جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
تعلیم و تعلم عبادت است

اول تا سوم شهریور ماه ۱۳۷۶ کرمانشاه ـ ایران

23-25 Aug. 1997 Kermanshah, I.R.IRAN

سال یازدهم
شماره ۴۸
بهار ۱۳۷۶
۱۵۰ تومان

رشد آموزش ریاضی

دومین کنفرانس

دومین کنفرانس آموزش ریاضی

2nd Annual Iranian Mathematics Education Conference

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
تعلیم و تعلم عبادت است

رشد آموزش ریاضی
Roshd Mathematics Education Journal

سال یازدهم ــ بهار ۱۳۷۶ ــ شماره مسلسل ۴۸
نشریه گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابِ درسی ـ تلفن: ۴-۸۳۹۲۶۱ داخلی (۳۰۳)
سردبیر: زهرا گویا
مدیر داخلی : سهیلا غلام‌آزاد
اعضای هیئت تحریریه: اسماعیل بابلیان، عین‌ا... پاشا، میرزا جلیلی، جواد حاجی‌بابایی،
بیژن ظهوری زنگنه، سهیلا غلام‌آزاد وعلیرضا مدقالچی
تولید: اداره کل چاپ و توزیع کتابهای درسی
صفحه آرا: محمد پریسای
طراح جلد: فرید فرخنده کیش
ناظر چاپ: محمد کشمیری

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

یادداشت سردبیر

سومین مطالعهٔ بین المللی ریاضی و علوم ـ تیمز ـ (TIMSS)، بزرگترین، جامع ترین و با دقّت ترین مطالعهٔ بین المللی ارزیابی موفقیّت تحصیلی است که توسط انجمن بین المللی ارزشیابی موفقیّت تحصیلی (IEA) در سه گروه (اصطلاحاً هر گروه یک جمعیّت نامیده می شود) متفاوت انجام گرفته است. گروه اوّل شامل دانش آموزان ۹ ساله پایه های سوم و چهارم (جمعیّت ۱). گروه دوم دانش آموزان ۱۳ ساله پایه های دوم و سوم راهنمایی (جمعیّت ۲) و گروه سوم دانش آموزان سال آخر دبیرستان (جمعیّت ۳) را در بر می گیرد. ایران نیز پس از عضویت رسمی در IEA در سال ۱۹۹۳، برای اوّلین بار در یکی از مطالعات آن شرکت کرد. انجام مقدّمات، مطالعات پیشینه ای، تهیّهٔ ابزارها و اجراهای آزمایشی تیمز از سال ۱۹۹۰ آغاز شد و حدود پنج سال به طول انجامید و آزمون اصلی در سال ۱۹۹۵ اجرا شد که نتایج عملکرد جمعیّتهای مختلف آن به تدریج در حال انتشار است.

سومین مطالعهٔ بین المللی ریاضیّات و علوم ـ تیمز ـ علاوه بر مقایسهٔ سطح پیشرفت تحصیلی دانش آموزان شرکت کننده در سطح دانشی، به بررسی رابطهٔ بین پیشرفت تحصیلی دانش آموزان با عوامل بسیاری از جمله محتوای درسهای ریاضیّات و علوم، روشهای تدریس، وضعیّت اقتصادی، آموزشهای قبل و ضمن خدمت معلّمان و طرز تلقّی معلّمان نیز پرداخته است. سؤالهای تیمز عملکرد دانش آموزان را در شش سطح دانستن، به کارگیری شیوه های جاری، به کارگیری شیوه های پیچیده، حلّ مسأله، توجیه و اثبات کردن و ارتباطات ریاضی مورد سنجش قرار داده است. لازم به ذکر است که هماهنگ کنندهٔ ملّی این مطالعه در ایران آقای دکتر علیرضا کیامنش و مجری طرح وزارت آموزش و پرورش است.

شرکت ایران در تیمز موفقیّت بزرگی برای جامعهٔ آموزشی ایران به شمار می رود و از این نظر، باید به وزارت آموزش و پرورش تبریک گفت. ایران در حالی در این مطالعه شرکت کرد که کشورهای بزرگی چون چین و هندوستان، به لحاظ اجرایی، توانایی شرکت در آن را پیدا نکردند، زیرا انجام این مطالعه نیازمند توانمندی بالای اجرایی و هماهنگی در سطح بین المللی بود. همچنین، شرکت در این مطالعه نشاندهندهٔ اعتماد به نفس و واقع بینی در جهت پذیرش موقعیّت خود در مقایسه با دیگران است.

ایران از نظر عملکرد موفقیّت تحصیلی دانش آموزان شرکت کننده در جمعیتهای ۱ و ۲ و در درسهای علوم و ریاضی در رده های آخر قرار گرفت. این واقعه برای بسیاری از ریاضیدانها و اعضای جامعهٔ آموزشی آن چنان غیرقابل قبول بود که در ابتدا اعتبار مطالعه را زیر سؤال بردند. ادّعای این بزرگواران آن بود که دانش آموزان ایرانی از نظر ریاضی

در سطح بسیار بالایی هستند و بهترین نمونهٔ این توانایی هم دانش آموزان المپیادی هستند پس باید اشتباهی رخ داده باشد!!

امّا واقعیّت را نباید نادیده گرفت. خوشبختانه هم موفقیّت عزیزان ما در المپیادهای علمی جهانی و هم ناکامی گروه عظیمی از آنها در تیمز هردو واقعیّت دارند.

موفقیّت عزیزان ما در المپیادهای علمی جهانی برگ برندهٔ ما است ولی قبل از آن که دچار غرور و خود بزرگ بینی شویم، باید توجه داشته باشیم همان گونه که در بیانیهٔ ریو در سال ۱۹۹۲ آمده است، سطح سواد و دانش عموم جامعه تعیین کننده حرکت به سوی پیشرفت است. در این بیانیه تأکید شده است کشورهای در حال توسعه و جهان سوم باید تلاشهای وسیع و همه جانبه را از آموزش همگانی و عمومی شروع کنند تا در آستانهٔ قرن آینده، به حداقل استانداردهای آموزش لازم برای زندگی در قرن بیست و یکم برسند. آزمون تیمز محک معتبر و علمی است که نشان می دهد کشور ما هنوز تا میانگین ۴۲ کشور شرکت کننده فاصله زیادی دارد و همان گونه که کمیسیون آموزش و پرورش یونسکو در سال ۱۹۹۶ تأکید کرده است، تحوّلات آموزشی نیاز به بسیج همگانی و کار درازمدت و طولانی دارد، نتایج دگرگونی در آموزش در دو سه سال قابل مشاهده نیستند بلکه حداقل یک دهه تلاش مستمر و بسیج عمومی لازم است تا ثمرات شیرین تحوّلات آموزشی احساس شود.

نتایج المپیادها به ما قوت قلب، اطمینان و اعتماد به نفس می دهند که می توانیم و نتایج تیمز هشدار می دهند که ناتوانیم!

بررسی عوامل ناتوانیها و نیاز به دوباره نگری و نوآوری در برنامه ریزی درسی، روشهای تدریس، شیوه های ارزشیابی، نقش معلّم و بسیاری جهات دیگر یک ضرورت و نیاز عاجل جامعهٔ آموزشی ما است. مدرسهٔ نمونه و آموزش خوب بدون معلم توانا نتیجه بخش نیست. تلاشهایی شروع شده است تا توسط تقویت و تداوم کنفرانسهای آموزش ریاضی، به اعتلای دانش حرفه ای معلمان ریاضی بیشتر پرداخته شود و ان شاء الله زمینه های مساعدی جهت پژوهشهای بنیادی و ریشه یابی مشکلات آموزش ریاضی ایجاد شود. به امیّد آن روز.

● مجلهٔ رشد آموزش ریاضی به منظور اعتلای دانش حرفه ای و موضوعی علاقه مندان و دست اندرکاران آموزش ریاضی، سه شماره در هر سال تحصیلی منتشر می شود. تمام علاقه مندان می توانند مقالات تحقیقی، توصیفی و تجربی خود را برای چاپ در اختیار این مجله بگذارند.

رعایت نکات زیر در مورد مقاله ها ضروری است.

- مطالب ارسالی باید بر یک روی کاغذ و با خط خوانا نوشته شود.
- مشخصات دقیق نویسنده، میزان تحصیلات، تجربه آموزشی و پژوهشی و آدرس نویسنده در مقاله درج شود.
- مقاله های ترجمه شده با اصل مقاله همراه باشد.
- منابع مقاله در انتهای آن ذکر شود.

لازم به ذکر است که مجله در رد، قبول، ویرایش و تلخیص مقاله های رسیده آزاد است. همچنین مقاله های ردشده بازگشت داده نمی شود.

طرّاحی فعالیتهایی در احتمال، آمار و مدل‌سازی جهت جلب دانش‌آموزان و قدرتمند کردن آنها

توماس ـ ال ـ شرودر
دانشگاه ایالتی نیویورک در بوفالو / گروه یادگیری و تدریس، بوفالو، نیویورک
ترجمهٔ: زهرا گویا ـ دانشگاه شهید بهشتی

مؤسسهٔ خیریهٔ حمایت از کودکان مبتلا به سرطان

مقالهٔ پیش رو، ترجمهٔ متن سخنرانی عمومی پروفسور توماس ـ ال ـ شرودر در اولین کنفرانس آموزش ریاضی در تاریخ ۱۳۷۵/۶/۷ در اصفهان است. این سخنرانی به طور همزمان در کنفرانس توسط خانم دکتر زهرا گویا برای شرکت کنندگان به فارسی ترجمه شد. لازم به ذکر است که این مقاله به درخواست کنفرانس، توسط جناب آقای دکتر قاسم وحیدی اصل به فارسی ترجمه شده بود.

یکی از فعالیتهای آموزشی که در این مقاله به بحث گذاشته شده است راجع به نرخ مرگ و میر ناشی از سرطان بر اثر آلودگیهای محیط زیستی است. هیأت تحریریه اجازه می خواهد که این مقاله را تقدیم **مؤسسهٔ خیریهٔ حمایت از کودکان مبتلا به سرطان** بکند. زیرا از جمله فعالیتهای این مؤسسه ـ همچنان که در متن مقاله اشارهٔ مشابهی وجود دارد ـ هشیار کردن جامعه نسبت به تأثیرات آلودگیهای محیط زیست بر افزایش مرگ و میر ناشی از سرطان و چگونگی پیشگیری از بروز آن است.

امید است که دانش ریاضی به کمک دانش پزشکی شتافته تا بتوانند هرچه بیشتر به از پای درآمدن سریع این عفریت کمک کنند.[۱]

این مقاله به توضیح کاری که مؤلف و چند تن از همکارانش برای تهیّه و توسعهٔ یک درس در احتمالات، آمار و مدل سازی ریاضی برای دانش آموزان دورهٔ متوسطه انجام داده اند می پردازد. این درس به گونه ای طرّاحی شده که بر مهارتهای هندسی و جبری دانش آموزان تکیه داشته و به ارتقای توسعهٔ تفکر در مراحل بالاتر، قدرت ریاضی و طرز تلقّی نقّادانه آنها می پردازد. تمرکز درس بر بررسی موقعیتها و داده های واقعی، بخصوص در رابطه با پیشامدهای جاری و تأثیرهای ضمنی که بر زندگی دانش آموزان دارند می باشد. مقاله به ارائه مثالهای مشخّصی از فعالیتهایی که برای دانش آموزان تنظیم شده می پردازد، امّا بیش از هر چیز بر اصول زیربنایی آن فعالیّتها، هدفهای آنها و وضعیتهایی که آن فعالیّتها در آنها توسعه یافتند متمرکز است.

مقدمه

مسئولیت آموزش عمومی در ایالات متّحده، بین دولت ملّی (فدرال)، ۵۰ دولت ایالتی و تعداد کثیری از مناطق محلّی آموزش و پرورش ـ بیش از ۱۵،۰۰۰ منطقه در سطح کشور که بیش از ۷۰۰ منطقه فقط در ایالت نیویورک وجود دارد ـ (سالنامهٔ دنیا[2] و کتاب حقایق[3]، ۱۹۹۴) تقسیم می شود. دولت ایالتی نیویورک نقش بزرگتر و تعیین کننده تری از سایر ایالتها داشته و دارای یک برنامهٔ درسی در ریاضیات است که در اغلب مدارس دولتی ایالت مورد استفاده قرار می گیرد و برنامه های درسی دبیرستان به وسیلهٔ امتحانهای هماهنگ که توسط **شورای ایالتی مناطق**[4] برگزار می گردند، حمایت می شود.

برنامه های درسی ریاضی دورهٔ متوسطهٔ شورای ایالتی مناطق شامل سه درس توصیه شدهٔ ریاضیات تلفیقی (یعنی درسهایی که حاوی موضوعهای گوناگونی از جمله جبر، هندسه، مثلثات، منطق، احتمالات و آمار) هستند. از این جهت، ایالت نیویورک با بیشتر ایالتهای دیگر ایالات متحده که در آنها روند معمولی برنامهٔ ریاضی به صورت یک درس یک ساله در جبر، سپس یک درس یک ساله در هندسهٔ مسطّحه و آنگاه یک سال دیگر جبر می باشد، متفاوت است. در تمام ایالتها، بعضی از دانش آموزان علاوه بر اینها، درسهای ریاضی بیشتری در دبیرستان می گیرند، که معمولاً «پیش حسابان» (تابعها، هندسهٔ تحلیلی و غیره) و «حسابان» هستند.

درحال حاضر، شرط گرفتن **دیپلم متوسطهٔ شورای[5] ایالتی**، گرفتن تنها دو سال ریاضی است. بسیاری از دانش آموزان فقط به این حداقل اکتفا می کنند، و آمادگی کمی برای آموزش پس از دبیرستان و مدرسه های حرفه ای پیدا می کنند. درنتیجه، کالجها [مراکز آموزش عالی] و دانشگاهها مقادیر قابل توجّهی از منابع خود را صرف تدریس درسهای ریاضی به اصطلاح **پیش دانشگاهی**[6] می کنند (یعنی درسهای ریاضی در سطح متوسطه که به عنوان پیش نیاز درسهای ریاضی در سطح کالجها و دانشگاهها هستند).
با توجّه به شناخت این مشکل، دانشگاه ایالتی نیویورک تصمیم گرفت که برای **برنامهٔ هشیاری ریاضی**[7] (ماپ) با همکاری مدارس [ایالت] نیویورک سرمایه گذاری کند. هدف نهایی ماپ، تشویق تعداد بیشتری از دانش آموزان دبیرستانی به انتخاب ریاضیات بیشتری در دبیرستان باشد تا آنها بتوانند:

- از گرفتن درسهای ریاضی پیش نیاز در کالج [و دانشگاه] اجتناب کنند،
- به راحتی وارد درسهای ریاضی رشتهٔ تحصیلی خود بشوند، و ...
- انتخاب های خود را از میان رشته های تحصیلی دانشگاهی به حداکثر برسانند.

پروژهٔ ماپ این هدفها را با ارائهٔ یک آزمون موفقیّت تحصیلی ریاضی در سال دوم تا سال آخر دبیرستان و پرسشنامه ای دربارهٔ برنامه های آموزشی دانش آموزان دنبال می کند. بعد از این آزمون، به دانش آموزان بازخوردهای انفرادی در رابطه با نیازمندیهای ریاضی دو برنامهٔ آموزشی انتخابی آنها برای دورهٔ آموزش عالی داده می شود و به دانش آموزان گفته می شود که درصورت ثابت ماندن سطح مهارتهای ریاضی آنها به سبب آزمون گرفته شده، چه درسهای پیش نیازی را به عنوان درسهای پیش دانشگاهی در اوّلین سال ورود به دانشگاه باید بگیرند. مشاوران مدرسه با استفاده از این نمره ها، به دانش آموزان توصیه می کنند چه درس ریاضیاتی را باید در سال آخر دبیرستان بگیرند تا برای رشته یا رشته های تحصیلی دانشگاهی که علاقه مند به ادامهٔ تحصیل در آنها هستند آماده بشوند.

در ادامهٔ پروژهٔ ماپ، من و بری شیلی[8] به انجام یک بررسی نقّادانه از برنامهٔ ریاضی موجود در دورهٔ متوسطه اقدام کردیم و این موضوع را مورد نظر قرار دادیم که آیا نیازی به تدوین و توسعهٔ درسهای بدیل و اضافه ای که بتواند برای دانش آموزان جاذب باشد هست؟ آنهم دانش آموزانی که با این سؤال روبرو هستند که آیا درس ریاضی دیگری در سال سوم یا چهارم بگیرند یا خیر؟ ما به این نتیجه رسیدیم که سه درس **شورای ایالتی** که تأکید آنها بر جبر، هندسه و مثلثات است، دانش آموزان را برای گرفتن حسابان آماده می کنند، امّا توجّه بسیار کمی به موضوعهای مختلف ریاضی از جمله احتمال، آمار، مدل سازی ریاضی و جبر خطی که با بُرد وسیعتری از دانش آموزان و هدفهای آموزشی ـ حرفه ای آنها مرتبط است دارند. این یافته ها دور از انتظار نبودند زیرا آنها وجه مشخصهٔ اغلب برنامه های درسی ریاضی هستند که تا همین سالهای اخیر در ایالات متحدّه رواج داشتند. فرصتهای دانش آموزان برای یاد گرفتن مباحثی به غیر از جبر و هندسه بسیار متفاوت است و وقتی هم که به این مباحث پرداخته می شود، معمولاً با عمق و فشردگی کمی همراه است (مک ناینت[9] و همکاران، ۱۹۸۷). در همین حال، بسیاری [دیگر] بُرد وسیعتری از موضوعها را تشخیص می دهند که برای کارگران، روز به روز مرتبط تر و حتی اساسی تر هستند. (شورای ملی معلّمان ریاضی[10]: NCTM، ۱۹۸۹).

از این گذشته، برنامهٔ درسی ریاضی نیویورک، کتابهای درسی که توسط آنها این برنامه تدریس می شود و امتحانهای ریاضی شورای ایالتی، همگی به خاطر «غیرمولّد» بودنشان مورد انتقاد قرار گرفته اند. دانش آموزان نیویورکی نیز مانند بسیاری از دانش آموزان در مناطق دیگر، ریاضی را بیشتر به عنوان مجموعه ای از تکنیکها و رویّه های منفصل از هم می بینند که اغلب با «زندگی واقعی» آنها بی ارتباط است (شونفیلد، ۱۹۸۸ , ۱۹۸۹). ما پیشنهاد تهیّهٔ درسی را دادیم تا دانش آموزانی را که علاقه ای برای گرفتن درسهای ریاضی در سالهای سوم یا چهارم دبیرستان نداشتند جذب کند و تجربه های ریاضی مرتبطی با زندگی جاری و اشتغال آیندهٔ آنها ارائه دهد و هم اکنون مشغول توسعهٔ این درس هستیم.

جلوه های مشخصّهٔ درس

هدف عمومی درس ما ایجاد فرصتهایی برای دانش آموزان است به گونه ای که محتوا و فرآیندهای ریاضی را که برای دنبال کردن حرفه آموزی و هدفهای آموزشی ضروری است یاد بگیرند و همچنین در آنها توانایی قدردانی و استفاده از ریاضیاتی که قبلاً یاد گرفته بودند ایجاد شود. محتوای درس در چارچوب تلاشهای ملّی مانند (NCTM، ۱۹۸۹) و بین المللی در جهت اصلاحات و تغییرات اخیر در برنامهٔ درسی ریاضی است. ما معتقدیم که نقطهٔ قوت و نوآوری درس به دلیل روش تهیّه و توسعهٔ آن و همچنین قالبی است که برای مفاهیم و فرآیندهای ریاضی مورد مطالعه در طول فعالیتها ارائه می کند.

محتوا

محتوای درس سه زمینهٔ تجزیه و تحلیل داده ها، آمار، احتمالات و مدل سازی را به هم مرتبط می کند. سه زمینه عبارتند از:

- توضیح و نمایش داده ها
- پرداختن به عدم قطعیّت، و ...
- استنباط و تجزیه و تحلیل روابط در داده ها

زمینهٔ اوّل شامل دو آمار توصیفی و چند ابزار نموداری (تصویری) برای ارائه داده ها است. بسیاری از رویّه ها (مانند هیستوگرام ها و محاسبات آمار توصیفی) به طور تصنّعی به عنوان مفاهیم مجرد در برنامهٔ درسی ریاضی شورای ایالتی توسعه یافته اند. در این درس، ما این تکنیکها را با تکنیکهای تجزیه و تحلیل اکتشافی داده ها [EDA][11] (توکی[12] , ۱۹۷۷) مانند نمودار ساقه و برگ[13] و نمودار جعبه ای[14] تلفیق می کنیم. پس از آن، دانش آموزان از این تکنیکها به عنوان روشهای استدلال و تفسیر استفاده می کنند و به تجزیه و تحلیل فرضها، متناسب بودن آنها و سوءاستفاده های احتمالی از روشهای نشان دادن نموداری و توصیفی داده ها می پردازند. در زمینهٔ دوّم، دانش آموزان درک خود از احتمالات نظری را تقویت می کنند. دانش آموزان احتمالات نظری و تجربی را به هم مرتبط نموده، شبیه سازیهای بر مبنای احتمالات را طراحی و تفسیر می کنند، و استدلالهای احتمالاتی را ساخته و تجزیه و تحلیل می کنند. زمینهٔ آخری مربوط به آمار استنباطی است که آنهم شامل نمونه گیری و استنباط از دامنه های اطمینان و مدل سازی ریاضی روابط خطی و غیرخطی از طریق برازش خمها[15] است (مانند «خط سه نقطه[16]» یا «خط برازش میانه میانه[17]»)

محتوا به گونه ای انتخاب شده است که بتوان از دانش و مهارتهای قابل توجهی که دانش آموزان در دو سال اول [دبیرستان] از طریق درسهای جبر و هندسهٔ تعیین شده به دست آورده اند استفاده کرد، چالشی برای دانش آموزانی که فقط درک ابزاری[18] (اسکمپ[19] , ۱۹۷۸) از این عنوانها کسب کرده اند.

توسعهٔ درس

نقطهٔ قوت مشخّصهٔ فرآیند توسعه درس ما، ماهیت تشریک مساعانهٔ آن است. این فرآیند معلمهای دبیرستان، استادهای ریاضی کالجهای مختلف و آموزشگران معلم (مدرّسان مراکز تربیت معلم) از کالجها و دانشگاه ها را درگیر کرد. در طی سال گذشته، این گروه به طور متناوب با یکدیگر ملاقات کردند تا دربارهٔ فعالیتهای بالقوّه بحث کنند، محتوایی را که خیلی با آن آشنا نبودند یاد بگیرند و ایده ها و تجربه های خود را از مواد و محتوای اولیّه ای که مورد آزمایش قرار داده بودند با هم درمیان بگذارند. به علاوه، ما یک درس در سطح تحصیلات تکمیلی در آموزش ریاضی برای معلّمها ارائه دادیم تا تلاشهای فشردهٔ بیشتری را صرف توسعهٔ این درس بکنند. این فرآیند یادگیری به وسیلهٔ جستجو و بررسی، آزمایش کردن، و در میان گذاشتن تجربه ها، برای مفهوم سازی و توسعهٔ موادّ این درس حیاتی بود.

اصول راهنما

حاصل ملاقاتهای اولیه، تدوین چندین اصول راهنما بود که برای توسعهٔ فعالیتهای این درس مورد استفاده قرار گرفت. فرض اولیّه این است که قوی ترین قالبها برای یادگیری موقعیتهایی است که

مربوط به زندگی و هدفهای (آرزوهای) دانش آموزان بوده و جالب و درگیر کننده باشند، درنتیجه متعلّق به خود دانش آموزان می شوند. ما انتظار داریم که دانش آموزان احساس نیاز به حل مسائل بکنند و ما چالشی برای دانش آموزان ایجاد می کنیم که حل های خودشان برایشان معنا پیدا کند تا بدین طریق، تنها به توسعهٔ تکنیکهای بی معنا و جدا از هم نپردازند. درنتیجه، ما این درس را به گونه ای تدوین کردیم تا ایده های ریاضی از طریق بررسیهای مسأله ـ محور توسعه پیدا کنند. موقعیتهای مسأله شامل داده های واقعی است و ممکن است که توسط معلّم یا دانش آموز مطرح شود. برای تسهیل کار با داده های واقعی، دانش آموزان به طور گسترده از ماشین حسابهای پیشرفته، کامپیوترها و ابزارهای اندازه گیری الکترونیکی استفاده می کنند.

به دلیل فرضهای ما، به اعتقاد ما انتخاب موقعیتهای مسأله حیاتی است. انتخابهای ما به وسیلهٔ سه ضابطه هدایت شدند که عبارتند از: (۱) محتوای برجسته و ارزشمند ریاضی، (۲) توانایی بالقوهٔ آنها برای توسعهٔ **قدرت ریاضی**[۲۰] (همانطوری که توسط شورای ملی معلمان ریاضی NCTM بیان شده است، ۱۹۸۹) و رسیدن به **مرحلهٔ برتر تفکّر**[۲۱] (رزنیک[۲۲], ۱۹۸۷) و (۳) توانایی بالقوه برای طرح **مباحث بسیار مهم**[۲۳] (دلانگ[۲۴], ۱۹۸۷؛ اسکوفسموس[۲۵]، ۱۹۹۰). این ضابطه ها به نظر می رسد که به طور تلفیقی به هم مرتبط و به طور دوطرفه حامی یکدیگرند. به محضی که محتوا را تعریف می کنیم، ایده های قدرت ریاضی و مرحلهٔ برتر تفکّر راهنما و الگویی برای معرفی و بررسی این محتوا ارائه می دهند و ماهیت ادراکی را که دانش آموزان باید به دست آورند توضیح می دهد. آنگاه ضابطهٔ مباحث بحرانی و حساس بر اهمیت ریاضی به عنوان یک تقویت کنندهٔ استدلال تأکید می ورزد.

