوگرم به طرف شمال بکشد، جسم با نیرویی برابر ۵ کیلوگرم به سمت شمالِ شرقی حرکت می‌کند. در این‌جا مجموع ۴+۳، به جای ۷، برابر ۵ می‌شود. باید بدانیم جمع را کجا و برای چه منظوری به‌کار می‌بریم، تا بتوانیم نتیجه‌ی عمل، یعنی حاصل جمع را به دست آوریم.»

همه چیز را نمی‌توان استدلال کرد. حتی همه‌چیز را نمی‌توان «تعریف» کرد. شما نمی‌توانید «عمل جمع» را تعریف کنید. برای «جمع»، هر تعریفی به خودش برمی‌گردد و فقط واژه‌ها عوض می‌شوند: «جمع یعنی افزودن دو عدد به هم»؛ «جمع دو عدد، یعنی روی هم ریختن آن‌ها»؛ «مجموع دو عدد، یعنی اضافه کردن تعداد واحدهای یک عدد بر واحدهای دیگر». در این جاها، به جای واژه‌ی «جمع»، از واژه‌های «افزودن»، «روی هم ریختن» و «اضافه کردن» استفاده کرده‌اید. یعنی درواقع گفته‌اید: «جمع یعنی جمع.» ولی اگر عمل جمع را به عنوان عملی واضح بپذیریم، آن‌وقت می‌توانیم با تکیه بر آن، عمل تفریق را «تعریف» کنیم: تفریق a-b، یعنی پیدا کردن عددی مثل c که اگر آن را با عدد کوچک‌تر یعنی b جمع کنیم، عدد بزرگ‌تر یعنی a به‌دست آید.

سخن کوتاه: برای تعریف و برای استدلال، تکیه‌گاه یا تکیه‌گاه‌هایی لازم است که بدون تعریف و بدون استدلال پذیرفته

---

۷. گزینه‌ی ب درست است. با توجه به قواعد تقریب گرد کردن داریم:

۲/۷۵۳≃۲/۸۰۰*

۲/۷۲۳ $\underset{\text{}}{\overset{\text{تقریب ۰/۱ گرد کردن}}{\simeq}}$ ۲/۷۰۰

۲/۶۸۴≃۲/۷۰۰

۲/۶۹۵≃۲/۷۰۰

۸. گزینه‌ی الف درست است. باید مقدار تقریبی زمان هر تکلیف را بیابیم و حاصل را جمع کنیم. با توجه به زمان بر حسب ثانیه در هر کدام، زمان را به نزدیک‌ترین دقیقه گرد می‌کنیم و به جای آن زمان قرار می‌دهیم:

۳۵دقیقه و ۴۷ ثانیه $\xrightarrow{\text{تقریباً}}$ ۳۶ دقیقه

۴۷ دقیقه و ۲۳ ثانیه $\longrightarrow$ ۴۷دقیقه

شوند تا با استفاده از آن‌ها بتوان، تعریف یا استدلال خود را دنبال کرد. گاهی پذیرفتن یک «اصل» یا یک «تعریف» ساده می‌تواند نتیجه‌هایی بسیار جالب و شگفت‌انگیز به‌بار آورد. به یکی از این «اصل»ها اشاره می‌کنیم.

❐

آندره کولموگوروف، یکی از ریاضی‌دانان و مربیان بزرگی که تا همین چند سال پیش زنده بود، در مقاله‌ای با عنوان «حرفه‌ی ریاضیات» که در سال ۱۹۵۲ میلادی نوشته بود، می‌گوید: «... وقتی با موقعیتی ناآشنا در ریاضیات روبه‌رو می‌شویم، باید از توانایی خود در استدلال استفاده کنیم و این توانایی از راه دیگری، به‌جز تمرین کافی، به دست نمی‌آید. بسیاری از مسئله‌هایی را که در مسابقه‌های ریاضی مطرح می‌شوند، نمی‌توان از موضوع یا قضیه‌ی روشنی نتیجه گرفت که به ریاضیات مدرسه‌ای مربوط باشد. برای حل آن‌ها، باید سرنخی را در صورت مسئله جست‌وجو کرد و در واقع اندیشه‌ای را «به دام انداخت» که بتوان با تکیه بر آن و با استدلال‌های پشت‌سرهم، خود را به نتیجه‌ی لازم رساند. از جمله می‌توان از این مسئله یاد کرد که به شوخی شبیه‌تر است، طرح آن در یک مسابقه، بسیاری از دانش‌آموزان را به زحمت انداخته بود: در جنگلی ۸۰۰ هزار درخت کاج روییده است که هیچ‌کدام از آن‌ها، بیش از ۵۰۰ هزار برگ سوزنی ندارد. ثابت کنید در این جنگل، دست‌کم دو درخت کاج پیدا می‌شود که تعداد برگ‌های سوزنی آن‌ها با هم برابر است.»