منظور ما از ریاضی برجسته و ارزشمند آن است که محتوای درس باید بر مطالعهٔ تجزیه و تحلیل داده ها، آمار و احتمال به گونه ای که در استانداردهای برنامهٔ درسی شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM، ۱۹۸۹) معرفی شده تمرکز کند و به شدّت بر مبنای ایده های جبری و هندسی ای که در درسهای ریاضی تعیین شده در دو سال اوّل توسعه یافته اند ساخته شده است، از آنجایی که درسهای موجود شامل مفهومهای اولیّهٔ احتمالات، ترکیبات و آمار توصیفی بودند، درس جدید باید درک دانش آموزان را از این مفهومها و توانایی آنها را در تفسیر و به کارگیری آنها در موقعیتهای جدید تقویت کند و این درس، نباید تنها به عنوان کردن دوبارهٔ آن مفهومها بپردازد. محتوا باید پُلی بین ایده های اولیه و سطح تجرید مورد نیاز برای یک درس روشهای ریاضی در سطح دانشگاه باشد. برای مثال، برای مدل سازی رابطه ها، استفادهٔ وسیع از توابع غیرخطی بسیار مهمّ است. درنتیجه، ما برجستگی و ارزشمند بودن را هم برحسب مبانی موجود در مفهومهایی که قبلاً توسعه یافته و هم حرکت به سوی مرحلهٔ بالاتری از تجرید و مفهوم سازی پیچیده تر تعریف می کنیم.

توجّه و دغدغهٔ ما نسبت به واژهٔ قدرت ریاضی و مرحلهٔ برتر تفکّر مبانی ریاضی برجسته و ارزشمند را گسترده کرده و تقویت می کند، تکنیکها و روشهای ریاضی درس نه فقط محض یادگیری خود آنها، بلکه به عنوان موتور محرّکه ای برای حل مسائل با معنی توسعه یافته اند و حاوی این پیام هستند که برای دانش آموزان مهم است قادر باشند روشها را اختراع کنند، از بین نقشه ها و رویّه ها مناسب ترین را انتخاب کنند و محاسبات را درک کنند. ما بر تعریفی که استانداردهای شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM) از قدرت ریاضی کرده است صحّه می گذاریم که قدرت ریاضی یعنی توانایی «بررسی، معناسازی و ساختن معانی از موقعیتهای جدید، ساختن و ارائهٔ دلیل برای حدسیّه ها؛ و استفاده از مجموعه ای انعطاف پذیر از استراتژیها برای حل مسائل از داخل و خارج ریاضی» (استانداردهای برنامهٔ درسی و ارزشیابی، ۱۹۸۹، صص ۱۲۵ و ۱۲۶). فعالیتهای درس دانش آموزان را تشویق می کند که حدسیّه بسازند و برای حدسیه های خود دلیل داشته باشند و همچنین استدلالهای ریاضی وار دیگران را ارزشیابی کنند.

یکی از تأکیدهای درس بر مرحلهٔ برتر تفکر است. به جای تهیّهٔ مجموعه ای از الگوریتمها و رویکردهای فرمولی به مسائل خوب تعریف شده به سبک کتابهای آشپزی، دانش آموزان در موقعیتهایی قرار می گیرند که تشویق به تفکر در مراحل بالاتر شوند. به گفته رزنیک (۱۹۸۷، ص ۳)، مرحلهٔ برتر تفکر:

- غیر الگوریتمی است. یعنی مسیر فعالیت به طور کامل از قبل مشخّص نشده است.
- تمایل به پیچیدگی دارد. مسیر نهایی از هیچ نقطهٔ دیدی به تنهایی قابل رؤیت نیست (از نظر ذهنی)
- اغلب به جای راه حلهای منحصر به فرد، راه حلهای چندگانه ای حاصل می شود که هر یک سودها و زیانهای خود را دارد.
- درگیر قضاوتها و تفسیرهایی است که تفاوتهای دقیق و نافذی با هم دارند.
- درگیر به کارگیری چندین ضابطه است که گاهی [این ضابطه ها] در تضاد با یکدیگر هستند.

● اغلب درگیر عدم قطعیت است. هر چیزی که در تکلیف وجود دارد از قبل شناخته شده نیست.

● درگیر خود ـ نظمی در فرآیند تفکر است. اگر کس دیگری «هدایت کنندهٔ بازی» در هر قدم آن باشد، ما قادر به تشخیص مرحلهٔ برتر تفکر در فرد نیستیم.

● درگیر طرح معانی جالب توجه و پیدا کردن ساختار در یک بی نظمی آشکار است.

● پر از تلاش مجدّانه است. درگیر مقدار قابل توجهی کارهای ذهنی و فکری در نوع توصیفها و قضاوتهای مورد نیاز است.

یکی از پی آمدهای مرحلهٔ برتر تفکر آنچنان که توسط رزنیک شرح داده شده است، توسعهٔ طرز تلقی نقّادانه یعنی توانایی قضاوت دربارهٔ نمایشهای ریاضی ـ محور است (دلانگ، ۱۹۸۷). اگرچه این یکی از جنبه های مرحلهٔ برتر تفکر است، ما آن را به طور مجزّا درنظر می گیریم تا بر توانایی دانش آموزان تأکید کنیم به گونه ای که بتوانند با ریاضیاتی که دلالت بر مسائل اجتماعی، سیاسی و حرفه ای دارند کار کنند. با تأکید بر طرز تلقی نقّادانه، می خواهیم دانش آموزان تفکری را توسعه دهند تا به وسیلهٔ آن بتوانند ریاضی را به عنوان یک موضوع قابل تعمق و پیچیده و نه خشک و بی روح ببینند و آنگاه راجع به توصیفهای ریاضی موقعیتهای واقعی سؤال کنند. برخلاف آنچه که معمولاً تصوّر عموم است، فرضهای تأکید شده و علاقه های هدایتگر بر استدلالهای ریاضی تأثیر می گذارد.

برای حرکت به سوی این واقع بینی، دانش آموزان راجع به ارائه ها و تفسیرهای داده ها توسط دیگران از طریق درنظر گرفتن گلچین هایی از روزنامه ها و مجله های جاری و متداول قضاوت می کنند. آنها ارائه ها و تفسیرهای خودشان را توسعه می دهند. مانه تنها آنها را به چالش می طلبیم تا فرآیندها و استدلالهای ریاضی را ارزشیابی کنند، بلکه آنها را وادار می کنیم که فرضیه ها، علاقه های هدایتگر، و دلالتهایی که ذاتی استدلالها هستند را نیز ارزشیابی کنند. وقتی که دانش آموزان خودشان [پدیده ها را] تفسیر می کنند، نقّادانه به ارزشیابی پیش فرضها و علاقه های هدایتگر خود، هم از درون ریاضی و هم بیرون ریاضی می پردازند که [این ارزشیابیها] ممکن است که بر راه حل و تفسیر راه حل مسأله تأثیر بگذارد (اسکوسموز، ۱۹۹۰). چنین ملاحظاتی، تمرینهای عملی با استفاده از استدلال ریاضی وار برای دانش آموزان فراهم می کند تا برای زندگی خود تصمیم بگیرند و این فعالیّتها، دانش آموزان را جهت تصمیم گیری برای آینده قدرتمند می کنند.

مثالهایی از فعالیتهای درس

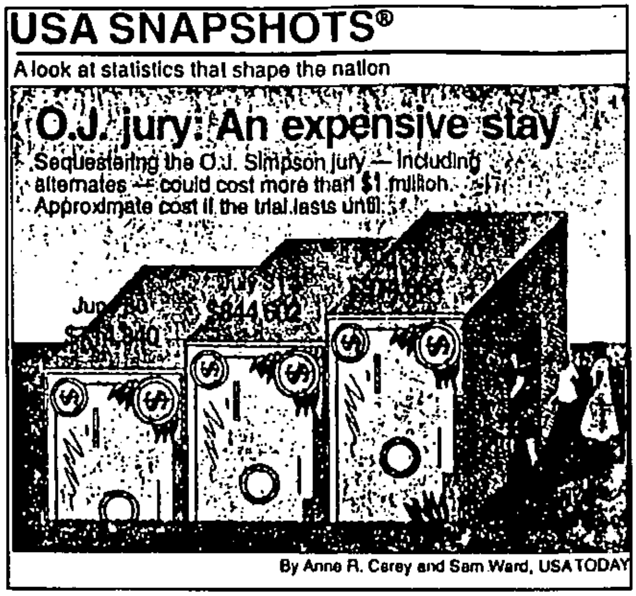
ما در این بخش سه مثال از فعالیتهایی که برای این درس تهیّه کرده ایم را طرح کرده و راجع به آنها برحسب اصول و ضابطه هایی که قبلاً به آنها اشاره کردیم بحث می کنیم. دو مثال اوّل مربوط به مفهوم ریاضی معادلات خطی دو متغیره است که در درسهای ریاضی I و II ارائه شده است. این مثالها با ضابطهٔ **ریاضی برجسته و ارزشمند** ما مطابقت دارد زیرا باعث می شوند تا دانش آموزان درک خود را از این مفهوم تعمیق بخشند، توانایی تفسیر و به کار بردن این مثالها در موقعیتهای جدید را در دانش آموزان گسترده می کند و دانش آموزان را به سمت مرحلهٔ بالاتری از تجرید و مفهوم سازی پیچیده تر حرکت می دهد. مثال سوم بحث طرز تلقی نقّادانه و قدرتمند کردن دانش آموزان در استفاده از استدلال ریاضی برای تصمیم گیری در زندگی را برجسته می کند.

هزینهٔ منزوی (قرنطینه) کردن هیأت منصفه

بسیاری از فعالیّتهای ما بر مبنای موضوعهایی از روزنامه ها و مجله های جاری است؛ یکی از این موضوعها، همچنان که در شکل ۱ نشان داده شده، در صفحهٔ اوّل روزنامهٔ یو ـ اِس ـ ای تودِی (USA TODAY) در ۱۹ ژانویه ۱۹۹۵ ظاهر شد. در آن زمان، محاکمهٔ اُ. جی. سیمپسون، یک شخص معروف و قهرمان سابق فوتبال آمریکایی بود که متّهم به قتل همسر و دوست سابق خود شده بود و محاکمه تازه آغاز گشته بود.

قانون اساسی آمریکا حق داشتن هیأت منصفه را در موقع محاکمهٔ متهمان به جنایت تضمین می کند و در موارد مهمّ دادگاهی جایی که در مورد جنایت انجام شده و متهم به قتل، تبلیغات زیادی به وجود می آید، دستگاه قضایی اعضای هیأت منصفه را [برای مدتی] منزوی می کند (یعنی از رسیدن گزارشهای خبری در مورد محاکمه و از بحث کردن آنها دربارهٔ روند قانونی با افرادی که از اعضای هیأت منصفه نیستند جلوگیری به عمل می آید). اضافه بر ۱۲ عضو اصلی هیأت منصفه، اعضای علی البدل در صورت غیبت هر یک از اعضای اصلی، جایگزین می شوند.

هیأت منصفهٔ اُ. جی: یک اقامت گرانقیمت. منزوی کردن هیأت منصفهٔ اُ. جی. سیمپسون ـ شامل اعضای علی البدل ـ می تواند هزینه ای بالغ بر یک میلیون دلار داشته باشد. هزینهٔ تقریبی اگر محاکمه تا: ۳۰ جون ادامه یابد برابر ۷۱۴٫۳۴۰ دلار، اگر تا ۳۱ جولای ادامه یابد برابر ۸۴۴٫۶۰۲ دلار و اگر تا ۳۱ آگوست



شکل ۱ـ یک فقره از روزنامه برای کشف و جستجو[26]
منبع: یواس ای تودی (USA TODAY)، ۱۹ ژانویه، ۱۹۹۵، ص ۱۸

ادامه یابد برابر ۹۷۴٫۸۶۴ دلار است.

ستونی در روزنامه تحت عنوان «هیأت منصفهٔ اُ. جی: یک اقامت گرانقیمت»، هزینهٔ تقریبی منزوی کردن هیأت منصفه (شامل اعضای علی البدل) را ارائه می دهد. مسأله ای که می خواهیم دانش آموزان آن را بررسی کنند این است «این اعداد [هزینهٔ تقریبی] از کجا می آیند [چگونه به دست آمده اند؟]» اگرچه بعضی از مفسّران نگرانی و حتّی انزجار خود را از شیفتگی عمومی نسبت به این ماجرای زننده ابراز داشته اند، امّا تصمیم ما برای کاوش این ماجرا، بر مبنای این حقیقت بود که مورد سیمپسون به عنوان موضوع گفتگوهای روزانه آنقدر برجسته بود که برای ما جای شکّی باقی نمی ماند که این موضوع «متعلّق»[27] به دانش آموزان است. از این گذشته، ما از این ایده حمایت می کنیم که در یک دموکراسی، آگاهی و باخبر بودن مردم از سیاستها و اعمالی که توسط دولت اتّخاذ می شوند مهم است، بخصوص وقتی که مسألهٔ هزینه کردن از سرمایهٔ عمومی درمیان باشد.

ظاهراً هیچ راهی برای تعیین این که نویسنده ها/طرّاحان چگونه به آن تقریبها رسیدند وجود ندارد، ولی ما دیده ایم که بعد از انجام چند محاسبه، دانش آموزان می توانند حدسهای موجّه ای بزنند و فرضیه هایی بسازند و بدین وسیله، قدرت ریاضی را به نمایش بگذارند، اگرچه ما نمی خواهیم که معلمان «در هر قدم بازی را هدایت کنند» (رزنیک، ۱۹۸۷، ص ۳) با این حال، مجموعه ای از سؤالهای هدایت کننده تهیّه کرده ایم که معلّمها می توانند از آنها به عنوان اشاره هایی برای پرورش و راهنمایی تفکّر دانش آموزان در درون قالب مسأله ها استفاده کنند (فکر کردن راجع به تعداد روزها، هزینهٔ روزانه یا تمام روزها و غیره) و سؤالهای دیگری طراحی شدند تا کاربرد مهارتها مربوط به معادلات خطی و نمودارهای آنها را به کار گیرند. این اشاره های سؤال گونه باید به ندرت توسط معلمها استفاده شود؛ امید ما این است که دانش آموزان، خود این سؤالها یا مشابه آنها را طرح کنند.

دانش آموزان با شروع شمارش از تاریخ انتشار [روزنامه] می توانند به راحتی دریابند که به طور تقریبی، تعداد روزها در هر یک از پیش بینی ها چند است. سپس آنها ممکن است دریابند که از تقسیم هر هزینهٔ نهایی بر تعداد روزهای متناسب با آن هزینه، سه هزینهٔ تقریبی برای هر روز به دست می آید (یعنی ۴۴۰۹٫۵۰ دلار تا ۳۰ جون، ۴۳۷۶٫۱۸ تا ۳۱ جولای و ۴۳۵۲٫۰۷ دلار تا ۳۱ آگوست). اگر دانش آموزان خود به فکر انجام این کار نیفتند، ما پیشنهاد می کنیم که آنها هزینهٔ روزانه را برای دوره های زمانی بین سه تاریخ داده شده در آینده محاسبه کنند. هزینه های هر روز در این دوره ها باز هم همان ۴۲۰۲٫۰۰ دلار در هر روز می شود. پس از آن، اگر آنها هر یک از تقریبهای هزینه ای داده شده را بر این هزینه در هر روز تقسیم کنند (مانند روز ۱۷۰ = روز / ۴۲۰۲$ ÷ ۷۱۴۳۴۰$)، دانش آموزان درمی یابند که تعداد روزهای محاسبه شده با تعداد واقعی روزها جور درنمی آید (یعنی ۳۰ جون فقط ۱۶۲ روز بعد از انتشار است نه ۱۷۰ روز). با وجود حقایقی مانند این که پیش روی دانش آموزان قرار دارد، دانش آموزان با این مسأله مواجه می شوند که باید این موارد اختلاف را به حساب بیاورند، و این مسأله ای است که به طور واضح، به دنبال «قضاوتها و تفسیرهای ظریف» (رزنیک، ۱۹۸۷، ص ۳) است.

همچنین، معلمها ممکن است به دانش آموزان پیشنهاد دهند که به این موقعیّت برحسب معادلات خطی فکر کنند و برای این کار از آنها بخواهند که سه تقریب را به عنوان زوجهای مرتّبی با x= تعداد روزها و y= هزینهٔ نهایی حساب کنند. به دنبال این اشاره، ما انتظار داریم تا دانش آموزان سه نقطه را هم خط[28] ببینند. پس معادلهٔ خطی که از آنها می گذرد برابر y = ۴۲۰۲x + ۳۳۶۱۶ است و محل تقاطع با محور xها -۸ (روزها) و محل تقاطع با محور yها ۳۳۶۱۶ (به دلار) است. ما فکر می کنیم که این موقعیت یک فرصت عالی برای دانش آموزان ایجاد می کند تا

پیش دانسته های خود را از این وضعیت با دانش صوری (رسمی) و مجرد جبری خود مرتبط کنند. و این همان موردی است که در استانداردهای برنامهٔ درسی شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM) به عنوان ارتباط و اتصال[29] ریاضی و نمایش دادن قدرت ریاضی از آن یاد شده است (NCTM، ۱۹۸۹). با این حال، ما تشخیص می دهیم که دیدن چنین ارتباط و اتّصالی توسط خود دانش آموزان ممکن است مشکل باشد زیرا در نمودار میله ای [شکل ۱] ظاهراً شواهدی که بتوان [با استناد به آنها] معادله ای به شکل $y = mx + b$ را حدس زد وجود ندارد. از این گذشته، ضرایب این معادلهٔ خطی بسیار بزرگتر از ضرایبی است که به طور نوعی (معمولاً) در کتابهای درسی ریاضی دبیرستانی آمریکایی پیدا می شود، و ممکن است که محلّ تقاطع با محور xها در ۸ − روز به نظر عجیب بیاید. چه در قالب وضعیتی در دنیای واقعی یا قالبی که نمایشگر آن یک معادلهٔ جبری باشد، دانش آموزان باید استدلال کنند که ۸ روز قبل از تاریخ انتشار، هزینهٔ منزوی کردن هیأت منصفه صفر بوده است و آنها باید این را چنین تفسیر کنند که منزوی کردن هیأت منصفه حتماً باید از همان تاریخ شروع شده باشد. (واقعیتی که صحّت آن با مراجعه به سایر مقاله ها در همان روزنامه معلوم می شود.) ما همچنین انتظار داریم که دانش آموزان، فرضهایی که بر مبنای آنها هزینه های پیش بینی شده را مشخّص نموده و نقد کنند. هرکس که آن پیش بینی ها را کرده بود، احتمالاً برای این کار، مقدار پول خرج شده در هر روز را تا به الآن (۴۲۰۲$) درنظر گرفته و با همان نرخ ثابت، آینده را پیش بینی کرده بود، و ما انتظار داشتیم دانش آموزان سؤال کنند که آیا فرض ثابت ماندن هزینهٔ روزانه منطقی به نظر می رسد [یا خیر]؟

این نوشتهٔ روزنامه که در بالا راجع به آن بحث شد، در شروع محاکمه سیمپسون در ژانویهٔ ۱۹۹۵ ظاهر شد. این نوشته هزینهٔ تقریبی منزوی کردن هیأت منصفه تا ۳۱ آگوست را پیش بینی کرد امّا درواقع، محاکمه در اوائل اکتبر به پایان رسید و باعث شد که هیأت منصفه طولانی ترین انزوای تاریخ کالیفرنیا را داشته باشند. همچنین، محاکمه به دلیل تعداد اعضایی که از هیأت منصفه کناره گیری کرده و به جای آنها اعضای علی البدل اضافه شدند نیز قابل توجه بود. محاکمه با ۱۲ عضو اصلی و ۱۲ عضو علی البدل شروع شد، امّا در پایان، فقط دو عضو علی البدل باقی ماندند. در طول محاکمه، مقاله های متعدّدی در روزنامه ها و مجلات دربارهٔ محاکمه و هیأت منصفه نوشته شد و چندین مقاله جزییاتی دربارهٔ هزینهٔ منزوی کردن هیأت منصفه ارائه دادند. برای مثال، مقاله ای در مجلهٔ مانی[30] در آوریل (لوسیانو[31]، ۱۹۹۵) نوشت که «هزینهٔ غذا، اقامت و حفاظت ۱۲ عضو اصلی هیأت منصفهٔ منزوی شده و ۹ عضو علی البدل باقی مانده ۱۹۸,۰۰۰ دلار در یک ماه است.» مقاله ای در شمارهٔ جون همین مجله (کلارک، ۱۹۹۵) توضیح داد که اعضای هیأت منصفه در هتلهای مجلل ۱۸۰ دلار در هر شب اقامت می کردند، غذاهای سفارشی می خوردند و روزی پنج دلار فوق العادهٔ روزانه دریافت می کردند. به علاوه، آنها به طور ۲۴ ساعت تحت مراقبت یک تیم از معاونان بوده و این گروه مأمور حفاظت اعضای هیأت منصفه بود تا مطمئن شوند که نظرات آنها تحت تأثیر افراد خارج [از این هیأت] قرار نمی گیرد. این مقاله در جمع بندی پایانی اشاره کرد که هزینهٔ نگهداری اعضای هیأت منصفه ای که منزوی شده بودند به «تقریباً ۱۳۰۰۰ دلار در هر روز» رسید.

مبلغهایی که در مقاله های اخیر اعلام شد پیشنهاد می دهند که نرخ نگهداری هیأت منصفه در انزوا مبلغ ۴۲۰۲ دلار شده که در شمارهٔ ژانویهٔ یو اس ای تودی (USA TODAY) برآورد نقصانی شده بود، زیرا هزینهٔ هتل به تنهایی برای هر فرد، روزی ۱۸۰ دلار بود که برای ۱۲ عضو اصلی و ۱۲ عضو علی البدل ۴۳۲۰ دلار در هر روز می شود. با این حال، دو مقالهٔ اخیر مجلهٔ پول نیز با هم سازگار نیستند، زیرا مبلغ ۱۹۸,۰۰۰ دلار در هر ماه که در مقالهٔ آوریل به آن اشاره شد به این معناست که هزینهٔ روزانه ۶۶۰۰ دلار می شود درصورتی که در مقالهٔ ماه جون به مبلغ ۱۳,۰۰۰ دلار در هر روز اشاره شده بود. ما امیدواریم که دانش آموزان متوجه شوند که دلایل بسیاری برای تنوّع تقریبها وجود دارد، شاید یکی از دلایل پاسخ به این سؤال باشد که کدام هزینهٔ مشخّص برای بدست آوردن هزینهٔ کلّی به حساب آمده است.

درنهایت، ما امیدواریم که دانش آموزان موضوع «اقامت گرانقیمت» را با طرح سؤالهای متنوع مورد بررسی قرار دهند.

سؤالهایی از قبیل: کدام ارزشهای اجتماعی را باید برای تصمیم گیری در مورد این که هزینه ها «منطقی و موجه[32]» یا «بسیار گرانقیمت[33]» هستند درنظر گرفت؟ چه منافعی و منافع چه کسانی با صرف بودجهٔ عمومی برای منزوی کردن هیأت منصفه حفظ می شود؟ کدام شواهد ریاضی وجود دارند و چگونه باید مورد استفاده قرار گیرند تا به سؤالهایی این چنین بتوان پاسخ داد؟

نرخ مرگ و میر ناشی از سرطان بر اثر تماس با آلودگی رادیواکتیو

تا به حال، بسیاری از فعالیتهای ما در رابطه با معادلات خطی با هدف مدل سازی داده های موجود به جای پیش بینی آینده است.

ما از طریق مثالهایی که در آنها از روش میانه ـ میانه[34] یا خط سه

نقطه[35] (توکی، ۱۹۷۹) استفاده می شود، رویهٔ **خط بهترین برازش**[36] را به دانش آموزان معرفی می کنیم، زیرا فکر می کنیم که این شیوه کمتر پیچیده و از نظر شهودی قابل درک تر از روش **کلاسیک رگرسیون خطی حداقل مربعها**[37] است. پس از آن دانش آموزان را تشویق می کنیم که از ماشینهای حساب T1 ـ ۸۲ هم برای میانه ـ میانه، هم مدلهای خطی حداقل مربعها و هم تحلیل رگرسیون چند جمله ای های با درجه های بالاتر، لگاریتمی و نمایی استفاده کنند.

ما برازش میانه ـ میانه را با یک مثال و با استفاده از داده ها در مقاله ای از سال ۱۹۶۵ **مجلهٔ بهداشت محیط زیست**[38] (آنچنان که در دانشکدهٔ علوم و ریاضی کارولینای شمالی، ۱۹۸۸ عرضه شده است) به دانش آموزان معرفی می کنیم. آن مقاله نرخ مرگ و میر ناشی از سرطان در هر ۱۰۰,۰۰۰ نفر را در چندین محلهٔ مسکونی در اطراف رودخانهٔ کلمبیا نزدیک پورتلند در ایالت اُرگال را بررسی کرده بود و همچنین، میزان تماس با آلودگی رادیواکتیو از طریق آب به واسطهٔ طرح انرژی اتمی در هاتفورد واشنگتن را که از زمان جنگ جهانی دوم پلوتونیوم تولید می کند نیز ضمیمه شده بود.

اگرچه مقاله تا حدودی قدیمی است، امّا مسألهٔ آلودگی صنعتی همچنان یکی از نگرانیهای اصلی در جامعهٔ ما است بخصوص ما در حاشیهٔ ۵۰ کیلومتری لاو کانال[39] زندگی می کنیم که مناطق معروفی نیستند و خانه ها در جاهایی ساخته شده بودند که قبلاً محل جمع آوری زباله های شیمیایی بود و در دههٔ ۱۹۷۰ به خاطر نرخ هشداردهندهٔ حوادث جدّی بیماری در بین ساکنان این مناطق، مجبور به تخلیهٔ آنها شدند. اخیراً، رسانه های محلّی موارد جدیدی را در نزدیکی محله های دفع زباله های شیمیایی است گزارش داده اند. ما فکر می کنیم که این شرایط، «مالکیت[40]» دانش آموز نسبت به این مسأله را افزایش می دهد و آگاهی آنها را نسبت به نیاز درنظر گرفتن عواقب اجتماعی و سیاسی و علاقه های هدایتگری گروههای مختلفی که درگیر مسائل تازه کشف شده هستند افزایش می دهند.

تجزیه و تحلیل داده های آموزشی

شاید جای تعجّب نباشد که ما فعالیّتهای زیادی را که بر مبنای داده های آموزشی هستند و بُرد آنها از نمره های کلاسی ریاضی تا مجموعه های بزرگ داده ها در اینترنت در نوسان است، درنظر گرفته ایم. در بسیاری موارد، دانش آموزان از طریق این فعالیّتها یاد می گیرند که رابطهٔ بسیار قوی ای بین یک متغیّر با دیگری وجود ندارد. درحالی که ممکن است این عدم رابطه در مواردی از قبیل امتحان میان ترم و امتحان پایانی برای یک درس قابل انتظار باشد، امّا این بی رابطگی بین نمره های کسب شده توسط دانش آموزان در کالجها و دانشگاهها و نمره های آزمون ورودی آنها از قبیل آزمون **شایستگی دانش آموزان**[41] (SAT) یا آزمون آموزش عالی آمریکا[42] نیز دیده شد ـ این آزمونهای عمومی توسط سازمانهای تجاری مستقل ارائه می شوند و اغلب دانش آموزانی که قصد ورود به آموزش عالی را دارند در این آزمونها شرکت می کنند. ـ برای بسیاری از دانش آموزان، این بی رابطگی موضوع حادّی را مطرح می کند و آن این است که یا استفاده از نتایج چنین آزمونهایی در پذیرش دانشگاهی قابل توجیه و عادلانه است یا خیر.

بسیاری از دانش آموزان برای تصمیم گیری در مورد این که برای کدامیک از کالجها یا دانشگاهها [مراکز آموزش عالی] تقاضا بکنند به کتابهای راهنماهای آن مراکز مراجعه می کنند. معمولاً این راهنماها اطّلاعات عمومی دربارهٔ این مراکز و داده هایی مربوط به وضعیّت [نمره ای] دانشجویان پذیرفته شده را ارائه می دهند. برای مثال، یک راهنمای محبوب، بُرد نمره های آزمون شایستگی دانش آموزان (SAT) را برای ۵۰٪ متوسط دانشجویان پذیرفته شده در هر یک از مراکز آموزش عالی اعلام می کند. اگرچه ممکن است این اطلاعات، یک آمار واقعی و سر راست به نظر آید، با این حال، چگونگی استفاده از این داده ها توسط هر دانش آموز برای تصمیم گیری در مورد تقاضا برای یک دانشگاه مشخّص، بسیار غامض و مشکل است.

اخیراً این مشکلات با انتشار مقاله هایی در مجلهٔ تایم و مجلهٔ وال استریت (استک لو[43]، ۱۹۹۵) تشدید شد. این مقاله ها نشان می دهند اطلاعاتی که توسط بعضی از کالجها یا دانشگاهها در اختیار اتحادیّهٔ ملّی ورزش کالجها[44] [دانشگاهها] (NCAA) قرار می گیرد با آنچه در کتابهای راهنما ارائه می شود متفاوت است. [لازم به ذکر است که] این اتحادیّه بر برنامه های ورزشی کالجها و دانشگاهها نظارت دارد تا یا اطمینان حاصل کند که این برنامه ها [از نظر علمی نیز] رقابت متعادلی در دانشجویان ایجاد می کنند به این معنا که دانشجویان ورزشکار به استانداردهای مشخّص آکادمیک دست می یابند، یا آن که از فعالیّت مؤسساتی که براساس نمره بندی [آزمونها] به سرمایه گزاران و سرمایه گزاران بالقوه اطلاعاتی دربارهٔ اعتبار مؤسسه های آموزشی ارائه می دهند جلوگیری کنند. این مقاله ها جزئیات این گونه اعمال را چنین بیان می کنند که نمره های دانشجویانی که از طریق برنامه های مخصوص پذیرفته شده اند، یا نمره های انگلیسی (و نه ریاضی) متقاضیان

بین المللی هر دو حذف شده اند [و به این دلیل است که میانگین نمرهٔ پذیرفته شدگان در هر دانشگاه مورد نظر که در کتاب راهنما به آن اشاره شده بیش از میانگین واقعی است.] این مقاله ها، همچنین موضوعهای گوناگونی را در رابطه با معنی نمره ها یا بُرد نمره ها برای گروههای مختلف دانشجویان نمایش می دهند. ما امیدواریم که دانش آموزان [با این اطلاعات] فقط بدبین نشوند و نتیجه نگیرند که «ارقام دروغ می گویند و دروغگوها رقم می سازند». در عوض، ما امیدواریم که دانش آموزان این موضوعها را با دقت و نقّادانه در نظر بگیرند و دربارهٔ این که آیا این تفاوتها نشان دهندهٔ تفاوتهای مشروع اندیشه ها و تفسیرها یا ارائهٔ کاملاً انحرافی موضوع است، به قضاوت بپردازند.

نتیجه گیری

مثالهایی که در بالا ارائه شدند، نشان دهندهٔ کاری است که در رابطه با هدفها و ارزشهایمان در حال تدوین آن هستیم. تمام کسانی که درگیر این پروژه هستند ـ یعنی معلمان ریاضی دورهٔ متوسطه و آموزشگران ریاضی در کالجها یا دانشگاهها ـ به چالش فراخوانده شده اند تا اطمینان حاصل کنند که ریاضیاتی که با آن دانش آموزان را درگیر کرده ایم، بسیار قوی و ارزشمند است و با فعالیتهای خود، توانایی دانش آموزان را برای تفکّر نقّادانه و استفادهٔ متفکرانه از ریاضی توسعه داده ایم. اگرچه غیرمنطقی است اگر توقّع داشته باشیم که هر یک و هر کدام از فعالیّتها تمام ضوابط و معیارهای ما را داشته باشند، با این حال ما امیدواریم که هر یک از این فعالیّتها به آفرینش درسی که هم جذّاب و هم قدرت آفرین [در دانش آموزان] باشد کمک کنند.

زیرنویس ها:

۱ـ برای اطلاعات بیشتر می توانید با صندوق پستی ۵۴۴۵ـ۱۹۳۹۵ تماس بگیرید.

۲ _ World Almanac
۳ _ Book of Facts
۴ _ State Board of Regents
۵ _ Regents highschool diploma
۶ _ Developmental
۷ _ Mathematics Alert Program (MAP)
۸ _ Barry Shealy
۹ _ McKninght et al
۱۰ _ National Council of Teachers of Mathematics
۱۱ _ Exploratory Data Analysis
۱۲ _ Tukey
۱۳ _ Stem - and - leaf plots
۱۴ _ Box plots
۱۵ _ Curve fitting
۱۶ _ Three point line
۱۷ _ Median median line
۱۸ _ Instrumental understanding
۱۹ _ Skemp
۲۰ _ Mathematical Power
۲۱ _ Higher - Order Thinking
۲۲ _ Resnick
۲۳ _ Critical Issues
۲۴ _ Delange
۲۵ _ Skovsmose

۲۶ـ آنچه که به دنبال می آید، متنی است که در نمودار میله ای ظاهر شده است.

۲۷ _ Belonging
۲۸ _ Colinear
۲۹ _ Connection
۳۰ _ Money Magazine
۳۱ _ Luciano
۳۲ _ Reasonable
۳۳ _ Too expensive
۳۴ _ Median - Median Method
۳۵ _ Three - Point line
۳۶ _ Line of best fit
۳۷ _ Least Square linear regression
۳۸ _ Journal of Environmental Health
۳۹ _ Love Canal
۴۰ _ Ownership
۴۱ _ Scholasfic Aptitude Test (SAT)
۴۲ _ American College Test (ACT)
۴۳ _ Stecklow
۴۴ _ National Collegiate Athletic Association

استدلال ترکیباتی

دکتر اسماعیل بابلیان
مؤسسه ریاضیات دکتر غلامحسین مصاحب دانشگاه تربیت معلم تهران

این مقاله در بیست و ششمین کنفرانس ریاضی کشور، در کرمان، برای دبیران ریاضی ارائه شده است.

مقدمه

یکی از مباحث جالب در ریاضیات دبیرستان، آنالیز ترکیبی است. جالب از این نظر که مسایل آن بسیار ملموس است و با زندگی روزمره و سرگرمیهای فکری ارتباط نزدیک دارد. در آنالیز ترکیبی معمولاً مجموعه ای متناهی چون

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

و ساختارهایی که روی آن تعریف می شود، مورد مطالعه قرار می گیرند. ساختارهایی نظیر جایگشت، ترکیب و ... از این جمله اند. اهم کار آنالیز ترکیبی شمارش تعداد اعضای مجموعه هایی است که از A، و ساختارهایی که روی آن تعریف می شود، به وجود می آیند. اثبات اتحادها نیز متداول است. اما، آنالیز ترکیبی بخش کوچکی از ترکیبیات است.

ترکیبیات چیست؟

موضوع ترکیبیات مطالعهٔ مجموعه های متناهی از اشیاء و ساختارهای تعریف شده روی آنهاست. این ساختارها می توانند جایگشت (بدون تکرار اشیاء، با تکرار اشیاء، مستدیر و ...)، ترکیب (بدون تکرار، با تکرار)، گمارش، پیکربندی، ... باشند.

در ترکیبیات معمولاً مسایل عمدهٔ ذیل مورد بررسی قرار می گیرد:

الف ـ مسأله وجودی

همان طور که گفته شد با تعریف یک ساختار روی یک مجموعه، مجموعه جدیدی به وجود می آید. آیا این مجموعه عضوی دارد؟ مثلاً، با استفاده از

$$N_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

مجموعه زیر را می سازیم.

$T_n =$ مجموعه مثلثهایی که طول اضلاع آنها عدد طبیعی و محیط آنها برابر n است.

به سادگی می توان ملاحظه کرد که

$$T_2 = \varnothing$$

و T_3 فقط یک عضو و T_1. فقط دو عضو دارد. برای اثبات وجود یا عدم وجود اشیائی با ویژگیهای خاص، معمولاً از اصل لانه کبوتر، همخوانی، استقرا یا ... استفاده می شود.

ب ـ مسأله شمارش

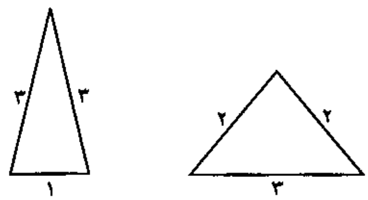
اگر مجموعه جدید، که با استفاده از تعریف ساختاری روی

مجموعه ای متناهی ساخته شده است، غیرخالی باشد چند عضو دارد؟ مثلاً، T_n چند عضو دارد؟

شمارش اعضای یک مجموعه به روشهای گوناگون صورت می گیرد که اهم آنها را بیان می کنیم:

۱ـ نوشتن اعضا

در این روش تمام اعضای مجموعه نوشته شده و بعداً شمارش می شوند. مثلاً، اعضای $T_{۷}$ عبارتند از:



بنابراین، $T_{۷}$ دارای دو عضو است. آیا تعداد اعضای $T_{۲۰}$ یا $T_{۱۰۰}$ را هم می توان به همین راحتی تعیین کرد؟ واضح است که نه. این روش برای مجموعه هایی که تعداد اعضای آنها زیاد و نوشتن اعضا مشکل باشد بسیار وقت گیر و خسته کننده است. معهذا، نوشتن بعضی ازاعضا به درک مسأله و به دست آوردن جواب کلی کمک می کند.

۲ـ تعبیر دوگانه

در این روش، که معمولاً در اثبات اتحادها به کار می رود، مدلی واقعی برای مسأله طراحی می شود و بعد با تعبیری دوگانه، ولی معادل، از مسأله اتحاد مربوطه ثابت می شود. در واقع اعضای یک مجموعه به دو صورت شمارش می شوند. در مسائل ۱ و ۵ ازاین روش استفاده شده است.

۳ـ دسته بندی اعضا

مجموعه ای که قصد شمارش اعضای آن را داریم به چند دسته افراز می کنیم و بعد تعداد اعضای هردسته را تعیین می کنیم. سپس، با استفاده از اصل جمع، تعداد اعضای مجموعه را به دست می آوریم. این روش به ویژه در اثبات اتحادهای ترکیبیاتی بسیار مفید است.

۴ـ تناظر یک به یک

در این روش سعی می کنیم تناظری یک به یک بین مجموعه ای که قصد شمارش اعضای آن را داریم با مجموعه ای که از قبل تعداد اعضای آن را می دانیم، برقرار کنیم. این روش بسیار تواناست و کاربرد آن قابل شمارش نیست!

موضوع اصلی این مقاله ارائه نمونه هایی از کاربرد روشهای ۲ تا ۴ می باشد که به آن **استدلال ترکیبیاتی یا شمارش بدون شمردن** می گویند.

استدلال ترکیبیاتی

معمولاً برای اثبات برقراری اتحادها در ترکیبیات از دو روش می توان استفاده کرد: **روش جبری یا روش ترکیبیاتی**. درروش جبری با استفاده از فرمولها و عملیات جبری از یک طرف اتحاد شروع و به طرف دیگر می رسیم. در این روش صرفاً از عملیات پیچیده و طولانی استفاده می شود.

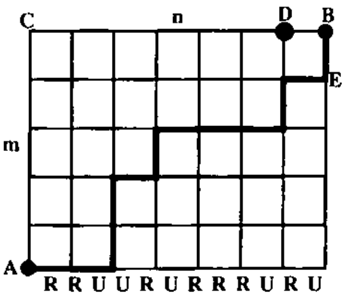
در روش ترکیبیاتی، یا استدلال ترکیبیاتی، به استناد تعاریف و ویژگیهای اشیاء مورد بررسی و به کار بردن روشهای شمارش ۲ تا ۴، که در بالا شرح داده شد، به اثبات اتحادها می پردازیم. به دلیل استفاده از مفاهیم تعریف شده و سعی در پیدا کردن نمونه هایی که سازگار با مسأله باشند این روش بسیار جذاب است و به خاطر کاربرد در مثالهای ملموس درک آن ساده تر است. کاربرد استدلال ترکیبیاتی انگیزهٔ بیشتری در دانش آموزان برای حل مسائل جدید ایجاد می کند و ابزاری توانا برای مقابله با مسائل مشابه در اختیار آنها می گذارد.

نمونه های استدلال ترکیبیاتی

در این قسمت با طرح چند مسأله و اثبات برقراری چند اتحاد، که اکثر آنها را می شناسید، به کمک استدلال ترکیبیاتی، سعی می کنیم این روش توانا را به طور مناسبی معرفی کنیم. تنها مطالبی که به آنها استناد می کنیم اصل جمع و اصل ضرب از آنالیز ترکیبی وتعریف $\binom{n}{m}$، برای اعداد صحیح و نامنفی n, m به عنوان تعداد طرق انتخاب m شیء متمایز از n شیء متمایز است، با این شرط که $m \le n$. $\binom{n}{m}$ ضریب دوجمله ای نیوتن نیز نامیده می شود.

مسأله ۱

در شکل ذیل شبکه ای از جاده ها ملاحظه می شود، هر ضلع را یک جاده درنظر بگیرید. برای رفتن از A به B، با طی کردن



کوتاهترین مسیر، باید درطول این جاده ها یا به راست (R) یا به بالا (U) حرکت کنیم. اگر این شبکه دارای m مربع عمودی و n مربع افقی باشد تعداد کوتاهترین مسیرها از A به B را تعیین کنید.

حل: یک مسیر در شکل صفحه قبل نشان داده شده است. همان طور که ملاحظه می کنید هر مسیر متناظر با یک عبارت ۱۲ حرفی است که از ۵ حرف U و ۷ حرف R تشکیل شده است (در حالت کلی یک عبارت $m+n$ حرفی داریم که دارای m حرف U و n حرف R است). لذا، تعداد طرق رفتن از A به B برابر تعداد طرق انتخاب m محل از $m+n$ محل، برای قرار دادن U ها (یا n محل از $m+n$ محل برای قرار دادن R ها)، است. پس، جواب

$\binom{m+n}{m}$ یا $\binom{m+n}{n}$ است.

نتایج

الف ـ فرض کنید $N=m+n$. بنابر جواب مسأله ۱ داریم:

$$\binom{N}{m}=\binom{N}{n}=\binom{N}{N-m} \qquad (1)$$

ب ـ اگر در شکل قبل B روی C قرار گیرد، یعنی $n=0$، تعداد مسیرها مساوی یک خواهد بود. بنابراین،

$$\binom{m}{m}=\binom{m}{0}=1 \qquad (2)$$

ج ـ مسیرهای از A به B را می توان به دو دسته مجزا تقسیم کرد. مسیرهایی که از D می گذرند و مسیرهایی که از E می گذرند. تعداد مسیرهای اول، بنابر مسأله ۱،

$$\binom{m+(n-1)}{m}=\binom{m+n-1}{m}$$

و تعداد مسیرهای دوم

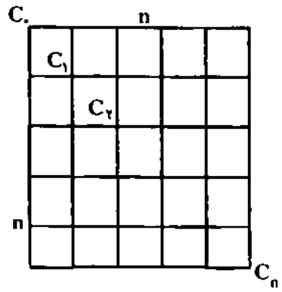
$$\binom{(m-1)+n}{m-1}=\binom{m+n-1}{m-1}$$

است. لذا، با توجه به اینکه $m+n-1=N-1$ و اینکه تعداد مسیرهای از A به B مساوی تعداد مسیوهایی است که از D یا E عبور می کنند، داریم:

$$\binom{N}{m}=\binom{N-1}{m}+\binom{N-1}{m-1} \qquad (3)$$

د ـ به کمک شکل زیر و مسأله ۱، اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n} \qquad (4)$$



حل: واضح است که بنا بر مسأله ۱، تعداد مسیرهای از A به B برابر $\binom{2n}{n}$ است. این مسیرها را به $n+1$ دسته جدا از هم تقسیم می کنیم. مسیرهای از A به B از طریق C_0، C_1، C_2، ... و C_n. تعداد مسیرهای از A به B که از C_0 می گذرند، بنابر مسأله ۱ و نتیجهٔ (الف)، عبارت است از

$$\binom{n}{n}\binom{n}{0}=\binom{n}{0}^2$$

تعداد مسیرهای از A به B که از C_1 می گذرند، برابر است با

$$\binom{n-1+1}{n-1}\binom{1+n-1}{1}=\binom{n}{1}^2$$

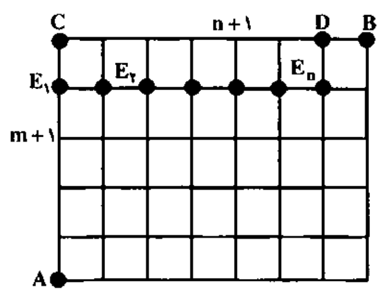
و بالاخره تعداد مسیرهایی که از C_n می گذرند، برابر است با

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n}=\binom{n}{n}^2$$

با جمع تعداد این مسیرها تساوی (۴) به دست می آید.

هـ ـ به کمک شکل زیر و مسأله ۱، ثابت کنید

$$\binom{m}{0}+\binom{m+1}{1}+\cdots+\binom{m+n}{n}=\binom{m+n+1}{n} \qquad (5)$$



حل: مسیرهای از A به B را درنظر می گیریم که حداقل از یک ضلع روی CB عبور می کنند. واضح است که کلیه این مسیرها باید از نقطه D گذشته و بعد به B برسند (زیرا وقتی مسیری به نقطه ای از خط CB برسد باید بالاجبار در مسیر C به B ادامه یابد). تعداد این مسیرها، بنابر مسأله ۱، برابر است با

$$\binom{(m+1)+(n+1)-1}{m+1}=\binom{m+n+1}{m+1}=\binom{m+n+1}{n}$$

از طرف دیگر این مسیرها را می توان به $(n+1)$ دسته مجزا تقسیم کرد، آنهایی که از $(n+1)$ ضلع روی CB می گذرند، آنهایی که از n ضلع روی CB می گذرند و . . . مسیرهایی که از تمام CB می گذرند باید از E_0 عبور کنند، مسیرهایی که از n ضلع روی CB عبور می کنند باید از E_1 بگذرند و ... تعداد مسیرهای از A به B که از E_i عبور می کنند برابر است با (m مربع عمودی و i مربع افقی) $\binom{m+i}{i}$.

بنابراین

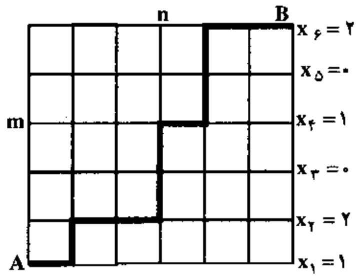
$$\sum_{i=0}^{n}\binom{m+i}{i}=\binom{m+n+1}{n}$$

مسأله ۲

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله زیر را تعیین کنید.

$$x_1+x_2+\dots+x_{m+1}=n \quad (m,n\ge 0) \qquad (6)$$

حل: ثابت می کنیم تناظری یک به یک بین جوابهای صحیح و نامنفی معادله (۶) و مسیرهای از A به B در شکل زیر برقرار است.

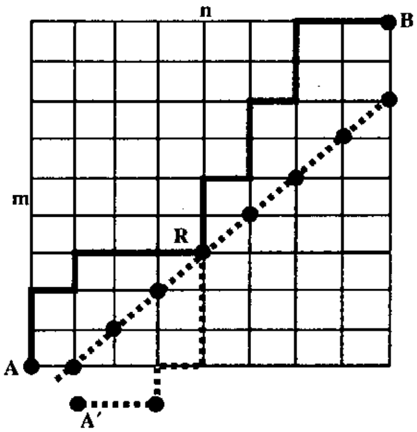


اگر m مربع عمودی داشته باشیم، $m+1$ ضلع افقی در شبکه خواهیم داشت. هر ضلع را متناظر با یک متغیر می گیریم (از پایین به بالا). هر مسیر از A به B بالاجبار n بار به راست خواهد رفت که عدد سمت راست معادله (۶) را مشخص می کند، به این ترتیب که x_i را مساوی تعدادضلعهایی از خط افقی i ام می گیریم که روی این مسیر قراردارد (مقادیر x_i ها متناظر با یک مسیر از A به B در شکل بالا نشان داده شده است). به سادگی معلوم می شود که این تناظر یک به یک است و هر جواب (۶) نیز مسیری از A به B را معین می کند. لذا، بنابر مسأله ۱، تعداد جوابها $\binom{m+n}{n}$ است.

مسأله ۳

در مقابل یک بستنی فروشی $m+n$ نفر صف کشیده اند تا بستنی ۲۵ تومانی بخرند! m نفر فقط سکه ۲۵ تومانی و n نفر فقط اسکناس پنجاه تومانی دارند. هرنفر فقط یک بستنی می خرد و بستنی فروش هیچگونه پولی در بساط ندارد! اگر $m \ge n$، تعیین کنید احتمال اینکه بستنی فروش به پول خرد نیاز پیدا کند چقدر است؟

حل: سعی می کنیم این مسأله را به مسألهٔ ۱ ربط دهیم. در شکل ذیل فرض کنید پرداخت سکه متناظر با بالا رفتن و پرداخت اسکناس متناظر با به راست رفتن باشد. درحقیقت باید تعداد مسیرهایی را پیدا کنیم که حداقل از یکی از نقاط که با دایره کوچک مشخص شده اند، بگذرد. زیرا، در این صورت است که تعداد اسکناسهای پرداخت شده بیش از سکه ها خواهد شد و بستنی فروش نیاز به پول خرد پیدا خواهد کرد.



برای این منظور اولین نقطه از نقاط مزبور را که مسیر از آن می گذرد R می نامیم با شمارش تعداد این مسیرها، تصویر قسمتی از مسیر را که بین A و R می باشد نسبت به خطی که نقاط با دایره کوچک را مشخص می کند پیدا می کنیم. به سادگی ملاحظه می شود که تعداد این مسیرها مساوی تعداد مسیرهای از A' به B است و تعداد اینها $\binom{m+1+n-1}{m+1}$ یعنی $\binom{m+n}{m+1}$ است. پس احتمال برابر است با

$$\binom{m+n}{m+1}\div\binom{m+n}{m}=\frac{n}{m+1}$$

مسأله ۴

با استدلالی ترکیبیاتی ثابت کنید تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی، ۲^n است.

حل: می‌دانیم که تعداد کدهای n رقمی که با ارقام صفر و یک می‌توان نوشت ۲^n است (هر رقم می‌تواند صفر یا یک باشد). ثابت می‌کنیم که تناظری یک به یک بین کدهای n رقمی ۰ و ۱ و زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برقرار است. فرض کنید

$$A = \{x_۱, \dots, x_n\}$$

و

$$B = \{y_۱, y_۲, \dots, y_k\}$$

زیرمجموعه‌ای از A باشد. کد n رقمی از ۰ و ۱، متناظر با B را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon(B) = \varepsilon_۱\varepsilon_۲\dots\varepsilon_n$$

که در آن

$$\varepsilon_i = \begin{cases} ۱, & x_i \in B \\ ۰, & x_i \notin B \end{cases}$$

مثلاً، اگر $A = \{x_۱, x_۲, x_۳, x_۴\}$ و $B = \{x_۲, x_۴\}$، آن‌گاه

$$\varepsilon(B) = ۰۱۰۱$$

واضح است که با داشتن یک کد n رقمی از ۰ و ۱، می‌توان زیرمجموعه‌ای از A نوشت و تناظر بالا یک به یک است. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های A مساوی ۲^n است.

نتیجه: با توجه به اصل جمع و اینکه $\binom{n}{i}$ تعداد زیرمجموعه‌های i عضوی A است، داریم

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\dots+\binom{n}{n}=۲^n \qquad (۷)$$

مسأله ۵

تعریف ـ هر جواب طبیعی معادله

$$y_۱+y_۲+\dots+y_k=n \quad (n,k \in N) \qquad (۸)$$

را یک **k ـ افراز مرتب** n می‌نامیم. ثابت کنید تعداد k ـ افرازهای مرتب n برابر $\binom{n-۱}{k-۱}$ است.