❐

پتِر گوستاو لـه ژِن دیریکلـه (۱۸۵۹ ـ ۱۸۰۵ میلادی) ریاضی‌دان آلمانی، اصلی را آورد که آن‌قدر ساده و بدیهی است که، در نظر اول، گمان می‌رود، نمی‌تواند در حل مسئله‌های ریاضی کارگشا باشد. اگر این اصل را ساده کنیم، چنین است: وقتی شش کبوتر را در پنج لانه جا بدهیم، دست‌کم در یکی از لانه‌ها، دو کبوتر قرار می‌گیرند.

خود دیریکله، این اصل را با زبان مجموعه‌ها و کلی‌تر آورده است: **اگر در n قفسه بیش از n عدد از یک چیز را بگذاریم، دست‌کم در یکی از قفسه‌ها بیش‌تر از یک عدد از آن قرار می‌گیرد.**

این اصل را در ریاضیات، **اصل دیریکله** یا **اصل لانه‌ی کبوتری** می‌گویند و، با همه‌ی سادگی خود، برای حل بسیاری از مسئله‌های محاسبه‌ای و منطقی، بسیار اهمیت دارد. ولی به همان اندازه‌ای که ساده است، برای کمک گرفتن از آن، باید از تیزهوشی و مهارت خود استفاده کرد. مسئله‌هایی وجود دارند که در آغاز معمایی و حل‌نشدنی به نظر می‌رسند، در حالی که با استفاده از این اصل حل می‌شوند. در این‌جا، تنها چند مثال ساده می‌آوریم. از مسئله‌هایی آغاز می‌کنیم که کولموگورف در نوشته‌ی خود از آن یاد کرده است.

۵۰۰۰۰۱ عدد از درختان کاج جنگل را در نظر می‌گیریم. بدون این‌که لازم باشد تعداد برگ‌های هریک را بشماریم، روشن است که یکی از دو حالت وجود دارد:

یا شانس می‌آوریم و دست‌کم تعداد برگ‌های سوزنی دو درخت از این ۵۰۰۰۰۱ درخت با هم برابرند که به معنای درستی حکم مسئله است.

یا شانس نمی‌آوریم و تعداد برگ‌های سوزنی همه‌ی این ۵۰۰۰۰۱ درخت با هم فرق دارند؛ یعنی یکی از درخت‌ها بدون برگ است، دومی یک برگ دارد، سومی ۲ برگ و سرانجام آخرین درخت (یعنی پانصد هزار و یکمین درخت) درست ۵۰۰ هزار برگ دارد. اکنون اگر تنها یک درخت دیگر را غیر از این ۵۰۰۰۰۱ درخت (از بین بقیه‌ی درخت‌های جنگل) انتخاب کنیم، بی‌تردید تعداد برگ‌های سوزنی آن برابر یکی از عددهای ۰، ۱، ۲، ...، ۵۰۰۰۰۰، یعنی برابر تعداد برگ‌های یکی از ۵۰۰۰۰۱ درخت قبلی خواهد بود.

مسئله‌ی ۲. ۲۵ مداد از سه رنگ متفاوت داریم (هر مداد تنها

---

۱۵ دقیقه ⟵ ۱۴ دقیقه و ۵۴ ثانیه
۲۸ دقیقه ⟵ ۲۸ دقیقه و ۱۸ ثانیه
۴۰ دقیقه ⟵ ۳۹ دقیقه و ۳۰ ثانیه +

۱۶۶ دقیقه

زمان ۱۶۶ دقیقه را به ساعت تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} 166 & 60 \\ -120 & 2 \\ \hline 46 & \end{array}$$

این بار ۲ ساعت و ۴۶ دقیقه با گرد کردن زمان دقیقه به ساعت تقریباً ۳ ساعت خواهد شد.

یک رنگ دارد). ثابت کنید، بین آن‌ها می‌توان ۹ مداد از یک رنگ پیدا کنید.

حل: ۲۴ مداد را روی سه میز می‌گذاریم. طوری که روی هر میز، مدادهای هم‌رنگ باشند. بدترین وضع وقتی پیش می‌آید که روی هر میز ۸ مداد قرار گیرد. ولی هنوز یک مداد داریم که باید روی یکی از این سه میز قرار گیرد؛ یعنی روی آن میز ۹ مداد هم‌رنگ خواهد بود.