حل: ابتدا مسأله را با یک مثال روشن می‌کنیم. اگر $n=۵$ و $k=۲$ آن‌گاه ۲ ـ افراز مرتب‌های ۵ عبارتند از:

$$۱,۴ \ ; \ ۴,۱ \ ; \ ۲,۳ \ ; \ ۳,۲$$

زیرا،

$$۱+۴=۴+۱=۲+۳=۳+۲=۵$$

هدف، تعیین تعداد اینها در حالت کلی است. فرض کنید $y_۱,\dots,y_k$ یک جواب (۸) باشد. اعداد $a_۱, a_۲, \dots, a_{k-۱}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{cases} a_۱ = y_۱ \\ a_i = a_{i-۱} + y_i, \quad (i=۲,\dots,k-۱) \end{cases}$$

واضح است که $a_i > a_{i-۱}$، $i=۲,\dots,k-۱$، و

$$۱ \le y_۱ \le a_i \le a_{k-۱} = y_۱+\dots+y_{k-۱} = n-y_k < n$$

درنتیجه

$$۱ \le a_i \le n-۱, \qquad (i=۱,\dots,k-۱)$$

و

$$\{a_۱, a_۲, \dots, a_{k-۱}\}$$

زیرمجموعه‌ای $(k-۱)$ عضوی از $\{۱,۲,\dots,n-۱\}$ است که به طور یکتا از $y_۱$ تا y_k حاصل می‌شود. به عبارت دیگر، هر جواب (۸) متناظر با یک زیرمجموعه $(k-۱)$ عضوی از $\{۱,۲,\dots,n-۱\}$ است به عکس اگر $b_۱ < b_۲ < \dots < b_{k-۱}$ و

$$\{b_۱,\dots,b_{k-۱}\} \subseteq \{۱,۲,\dots,n-۱\}$$

با تعریف،

$$\begin{cases} y_۱ = b_۱ \\ y_i = b_i - b_{i-۱} \quad (i=۲,\dots,k-۱) \\ y_k = n-b_{k-۱} \end{cases}$$

داریم

$$y_i \in N_n, \qquad (i=۱,\dots,k)$$

و

$$\sum_{i=۱}^{k} y_i = b_۱ + \sum_{i=۲}^{k-۱}(b_i-b_{i-۱}) + n - b_{k-۱}$$
$$= b_۱ + (b_{k-۱}-b_۱) + n - b_{k-۱} = n$$

یعنی $y_۱,\dots,y_k$ یک جواب (۸) است. بنابراین، تناظری یک به یک بین جوابهای (۸) و زیرمجموعه‌های $(k-۱)$ عضوی $N_{n-۱} = \{۱,\dots,n-۱\}$، برقرار است. امّا تعداد زیرمجموعه‌های $(k-۱)$ عضوی $N_{n-۱}$، بنابر تعریف ضریب دوجمله‌ای، مساوی $\binom{n-۱}{k-۱}$ است.

نتیجه: تعداد کل افرازهای مرتب n برابر $۲^{n-۱}$ است.

حل: تعداد افرازهای مرتب n وقتی k از ۱ تا n تغییر می‌کند، برابر تعداد جوابهای (۸) است (چرا؟)

بنابراین

$$\text{تعداد افرازهای مرتب } n = \binom{n-۱}{۰}+\binom{n-۱}{۱}+\dots+\binom{n-۱}{n-۱}$$

[بنابر نتیجهٔ مسأله ۴] $= 2^{n-1}$

مسأله ۶

اتحادهای زیر را به کمک استدلال ترکیباتی ثابت کنید:

(الف)
$$m\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1} \quad (m, n \in N)$$

(۹) (ب)
$$\sum_{m=1}^{n} m\binom{n}{m} = n2^{n-1}$$

حل: فرض کنید می‌خواهیم از بین n نفر، یک کمیته m نفری، و یک رئیس برای آن کمیته، انتخاب کنیم. این عمل را به دو راه، که معادل یکدیگرند، می‌توان انجام داد.

راه اول: به $\binom{n}{m}$ طریق می‌توان m نفر انتخاب کرد. واضح است که از یک کمیته m نفری، با انتخاب کردن یا منصوب کردن، به m طریق می‌توان یک رئیس تعیین کرد. پس، بنا بر اصل ضرب، به

$$m \times \binom{n}{m}$$

طریق می‌توان یک کمیته m نفری و یک رئیس برای آن انتخاب کرد.

راه دوم: ابتدا رئیس را انتخاب یا منصوب می‌کنیم! این کار به n طریق صورت می‌گیرد. بعد، از بین $n-1$ نفر باقیمانده، $m-1$ نفر دیگر را انتخاب می‌کنیم. این کار به $\binom{n-1}{m-1}$ طریق صورت می‌گیرد. پس، تعداد طرق انتخاب یک کمیته m نفری با یک رئیس برای آن، برابر است با

$$n\binom{n-1}{m-1}$$

این اثبات (الف) را تمام می‌کند.

برای اثبات (ب) مسأله را چنین عنوان می‌کنیم:

به چند طریق می‌توان از بین n نفر یک کمیته و یک رئیس برای آن انتخاب کرد؟

اگر راه اول را درنظر بگیریم، کمیته موردنظر می‌تواند شامل ۱ نفر، ۲ نفر، ... یا n نفر باشد، پس تعداد طرق برابر است با

$$\sum_{m=1}^{n} m\binom{n}{m}$$

اگر راه دوم را درنظر بگیریم، به n طریق می‌توان یک رئیس انتخاب کرد، بقیه اعضای کمیته زیرمجموعه‌ای از مجموعه $(n-1)$ نفر باقیمانده است. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه با $(n-1)$ عضو، بنابر نتیجهٔ مسأله ۴، برابر 2^{n-1} است. پس، تعداد طرق

$$n2^{n-1}$$

است. لذا، داریم

$$\sum_{m=1}^{n} m\binom{n}{m} = n_2^{n-1}$$

(تساوی بالا معمولاً با مشتق گیری از دو جمله‌ای نیوتن به دست می‌آید.) از مسأله ۶ نتایج جالب ذیل حاصل می‌شود.

نتایج

الف ـ اگر p عددی اول باشد و $1 \le m < p$، آن‌گاه $\binom{p}{m}$ بر p بخشپذیر است.

برهان ـ از تساوی اول (۹) و اول بودن p استفاده کنید.

ب ـ اگر k عددی صحیح و نامنفی باشد و p اول در این صورت

$$(k+1)^p \equiv k^p + 1 \pmod p \qquad (10)$$

برهان ـ داریم (تساوی زیر نیز با استدلال ترکیباتی ثابت می‌شود):

$$(k+1)^p = k^p + \left(\sum_{m=1}^{p-1} \binom{p}{m} k^{p-m}\right) + 1$$

عبارت داخل پرانتز، بنابر (الف)، بر p بخشپذیر است. بنابراین، (۱۰) را داریم.

ج ـ اگر p عددی اول باشد، $m, n \in N, m \le n$ و بسط n, m در مبنای p چنین باشد:

$$n = n_0 + n_1 p + n_2 p^2 + \cdots$$

$$m = m_0 + m_1 p + m_2 p^2 + \cdots$$

ثابت کنید:

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{n_0}{m_0}\binom{n_1}{m_1}\binom{n_2}{m_2}\cdots \pmod p \qquad (11)$$

(**تذکر:** تعداد جملات سمت راست همنهشتی بالا به m بستگی دارد و اگر به ازای حتی یک i، $m_i > n_i$، آن‌گاه $\binom{n_i}{m_i} = 0$ و $\binom{n}{m}$ بر p بخشپذیر خواهد بود.)

برهان ـ بنابر (ب)، به ازای هر عدد صحیح نامنفی k داریم

$$(k+1)^n = (k+1)^{n_0} \times \left[(k+1)^p\right]^{n_1} \times \left[(k+1)^{p^2}\right]^{n_2} \times \cdots$$

$$\equiv (k+1)^{n_0} \times (k^p + 1)^{n_1} \times (k^{p^2} + 1)^{n_2} \times \ldots \pmod p$$

بنابراین،

$$(k+1)^n \equiv \Pi_{i\geq 0} \sum_{j=0}^{n_i} \binom{n_i}{j} k^{jp^i} \pmod p$$

چون تساوی بالا به ازای هر عدد صحیح نامنفی k برقرار است، باید ضریب k^m در دوطرف یکسان باشد،

ضریب k^m در سمت چپ برابر $\binom{n}{m}$ است. اما جملات سمت راست به صورت زیر هستند:

$$\binom{n_0}{j_0}\binom{n_1}{j_1}\dots k^{j_0p^0+j_1p^1+j_2p^2+\dots}$$

چون بسط m در مبنای p یکتا است، پس توان k وقتی مساوی m خواهد شد که

$$j_i = m_i \quad (i=0,1,2,\dots)$$

بنابراین، ضریب k^m در سمت راست مساوی

$$\binom{n_0}{m_0}\binom{n_1}{m_1}\binom{n_2}{m_2}\dots$$

است و (۱۱) برقرار است.

د ـ $\binom{n}{m}$ به ازای چه مقادیری از m و n فرد است؟

جواب ـ اگر به ازای $p=2$ داشته باشیم $m_i \le n_i$، $i=0,1,\dots$.

هـ ـ چه وقت $\binom{n}{m}$، به ازای هر m که $m\le n$، فرد است؟

جواب ـ وقتی $n=2^k-1$.

تمرین ـ ثابت کنید

(الف) $$\binom{pn}{pm}\equiv\binom{n}{m} \pmod p$$

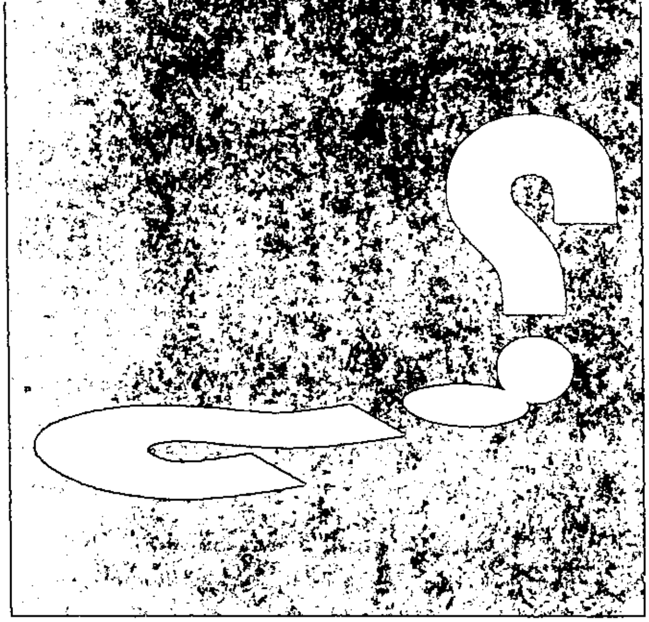
(۱۲) (ب) $$\binom{p^n-1}{k}\equiv(-1)^k \pmod p$$

مسأله ۷

فرض کنید t_n تعداد مثلثهایی باشد که طول اضلاع آنها عدد طبیعی و محیط آنها n باشد $(n\ge 3)$. t_n را به دست آورید.

حل: به دست آوردن t_n برحسب n به سادگی مسایل قبلی نیست. لذا سعی می کنیم رابطه های بازگشتی که t_n در آنها صدق می کند را به دست آوریم. ابتدا نشان می دهیم که

$$t_{2k}=t_{2k-3}$$



یعنی تعداد مثلثهایی که محیط آنها $2k$ می باشد، مساوی تعداد مثلثهایی است که محیط آنها $2k-3$ است! برای این منظور به نکات زیر توجه کنید:

الف ـ اگر طول یک ضلع از مثلثهای مورد نظر ۱ و طول دو ضلع دیگر a,b باشد، باید داشته باشیم

$$|a-b|<1$$

چون a,b اعداد طبیعی هستند، باید داشته باشیم.

$$|a-b|=0$$

و یا

$$a=b$$

محیط چنین مثلثی $2a+1$ خواهد بود. به عبارت دیگر، مثلثی با ضلع ۱ و محیط زوج وجود ندارد.

ب ـ اگر a,b و c طبیعی و طول اضلاع یک مثلث باشند، $a+1$، $b+1$ و $c+1$ نیز طول اضلاع یک مثلث هستند. کافی است ملاحظه کنید که از $a+b>c$ نتیجه می شود

$$(a+1)+(b+1)>c+2>c+1$$

و از $|a-b|<c$، داریم

$$|a+1-(b+1)|<c<c+1$$

ج ـ آیا اگر a,b و c طبیعی و طول اضلاع یک مثلث باشند، $a-1$، $b-1$ و $c-1$ نیز می توانند طول اضلاع یک مثلث باشند؟ واضح است که نه. مثلاً، اگر $a=1$، آن گاه $a-1=0$، اما $(a-1)$ نمی تواند طول ضلع یک مثلث باشد. ولی نشان می دهیم که اگر محیط مثلث زوج باشد، $a-1$، $b-1$ و $c-1$ نیز می توانند طول اضلاع یک مثلث باشند. کافی است توجه کنید که اگر محیط مثلث زوج باشد، یا هر سه ضلع زوج یا دو ضلع فرد و یک ضلع زوج است و بنابر (الف) طول هیچکدام از اضلاع، یک نیست.

اگر $a+b>c$ ، حتماً $(a+b)-c\ge 2$ (چرا؟)
بنابراین،

$$(a-1)+b-1=(a+b)-2\ge c>c-1$$

همچنین، اگر $|a-b|<c$ ، آن گاه $c-|a-b|\ge 2$ (چرا؟).
بنابراین،

$$|(a-1)-(b-1)|=|a-b|\le c-2<c-1$$

نتیجه: هر مثلث با اضلاع b, a و c و محیط $2k$ را با مثلث به اضلاع $a-1$ ، $b-1$ و $c-1$ متناظر می گیریم. محیط مثلث اخیر $2k-3$ است. این تناظر یک به یک است. (چرا؟) و اگر مثلثی با محیط $2k-3$ داشته باشیم، با افزودن یک واحد به هر یک از اضلاع، آن مثلثی با محیط $2k$ به دست می آید. با این تناظر، داریم

$$t_{2k}=t_{2k-3} \qquad (13)$$

اما، آیا t_{2k+1} نیز با t_{2k-2} برابر است؟ ویژگی (ج) نشان می دهد که این طور نیست. بنابر (ب) داریم

$$t_{2k+1}\ge t_{2k-2}$$

به عبارت دیگر، با اضافه کردن یک واحد به طول اضلاع مثلثی که محیط آن $2k-2$ است، یک مثلث با محیط $2k+1$ حاصل می شود. ولی همهٔ مثلثهای با محیط $2k+1$ به این طریق به دست نمی آیند: مثلاً، مثلث با اضلاع $k, k, 1$. مثلثهای دیگری که به این ترتیب به دست نمی آیند، آنهایی هستند که متساوی الساقین هستند، محیط آنها $2k-2$ است، و می توان ۳ واحد به قاعده آنها اضافه کرد تا مثلثی متساوی الساقین به دست آید. اگر a قاعده و b, b دو ضلع متساوی این مثلث باشند، باید $b, a+3$ و b مثلثی با محیط $2k+1$ تشکیل دهند. لذا، باید داشته باشیم

$$a+3<2b=2k+1-a$$

یعنی، $a<k-1$ تعداد a هایی که در این نامساوی صدق می کنند $(k-2)$ است. تاکنون $k-2+1$ مثلث جدید به دست آورده ایم. به سادگی ملاحظه می شود که اگر $n>7$ (یا $k>3$)، مثلث دیگری به اضلاع $k, k-1, 2$ وجود دارد که محیط آن $2k+1$ است و از مثلثهای با محیط $2k-2$ ، با اضافه کردن یک واحد به هر ضلع، به دست نمی آید (چرا؟). بنابراین،

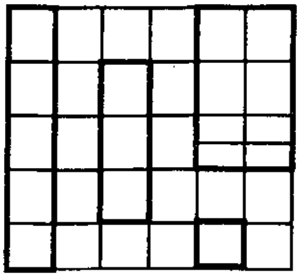
$$t_{2k+1}=t_{2k-2}+k \qquad (14)$$

به دست آوردن t_n برحسب n ، به کمک روابط بازگشتی (۱۳) و (۱۴)، مشکل نیست.

در خاتمه مقاله، یادآوری می کنیم که روشهای حل مسأله قالب پذیر نیستند! به مسألهٔ ذیل توجه کنید.

مسأله ۸

در شکل زیر چند مستطیل مشاهده می شود؟ (یادآوری: هر مربع نیز مستطیلی با طول و عرض یکسان است.)



جواب:

$$\binom{n+1}{2}\times\binom{m+1}{2}=\frac{n(n+1)m(m+1)}{4} \qquad (15)$$

چندتا از این مستطیلها مربع هستند؟
اگر $m\le n$ ، جواب چنین است:

$$\sum_{i=0}^{m-1}(n-i)(m-i) \qquad (16)$$

برای به دست آوردن روابط (۱۵) و (۱۶) کافی است از تعریف مستطیل و مربع استفاده کنید!

مراجع:

[1] Brualdi, Richard A.," Introductory Combinatorics ", Elsevier Science Publishers B.V. (1982).

[2] Bryant, V., " Aspects of Combinatorics: A wide-ranging introduction ", Cambridge University Press (1993).

[3] Mathematical Magazine, Vol. 67, No.2, April (1994).

[4] Stanley, Richard P., " Enumerative Combinatorics ", Vol. 1, Wadsworth & Brooks / Cole Advanced Books & Software (1986).

[5] Townsend, M." Discrete Mathematics: Applied Combinatorics and Graph Theory ", The Benjamin / Cummings Publishing Company, Inc. (1987).

دیدگاههایی پیرامون آموزش ریاضی در دبیرستان

ترجمه : محمود ولیدی
دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه تربیت مدرس

مقاله ای که در پیش رو دارید، نخستین مقاله از مجموعهٔ مقاله‌هایی است که حاوی پاسخ چند تن از ریاضیدانان، آموزشگران و معلمان ریاضی به پرسشهایی پیرامون آموزش ریاضی در سطح متوسطه خواهد بود. این پرسش ها عبارتند از :

۱ ـ با توجه به آنچه که هر یک از فارغ التحصیلان دبیرستان باید در مورد ریاضی بدانند، شما بیشتر به چه نکته ای توجه دارید؟

۲ ـ از نظر شما چه مواردی باید اساسی ترین ویژگی های هر برنامه درسی ریاضی را در سطح دبیرستان تشکیل دهد؟

۳ ـ چگونه می توان پی برد که آموزش ریاضی در این سطح به خوبی پیش می رود؟

۴ ـ از نظرشما مهمترین نکته با توجه به پیش‌زمینه ریاضی، نگرش نسبت به آن و نیز رویکردهای آموزشی معلمان ریاضی چیست؟

۵ ـ نخستین بار چه چیز شما را به ریاضی علاقه مند کرد؟

افرادی که به این پرسشها پاسخ دادند یا از میان آنهایی بودند که خود می شناختیم و یا افرادی بودند که بخاطر وقف اندیشه و تلاش خود در این راه، به ما معرفی شده بودند. هم چنین می خواستیم تا حد امکان از وسعت دیدگاهها و توصیه های آنها مطلع شویم. تمامی این افراد به کلیه سؤالها پاسخ دادند و ما پاسخهایی را برگزیده ایم که وسعت دیدگاههای ارائه شده را در برمی گیرند. چنین برداشت کرده ایم که وجود اتفاق نظر در میان کارشناسان آموزش ریاضی در کلیه سطوح، لازمه انسجام و موفقیت این امر خطیر بوده و بی پرده سخن گفتن در این مورد برای رسیدن به اتفاق نظر مذکور ضروری است.

این مقاله ها ملهم از تلاشهای بی دریغ اَل کوکو[1] و ون هاروی[2] از مرکز گسترش آموزش[3] در جهت افزایش مشارکت ریاضیدانان در امر آموزش ریاضی سطح متوسطه بوده است. تلاش این دو به پروژه ای انجامیده است که بنیاد ملّی علوم[4] سرمایه گذاری آن را پذیرفته است و تحت عنوان «تکیه بر نقاط قوت : برانگیختن همکاری میان ریاضیدانان و آموزشگران ریاضی» به فعالیت خود ادامه می دهد. بخش عمده این پروژه برگزاری یک نشست ملّی در بهار آینده است که طی آن ریاضیدانان، آموزشگران ریاضی و معلمان از دورهٔ پیش دبستانی تا پایان دبیرستان با دیدگاههای قاطع و در عین حال متنوع خود پیرامون پرسشهای مطرح شده در این مقالات گردهم می آیند. بعد از کنفرانس، فعالیت های تکمیلی در سطح نشست های ملّی و منطقه ای سازمانهای حرفه ای برگزار خواهد شد. برای کسب اطلاعات بیشتر پیرامون این پروژه، می توانید به آدرس Website http: //www.edc.org/LTT/BOS/. رجوع کنید.

بخش بعدی این مقاله ها در شماره سپتامبر ۹۶ مجله نوتیسز[5] خواهد آمد. جدا از این دو مقاله، مقاله های دیگری نیز مطرح خواهند شد که در آنها دبیران دبیرستان ها به پرسشهایی مشابه پاسخ

می دهند. متن کامل این پاسخ ها به آدرس الکترونیکی URL http:/ /www. ams. org/committees / education/. تحت عنوان e-MATH ارسال خواهد شد.

نام افراد پاسخگو و مراکز مرتبط به آنها عبارتند از: سوزان ادینگتون از دانشگاه ایالتی کالیفرنیا، سن برناردینو؛ جرج اندروز از دانشگاه ایالتی پنسیلوانیا؛ ریچارد اسکی از دانشگاه ویسکانسین؛ ویلیام بارکر از کالج بودوین؛ هایمن باس از دانشگاه کلمبیا و رئیس کمیته آموزش انجمن ریاضی امریکا؛ کورتیس بنت از دانشگاه ایالتی بولینگ گرین و عضو کمیته تخصصی انجمن ریاضی امریکا؛ مارک بریجر از دانشگاه نورث ایسترن؛ امی کوهن از دانشگاه راتگرز؛ جان بی کانوی از دانشگاه تنسی؛ دیوید کاکس از کالج آم هرست؛ ادوارد افرس از دانشگاه کالیفرنیا، لس آنجلس؛ سالمن گارفونکل از کنسرسیوم ریاضی و کاربردهای آن؛ اندرو گرنویل از دانشگاه جورجیا؛ لئون هنکین از دانشگاه کالیفرنیا، برکلی؛ جان هولینگزورث از دانشگاه جورجیا؛ راجرهو از دانشگاه یل؛ دبوراهیوز هلت از دانشگاه هاروارد؛ فرن هانت از مؤسسه ملّی استاندارد و تکنولوژی؛ ریموند جانسون از دانشگاه مری لند؛ هاروی کنز از دانشگاه مینه سوتا و عضو کمیته آموزش انجمن ریاضی امریکا؛ کنث میلت از دانشگاه کالیفرنیا، سانتاباربارا؛ جرج پاپانیکولائو از دانشگاه استنفورد؛ استفن رودی از کالج آستین؛ جودیث رویتمن از دانشگاه کانزاس و عضو کمیته آموزش انجمن ریاضی امریکا؛ آرنولدراس از دانشگاه ایالتی اوهیو؛ هن سا از دانشگاه ایالتی نیویورک در استونی بروک؛ گلن استیونس از دانشگاه بوستون؛ آلن تاکر از دانشگاه ایالتی نیویورک در استونی بروک و عضو کمیته آموزش انجمن ریاضی امریکا و اچ. وو از دانشگاه کالیفرنیا، برکلی.

ـ الین جکسون و هوگوراسی

۱ ـ با توجه به آنچه که هر یک از فارغ التحصیلان دبیرستان باید در مورد ریاضی بدانند، شما بیشتر به چه نکته ای توجه دارید؟

آرنولدراس [۶]

ما هیچگاه به قدرت مخرّب خستگی در دانش آموزان بطور کامل اقرار نکرده ایم. باید خاطرنشان کنیم که اصطلاح «خستگی» در مقابل بیان رایج و اصطلاحی آن یعنی «سرگرمی» مد نظر نیست.

کنجکاوی یک خصوصیت شایع (و شاد) بشری است. این خصوصیت، انتقال از مرحله «دیدن» به «درک کردن» را در انسان تقویت می کند. در مرحله رشد جوانان، باید انگیزش آنها را در کاویدن مسائل تقویت کنیم. باید به تربیت استعداد آنها در مشاهده، انجام آزمایش و طرح ریزی ماجراجویانه تجربیاتشان بپردازیم.

هم چنین باید به تربیت استعداد افراد در ایجاد ارتباط با دیگران بپردازیم. در اینجا باید بدانیم که نخست تجربه و پس از آن زبان مناسب برای بیان آن مطرح می شود و نه برعکس. از این رو باید در مراحل نخست رشد جوانان، تجربیاتی عملی و مستقیم را در اختیار آنها قرار دهیم.

کامپیوترها تنها می توانند زمانی بگونه ای مؤثر و طبیعی وارد این عرصه شوند که نوجوانان ما الگوریتم های مهم را فراگرفته و بر آنها مسلط شده اند. در مراحل ابتدایی، دانش آموزان باید برای هر الگوریتم، به کامپیوتر برنامه بدهند. آنگاه می توان جایگاه کامپیوتر را بعنوان وسیله ای برای استخراج اطلاعات بیشتر از هر کشف مرحله به مرحله دریافت.

در محیط کامپیوتر ـ مدار امروزی، فراگیری طرز استفاده صحیح و آگاهانه از کامپیوتر در مراحل اولیه، امری بسیار مطلوب به شمار می رود. بویژه که این امر، اساس تسلط بر کاربردهای بسیار دقیقتر کامپیوترها در عرصه علم و تکنولوژی را فراهم می سازد.

ویلیام بارکر [۷]

اینجانب بیشتر از هر چیز دیگر به فهم آنها از ریاضیات بعنوان یک فرآیند در تجزیه و تحلیل و حل مسائل مهم در علوم طبیعی و اجتماعی توجه دارم. بویژه از دانش آموزان انتظار دارم که به درس ریاضیات بعنوان یک فعالیت بی محتوا در بکار بردن نمادها و از طریق قوانین حفظ شده ننگرند. با خرسندی تمام حاضرم بخشی از مهارتهای لازم در بکارگیری نمادها را با دسته ای از دانش آموزان مبادله کنم که ریاضیات را **شاخه ای التزام آور** در درک مفاهیم و تفکر خلاق جهت بکارگیری آن مفاهیم در حل مسائل مهم می دانند. دانش آموزان ما نباید هنگام روبرو شدن با سؤالهایی که فراتر از مسائل عادی موجود در کتابهای درسی خود هستند، از حل آنها باز بمانند. باید ریاضی را به چشم یک جعبه ابزار ببینند و در هنگام مقتضی بتوانند از میان آن ابزار انتخابی آگاهانه بعمل آورند. (این گفته ارتباط بسیار نزدیکی با قانون سه گانه دارد، یعنی: تحلیل نموداری، تحلیل عددی و تحلیل نمادین مسائل.)

البته مهارتهایی برای بکارگیری نمادها در ریاضیات نیز وجود دارد که فارغ التحصیلان دبیرستان باید از آنها برخوردار باشند. اکثر ریاضیدانان نیز فهرستی مشابه از این مهارتها را با اولویت بندی هایی مشابه ارائه می دهند که تنها تفاوت اساسی آنها

مدت زمان اختصاص داده شده به آنهاست. فهرستی را که اینجانب ارائه می کنم از مختصرترین این فهرست هاست امّا لازم است که دانش آموزان موضوع های مطرح شده را خوب درک کنند. هنگامی که نوبت به مهارتها می رسد، همواره توان واقعی فرد با مجموعه کوچکی از این ابزارها بسیار بهتر از آشنایی سطحی وی با مجموعه ای وسیع از آنها، او را در حل مسائل کمک خواهد کرد.

اچ. وُو

(الف) همه دانش آموزان باید بدانند که عبارتهای درست در ریاضی را می توان برحسب عبارتهای درست دیگر بگونه ای منطقی بیان کرد و این که هیچ گاه یک عبارت تنها بخاطر اینکه یک شخص صاحب نظرحکم به درستی آن کرده است، درست نیست. این موضوع، جوهر اساسی برای صراحت در هر بحث منطقی را تشکیل می دهد و اگر آموزش ریاضی در بوجود آوردن چنین روحی توفیق نیابد، آموزش در سطح مدارس بطور کلی با شکست مواجه شده است.

(ب) بدنبال آنچه در قسمت (الف) بیان شد، دانش آموزان باید بتوانند بگونه ای آشکار آنچه را که می دانند درست است و آنچه را نمی دانند درست است، از یکدیگر تمیز بدهند. در ریاضی و شاید بتوان گفت تنها در ریاضی می توان چنین تمیزی را قائل شد و دانش آموزان باید از آن بهره ببرند. آنها نباید یک روش راهیاب (امّا ناقص) را به اشتباه یک اثبات استنتاجی تصور کنند. بر همین منوال باید گفت که هرگاه دانش آموزان اثبات چیزی را در ریاضی یاد می گیرند، باید بتوانند طعم عدم اطمینان کامل خود به آن را نیز بچشند. موضوعی که از همه بیشتر اسباب نگرانی مرا در اجرای برنامه فعلی اصلاح آموزش ریاضی فراهم می کند، عدم موفقیت احتمالی در رسیدن به این هدف در مدارس است.

(ج) دانش آموزان باید این نکته را درک کنند که ریاضی زبان دقت است. با در نظر گرفتن ریاضی بعنوان یک زبان، تسلط بر آن شامل کاربرد سلیس آن نیز می شود. از این رو دانش آموزان باید برای رسیدن به این مهم تلاش بسیاری از خود نشان دهند. بنابراین همواره باید تکنیک های اساسی خاصی را در اختیار داشته باشند. بعلاوه ویژگی خاص این زبان یعنی همان دقتی که در آن نهفته است، مانع از وجود هرگونه ابهام و ایهامی خواهد شد که در زندگی روزمره با آن مواجهیم. اگر دانش آموزان بواقع بر این نکته واقف شوند، خواهند دانست که سؤالهایی نظیر «کدام یک بهتر است؟» یا «آیا این گفته عادلانه است؟» (که به وفور در برنامه های اخیر اصلاح ریاضی شنیده می شوند) هیچ جایی در بحث های ریاضی نخواهند داشت مگر اینکه این کلمات پرمعنا بدقت تعریف شوند.

(د) هدف یک برنامه آموزش ریاضی تنها در آموزش دانش آموزان برای حل مسائل روزمره (که بعضی از دست اندرکاران امر اصلاح از ما انتظار دارند) خلاصه نمی شود، بلکه باید به آنها آموخت که چگونه با دقت، منطقی و انتزاعی بیاندیشند. جنبه کاربردی ریاضی باید با درکی از جنبه های فرهنگی آن درآمیزد یعنی ساختار درونی و جذبه زیباشناختی آن هر دو مورد توجه قرار گیرد.

جورج اندروز[8]

اخیراً کال مور[9] که مطالبی نیز پیرامون اصلاح نظام آموزش در کالیفرنیا نگاشته است، این چنین گفته است: «مادامیکه اصلاحات بتدریج اعمال می شوند، بیشتر کلاسهای درس ریاضی هنوز به برنامه درسی سنتی متکی هستند.

این برنامه از نگاه یک نظاره گر عیبجو، عمدتاً متشکل از هشت سال حساب قرن پانزده، دو سال جبر قرن هفده و یک سال هندسه قرن سوّم پیش از میلاد است.»

من بر این نظر هستم که اگر دانش آموزان واقعاً بر ریاضی تسلط پیدا کنند، هیچگاه در سطوح بالاتر با مسائلی که روبرویشان نهاده شود، مشکلی نخواهند داشت.

متأسفانه با کاربرد اغفال کننده ماشین های حساب و کامپیوترها، هر روز با تعداد بیشتری از دانش آموزان مواجه می شویم که از درک و تسلط بر مفاهیم پایه عاجزند.

نظارت ملّی بر آموزش ریاضی تنها باعث مبهم تر شدن قضایا می شود. برای مثال به بخشی از بیانیه شورای ملّی معلّمان ریاضی (NCTM)[10] پیرامون تکنولوژی مورد نیاز در آموزش ریاضی توجه کنید:

« ... توانایی معلمان در استفاده از ابزار تکنولوژی برای گسترش فهم دانش آموزان از ریاضی دارای اهمیت بسزایی است. این ابزار شامل انواع کامپیوترها، ماشینهای حساب (علمی، گرافیک، قابل برنامه ریزی و غیره)، دیسک های ویدئویی، دیسک های فشرده، شبکه های ارتباطی برای دستیابی و استفاده از داده های روز و تکنولوژیهای آموزشی در حال ظهور می شود. معلم های ریاضی باید دورنمایی را که این ابزار پیرامون موضوعات مختلف ارائه می دهند، بدقت بررسی کنند.»

تنها چیزهایی که جایشان خالی است وجود چراغهای رنگین و مسئولی برای تنظیم آنها است! گفتهٔ ساده و بسیار قدیمی که «کلاس ریاضی سخت است» و نیازمند تلاش زیاد و تکلیفهای فراوان است نه تنها به رفع مشکل

کمکی نمی کنند بلکه در زرق و برق تشریفات نیز گم می شوند.

۲ ـ از نظر شما چه مواردی باید اساسی ترین ویژگی های هر برنامه درسی ریاضی را در سطح دبیرستان تشکیل دهد؟

ویلیام بارکر

وجود یک محیط ریاضی که بتواندطرز تلقی بیان شده در پاسخ اینجانب به سؤال نخست را تدریجاً القا کند، ویژگی اساسی هر برنامه درسی ریاضی را در سطح دبیرستان تشکیل می دهد. درسهای ریاضی نباید بر حفظ قواعد و برگرداندن آنها از طریق برگزار کردن امتحانات با مسائل معمولی تأکید کنند.

دانش آموزان باید دریابند که ریاضیات تفکر است نه زورآزمایی با ذهن. زمان را تنها باید به کاربردهای واقعی ریاضی اختصاص داد. حتی در حالتی بسیار مطلوبتر از این، کاربردهای واقعی ریاضی باید در جهت ایجاد انگیزش و نیاز به تکنیک هایی خاص در ریاضی بکار گرفته شوند. برای مثال، نباید توابع مثلثاتی را تنها برای بررسی مسائل از طریق مثلث ها معرفی کرد بلکه باید بعنوان ابزار اساسی در برخورد با پدیده های تکراری و تناوبی از آنها بهره جست. هندسه تحلیلی نباید تنها مجموعه ای از مهارتها تلقی شود که تسلط بر آنها ضروری بنماید، بلکه باید بعنوان یک ابزار برای برقرار کردن ارتباطی عمیق بین مسائل جبری و مسائل هندسی بدان نگریسته شود. (البته شاید اینجانب نتوانسته باشم به این مهم نائل شوم، امّا این دیدگاه ها را در دوران تحصیلی دبیرستان خود نیز بیاد نمی آورم. دانشجویان فعلی اینجانب نیز قطعاً به چنین دیدگاه هایی آراسته نخواهند شد.)

من براین عقیده ام که دبیرستانهای ما باید در مورد آموزش حسابان بسیار دقت کنند. فکر نمی کنم که حسابان همیشه باید یک هدف اصلی برای بهترین دانش آموزان دبیرستانی باشد. وارد شدن به حیطه حسابان در دبیرستان همواره به معنی گذراندن شتابان آنها از مواد درسی پایه و ایجاد یک ذهنیت بسیار ابتدایی برای روبرو شدن با تمام جنبه های ریاضی است. این امر از درک ضعیف ما نسبت به اصول پایه ناشی می شود.

به همان اندازه که بر محتوای آموزشی دروس تأکید می شود، باید از تکنیک های آموزشی مفید و متنوعی که وجود دارد، بهره جست. برداشت من چنین است که در سالهای اخیر، گامهای مؤثری در این راه برداشته شده است. دیگر استفاده از تخته سیاه و صحبت کردن مدام برای دانش آموزان، تنها سلاح معلمین دبیرستانی نیست. این قضیه کاملاً جدی است. **«گفتن، آموزش نیست و شنیدن نیز یادگیری نیست». با این جمله باید زندگی کرد.**

ایجاد موقعیت هایی که دانش آموزان به یاری یکدیگر مطلبی را فرا می گیرند، هم در پروژه های کلاسی و هم در پروژه های خارج از کلاس با تکیه بر مسائل چند جنبه ای، یادگیری از طریق کشف در مراکز کامپیوتر و یا استفاده از ماشینهای حساب، ارائه گزارشهای مکتوب همه و همه باید شیوه های آموزش در سطح دبیرستان را تشکیل دهند. این تغییر باید بیشتر فرصتهایی را فراهم آورد که در آنها دانش آموزان به شکلی فعال و غیرمنفعل، مطالب را فرابگیرند.

امتحانات باید بگونه ای برگزار شوند که بر پرسشها ومسائل مفهومی تأکید کنند و بجای سنجش میزان توانایی دانش آموزان در حفظ پاسخ مسأله ها، آنها را به تفکر وادارند. البته می دانم که انجام این مهم، بسیار دشوار است. خودم با این مشکل سالها در دانشگاه دست و پنجه نرم کرده ام. در عین حال نمی توان این گفته را که «امتحانات، تعیین کننده مطالب درسی هستند». نادیده گرفت.

اچ. وُو

پاسخی که به پرسش نخست شما دادم در واقع بیان اهدافی است که از آموزش ریاضی در مدارس انتظار می رود. از اینرو، برنامه درسی ریاضی مدارس باید کسب این اهداف را در مرکز توجه خود قرار دهد. البته نمی توان با بیان چند جمله گفت که چنین کار پیچیده ای چگونه باید صورت بگیرد. مواردی را که در ذیل خاطرنشان خواهم کرد، حتی با بهترین بیان ممکن نیز جملاتی مبهم خواهند بود. می توان در قالب یک توصیه کلی گفت که در دو یا سه سال آخر دبیرستان، برنامه درسی دانش آموزان مستعد باید از جنبه های تکنیکی آموزش با سایر دانش آموزان تفاوت داشته باشد. به طور کلی می توان گفت:

(الف) باید دانش آموزان را از همان مدارس ابتدائی با مفاهیم انتزاعی، هر چند به میزانی اندک، آشنا کرد. دانش آموزان باید تفکر انتزاعی را فرابگیرند و هر چه در مراحل ابتدایی تر از این مفاهیم دورتر نگاه داشته شوند، فراگیری آنها در مراحل بعدی برایشان مشکل تر خواهد بود. برای مثال، اگر کسرها را همراه با آن میزان از استدلال انتزاعی که لازمه آن است، به دانش آموزان آموزش دهیم، حتی دانش آموزان کلاس پنجم نیز خواهند توانست جوهر اصلی ریاضی را در عمل ببینند.

(ب) استدلال غیرصوری را باید از همان ابتدا برای هر عبارت ریاضی ارائه داد. در سالهای آخر دوره راهنمایی باید از اثباتهای صوری، هر چند تا حدی متعادل، استفاده کرد. در سالهای سوّم

و چهارم دبیرستان باید اثباتهای صوری را بطور مدام به کار برد (دست کم برای دانش آموزانی که در سطوح بالاتر از دبیرستان نیز افرادی مستعد خواهند نمود).

(ج) برنامه درسی ریاضی نباید تحت تأثیر شدید موارد کاربرد آن بویژه مواردی که منحصراً در زندگی روزمره ما نمود پیدا می کنند، قرار بگیرد. ریاضی می تواند قدرت خود را به بهترین شکل هنگامی نشان دهد که از آن در بیان اصول علمی دور از دسترس بشر استفاده شود نه برای حل مسائل جزیی و معمولی.

(د) ریاضی دقیق است. به همین دلیل، وجود هرگونه ابهام احتمالی در حل مسائل روزمره را نباید به خود ریاضی نسبت داد، بلکه باید ریشه آن را در ابهام ذاتی موجود درتفسیر مسائل روزمره جستجو کرد. این گفته را که «همواره بیش از یک پاسخ درست برای هر مسأله ریاضی وجود دارد» و در اصلاح نظام آموزش ریاضی از آن سخن بسیار به میان می آید، باید برای همیشه کنار گذاشت.

کنث میلت[11]

برنامه درسی ریاضی دبیرستان باید ریاضی را در قالب یک کل به هم پیوسته ارائه دهد. چنین برنامه ای باید در برگیرنده جبر، هندسه، آمار و احتمالات، ریاضیات گسسته، منطق، استدلال و ارتباط، کاربردهای ریاضی و اعداد شامل اعداد صحیح، اعداد گویا، اعداد حقیقی، اعداد مختلط و دیگر دستگاه های عددی باشد. اگر به این موارد به عنوان لایه های مختلف ریاضی نگریسته شود، تصویر زیبای قالیچه ای را به دست خواهد داد که زیبایی و استحکام آن، در هم آمیختن هنرمندانه این لایه ها را می طلبد. هنگامی که از دور به چنین برنامه ای بنگریم بطوری که بتوانیم اتحاد اجزاء و وجود روابط نسبی صحیح را بین آنها متصور شویم، بهترین درک را از چنین برنامه ای خواهیم داشت. باید هر چه می توانیم از سلسله مراتبی بودن برنامه درسی اجتناب کرده و بیشتر چند جهتی بودن آنرا مد نظر قرار دهیم، بگونه ای که حتی مسائل پیشرفته را در مراحل اولیه و همراه با موضوعات مقدماتی که مرتب نیز به آنها رجوع می کنیم، در عمقی هر چه وسیعتر بررسی کنیم. استفاده از مدلهای ریاضی ملموس، حل مسأله (شامل ایجاد، استفاده و تجزیه و تحلیل رویکردهای الگوریتمی)، ارتباط ریاضی (در تمام شکل ها و تفسیرهای متفاوت خود)، کاوش، حدس و ارائه توضیح (چه بصورت استدلال و چه بصورت اثبات) همه باید اجزای مختلف تجربه دانش آموزان در کلاسهای ریاضی را تشکیل دهند. دانش آموزان باید با مفاهیم عمیق ریاضیات تغییر و دگرگونی آشنا شوند تا حدی که می توان گفت ارائه یک درس صوری در قالب حسابان ضرورتی ندارد. حتی مهم تر اینکه فکر کردن در مورد ریاضی و اندیشیدن پیرامون آنچه فرد فراگرفته است باید بخش اساسی و مرکزی تجربه آن فرد را در دبیرستان تشکیل دهد. دقت و عمق درک مطالب بسیار مهم تر از سرعت دانش آموزان در انجام عملیات تجویز شده به آنهاست.

آلن تاکر[12]

در جبر مفاهیمی بنیادین وجود دارد که هر دانش آموز باید آنها را بداند. فراتر از این نکات، اتلاف وقت و انرژی خواهد بود. فرآیند تفکر و کاوش جدی در ریاضی را می توان به شکل های مختلف عملی ساخت. عقیده من این است که فرآیند یادگیری ریاضی مهم تر از محتوای خاصی است که فرد باید فرابگیرد. از اینرو فکر می کنم که معیارهای ارائه شده از سوی شورای ملی معلمان ریاضی[13] شروع معقولی برای یک نوع برنامهٔ خوب درسی در سطح دبیرستان است، گرچه باید گفت که در مورد دانش آموزان مستعدتر، کمی پیشتر نیز باید رفت.

۳ ـ چگونه باید دریابیم که آموزش ریاضی در سطح دبیرستان خوب پیش می رود؟

جودیث رویتمن[14]

وقتی که کودکان ما نیز خردمندانه به زبان ریاضی تکلم کنند، همانقدر طبیعی که در مورد چیزهای دیگر صحبت می کنند. البته هرگاه که زبان ریاضی مناسب آن شرایط باشد؛ وقتی که بچه ها بخواهند ریاضی صحبت کنند.

فرن هانت[15]

وقتی که بحث های عمومی پیرامون مسائلی نظیر استدلال کمی از بهره علمی بیشتری برخوردار شود. در واقع باید گفت وقتی که افراد بیشتری در محیط کار و زندگی خود از ریاضی استفاده می کنند.

راجرهو[16]

یک راه برای آگاه شدن از این امر، پذیرفتن ریاضی بعنوان بخشی از گفتگوی عادی در جامعه از سوی افراد آن است. در کتابی بنام فردای ریاضی[17] که لین استین[18] ویرایش آن را بعهده داشته است، مقاله ای از نیل کوبلیتز[19] آمده است که عنوان آن «ریاضی بعنوان تبلیغات» است. این کتاب با یک مقاله در مورد شخصی

آغاز می شود که عضو گروه رشد جمعیت صفر[20] بوده و پیرامون نسبی بودن رابطه بین جمعیت و تأثیرات وارد بر محیط زیست سخن می گوید. فکر می کنم در برنامه تلویزیونی جانی کارسون[21] بود. فرد مذکور معادله خطی $D = cP$ را نوشت که در آن D نشاندهنده زیان وارد بر محیط زیست و P نشاندهنده جمعیت بود. نکته مورد نظر کوبلیتز این بود که نوشتن چنین معادله ای نگران کننده است. از اینکه مردم چنین مفهوم اساسی و ساده‌ای را نگران کننده تلقی می کنند، افسرده شدم. اگر به نقطه ای برسیم که مردم چنین مفاهیمی را یک بخش پذیرفته شده و درک شده از زبان طبیعی خود بدانند، می توانیم آنرا نقطه مثبتی بدانیم. امّا بنده گمان می کنم انجام چنین کاری در کوتاه مدت ممکن نیست. فکر می کنم راه حل عملی و کوتاه مدت آن، این است که در وهله نخست بدانیم «پیشرفت کار» یک اصطلاح نسبی است، به این مفهوم که همیشه می توان پیشرفت بیشتری را آرزو داشت و کارها نیز همواره می توانند در جهت مخالف ما مشکل ایجاد کنند. با این فرض، ارائه راه حل برای این موضوع، کاری تخصصی خواهد بود؛ یعنی باید آزمون های استانداردی را در اختیار داشت که منعکس کننده دیدگاهی هماهنگ پیرامون نیازهای درسی ما باشند و باید از طریق این آزمونها میزان پیشرفت را سنجید. معیار دیگری نیز برای پی بردن به این موضوع وجود دارد و آن بررسی نیروی کار در سطح جامعه است. باید پرسید آیا آن دسته از مهارتهای ریاضی که به افراد آموزش داده می شود، برای کارهایی که افراد در جامعه می پذیرند، کافی است؟ امّا این معیار، بیشتر یک معیار تصادفی و نامطمئن است که منعکس کننده پیکره کلی آموزش حتی فراتر از ایالات متحده است. برای مثال، در حال حاضر نیروی کار دارای دکترای تخصصی در ریاضی به حد اشباع رسیده است امّا این میزان از افراد که مازاد بر نیاز هستند، شهروند امریکایی نیستند.

ریچارد اسکی[22]

ما در مدارس مشکلات بسیاری داریم و باید گفت که آموزش ریاضی تنها یکی از آن موارد است. در عین حال، بسیاری از این مشکلات به یکدیگر مرتبطند و بنده فکر نمی کنم بتوان آنها را جدا از یکدیگر حل و فصل نمود. از اینرو، بجای اینکه سعی کنیم کلیه مشکلات موجود در راه آموزش ریاضی مدارس را در نقطه‌ای متمرکز کرده و بر آن باشیم که در پیشبرد کلی آن بکوشیم، فکر می کنم اگر تنها به یک مشکل نگاه کنیم و ببینیم که چگونه می توانیم آن را حل کنیم، شایسته تر خواهد بود.

مشکلی که می توان از همه راحت تر به آن نگریست، مشکلی است که دانش آموزان به هنگام گرفتن درس حسابان با جبر پیدا می کنند. عدم برخورداری از مهارتهای لازم در جبر، فراگیری حسابان را برای بسیاری از آنها دشوار و حتی برای عده ای غیرممکن می سازد. برخی از افراد دست اندر کار سعی کرده اند از طریق ارائه تعریفی مجدد از حسابان با این مشکل مقابله کنند؛ درست مثل همان کاری که با تعریف جبر کردند: ضعف مهارتهای مربوط به حساب که در جبر ایجاد مشکل می کرد باعث شد که تعریفی مجدد از جبر ارائه شود. هیچ یک از این دو راه، کار به جایی نخواهد برد و ما باید به اصول بنیادین برگردیم و مشکلات را بطور مستقیم حل کنیم. در این راستا مدارس ابتدایی شایسته بیشترین میزان توجه هستند.

در کتاب چهارشنبه بازار دبیرستان[23] (Houghton Mifflin, 1985) آرتور پاول[24]، مؤلف فصل دوّم این کتاب، به توصیف نوعی معامله بین بسیاری از معلمین و دانش آموزا نشان می پردازد. بطور خلاصه می توان معامله مذکور را چنین بیان کرد: «اگر در کلاس درس مشکلی ایجاد نکنید، شما را مجبور به یادگیری هیچ مطلبی نخواهم کرد». گرچه این گفته در همه جا صادق نیست، متأسفم بگویم که ادعای فوق، توصیف دقیق بسیاری از کلاسهاست: بسیاری از دانشجویان درس حسابان به من گفته اند که ایکاش در دبیرستان مشغول به تحصیل بودند، امّا هیچیک از دانشجویان دیگر چنین صحبتهایی نمی کردند از همین رو نیز چنین آرزویی نداشتند. گرچه بخشی از این گفته ها برای خالی نبودن عریضه است، امّا قسمت اعظمی از آن واقعی است. اگر به جایی برسیم که دیگر دانشجویان ما چنین مطالبی را بیان نکنند، حتماً پیشرفت قابل توجهی صورت گرفته است.

هایمن باس[25]

ابتدا باید به نوعی توافق در مورد اهداف آموزش ریاضی نائل شویم. این اهداف، متعدد و متنوع هستند ـ اهداف فرهنگی و فکری (موفقیت دانشگاهی)، اهداف اقتصادی (موفقیت شغلی و استخدامی)، و اهداف اجتماعی (شهروندی مطلع و دارای احساس مسؤولیت). علاوه بر این لازم است در مورد ارجحیت بخشیدن مناسب به هر یک از این جنبه ها و اینکه آموزش مذکور را چگونه به اجتماع دانش آموزان تزریق کنیم، به توافق برسیم. هرگاه به طرحواره ای از این هماهنگی دست یافتیم که در برگیرنده ارتباطی خوب و نزدیک بین آموزش در سطح دبیرستان از یک سو و دانشگاه و محل کار از سوی دیگر بود، آنگاه می توان پا را فراتر از نظام های

جاری در برگزار کردن امتحانات در سطح ملّی نهاد؛ امتحاناتی که اهمیت و ارزش آنها بواسطه مرتبط بودن محتوای آنها و اهداف آموزشی نظام، معین می شود.

همزمان با این کار باید به مطالعات زمانی میزان موفقیت فارغ التحصیلان دبیرستان در دانشگاه و محل کار اهتمام ورزید.

این مطالعات نباید تنها براساس نمرات کسب شده توسط آنها، بلکه حتی براساس مرتبط ماندن آنها با موضوعات علمی و فنی صورت پذیرد.

۴ـ از نظر شما مهمترین نکته با توجه به پیش زمینه ریاضی، نگرش نسبت به آن و نیز رویکردهای آموزشی معلمان ریاضی چیست؟

هان سا[۲۶]

مهمترین نکته دانستن محتوا و تکنیک های پایه، کاربرد صحیح ریاضی در علوم کمی و کاربرد ناصحیح آن در علومی است که بیشتر جنبه کیفی دارند.

عشق به آموزش و یادگیری به عنوان یک شغل و آنگاه عشق ورزیدن به ریاضی بعنوان بخشی از آن. آگاه بودن از رویکردهای متعدد آموزشی و پرهیز از تعصب بی دلیل نسبت به یک رویکرد خاص. بخاطر داشته باشید که انتخاب شیوه آموزشی برای راحتی معلم نیست بلکه آینده دانش آموز مطرح است. باید از آمادگی قبلی دانش آموزان مطلع بود و اهداف متحمل آنها را نیز که در جایی فراتر از زمان حال بدان امید بسته اند، در خاطر داشت.

جان، بی. کانوی[۲۷]

درک دانش آموزان نسبت به نیازی که به تئوری داریم (به جای ترس از آن)، تمایل به درگیر کردن و دچار مشکل کردن آنها (بجای ساده انگاشتن همه چیز)، تهییج شدن با ریاضی (بجای خسته شدن از آن) و درک این واقعیت که ریاضی، طبقه بندی الگوریتم ها نیست.

ریموند جانسون[۲۸]

من بر این عقیده ام که وجود رویکردهای متنوع آموزشی در موفقیت کار تأثیر خواهد داشت. فکر می کنم مهمترین عامل در کلاس درس، نگرشی است که معلمان ریاضی نسبت به آن ایجاد می کنند. خوب می دانم که پسرم بخاطر داشتن معلمانی که معتقد بودند ریاضی تنها بدنبال پاسخهای صحیح است و همیشه یک راه برای حل صحیح یک مسئله وجود دارد، رنج می برد. فکر می کنم تفاوت فاحشی بین «تنها یک پاسخ صحیح» و «تنها یک راه برای رسیدن به پاسخ» وجود دارد. وجود این احساس در من که معلمان باید دارای یک پیش زمینه ریاضی مستحکم باشند براین اساس استوار است که هر چه این پیش زمینه گسترده تر باشد، معلم نیز در برخورد با ریاضی، انعطاف بیشتری خواهد داشت.