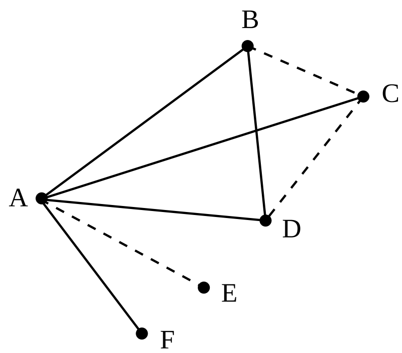
مسئله‌ی ۳. کم‌ترین تعداد از عددهای طبیعی را پیدا کنید که بین آن‌ها دو عدد وجود داشته باشد به‌طوری که تفاضلشان بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

حل: این مطلب را می‌دانید که اگر در تقسیم دو عدد متفاوت بر ۵، باقی‌مانده‌های مساوی به‌دست آید، تفاضل این دو عدد بر ۵ بخش‌پذیر می‌شود (اگر دو عدد برابر باشند، تفاضلشان برابر صفر است و صفر هم بر هر عددی، از جمله ۵، بخش‌پذیر است).

اگر پنج عدد طبیعی انتخاب کنیم، ممکن است این حالت پیش آید که از تقسیم آن‌ها بر ۵، به پنج باقی‌مانده متفاوت برسیم (۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵). و بنابراین نتوانیم بین آن‌ها دو عدد بیابیم که تفاضلشان بر ۵ بخش‌پذیر باشد. باید دست‌کم ۶ عدد طبیعی انتخاب کنیم. زیرا اگر پنج عدد از آن‌ها در تقسیم بر ۵، پنج باقی‌مانده‌ی متفاوت ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ بدهند، باقی‌مانده‌ی حاصل از تقسیم عدد ششم بر ۵، به‌ناچار با یکی از همین پنج عدد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ برابر خواهد بود.

مسئله‌ی ۴. شش نقطه‌ی متفاوت داده شده است و می‌دانیم هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست و هیچ چهار نقطه‌ای روی یک صفحه نیستند. این نقطه‌ها را دوبه‌دو با پاره‌خط‌های راست به‌هم وصل کرده‌ایم (که ۱۵ پاره‌خط راست به دست می‌آید). برخی از پاره‌خط‌های راست با نقطه‌چین و برخی دیگر با خط کامل رسم شده‌اند (به صورتی دلخواه). ثابت کنید، یک مثلث پیدا می‌شود که یا هر سه ضلع آن نقطه‌چین است و یا هر سه ضلع آن خط‌های کامل.

حل: نقطه‌ها را A، B، C، D، E و F می‌نامیم (شکل را ببینید). A را با پنج پاره‌خط راست به پنج نقطه‌ی دیگر وصل می‌کنیم. این پاره‌خط‌های راست را به دلخواه با خط کامل یا نقطه‌چین در نظر می‌گیریم. بین این پنج پاره‌خط راست، دست‌کم سه تا با خط کامل یا سه تا با نقطه‌چین خواهد بود. برای نمونه، فرض می‌کنیم پاره‌خط‌های راست AB، AC و AD از یک نوع باشند (روی شکل این سه پاره‌خط راست، کامل‌اند).



اکنون نقطه‌های B، C و D را دوبه‌دو به هم وصل می‌کنیم. اگر سه پاره‌خط راست BC، BD و CD از یک نوع (نقطه‌چین یا کامل) باشند، جواب مسئله به دست آمده است (یعنی مثلث BCD یا سه ضلع نقطه‌چین و یا سه ضلع کامل دارد). ولی اگر سه پاره‌خط راست BC، BD و CD از دو گونه‌ی متفاوت باشند، به ناچار دست‌کم یکی از آن‌ها از همان گونه‌ی پاره‌خط‌های راست AB، AC و AD است (در شکل، پاره‌خط راست BD با خط کامل یعنی از گونه‌ی AB، AC و AD است). در این صورت، یکی از مثلث‌های ABC، ABD یا ACD جواب مسئله است (در شکل، ضلع‌های مثلث ABD از یک نوع و درنتیجه این مثلث جواب مسئله

۹. گزینه‌ی الف درست است.

۲ ۰ ۰	۳	
۱۸ −	۰/۶۶	
۲۰		
۱۸ −		
۰۲		

با تقریب کمتر از ۰/۱ گرد کنیم

۰/۶۶ ≃ ۰/۶ = ۰/۶۰ = ۶۰%

۱۰. گزینه‌ی ب درست است. کافی است تنها تعداد دانش‌آموزانی را که شماره‌ی کفش ۳۳ تا ۳۶ دارند، جمع کنیم:

۵+۱+۶+۳=۱۵

است).