لئون هنکین[۲۹]

در مورد پیش زمینه ریاضی معلمان باید گفت که مهمترین نکته، درک خوب معلمان از بخشهایی از جبر، هندسه و آنالیز است که ریاضی دبیرستان به آنها می پردازد و دانش آموزان نیز در سطوح دانشگاهی با آنها روبرو می شوند. معلمان هم چنین باید با طیف وسیعی از کاربردهای ریاضی در درسهای علوم دبیرستان و نیز کاربردهای آن در زمینه های غیردانشگاهی از قبیل کاربرد کامپیوتر که دانش آموزان پس از فارغ التحصیلی جستجو می کنند، آشنا باشند.

در مورد نگرش، معلمان باید از ریاضی لذت ببرند؛ بگونه ای عمل کنند که دانش آموزان نیز متوجه آن شوند و آنها را یاری کنند تا چنین حالتی را در خود بوجود آورند. این امر بسیار مهم تر از حصول اطمینان در معلمان نسبت به فراگیری حجم وسیعی از واقعیت ها در کلاس درس است، زیرا اگر دانش آموزان واقعاً از کار با ریاضی لذت ببرند، پس از خارج شدن از کلاس نیز به فراگیری آن ادامه خواهند داد. معلمین باید نسبت به این واقعیت حساس باشند که دانش آموزان آنها همان زبانی را در ریاضی فراخواهند گرفت که خود آنها بکار می برند.

از اینرو، دانش آموز ممکن است برای بیان یک ایده درست، از کلماتی استفاده کند که آن ایده را از نگاه معلم نادرست نشان دهد، و اگر این نادرستی در ذهن دانش آموز وجود داشته باشد، ممکن است از سوء تعبیر گفته های معلم خود ناشی شده باشد. در مورد شیوه های آموزشی، معلمان باید با اهمیت بخشیدن به جایگاه تشویق ـ نه تنها در مواردی که پاسخ صحیح ارائه می شود، بلکه حتی در مواردی که دانش آموز حدسی جسورانه می زند و اشتباه از کار درمی آید ـ شیوهٔ آموزش خود را ارتقاء ببخشند.

۵ ـ نخستین بار چه چیز شما را به ریاضی علاقه مند کرد؟

جورج اندروز[۳۰]

وقتی که در دبیرستان درس می خواندم، حتی از احتمال اینکه یک روز ریاضیدان شوم، کاملاً بی خبر بودم. تنها نوعی از زندگی را که برایم هیجان برانگیز بود، در رمانهای شرلوک هولمز یافته بودم. در آنجا شخصیتی وجود داشت که گرچه ساخته فکر و خیال

نویسنده بود، اما تمامی دوران زندگی اش بر استدلالهایی زیرکانه استوار بود. از آنجا که زندگی او کاملاً خیالی و تصوری بنظر می رسید، تصمیم گرفتم تا یک وکیل عمومی شوم زیرا در درسهای علوم و ریاضی قوی بودم و دریافته بودم که حقوق می تواند (آنطور که به آن امید داشتم) استدلال زیرکانه فرد را طلب کند.

هنگامی که در ایالت اورگون به تحصیلات دانشگاهی مشغول بودم، هری گوهین[31] جریان زندگی مرا تغییر داد. او با اشتیاقی وصف ناپذیر به ریاضی عشق می ورزید و با جدیتی تمام برای رشته های مختلف ریاضی، تبلیغ می کرد. او توانست شعله تجربه کردن یک دوران خیالی استوار بر حیات ذهن را در من برافروزد، او این کار را در درس مثلثات خود آغاز کرد. با به پایان رسیدن درس حسابان، کاملاً بر ریاضی مسلط شده بودم.

ریچارد اسکی[32]

من همیشه ریاضی را دوست داشتم و در دبیرستان نیز با یکی از خویشاوندانم ملاقاتهایی داشتم که در ریاضی و فیزیک فوق لیسانس داشت و به من می گفت که می توان ریاضی را خوب فهمید. قبل از این قضیه، می خواستم یک فیزیکدان شوم.

ویلیام بارکر

من بازی با ریاضی و در واقع کار با ریاضی را خیلی دوست داشتم و در درس ریاضی آنقدر قوی بودم که توانستم مورد تشویق ها و قدردانی های فراوانی در دبیرستان قرار بگیرم. گرچه دوران دبیرستان من براساس یک برنامه درسی استاندارد با فنون آموزش استاندارد (یعنی ارائه سخنرانی) همراه بود، امّا معلمانی داشتم که توجه زیادی به ریاضی داشتند، بسیار باسواد بودند، و شور و شوق خود را نسبت به این درس بوضوح نشان می دادند. گرچه آنچه تدریس می کنم، ممکن است علاقه مرا بگونه ای دیگر جلوه بدهد، باید بگویم که در واقع تخصص من در ریاضی کاربردی نیست. حیطه علاقه من، نظریه (گروههای) لی[33] است، چون مبحثی را ارائه می دهد که بخاطر زیبایی ذاتی و داشتن حلقه های اتصال با بسیاری از شاخه های علم ریاضی، بدان عشق می ورزم.

معمولاً انتقادی که علیه برنامه های آموزشی ارائه شده از سوی اینجانب وارد می شود این است که برنامه های مذکور آنهایی را که «درست مثل خودمان» فقط بخاطر خود ریاضی، به آن علاقه مند می شوند و اگر از جدیت برنامه درسی کاسته شود، روحیه پرتلاش خود را از دست می دهند، به سوی خود جلب نمی کند. امّا اینطور نیست. خودم همواره آرزو کرده ام که ایکاش کاربرد و درک مفاهیم، هسته اصلی آموزشهایی را تشکیل می داد که در دوران متوسطه دیدم. فکر می کنم در آن صورت می توانستم دیدگاه بنیادین جامع تر و سالمتری نسبت به ریاضی داشته باشم و در نهایت می توانستم خیلی سریعتر یک ریاضیدان شوم. تجربه ای که در آموزش درسهای ریاضی ابتدایی دارم، همه تصدیق کننده عقایدی است که دارم. برای رسیدن هر چه سریعتر به نگرشهای اساسی و صحیح، زمان را از دست ندهید تا دانش آموزان ما نیز از آنها بهره مند شوند.

هایمن باس[34]

همواره از درس ریاضی در دبیرستان لذت می بردم و تا هنگامی که برادرم، مانوئل، که در WWII دورهٔ آموزشی افسران دریایی را می گذراند و طی مرخصی های خود جزوات درسی بسیار جالبی را پیرامون علوم و مهندسی برایم می آورد، دید بسیار محدودی نسبت به گستره علم ریاضی داشتم. او این کار را هنگامی نیز که در کالتج[35] دانشجو بود، ادامه می داد. هنگامی که بعنوان یک دانشجوی لیسانس وارد دانشگاه پرینستون[36] شدم، درس ویژه حسابان توسط ای. آرتین[37] و بهمراهی لنگ[38] و تیت[39] که از مربیان آنجا بودند، ارائه می شد. شور و هیجان حاکم بر آن محیط همه را به سوی ریاضی می کشاند.

جان بی. کانوی

هندسه اقلیدسی، بعد از آن قدرتی که در حسابان دیدم و نیز ظرافت و دقتی که در آنالیز پایه وجود داشت، مرا به ریاضی علاقه مند کرد.

لئون هنکین

از همان زمانی که یک بچه مدرسه ای بودم، می دیدم که می توانم کاملاً به خود مطمئن بوده و به حل کامل و درست یک مسأله ریاضی دست یابم. این امر باعث شد که ریاضی جایگاه دیگری را در مطالعه برایم تشکیل دهد. هنگامی که از طرف معلم ها و خانواده ام مورد تشویق قرار می گرفتم، دلگرمی بیشتری برای ادامه کار پیدا می کردم. امّا این تنها عمق عجیب و شگفت آور ریاضی بود که ناگهان در برابر افق دیدگانم باز شد و مرا که پی برده بودم روش قیاسی، هسته اصلی درسهای بالاتر دانشگاهی را تشکیل می دهد، بر آن داشت تا زندگی خود را بر پایه های ریاضی استوار سازم.

راجرهو

قبل از اینکه وارد حیطه ریاضی شوم مرا بعنوان کسی می شناختند که در این زمینه سررشته دارد. یکی از معلمان کلاس پنجم به من

می گفت که روزی ریاضیدان خواهی شد و من همیشه در دلم می گفتم: «خانم معلم، تو دیوانه ای!» هنگامی که کلاس ششم بودم به من پیشنهاد شد که می توانم ریاضی سالهای بعد را نیز بخوانم ولی این پیشنهاد را نپذیرفتم. در کلاس دهم خیلی چیزها اتفاق افتاد. کتاب معروفی را در مورد مکانیک کوانتوم خواندم. یک سری علائم ریاضی (همچون انتگرال خطی) در آن کتاب یافتم که هیچ اطلاعی از آنها نداشتم، لذا بر آن شدم تا خود شخصاً آنها را بفهمم. مدت زمانی طولانی پس از این موضوع، و بیشتر در دوران دانشجویی، فیزیک ریاضی قویترین انگیزهٔ من برای یادگیری ریاضی بود. هم چنین در کلاس دهم، درس هندسه را نیز انتخاب کردم که آن هم موضوع بسیار جالبی بود. یکی از معلمان هندسه ام عاشق به تمام معنای هندسه بود و او بود که مرا با کتابهای «ریاضی مقدماتی از دیدگاهی پیشرفته» نوشتهٔ فلیکس کلین[۲۰] آشنا کرد. فهم این کتابها بسیار دشوار بود، اما توانستند دنیایی کاملاً متفاوت از دنیای ریاضی دبیرستان را به رویم بگشایند.

فرن هانت

درس جبر در کلاس نهم و کلاس جبر انتزاعی مقدماتی که روزهای شنبه داشتم، مرا به ریاضی علاقه مند کردند.

ریموند ال. جانسون

موضوع با درس حساب شروع می شود. با درس حساب بود که بتدریج به ریاضی علاقه مند شدم و از آنجا که مسائل ریاضی را در دبیرستان خوب انجام می دادم، این فکر به ذهنم خطور کرد که ریاضی رشته تحصیلی مورد علاقه ام باشد. اگر می دانستم ریاضی چیست، مطمئناً رشته دیگری را انتخاب می کردم.

کنث میلت

اولین باری که به ریاضی علاقه مند شدم، تجربه ام در درس رسم مکانیکی دوران دبیرستان و هندسه اقلیدسی بود. درس اول شامل ترسیم اجسام سه بعدی از دید محدود و تهیه دورنما و دیگر نمودارها بود. درس دوم اثباتهای «دو ستونی» قدیمی بود که در خلال گذراندن آن برای یافتن زبانی مناسب جهت «اثبات واضحات» تلاش بسیاری می کردیم و همراه با همکلاسی های خود سعی در حل مسائلی داشتیم که احتمالاً پاسخی نداشتند و یا بمراتب مشکل تر از تمرین های استاندارد کتابها بودند. در این دروس، معلمین ما سعی داشتند یک برنامه درسی غنی و دشوار را ارائه دهند و محیطی را در کلاس درس بوجود می آوردند ما را به تفکر خلاق، پرسش در مورد جزئیات و احترام نسبت به سایر دانش آموزان و تلاش آنها وا می داشت. اشتباهاتی که مرتکب می شدیم در واقع فرصتهایی برای یادگیری ما تلقی می شد نه میزانی برای نشان دادن عدم توانایی ما در دروس. در ریاضی تفاوت بین فهمیدن و نفهمیدن را درک کردم؛ و دانستم که اگر یک بار چیزی را فهمیدیم، هرگز آن را فراموش نخواهیم کرد. البته حس ماجراجویی نیز دخیل بود. کاوش در جهان های ناشناخته ذهن، نشاط حاصل از یک کشف و شادی ناشی از سهیم کردن دیگران در این یافته ها از دیگر عوامل مؤثر در علاقه مند شدن من نسبت به ریاضی بود. در آنجا حس کردم فرصتهای بهتری برای در نوردیدن مرزهای تازه یافته ام و می خواستم تجربه نخستین انسانی را که پا بر روی کره ماه نهاد، در خود احساس کنم. ریاضی همواره حکم یک ماجراجوئی بزرگ را برایم داشت که مرا به سمت سرزمین های کشف نشده می کشاند.

جودیث رویتمن

نکته ای که مرا به ریاضی علاقه مند کرد اثبات غیرقابل شمارش بودن اعداد حقیقی بود که از کلاس هفتم (دوم راهنمایی) با آن روبرو شدیم. جدّی می گویم.

آرنولد راس

من از همان کودکی تشویق می‌شدم که زیاد بخوانم. از یک کتابخانه که بطور اشتراکی خدمات ارائه می داد، استفاده می کردیم و هنوز کتابخانه های عمومی به شکل امروزی وجود نداشت. علاقه من تمام حیطه های علمی را فرا می گرفت و در واقع در سن سیزده یا چهارده سالگی بود که علم نجوم را به شکلی غیرحرفه ای تجربه کردم. در ابتدا فارادی و پیرکوری قهرمانان دنیای علم را برایم تداعی می کردند. بسیار خوشبخت بودم از اینکه توانستم تعلیمات نخست خود را در ریاضی نزد ریاضیدانانی فرابگیرم که دارای جذبه های روحانی بودند.

هان سا

وقتی که یک دانشجوی لیسانس بودم و بعنوان دستیار در آزمایشگاه فیزیک کار می کردم، دریافتم که هدف از انجام آزمایشات هسته ای را در فیزیک نمی فهمم. تصمیم گرفتم حجم زیادی از کتابهای مکانیک کوآنتم را در کتابخانه بخوانم. با ناامیدی دریافتم که نمی توانم زبان ریاضی بکار رفته در این متون را بفهمم. مدت زمانی نه چندان طولانی پس از آن، از بهترین دوستم که

دانشجوی ریاضی بود پرسیدم که او چه کتابهایی را می خواند. وقتی متوجه شدم که حتی چند صفحه نخست کتابش را که تئوری گروهها نام داشت، نمی فهمم خیلی نگران شدم. از آنجا که معلمین فیزیک به من گفته بودند که بیش از حد ریاضی خوانده بودم، از استاد ریاضی خود خواستم تا ترتیب خواندن منابع موجود در ریاضی محض را برای کسی که می خواهد از اول شروع کند، برایم بگوید. (در ذهن خود این ایده را می پروراندم که بیشتر اوقات خود را در سال چهارم دانشکده به آن امر اختصاص دهم). او پاسخ داد: «سن نوزده سالگی برای مطالعه ریاضی محض خیلی دیر است.»

دو هفته بعد با سرسختی تمام درخواست فارغ التحصیلی در فیزیک کردم و برای مطالعه تمام وقت در گروه ریاضی ثبت نام کردم. از یک پشتوانه برخوردار بودم. استاد شیمی ام در سال اول به من گفته بود: «هر وقت از فیزیک خسته شدی، به دیدن ما بیا. در اتاق ما همیشه باز است.»

مدت زمانی نگذشت که ریاضی «بی فایده» مرا سخت اغوای خود ساخت. این را معلمین علوم نیز به من گوشزد کرده بودند. در آن زمان سعی کردم علائق خود به علوم و مهندسی را از دست ندهم و کم کم کوشیدم تلاشهایی بمراتب سخت تر، جدی تر و قابل توجه تر را که در علوم انسانی صورت می گرفت، بهتر درک کنم. برای ریاضیدان شدن حتماً لازم نیست که نابغه باشیم. امّا داشتن یک ذهن باز و تلاش بسیار، ضروری است. نکته ای که دریافته بودم این بود که آشنایی اولیه من با علوم و مهندسی مرا قادر ساخته بود تا بین آنها و ریاضی ارتباطهای مؤثری را برقرار سازم و به روابط جالبی نیز در میان آنها پی ببرم.

آلن تاکر

من در خانواده ای ریاضیدان بزرگ شدم و از همان موقع که سه سال سن داشتم، «می دانستم» که به ریاضی عشق می ورزم و باید دکترای خود را در ریاضی بگیرم.

اچ. وُو

من در دوران ابتدایی خود در چین، آموزش بسیار بدی در ریاضی دیدم و در نتیجه بجز یک سال تا کلاس هفتم (دوم راهنمایی) در تمام دروس ریاضی با شکست روبرو می شدم. هیچ چیز برایم توضیح داده نمی شد و باید همه چیز را به حکم معلم انجام می دادم. احساس می کردم هرگز نخواهم توانست به رمز ریاضی دست یابم. پس از آن در کلاس هفتم، یک معلم بسیار عالی داشتم. از همان روز نخست، تمام مسائل را با بیانی بلند و مستدل حل می کرد. سپس مرا مطمئن ساخت که هیچگونه رمز و رازی در ریاضی وجود ندارد بجز همان استدلال معمولی که من نیز از آن بهره مند بودم. خیلی زود اثبات قضایا در هندسه اقلیدسی را شروع کردیم و این امر باعث شد تا دیگر ریاضی را یک حیطه قابل یادگیری بدانم. بعد از آن نیز هرگز با مشکل خاصی روبرو نشده ام.

زیرنویسها:

1. Al Cuoco
2. Wayne Harvey
3. Education Development Center, Inc.
4. National Science Foundation
5. Notices
6. Arnold Ross
7. William Barker
8. George Andrews
9. Cal Moore
10. National Council of Teachers of Mathematics
11. Kenneth Millett
12. Alan Tucker
13. NCTM
14. Judith Roitman
15. Fern Hunt
16. Roger Howe
17. Mathematics Tomorrow
18. Lynn Steen
19. Neal koblitz
20. Zero Population Growth
21. Johnny Carson
22. Richard Askey
23. The Shopping Mall High School
24. Arthur Powell
25. Hyman Bass
26. Han Sah
27. John B. Conway
28. Raymond Johnson
29. Leon Henkin
30. Harry Goheen
31. Richard Askey
32. Lie Theory
33. Hyman Bass
34. Caltech
35. Princeton
36. E. Artin
37. Lang
38. Tate
39. Felix klein

روایت معلّمان

به دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه ای برخوردار است. مجله در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت های معلّمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری با معلّمان ریاضی برقرار کنیم. این روایتها برای محققان و معلّمان محقق فرصت ارزنده ای به وجود می آورد تا به تبیین نظریه های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه ها به عمل در می آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می کند.

از همکاران گرامی انتظار می رود که روایتهای خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلّمان عزیز باید به اهمیّت تجربه های خود واقف شوند و با پویایی به غنی تر کردن آنها بپردازند.

داستان یک

مرتضی حسنی نسب
دبیر ریاضی دبیرستانهای کرمانشاه

اینجانب فارغ التحصیل دانشکده علوم دانشگاه تهران هستم و برای معلمی تربیت نشده بودم. هیچ کلاس یا دوره خاصی را در خصوص فن معلمی ندیده بودم. بعد از خدمت وظیفه معلم شدم. (چرای آن حدیثی مفصل دارد)

تدریس هندسه چهارم ریاضی و حساب استدلالی ششم ریاضی ... به عهده من گذاشته شد. به کمک یکی از دوستان که سابقه تدریس داشت تا حدود کمی از مشکلات را حل می کردم. ولی وقتی تصور می کنم که چه معجونی را به عنوان درس تحویل می دادم از خودم خجالت می کشم (با وجود آنکه اغلب دانش آموزان غیاباً اظهار رضایت می کردند).

پس از دو سال یعنی در سال ۱۳۴۸ دانشسراهای راهنمایی تأسیس شد و مرا برای دیدن دوره کارآموزی به تهران فرستادند. در رئوس برنامه تفصیلی تدریس، تئوری مجموعه ها بود. در آن زمان کتاب خاصی به فارسی در دسترس نبود و ...

یکسال تدریس را به هر مشقتی بود به پایان بردم و سال بعد در کلاسهای کارآموزی مقدار زیادی از مشکلات حل شد. در این کلاسها اساتیدی که از انگلستان آمده بودند و متخصص در تدریس ریاضیات به دانش آموزان بودند، اعتقاد به روش دانش آموز محوری داشتند. ولی تقریباً تمام روشهای آنها با مقاومت و عدم قبول واقع می شد. بیشتر معلمان به دنبال این بودند که چند مسأله مشکل برایشان مطرح شود تا بتوانند از آنها استفاده کنند. بعد از دو سال کلاسهایی تشکیل شد که بنا بود از معلمان ابتدایی و دبیرستان برای تدریس در کلاسهای راهنمایی استفاده شود. این کلاسهای کوتاه مدّت که بعداً به دوره های تابستانی تبدیل شد چه مشکلاتی را به وجود آورد، بماند.

ماجرای ما در یکی از این کلاسها اتفاق افتاد.

شرکت کنند گان در این کلاسها همگی باید حداقل ۵ سال سابقه خدمت می داشتند و من ۳ سال سابقه خدمت داشتم تعدادی از

جلسه تدریس

آنها همکلاسی های سابق من بودند که با دیپلم استخدام شده بودند و بعضی هم معلم بودند.

جلسه اول بعد از سلام و احوالپرسی قسمتی از مبحث مجموعه ها را مورد بحث قرار دادم که برای آنها جالب توجه بود. در جلسه دوم وقتی وارد کلاس شدم بعد از یکدقیقه در گوشه کلاس چشمم به دو نفر از معلمان دوره دبیرستانم افتاد. یکی از آنها معلمی بود سخت کوش، سخت گیر و معتقد به کار معلمی، اغلب دانش آموزان از سخت گیریهای او راضی نبودند ولی من برای او خیلی ارزش قایل بودم و هنوز هم برایم جزء بهترین معلمان محسوب می‌شود شاید علاوه بر تدریس خوبی که داشت خلاف بعضی از معلمان و اولیای دبیرستان که برای دانش آموزان متمول و فرزندان کسانی که دارای شغل مهمی بودند امتیازات خاصی قایل بودند ایشان عکس آن عمل می کرد.

مانند کسی که دچار برق گرفتگی شده باشد در جای خود خشکم زد، عرق سراپای وجودم را گرفت. چند لحظه به این حالت باقی ماندم با عذرخواهی از ایشان و دیگران درس را شروع کردم. چنان از ته دل از خدا یاری خواستم که تا آن زمان برایم سابقه نداشت. نمی دانم چه شد کلام و جملات چنان روان از حلقومم بیرون می آمد که خودم احساس رضایت می کردم نفوذ و گرمای نفس آنها را در وجودم حس می کردم با وجود آنکه یارای این را نداشتم که در چشمان او نگاه کنم ولی حس می کردم که با نگاه نافذش چگونه مرا تحت نظر دارد.

بعد از آنکه مختصری از درس جلسه قبل را تکرار کردم. موضوع جدید مطرح شد. مجموعه های هم ارز ـ تناظر یک به یک ـ بعد از چند مثال ساده مانند چوپان و کنترل تعداد احشام خودش ـ مقایسه تعدادی استکان و نعلبکی برای یک قهوه چی که نمی خواهد آنها را بشمارد و ... به این مثال رسیدم. تعداد اعداد طبیعی بیشتر است یا تعداد اعداد زوج؟

حدس می زدم جواب آنها چیست همگی گفتند اعداد طبیعی. سؤال کردم چرا؟ چند نفر گفتند معلوم است. اعداد طبیعی از اعداد زوج و فرد تشکیل شده. گفتم به روشی که قبلاً عمل می کردیم مقایسه کنید. بعد از چند لحظه جوابهای همراه با شگفتی شنیده شد. آقا هم ارزند.

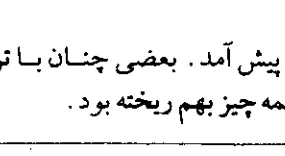
پرسیدم آیا N را می شود با زیرمجموعه دیگری از خودش در تناظر یک به یک قرار داد؟

مدّت کوتاهی با هم بحث کردند. همهمه آرامی بود و بعد جوابهای مثبت.

سؤال: آیا $A = \{۱, ۲, ۳, \ldots, ۱۰۰۰\}$ و $B = \{۲, ۴, ۶, \ldots, ۱۰۰۰\}$ هم ارزند. جواب نه. کدام بزرگتر است. جواب دادند A. یکی گفت در اینجا اصطلاح بزرگتر بودن مناسب نیست. کلمه دیگری باید بکار ببریم. گفتم قویتر بکار ببریم چطور است. پذیرفتند.

سؤال: برای تناظر یک به یک چه لازم است. بعد از بحث مختصری گفتند **دو مجموعه و یک قانون که اعضاء را بهم ارتباط بدهیم** این کار را قبلاً انجام داده ایم.

سؤال: دو پاره خط نامساوی را در نظر می گیریم. از B به C وصل می کنیم. از هر نقطه AB خطی به موازات BC رسم می کنیم. آیا نقاط دو پاره خط در تناظر یک به یک هستند؟ جوابها مختلف بود بعضی می گفتند ممکن است AC نقاط بیشتری داشته باشد. یکی گفت از نقاط AC به موازات CB رسم می کنیم نقطه ای جا نخواهد ماند. نقطه ای هم از AB وجود ندارد که دو نقطه را به آن ارتباط داده باشیم باز هم بحثی و سر و صدای مختصری و اکثر قریب به اتفاق پذیرفتند. چند نفر باقی مانده گفتند شما ادامه بدهید تا ما فکر کنیم.



سؤال: آیا می شود گفت AB برابر با AC است؟ زیرا تعداد نقاط آنها برابرند؟

حالت خاصی پیش آمد. **بعضی چنان با تردید به تابلو نگاه می کردند گویی همه چیز بهم ریخته بود.**

یکی گفت پس با این حرفها همه هندسه و ریاضیات بهم می خورد. گفتم کمی فکر کنید. ماجرا چیست؟

بعد از چند دقیقه یکی چنان دست را بلند کرد که گویی می خواست از روی نیمکت به هوا بجهد!

بقیه نیز با چهره های راضی دست بلند کردند.

جواب نفر اوّل این بود. **ما تعداد نقاط را مقایسه کردیم دلیلی ندارد که دو پاره خط مساوی باشند. مثل مقایسه مجموعه اعداد طبیعی و اعداد زوج.**

پرسیدم پس چه وقت مساوی می شوند. جواب: اگر بشود آنها را بر هم منطبق کرد.

سؤال کردم: اندازه پاره خط چه؟

شخص دیگری جواب داد اندازه پاره خط یک عدد است که نشان می دهد واحد انتخابی ما چند بار در پاره خط می گنجد.

نتیجه: پاره خط مجموعه ای است از نقاط. نقاط هر دو پاره خط را می توان در تناظر یک به یک قرار داد.

اندازه پاره خط با خود پاره خط دو چیز متفاوت هستند.

حدود نیم ساعت از وقت باقی بود. گفتم اگر خسته شده اید کمی استراحت کنیم. گفتند نه آقا تازه گرم شده ایم ادامه بدهید.

سؤال: از مقایسه یا تناظر یک به یک مجموعه های تک عضوی یا دو عضوی و یا . . . چه استفاده ای می شود کرد؟ یا سؤال را این گونه مطرح کنیم حدس می زنید بشر چگونه اعداد طبیعی را شناخته است؟

یکی از همکلاسان دبیرستانی من گفت: شما جواب سؤال را داده اید. بهتر بود ابتدا قسمت دوم را مطرح می کردید.

گفتم معلم ناشی و کم تجربه همین است. از او تشکر کردم.

با وجود صحبت های ما هنوز بعضی ها متوجه موضوع نشده بودند. سؤال را تکرار کردم.

پاسخ ها اغلب درست بودند. از مقایسه مجموعه های تک عضوی به عدد ۱ و بعد به ۲ و ... پی برده ایم. پرسیدم با پاسخ دادن به این سؤال چه کار مهمی انجام شد؟ بعد از مدّتی پاسخ خودم را گرفتم: انتزاع؛ کاری که هیچ موجود زنده ای جز انسان قادر به درک آن نیست. (ممکن هم هست که بتوانند ولی ما نمی دانیم!)

پس ۲ چیست؟ شکل دو است؟ خود دو است و یا هیچکدام.

باز هم بحث بین آنها شروع شد. بعد از چند دقیقه بحث و گفتگو و بعضی هم محل نشستن خود را عوض کردند تا هم بحث خودشان را پیدا کنند.

نتیجه این شد.

هر عدد نمادی دارد و نامی دارد و مفهومی در ذهن ما دارد

مثلاً ۲ نمادی است برای کسانی که علامت های رایج ما را بکار می برند. برای بعضی 2 است یا II ما می خوانیم دو بعضی می گویند TWO بعضی می گویند ایکی و ... ولی همه ما یک مفهوم را در ذهن داریم که نه به زبان بستگی دارد و نه به ملیت و ...

سؤال: اعداد طبیعی را چگونه ساخته ایم؟

با توجه به تجربه ای که داشتند و بحث های انجام شده. اغلب جواب دادند از ۱ و افزودن ۱ به آن و بعد و بعد ...

معلم بی تجربه ای بودم در وضعیتی خاص نمی دانم چرا این سؤال که هنوز هم برای خودم روشن نیست را مطرح کردم. (آیا این اعداد وجود دارند و ما آنها را کشف می کنیم و یا مخلوقات ذهنی ما هستند)

شاید می خواستم اظهار فضلی کرده باشم. دلم می خواست به آنها نشان بدهم که بعضی از مطالب را می دانم ولی مطمئناً نمی خواستم برای آنها ژست خاص بگیرم. وقتی سؤالی را مطرح می کردم فکر می کردم نکند که تصور کنند می خواهم معلوماتم را به رخ آنها بکشم (و خودم می دانستم که بقول معروف چیزی در چنته ام ندارم) ولی کاملاً حس می کردم که فضای کلاس خیلی دوستانه و صمیمی است.

و بالاخره آخرین مطلب را مطرح کردم و بحث هایی شد که آغاز بحث های جدیدی بودند.

معمولاً در ابتدای هر داستانی می گویند: **یکی بود، یکی نبود. غیر از خدا هیچکس نبود** و بعد داستان را شروع می کنند. این جمله یعنی چه، چه چیزی را می خواهیم بگوئیم.

آیا این جمله می تواند سرآغاز مطالب بعدی ما برای ساخت اعداد دیگر و مطالب دیگر باشد؟

باز هم بحثی و سکوتی و باز همهمه ای...

به چهره او نگاه کردم. عادت داشت چانه و فک خود را در میان دست راست خود بگیرد و به طرف مقابل خیره شود. بعد از پایان حرفها زیر گلوی خودش را می خاراند و بعد به روی زانوی خودش می زد.

همان کار را کرد و گفت «حالا شد» هنوز می توانم برق نگاه رضایت بار او را تصور کنم و لذّت آن لحظه را به یاد بیاورم.

یاد همه آنها به خیر، خداوند حق همه آنها را بر ما حلال کند. ان شاءا ...

تاریخ دربارهٔ تدریس آنالیز چه پیامی برای ما دارد؟

نویسنده: ژان ـ پیر فردلُمیه
ترجمهٔ: دکتر علیرضا مدقالچی

«اگر می خواهید ریاضیاتتان با معنی باشد باید قطعیت را رها کنید، اگر طالب قطعیت هستید، معنی را رها کنید. نمی توانید هر دو را با هم داشته باشید»
«لاکاتوش، اثباتها و ابطالها، صفحه ۱۰۲»

چکیده: طی سی سال گذشته در فرانسه اصلاحات چندی درمورد شیوه های تدریس ریاضیات بخصوص در آنالیز به وجود آمده است. این اصلاحات که ظاهراً بیهوده می نمودند، برای آشتی دادن دو دستورالعمل (فرمان) حتمی و الزام آور تلاش کرده اند: نیاز به دقت ریاضی مناسب با هر نوع آموزش ریاضی و (دیگری) ضرورتهای آموزشی (پداگوژیکی) برای فهم و انتقال معانی. ولی از آنجا که معنا در برگیرنده ایده هایی است که با شهود بینهایت[1] سروکار دارد (اعداد اصم، بینهایت کوچِکها، بینهایت بزرگها، حدها و غیره) و این شهود که لازمهٔ درک عمیق معانی است درمقابل تناقض قدعَلَم می کند؛ ولی شهود در مقابل درک کامل غنای مفهومیِ ایده هایی که ریاضیدانها طیَ سالها در آنالیز به دست آورده اند ناتوان است. راه حلّی که به نظر می رسد و در سالهای اخیر مورد استفاده قرار گرفته، این است که از آموزش معانی به نفع روشهایی که اساساً عددی هستند ولی دقت فریبنده دارند، اجتناب کنند. ولی چنین دقتی همانگونه که وجود دارد، تنها به صورت کاملاً پراکنده اتفاق می افتد و از درک معانی فراگیر (سراسری) و ساختاری به نفع قواعد صوری محض ممانعت می کند. راه حل دیگری که به نظر ما محتمل است و همچنان دغدغهٔ ما را نسبت به معانی حفظ می کند، این است که به طور همزمان، تفکر ریاضی دانش آموز را به طور دقیق و منسجم از طریق قرار دادن ریاضی و تدریس آن در یک بستر تاریخی بسازیم.

به این ترتیب دیگر معانی و به کار بردن دقت ریاضی به هیچ وجه متناقض یا غیر قابل دسترس نیستند، بلکه با یک فرآیند پویا و زنده و در تعامل با بینش ریاضی دانش آموز ساخته می شوند.

۱ـ تغییرات اساسی در آموزش آنالیز در دورهٔ دبیرستان

بررسی برنامه هایی که از سال ۱۹۴۵ میلادی برای دورهٔ دبیرستان در فرانسه تجویز شده است به وضوح سه دوره را نشان می دهد.

۱) تاسال ۱۹۶۱ میلادی کلمهٔ آنالیز در برنامه های درسی نبود اگرچه مباحثی از قبیل مطالعهٔ توابع، مشتق و غیره که هم اکنون باید تحت عنوان آنالیز قرار دهیم در بخش جبر و مثلثات قرار

داشت، این وضعیت در برنامه ها و کتابهای درسی، حتی برای دوره های آموزش در قرن نوزدهم و سالهای قبل از جنگ در قرن بیستم، روش معمول بوده است آنچنان که توابع و سریهای عددی و غیره قسمتی از جبر تلقی می شد.

۲) دورهٔ ۱۹۶۱ تا ۱۹۸۵ (میلادی)، این دوره برخلاف دورهٔ قبل، کاملاً بی ثبات بود. ویژگی این دوره میل به معرّفی دیدگاههای جدید در آنالیز و جدا از جبر بود. با این حال، این تغییرات مشکوک و غیر قطعی بود. مثلاً با توجه به برنامه مقدماتی در علوم (Primaire Scientific) برای ۱۶ تا ۱۷ ساله ها، در می یابیم که:

در سال ۱۹۶۶ میلادی ایدهٔ پیوستگی و حد در یک نقطه و همچنین مشتق معرفی شده بود. در سال ۱۹۷۰ میلادی، عنوان مشتق به عنوان تابع مماس خطی ارائه شد.

در سال ۱۹۸۲ این ایده ها با ایده هایی که دارای بسطهای محدود از مرتبه ۰ و ۱ بودند جایگزین شدند. همزمان، دنباله های عددی معرفی شد و آنالیز باید با به کار بردن بازه ها، تقریب ها و نامساویها انجام می شد.

۳) از سال ۱۹۸۵ میلادی در برنامه های درسی رسمی ریاضی دو طرح می بینیم:

الف) میل وافر برای ثبات، چون برنامه ها اساساً برنامه های ۱۹۸۳ میلادی را حفظ می کرد. تجربهٔ به کار بستن آنها برای سه سال نیاز به این تغییرات را نشان می دهد.

ب) تأکید بر نیاز به یک رویکرد عملی تر به آموزش ریاضی به منظور «ارائهٔ محتوای شهودی و عینی برای اشیای ریاضی» که در آن «دیدگاه هندسی به مسایل به ویژه در آنالیز توسعه یافته است. زیرا شهود و تصوّر می تواند به عنوان زبان و رویهٔ نمایش هندسه به کار رود» در ستونهای زیر، فرازهایی از برنامه های ۱۹۸۵ میلادی و ۱۹۹۱ میلادی را می بینید. بیان «حد یک تابع در یک نقطه» تحت عنوان زبان حدّ آورده شده است:

«بعد از در نظر گرفتن توابع h و h^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ در همسایگی ۰، گفته می شود که این توابع در صفر دارای حد صفر هستند».

برای معلم ریاضی کلاسهای اول و یا آخر دبیرستان که قصد آماده کردن درس خود را دارد، دست کم سردرگمی و سرگشتگی از جمله مشکلاتی است که برایش بوجود می آید. مثلاً آیا می توان مفهومی به انتگرال، همانگونه که درستون سمت راست تعریف شده است، داد و همزمان آن را با نماد سطح و حجم مرتبط ساخت؟ بعلاوه او تعجّب خواهد کرد اگر کشف کند که موضوع ریاضی ـ آنالیز ـ که نتایج و روشهای آن به مدت حداقل ۱۵۰ سال و یا بیشتر در دوره های دبیرستان تدریس می شوند امروزه باید هر پنج یا ده سال یکبار در معرض تغییرات مهّم در برنامهٔ درسی قرار گیرند. همچنین، توسعه تکنولوژی ـ ماشین حسابها و کامپیوترها ـ ممکن است نیاز به بعضی تغییرات در رویکرد نسبت به موضوع را بطلبد. زیرا این ابزار، محاسبات و رسم نمودارها را تسهیل می کنند. اما آیا این تحولات، تغییر محتوای ریز مواد درسی را ایجاب می کنند؟

۱۹۸۵	۱۹۹۱
در دوره های مقدماتی ایدهٔ پیوستگی خارج از ریز مواد قرار دارد.	ایضاً ولی چند خط قبل از آن داریم: همانند کلاس دوم از کاربرد مفهوم تابع برای پدیدهٔ پیوستگی بهره می بریم.
حساب انتگرال در دوره پایانی C تابع پیوسته f بر بازه I و زوج (a, b) از نقاط I داده شده است، عدد $F(b) - F(a)$، که در آن F تابع اولیه f است، مستقل از انتخاب F است. این عدد انتگرال f از a تا b نامیده می شود و به صورت زیر نوشته می شود. $\int_a^b f(t)dt$	ایضاً با این هدف بیان شده است: به منظور آشنا کردن دانش آموزان با مسایلی مربوط به حساب انتگرال که آن نیز به نوبه خود به مفهوم انتگرال f پرداخته می شود. محاسبه کمیت های هندسی (سطوح حجم ها، ...) و محاسبه کمیت های فیزیکی (محاسبه مسافت طی شده با سرعت معلوم، مقدار میانگین، مقدار RMS)

۲ـ این تنوّعها در ریز مواد تناقضی عمیق را آشکار ساخت

واقعیت این است که همهٔ این تنوّعها، عدم قطعیت ها و اصلاحیه ها بازتاب تناقضی اساسی بین دو جریان قوی است که در بررسی واژه بینهایت این تناقض به وضوح دیده می شود.

نخست جریان مربوط به پداگوژی

یک مسأله اساسی این است که باید تدریس به گونه ای باشد که بتوان به طور مستقیم با دانش آموز صحبت کرد تا قدرت درک و تصور او را تحریک کرد. این روش متضمن به کار بردن کلماتی است که الزاماً با معانی شهودی نظیر «پیوستگی، حد، بینهایت، بینهایت کوچک یا بزرگ و غیره ...» در رابطه است. ولی فاصله زیادی بین این شهود و مفاهیمی که امروزه توسط ریاضیدانهای حرفه ای به کار می رود وجود دارد، نه فقط این کلمات توانایی انتقال غنا و ظرافت این مفاهیم را در آنالیز ندارند، بلکه جدی تر از آن، مشهودات ما از درک معانی آنها عاجز است، و اگر هم با

مشهودات درک کنیم به خطا می رویم و خود را در مواجهه با تناقضهای حل ناشدنی می یابیم. مثلاً در مورد جوابهایی که دانش آموزان ما در مواجهه با حدهای کلاسیک زیر به طور خود به خودی می دهند، فکر کنید.

$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

یا

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right]$$

به این دلیل است که برتراند راسل گفت «شهود در مقابل بینهایت کوچکها نابینا است» و بچلارد[1] نوشت «دقت فقط از اصلاح ریشه ای شهود حاصل می شود.»

دوم نیاز به دقت ریاضی

گفته می شود که ریاضیات مستلزم دقت است و در نتیجه فرمان (دستورالعملی) دومی که از دیدگاه تدریس داریم با اولی یعنی، ضرورت معرفی دقیق و استوار تعریف ها و قضیه های مربوط به بینهایت، متناقض است. برای بسیاری از بخشهای ریاضی این نوع ارائه برای اکثریت دانش آموزان دبیرستانی خیلی مجرّد است و از این رو نمی تواند به آن صورت دقیق ارائه شود. یک مثال خاص را در نظر بگیرید. دانش آموزان مفهوم سرعت لحظه ای را می دانند ولی اگر به دنبال تعریف ریاضی سرعت لحظه ای باشند ممکن است معلم او تنها قادر به ارائه تعریف زیر باشد:

فرض کنید $f(t)$ مسافت طی شده برحسب کیلومتر تا زمان t باشد آن گاه معنی اینکه در لحظه t_0 سرعت برابر با ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت است عبارت است از:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |t-t_0| < \eta \Rightarrow \left|\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} - 100\right| < \varepsilon$$

فقدان تشخیص اولین فرمان یعنی استفاده از ضرورتهای پداگوژی، ارائه آنالیز را آنچنان که در دهه های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ میلادی به دانش آموزان ارائه می شد یعنی شیوهٔ معرفی ناپخته و صوری ایده های حد، پیوستگی، مشتق و غیره را زیر سؤال بُرد. از سوی دیگر ضرورت های پداگوژی مطمئناً در بسیاری از تغییراتی که از سال ۱۹۸۵ به وقوع پیوسته است، دیده می شود. ولی این آگاهی از شرّ فرمان دوم یعنی نیاز به دقت ریاضی در تمام فعالیتهای ریاضی، خلاصی نیافت. چگونه می توانیم خود را از قید و بند این مشکل رها کنیم؟

۳ـ راه حل امروزی: اجتناب از معانی

به نظر من چنین می آید که راه حل امروزی آن است که از کلیه تعریف ها و اثباتهایی که به نحوی بینهایت را در بر می گیرند اجتناب کرد. این روش از پیش دانشگاهی شروع می شود. در کتابهای درسی دهه های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ معمول بود که خلاصه ای از برهانهای اولین قضیه تالس و فرمول سطح یک مستطیل ارائه شود. بعد از آن که اینها در برنامه قرار گرفتند، اثبات واقعیت هایی نظیر این که $y = ax + b$ نمایش یک خط مستقیم است یا در دوره دوم تحصیلی اثبات اینکه اگر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ دو بردار و λ یک عدد حقیقی باشد آن گاه

$$\lambda\left(\vec{U}+\vec{V}\right) = \lambda\vec{U}+\lambda\vec{V}$$

ممکن شد. به اعتقاد من امروزه به سختی می توان چنین اثباتهایی را در کتابهای درسی دبیرستانی و یا پیش دانشگاهی قرار داد. در حالی که این نتایج محتاج برهانند یا اینکه حداقل باید پذیرفته شوند. امروزه به جای آنها گزاره های ساده یا تصدیق های زیر را داریم:

«به ازای عددهای داده شدهٔ a، b و c مجموعهٔ نقاطی مانند $M(x,y)$ به طوری که $y = ax + b$، خط مستقیمی است که oy را قطع می کند».

یا

«به ازای هر $\vec{U}$ و $\vec{V}$ داریم: $\lambda\left(\vec{U}+\vec{V}\right) = \lambda\vec{U}+\lambda\vec{V}$ »

ما امروز در وضعیتی هستیم که اگر بحث با همکاران جوانتر خود را داشته باشیم باید آنها را متقاعد کنیم که این خواص ساده نیاز به برهان دارند ولی برهان آنها مشکل است به سبب این که مستلزم بحث با بینهایت می باشد. وقتی که مثلاً اگر مساحت یک مستطیل با اضلاع به طول و عرض اعداد گنگ را محاسبه می کنیم چه اتفاق می افتد. برای او و حتی برای دانش آموزان آنها این خواص حقایق ذاتی تلقی می شود. در حالی که برنامه آموزشی فشار می آورد که آنها مهم هستند «برای تربیت دانش آموزان برای قبول کردن رهیافتهای علمی باید (توانایی) تجربه کردن، استدلال کردن، مصور (تجسم) کردن و تحلیل نقادانه کردن را به صورت همزمان توسعه داد».

در واقع، آنالیزی که امروزه تدریس می شود خود را به ارائه تعداد مشخصی ابزار محاسباتی و رسم نمودارها محدود می کند، به طوری که درستی و ارزش آنها همواره مورد تصدیق قرار می گیرد ولی هرگز اثبات یا توجیه نمی شود.

اولویت این روش ارائه آن است که تصوّر فریبندهٔ دقت مُسلّم اشیاء یعنی توابع، بردارها، نقاط، خطوط مستقیم و غیره با خواص خود معرفی می شوند. تعداد معینی از قواعد و محاسبات به همراه نتایجشان باید پذیرفته شوند و تنها کار دانش آموزان این است که این قواعد را به خوبی به کار برند بدون آنکه کوچکترین سؤالی در

روایت معلّمان

به دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مجله در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت های معلّمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری با معلّمان ریاضی برقرار کنیم. این روایتها برای محققان و معلّمان محقق فرصت ارزنده ای به وجود می آورد تا به تبیین نظریه های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه ها به عمل در می آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می کند.

از همکاران گرامی انتظار می رود که روایتهای خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلّمان عزیز باید به اهمیّت تجربه های خود واقف شوند و با پویایی به غنی تر کردن آنها بپردازند.

داستان یک

مرتضی حسنی نسب
دبیر ریاضی دبیرستانهای کرمانشاه

اینجانب فارغ التحصیل دانشکده علوم دانشگاه تهران هستم و برای معلمی تربیت نشده بودم. هیچ کلاس یا دوره خاصی را در خصوص فن معلمی ندیده بودم. بعد از خدمت وظیفه معلم شدم. (چرای آن حدیثی مفصل دارد)

تدریس هندسه چهارم ریاضی و حساب استدلالی ششم ریاضی ... به عهده من گذاشته شد. به کمک یکی از دوستان که سابقه تدریس داشت تا حدود کمی از مشکلات را حل می کردم. ولی وقتی تصور می کنم که چه معجونی را به عنوان درس تحویل می دادم از خودم خجالت می کشم (با وجود آنکه اغلب دانش آموزان غیاباً اظهار رضایت می کردند).

پس از دو سال یعنی در سال ۱۳۴۸ دانشسراهای راهنمایی تأسیس شد و مرا برای دیدن دوره کارآموزی به تهران فرستادند. در رئوس برنامه تفصیلی تدریس، تئوری مجموعه ها بود. در آن زمان کتاب خاصی به فارسی در دسترس نبود و ...

یکسال تدریس را به هر مشقتی بود به پایان بردم و سال بعد در کلاسهای کارآموزی مقدار زیادی از مشکلات حل شد. در این کلاسها اساتیدی که از انگلستان آمده بودند و متخصص در تدریس ریاضیات به دانش آموزان بودند، اعتقاد به روش دانش آموز محوری داشتند. ولی تقریباً تمام روشهای آنها با مقاومت و عدم قبول واقع می شد. بیشتر معلمان به دنبال این بودند که چند مسأله مشکل برایشان مطرح شود تا بتوانند از آنها استفاده کنند. بعد از دو سال کلاسهایی تشکیل شد که بنا بود از معلمان ابتدایی و دبیرستان برای تدریس در کلاسهای راهنمایی استفاده شود. این کلاسهای کوتاه مدّت که بعداً به دوره های تابستانی تبدیل شد چه مشکلاتی را به وجود آورد، بماند.

ماجرای ما در یکی از این کلاسها اتفاق افتاد.

شرکت کنند گان در این کلاسها همگی باید حداقل ۵ سال سابقه خدمت می داشتند و من ۳ سال سابقه خدمت داشتم تعدادی از

مورد معنی این اشیاء یا قواعد داشته باشند. بدترین حالت آن است که دانش آموزان از تشخیص این مدلهای ریاضی در حالت های عینی عاجزند. چگونه یک دانش آموز می تواند ارتباط بین دو حالت زیر را تشخیص دهد؟

ـ یک پدیده نمایی و تابع همنام آن.

ـ یک مساحت، گشتاور لَختی، مقدار میانگین و انتگرالی که به او معرفی می شود.

از این رو تناقض بین شهود دانش آموز و بررسی دقیق رفتار بینهایت با اجتناب از درک معنی حل می شود. اجتناب از مواجه شدن با بینهایت که در قضیهٔ تالس، اعداد گنگ، مفهوم حد، و ... به طور صریح به کار می رود، به این خاطر است که اجازهٔ پرسش سؤالاتی نظیر سؤالات زیر را ندهد:

عدد چیست؟ معنی پیوستگی کدام است؟ مقصود از یک خط مستقیم، یک سطح، یک حجم چیست؟ این روش ریاضیات را به فعالیتی اکیداً صوری تبدیل می کند، که در آن محاسبه جای استدلال را می گیرد و این همانا مقاومت در برابر معنی است.

عبارت زیر توسط دانش آموزان به کار می رود که بسیار مهم است:

«مجاز هستید که» «اجازه ندارید بر صفر تقسیم کنید» «آیا اجازه داریم ساده کنیم؟». «آیا ما مجاز هستیم که تحت شرایط فلان فلان از یک سری جمله به جمله مشتق بگیریم» چون اشیاء ریاضی تنها به صورت قواعد معرفی می شوند و با توجه به معانی زیربنایی آنها، دانش آموز به طور طبیعی طرز تلقی و تفکر خود در مورد تمیز بین درست و نادرست را با طرز تلقی دیگری که احترام به قوانین و قواعد است جایگزین می کند که خود آن قواعد به صورت بیان یک قانون مشخص درمی آید که دارای معنایی است که صرفاً مانند یک قانون حقوقی پذیرفته می شود. در نتیجه یک معلم با این طرز تلقی کلاس را مانند یک قاضی اداره می کند که چنین روشی دارای منافع مشخصی است. این منافع گذشته ای را فرا می خواند که در آن معلم در کلاس درس حضور می یافت تا «هم هدایت و بازرسی کند و هم تنبیه نماید». در نقطهٔ مقابل، زمانی که سؤالی در مورد معانی زیربنایی پرسیده می شود معلم و دانش آموز در وضعیتی برابر قرار می گیرند زیرا موضوعاتی مطرح می شوند که از توان هردوی آنها خارج است.