مسئله‌ی ۵ . ثابت کنید بی‌نهایت عدد به صورت

(۱) ۱۱۱۱…۱۰۰۰۰…۰

می‌توان پیدا کرد که بر هر عدد دلخواه طبیعی که در نظر گرفته‌اید، بخش‌پذیر باشد.

حل: فرض کنید بخواهیم عددی به صورت (۱) پیدا کنیم که بر عدد طبیعی n بخش‌پذیر باشد. دنباله‌ی n عدد را به این صورت در نظر می‌گیریم:

(۲) $۱,۱۱,۱۱۱,۱۱۱۱,\ldots,\underbrace{۱۱۱\ldots۱}_{n\ \text{رقم}}$

اگر یکی از آن‌ها بر n بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت با اضافه کردن هر چند صفر به سمت راست آن، باز هم عددهایی به دست می‌آیند که بر n بخش‌پذیر هستند. برای نمونه اگر داشته باشیم $n=۱۳$ ، آن‌وقت عدد ۱۱۱۱۱۱ (عدد ششم از دنباله‌ی عددهای (۲)) بر ۱۳ بخش‌پذیر است و بنابراین بی‌نهایت عدد:

۱۱۱۱۱۱۰,۱۱۱۱۱۱۰۰,۱۱۱۱۱۱۰۰۰,…

که عددهایی به صورت (۱) هستند، بر ۱۳ بخش‌پذیر خواهند بود.

ولی اگر هیچ‌کدام از n عدد به صورت (۲) بر n بخش‌پذیر نباشد، به‌ناچار دو تا از آن‌ها در تقسیم بر n، باقی‌مانده‌ی برابر پیدا می‌کنند. زیرا اگر عددی بر n بخش‌پذیر نباشد، در تقسیم بر n، یکی از $(n-۱)$ باقی‌مانده‌ی ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... ، $n-۱$ را می‌دهد. ولی ما با n عدد سروکار داریم. تفاضل دو عددی که ضمن تقسیم بر n به باقی‌مانده‌های برابر می‌رسند، بر n بخش‌پذیر است. و این تفاضل، عددی به صورت (۱) است که با اضافه کردن هر چند صفر به سمت راست آن، باز هم بر n بخش‌پذیر خواهد بود. برای نمونه، اگر فرض کنیم $n=۸$ ، آن‌وقت از جمله دو عدد ۱۱۱۱ و ۱۱۱۱۱ در تقسیم بر ۸ . باقی‌مانده‌هایی برابر ۷ می‌دهند؛ یعنی:

$۱۱۱۱۱-۱۱۱۱=۱۰۰۰۰$

بر ۸ بخش‌پذیر است و درنتیجه، همه‌ی عددهای:

$۱۰۰۰۰۰=۱۰^۴,۱۰^۵,۱۰^۶,\ldots$

که عددهایی به صورت (۱) هستند، بر ۸ بخش‌پذیرند.

❐

در این‌جا تلاش کردیم نمونه‌های ساده‌ای از کاربرد «اصل لانه کبوتری» در حل مسئله‌ها بیاوریم. ولی درواقع کاربرد این اصل بسیار فراتر از این نمونه‌های ساده است. در ضمن، ریاضی‌دانان توانسته‌اند «اصل دیریکله» را تعمیم دهند و کاربردهای شگفتی‌آوری برای آن پیدا کنند. ولی برای پرهیز از وارد شدن به بحث‌های کم‌وبیش پیچیده، مطلب را در همین‌جا به پایان می‌بریم.

پاسخ سؤالات ریاضی دوم راهنمایی

۱ . گزینه‌ی ب درست است.

هر توپ پارچه $۹۸\frac{۱}{۳}$ متر است و از آخر طاقه استفاده نمی‌شود. پس هر توپ پارچه را به $۲\frac{۳}{۴}$ تقسیم می‌کنیم تا بفهمیم از هر توپ پارچه چند دست لباس دوخته می‌شود:

$$۹۸\frac{۱}{۳}\div ۲\frac{۳}{۴}=\frac{۲۹۵}{۳}\div\frac{۱۱}{۴}=\frac{۲۹۵}{۳}\times\frac{۴}{۱۱}=\frac{۱۱۸۰}{۳۳}=۳۵/۷۵$$

۰/۷۵ یک دست لباس باید حذف شود. پس ۳۵دست لباس از هر توپ پارچه به‌دست می‌آید. ما به ۸۰۰ دست لباس نیاز داریم:

$$\frac{۸۰۰}{۳۵}\simeq ۲۲/۸۵$$

یعنی ۲۲ توپ کامل و ۰/۸۵ از توپ ۲۳ام. پس تقریباً به ۲۳ توپ پارچه نیاز داریم.