بالاخره به نظر می رسد که تدریس ریاضی در یک طرحواره ای (شمایی) اسیر شده است که بسیار سخت و خشک است و دارای دیدگاهی در مورد ماهیت ریاضیات است. این وضعیت منظر و سیمایی همانند زیر دارد:

مطابق چنین طرحواره ای، به نظر می رسد که فقط در دانشگاه امکان آموزش ریاضی به صورت ترکیبی از درک معانی و دقت ریاضی وجود دارد. در سطوح پایین تر ناگزیر است که یا می بایست دقت را قربانی کرد (بویژه درمورد مسایلی که به بینهایت مربوط

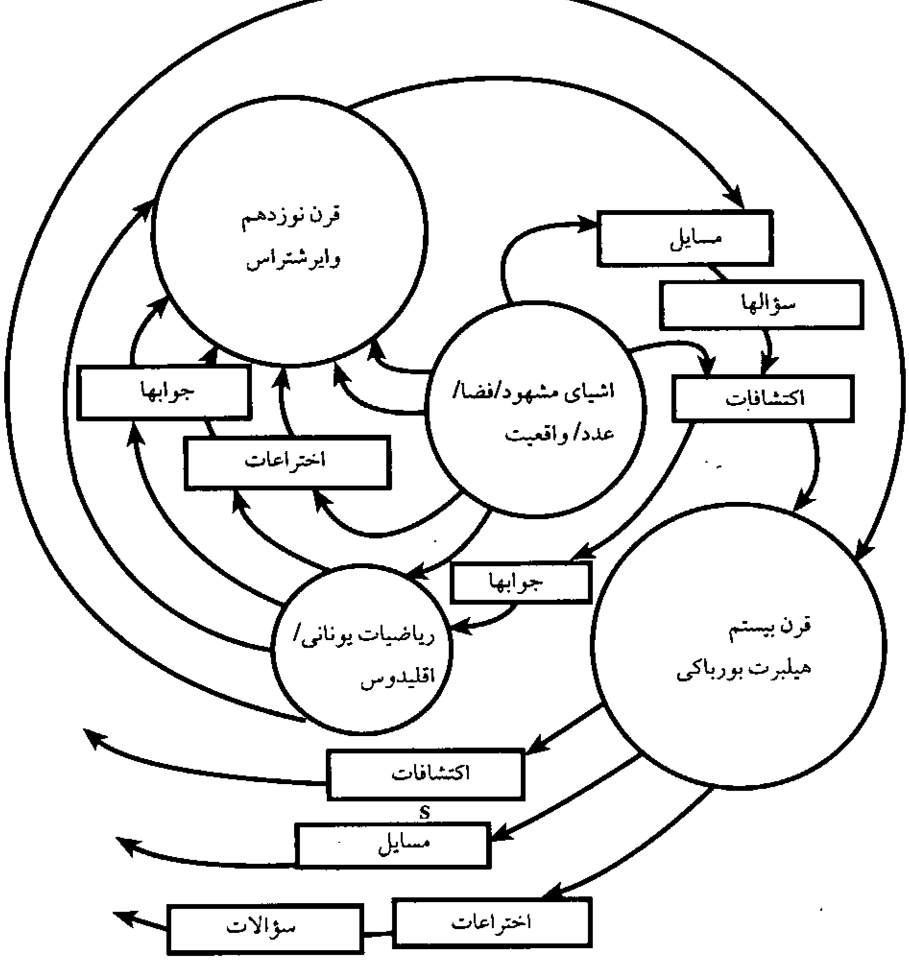
	ریاضیات تحقیقی
معانی و دقت	ریاضیاتی که در دانشگاه تدریس می شود.
	چه ریاضیاتی می تواند در دوره دبیرستان تدریس شود؟
کدام معانی؟ کدام دقت؟	چه ریاضیاتی می تواند در دوره راهنمایی (کالج) تدریس شود؟
	چه ریاضیاتی می تواند در دوره مقدماتی تدریس شود؟

می شود) و یا معانی را (به منظور محاسبات دقیق که لازمه صورتگرایی است) فدا کرد.

۴ ـ یک راه حل بدیل

قبول کنیم که در طول تاریخ تناقض همواره بخشی از توسعه ریاضیات و تدریس آن بوده است.

شخصاً ترجیح می دهم که ریاضیات را در جایگاه تاریخی اش ببینم آنچنان که در یک طرحواره دیگر نشان داده شده است (شکل ۱) طوری که با خشکی کمتر، مطمئناً ناآرامتر، امّا زنده و پویا و در حرکت باشد. در این طرحواره اولاً یک واقعیت خارجی داده شده است که ارائه دهندهٔ اشیایی عینی برای شهود ما هستند. این واقعیت اساساً عبارت است از فضا و عدد. این اشیاء باعث به وجود آمدن مسائل مختلف از جمله مقایسه و اندازه گیری کمیت ها می شوند. این اشیاء همچنین سؤالهایی را مطرح می کنند و بعضی مواقع به کشفیات غیرقابل پیش بینی منجر می شوند (مثلاً، کشف این موضوع که کمیت های گنگ وجود دارد)، این مسائل و این سؤالها در جستجوی پاسخ هایی هستند که در یک زمان مفروض به صورت یک نظریهٔ ریاضی سازمان می یابند. این روش گفت وشنودهای ریاضی را کُدگذاری می کند و مُدلی از دقت، مثلاً مُدل هندسه اقلیدسی را تحمیل می کند. تدریس اغلب نقش مهمی در این سازماندهی دقیق دانش دارد زیرا تدریس نیازمند کانونهای پایدار توجه است. مسلماً چنین نیست که چنین مدلی برای دقت لزوماً پاسخ همه سؤالات را دارا باشد یا بتواند برای هر سؤالی یک پاسخ ارائه دهد. بلکه این مدل توانایی این را دارد که مورد هجوم سؤالهای جدید و مسایل تازه، کشفیات و اختراعات جدید قرار گیرد. این یورش ها ممکن است که در یک زمان خاص موجب بی ثباتی کامل این مدل شود و آفرینش مدل جدیدی را ایجاب کند دو مثال ارائه می دهیم:



مثال اوّل : اختراع حساب بینهایت کوچک ها

اختراع حساب بینهایت کوچکها در قرن هفدهم ایده و روشهای بسیار مؤثری را ارائه داد، امّا آنها ناآشنا و حتی متناقض با هندسه اقلیدسی بودند. این موضوع را می توان در سؤال زیر که در سال ۱۷۸۴ میلادی توسط آکادمی برلین به مسابقه گذاشته شد و جایزه ای برای آن در نظر گرفته شد، به خوبی دید.

«بخش ریاضی مسأله زیر را با جایزه به مسابقه گذاشته است که در سال ۱۷۸۶ میلادی در مورد آن تصمیم گیری خواهد شد.»

استفاده ای که باید از ریاضی انتظار داشت، شهرت و اعتباری که دارد و عنوان افتخارآمیز «علم دقیق» به عالی ترین شکل آن که ریاضی به حق آن را یدک می کشد، همگی مدیون شفافیت اصول، دقت برهانها و دقیق بودن قضایای آن است.

به منظور تضمین ادامهٔ این منافع و برتری های بسیار با ارزش در این بخش عمده از دانش بشری، نیاز به یک نظریه روشن در مورد آنچه که در ریاضیات بینهایت نامیده می شود، وجود دارد. مشهور است که هندسهٔ عالی به طور مداوم از بینهایت بزرگ و بینهایت کوچک استفاده می کند ولی هندسه دانها و حتی آنالیزدانهای باستان با احتیاط از هر چیزی که به بینهایت میل کند پرهیز کرده اند و آنالیزدانهای مُدرن و بزرگ ادّعا می کنند که جملات بینهایت بزرگ به تناقض می انجامند. از این رو، اکادمی در جستجوی توضیحی است که چگونه این همه قضیه های درست، می توانند نتیجه شوند، و همچنین در جستجوی یافتن یک اصل مطمئن، روشن و در یک کلام واقعاً ریاضی برای جایگزینی کلمه بینهایت است، بدون اینکه تحقیق برای این جایگزینی زیاد مشکل و یا زیاد طولانی باشد. این موضوع باید با کلیت تمام و با تمام دقتِ ممکنِ ریاضی، شفافیت و سادگی بیان شود.

تا قرن نوزدهم چنین نظریهٔ روشن و دقیقی در مورد بینهایت به وجود نیامد تا اینکه نظریهٔ روشن و دقیق بینهایت توسط کارهای کوشی، آبل، بولزانو و وایرشتراس با موفقیت بنا شد.

مثال دوم : مدُل وایرشتراس

مُدلی که توسط وایرشتراس پیشنهاد شد از پرداختن به پارادوکسهایی که چند دههٔ بعد توسط نظریهٔ مجموعه های کانتور

کنار گذاشته شد، عاجز بود. تقریباً ۱۵۰ سال بعد از طرح سؤال اکادمی برلین، هیلبرت در سال ۱۹۲۵ همان سؤال را به گونه ای مطرح کرد که باعث شد همهٔ ما به خاطر مشابهت آن با سؤال قبلی شوکه شویم.

«ما باید بپذیریم، شرایطی را که خودمان را در رابطه با پارادوکسها (تناقض ها) می یابیم نباید بیش از این ادامه یابد. آیا باید فکر کنیم که در ریاضیات مُدلی که با آن قطعیت و حقیقت، مفاهیم ساخته شده و مجادله های انجام شده ـ که به وسیله همگان تدریس شده، یاد گرفته شده و به کار برده شده است ـ طوری است که به پوچی منجر شود؟ اگر اندیشه ریاضی در این مورد ناقص باشد در کجا می توانیم قطعیت و واقعیت را پیدا کنیم؟ ولی مسیر کاملاً رضایتبخشی وجود دارد که می توان با پیگری این روش از پارادوکسها اجتناب کرد بدون آنکه به علم (ریاضی) خود خیانت کرده باشیم. وضعیتی که برای پیدا کردن این مسیر و تحقق (اجتناب از پارادوکسها) موضوعها پیشنهاد می کنیم بدین قرارند:

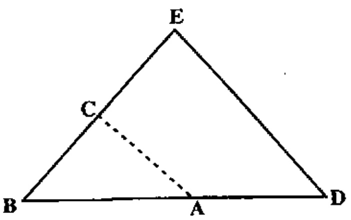
۱) آرزو داریم که چگونگی تشکیل مفاهیم و مجادله های مولّد را به دقت موشکافی کرده و [نتایج] را ترویج دهیم تا تأثیر آن بیشتر شود. حتی اگر این دیدگاه پیشنهادی ضعیف باشد هیچ کس حق ندارد ما را از بهشتی که کانتور برای ما آفریده است بیرون کند.

۲) لازم است که در مجادله های ریاضی همان قطعیتی را (مطمع نظر) قرار دهیم که در نظریه مقدماتی اعداد حکمفرما است که هیچ کس در آن شک ندارد و به خاطر بی توجهی های ما، تناقض ها و پارادوکس ها به وجود نمی آیند. به وضوح، رسیدن به این هدف وقتی امکانپذیر است که بتوانیم با موفقیت کامل مسألهٔ «ماهیت بینهایت» را تبیین کنیم.

۵ـ یک مانع: رابطهٔ بین پیوستگی فضایی و پیوستگی اعداد

ایدهٔ بینهایت همان قدر که در فضا وجود دارد در اعداد هم وجود دارد، ولی یکی از توسعه های بزرگ (اساسی) در تاریخ ریاضی بر اثر ارتباط بین این دو و اینکه با این ارتباط چه می توان کرد، ناشی شده است.

یونانیان با دقت تفاوت بین اعداد و کمیتهای هندسی را حفظ می کردند زیرا برای آنها اعداد و کمیّت های هندسی موجوداتی با ماهیت یکسان نبودند. دکارت با آفرینش هندسهٔ تحلیلی یعنی نمایش فضا به وسیلهٔ محورهای مختصات، پیوستگی فضایی را با پیوستگی اعداد یکسان ساخت. در این یکسان سازی است که یک خط مستقیم با مجموعهٔ نقاطی که در معادلهٔ $y = ax + b$ صدق می کند، نمایش داده می شود و مسلماً این موضوع است که توصیه های برنامه های تدریس مبنی بر توسعه «یک دیدگاه هندسی به مسایل به ویژه در آنالیز» را توجیه می کند. ولی من ابداً مطمئن نیستم که این موضوع به طور مناسبی انجام یافته یا فهمیده شده است. اگر بخواهیم به استناد گفته های دانش آموزان و یا حتی تعبیرات معلمان قضاوت کنیم. برای مثال در درسی [که برای معلمان ارائه می دادم] معلمی از من پرسید «آیا می توان به ازای دو پاره خط BD و BC، پاره خط BE را برابر با حاصلضرب BD.BC ساخت؟

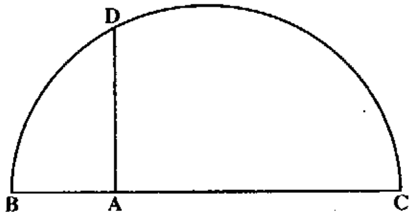


شکل ۱

من راه حل دکارت را از اول کتاب هندسهٔ او نقل کردم که با رابطه $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{BA}$ توجیه می شود به طوری که اگر طول BA برابر واحد درنظر گرفته شود، آنگاه به دست می آید.

$$BE = BD.BC$$

آن معلم از این جواب راضی نشد. او به دنبال راه حلی بود که در آن نیازی به واحد در نظر گرفتن طول یکی از پاره خطها نباشد. همچنان که در ساختن $AD = \sqrt{AB.AC}$ (شکل ۲)



شکل ۲

من به او پاسخ دادم چنین چیزی امکان ندارد: در حالت دوم می خواستیم میانگین هندسی (AD) را طوری بسازیم که در رابطه $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC}$ صدق کند واین کار به هیچ وجه وابسته به انتخاب پاره خطی به طول واحد نیست. امّا در حالت اول، ما مساحت یک مستطیل را حساب می کنیم که کار ضرورتاً به واحد انتخابی برای طول بستگی دارد (به انتخاب یک واحد از طول بستگی دارد). این نوع سؤالات یک شبیه سازی ضعیف از یکسان سازی بین هندسه و اعداد را به وضوح آشکار می سازد. این یکسان سازی با انجام محاسبات صوری با نمادها جایگزین می شود که با از دست دادن معنی همراه است. همیشه شرایط به این صورت نبوده است، و من می خواهم نشان دهم که چگونه کم کم محاسبات عددی ریشهٔ استفاده از هندسه در آنالیز را از جا کنده اند. تا جایی که منشأ هندسی

آن کاملاً فراموش شده است که از آن جمله می توان به مسائلی که با اندازه گیری کمیّتها ارتباط دارد اشاره کرد.

۶ . دقّت به عنوان تصحیح رادیکال وار شهود

در قرون ۱۷ و ۱۸ میلادی آنالیز شامل کمیتهای هندسی از طریق استفاده از جبر بود. تعریف کلمهٔ آنالیز که توسط دیدرو و دالامبر در دایرة المعارف فرانسه (Encyclopedie Méthodique) ارائه شده است به صورت زیر است: «آنالیز به درستی و تماماً روش حل مسایل ریاضی با تبدیل آنها به معادلات است، آنالیز برای حلّ همهٔ مسایل، استفاده از جبر یا محاسبهٔ کمیتها در حالت کلی را به خدمت می گیرد: همچنین دو کلمه آنالیز ـ جبر اغلب به عنوان مترادف در نظر گرفته می شوند».

(این جمله با بیانی که در آغاز این مقاله آمده است سازگاری دارد، تا سال ۱۹۶۱ میلادی آنالیز به عنوان مبحثی از جبر در نظر گرفته می شد).

ولی در حالی که هندسه دانان یونانی کار خود را براساس شهودشان از فضای فیزیکی بنیانگذاری کرده بودند، ریاضیدانان و دانشمندان قرون ۱۷ و ۱۸ میلادی تکیه بر قوانین طبیعت داشتند، قوانینی که قدرت دیدن و یا توصیف آن را داشتند. مثلاً عظمت و شکوه نیوتن در نتایج ریاضی به دست آمده توسط او نبود بلکه در «اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی» او نهفته بود. با وجود اختلاف عمیق بین نیوتن و لایپنیتز، توافق آنها بر این نکته بود که این اختلاف را می توان در مفهوم الهی آفرینش دانست. این آفرینش به وسیلهٔ قوانین یا اصول غیرقابل تغییر که دانشمندان تصمیم به کشف آنها گرفته بودند و در نتیجه این فیزیک (فلسفه طبیعی) بود که مسایلی اساسی برای آنالیز به ویژه رابطهٔ بین نجوم و مکانیک را مطرح می ساخت، و این جهان طبیعی بود که می رفت تا موضوع مطالعه را که برای مدت طولانی پیرامون هندسه متمرکز شده بود به سمت آنالیز بینهایت کوچکها که همان مطالعهٔ توابع است سوق دهد. این کار به سرعت موضوع فعالیت اصلی هندسه دانان برای ایجاد و اتصال بین سه سیمای (جلوهٔ) وابسته به یکدیگر پدیده های فیزیکی شد.

سیمای (منظر) اول

رابطه دو طرفه بین دو متغیر (و یا گروهی از متغیرها) که یک پدیدهٔ طبیعی مثلاً حرکت سیارات را تنظیم کند. تابع **قانون** این حرکت را بیان می کند. این توابع الزاماً پیوسته اند «زیرا طبیعت جهش نمی سازد» (لایپنیتز).

سیمای دوم

ـ که اتصال با هندسه است، و می گوید می توانیم به وسیله یک منحنی قانون را تجسّم کنیم: این قانون است که باعث تولّد منحنی می شود.

سیمای سوم

استفاده از چند جمله ای، احتمالاً بینهایت که به وسیلهٔ آن مقدارهای عددی توابع قابل محاسبه هستند. در واقع، مسأله ای وجود داشت که باید حل می شد. قسمت اعظم قوانین جهان با استفاده از توابعی که جبر از آنها اجتناب می کرد بیان می شد، توابعی مانند توابع مثلثاتی لگاریتمی و نمایی که لایپنیتز آنها را متعالی نامید. چگونه باید مقادیر این توابع را پیدا کرد؟ در حالی که تنها روشهای محاسباتی در دسترس شامل جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و ریشه گرفتن بودند و تنها رویّه هایی بودند که برای آنها الگوریتمهایی موجود بود.

نیوتن این مسأله را در توسعهٔ چیزی که آن را حساب جامع نامید چنین حل کرد. ایدهٔ اصلی آن بود که همانگونه که تمام اعداد گویا و گنگ می توانند به صورت بسط اعشاری منحصر به فرد (متناهی یا نامتناهی) نوشته شوند، به همان ترتیب، تمام توابع نیز می توانند به صورت منحصر به فرد به وسیله چند جمله ایهای تعمیم یافته یعنی به صورت یک سری برحسب توانهای x (x لزوماً مثبت نیست) نوشته شوند.

«همانطورکه کسرهای اعشاری این مزیّت را دارند که به طریقی تمام کسرهای متعارفی و تمام ریشه ها را به اعداد صحیح تبدیل کنند، و هنگامی که این کسرها و اینگونه ریشه ها (جذرها یا اعدادگنگ) به کسرهای اعشاری تبدیل می شوند می توان آنها را به عنوان کل اعداد مورد بررسی قرار داد. در همین روش سریهای نامتناهی دارای این مزیت هستند که همه نوع جملات پیچیده همانند عبارتهای گویا و رادیکالی و چیزهای شبیه آنها را به رده ای از کمیت های ساده تبدیل می کنند». (نیوتن، روش حساب فاصله و سریهای نامتناهی)

مهمترین مثال نوعی فرمول بسط دو جمله ای نیوتن است، درست به این دلیل که پایه اصلی حسابان جدید برای مشخص کردن سریهایی شد که برای محاسبهٔ توابع لازم بود. و لایپنیتز از سری زیر شگفت زده شد:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

که بی نظمی بسط اعشاری π را با ترتیب منظم جملات یک سری جایگزین می کرد، به این طریق یک سری قادر بود حقیقتی را که تصوّر می شد ناچاراً «گنگ» است تبدیل به گویا کند.

مثالی از بسط یک سری را در نظر می گیریم:

بسط اویلر از sinx به عنوان یک سری صحیح
گامهای اصلی به صورت زیر برداشته می شود :

$$\sin(nz)=\frac{(\cos z+\sqrt{-۱}\sin z)^n-(\cos z-\sqrt{-۱}\sin z)^n}{۲\sqrt{-۱}}$$

$$\sin(nz)=\frac{n}{۱}(\cos z)^{n-۱}\sin z-\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times۲\times۳}$$

$$(\cos z)^{n-۳}(\sin z)^۳+\cdots$$

فرض کنید z بینهایت کوچک باشد . آن گاه $\sin z = z$ و $\cos z = ۱$ فرض کنید n به اندازه کافی بزرگ باشد طوری که $nz = V$ متناهی است :

آنگاه $$\sin V = V-\frac{n}{۱}.\frac{n-۱}{۲}.\frac{n-۲}{۳}.\frac{V^۳}{n^۳}+\cdots$$

ولی $\frac{n-۱}{۲n}=\frac{۱}{۲}$, $\frac{n-۲}{۳n}=\frac{۱}{۳}$ زیرا n بینهایت بزرگ است .

از این رو : $$\sin V = V+\frac{V^۳}{۳!}+\frac{V^۵}{۵!}-\cdots$$

محاسباتی از این نوع درصدها صفحه از کارهای اویلر یافت می شود که در آنها هیچ اثری از تردید نمی بینیم و در واقع اینها دقیق هستند پس چرا آنها باعث می شوند در عین آسایش احساس ناراحتی کنیم؟ چرا اکنون فکر می کنیم این کارها **نادقیق** است؟ در یک دید کاملاً واقعی ، این کار به وسیله دو سیمای زیر مشخص می شود :

۱) یک شهود مطمئن و بی تردید در مورد بینهایت
۲) یک باور قوی نسبت به قدرت نمادگرایی .

به نظر می آید که ویژگی اویلر و معاصرین او آن است که بیشتر اوقات ، آنقدر سرگرم توسعهٔ منابع برای این حسابان جدید و افزایش تعداد اختراعات و نتایج خود بودند که خود را درگیر توجیه روشهای خود نمی کردند . بعلاوه اگر آنها می خواستند نتایج خود را از غربال معیارهای دقیق بگذرانند ، بعید بود که به این نتایج عظیم برسند . از سوی دیگر ، این محاسبات نمایانگر اعتقاد فوق العاده به قدرت نمادگرایی و ویژگی تردید ناپذیر آن است و نتایج متعددی که تولید می کند تقویت کننده این اعتقاد است . اما به هر حال در این جا است که اولین مسایل جدی بی مقدمه وارد شدند ، مثلاً ، برای اویلر رابطهٔ

$$\frac{۱}{۱+x}=۱-x+x^۲-x^۳+x^۴-\cdots$$

به ازای هر مقدار مفروض x دارای معنی بود زیرا از نظر او عبارت $۱-x+x^۲-x^۳+x^۴-\cdots$ صرفاً روش دیگری برای نوشتن تابع $\frac{۱}{۱+x}$ بود و

«مقدار بالا را می توان در عملیات ریاضی به عنوان معادل عبارت فوق حتی برای مقادیری از متغیر که به ازای آنها این سری واگراست ، به کار برد .»

[Euler ، Opera Omnia:De Seriebus Divergentibus]

نیکولاس برنولی این ایراد را وارد کرد که همین سری ممکن است از بسط دو تابع کاملاً متفاوت نتیجه شود . اویلر به این نظر برنولی اعتقاد نداشت :

«برنولی مثالی ارائه نمی دهد و من معتقد نیستم که این امکان وجود دارد که یک سری از دو عبارت جبری کاملاً متفاوت به دست آید .»

و امّا کوشی توانست مثالی ارائه دهد و آن وقتی بود که متوجه شد که توابع $e^{\frac{-۱}{x^۲}}$ و $e^{\frac{-۱}{\sin^۲ x}}$ در صفر دارای بسط مکلورن هستند ، و بنابراین برای مثال ، $e^{-x^۲}$ و $e^{-x^۲}+e^{\frac{-۱}{x^۲}}$ دارای بسط یکسان و یک همگرایی (سریها) هستند . ولی دلایل دیگری موجب گردید که ریاضیدانها در مورد گذاشتن معیارهای جدید برای دقت بیشتر دغدغه داشته باشند .

وقتی که شهود قادر شد ابزار محاسبات را به طریقی که به اندازه کافی مطمئن باشد درک کند همانطورکه مورد اویلر مثال واضح آن بود ، احتمال سقوط در ورطه اشتباه حداقل بود و در واقع شگفت آور است که چگونه فقط تعداد اندکی اشتباه به وسیلهٔ ریاضیدانان قرن هجدهم انجام شد . امّا گسترش آنالیز ، ریاضیدانها را به سویی رهنمون ساخت که موجودات ریاضی طوری ساخته شدند که رفته رفته و کمتر و کمتر در دسترس شهود بودند که از جمله می توان به توابع متغیرهای مختلط و توابع چند متغیره اشاره کرد . تحقیقات جدید در فیزیک به معادلات ارتعاش فنر و نظریه حرارت منجر شد . همچنین پویایی درونی خود ریاضی نیز دچار تحول و توسعه شد ، و همه اینها سبب تغییر نگرش ریاضیدانها گردید . به جای آنکه یک سری از یک تابع نتیجه شود ، بیشتر و بیشتر می یابیم که از یک سری برای تعریف یک تابع استفاده می شود . مثلاً در طی قرن هجدهم ، با دهها برهان مواجه می شویم که برای اثبات دو جمله ای معرفی شده اند ولی هیچ یک متقاعدکننده نبودند . برای پایان دادن به این بحث ها ، باید مسأله وارونه می شد به این ترتیب که تابع φ تعریف شده به وسیلهٔ سری زیر را در نظر می گیریم .

$$\varphi(m)=۱+\frac{m}{۱!}x+\frac{m(m-۱)}{۲!}x^۲+\cdots$$

برای نشان دادن این که φ در رابطه $\varphi(m+m')=\varphi(m)\varphi(m')$ صدق می کند . کوشی تلاش کرد تا اهمیت مفهوم تابع پیوسته را نشان دهد . کوشی ، آبل و بسیاری دیگر بر این موضوع تأکید کردند

که تنها قبول درستی یک گزاره موقعی است که تساوی عددی صریح وجود داشته باشد، و همچنین اجتناب از نتایجی (مشتقاتی) که ممکن است به کار برد بی ملاحظهٔ نمادگرایی بیانجامد.

«از نظر روش، من در تلاش هستم تا فقط به اندازه ای به آنها دقت بدهم که در هندسه مورد نیاز است آن هم به گونه ای که هرگز نیازی نباشد که به طور کلی از استدلالهای (روشهای) جبری استفاده شود. روشهایی از این نوع اگر چه به طور معمول پذیرفته شده اند، امّا فقط موقعی که حرکت از سریهای همگرا به سوی سریهای واگر و از کمیتهای حقیقی به طرف عبارات موهومی است در نظر گرفته شوند. به نظر من، گاهی اوقات می توان آنها را نشانهٔ شایسته ای از حقیقت در نظر گرفت، امّا آنها توافق اندکی با دقت خود ستایانهٔ ریاضی دارند».

[Cauchy . Analyse algebrique - Introduction]

از این رو کوشی اکیداً به تساویهایی که بین کمیت های حقیقی قرار می گرفتند، محدود ساخت. اما به کار بردن نامساویها انجام شدنی بود. در آنالیز، تساوی دو عدد غیرقابل دسترس را می توان با نامساوی زیر جایگزین کرد.

$x = y$ اگر و تنها اگر $|x - y| < \varepsilon \,,\ \forall \varepsilon > 0$

وایرشتراس برای صورت بندی مجدد همهٔ تعاریف آنالیز از طریق به کار بردن عباراتی مانند $\forall\varepsilon > 0$ ، $\exists\alpha$ ، $\exists\varepsilon$ ، تلاش کرد. با انجام این کار او در دنیای هیولای ریاضی را گشود. دنیایی که کاملاً با درک شهودی بیگانه بود، مانند توابعی پیوسته بر یک بازه ولی مشتق ناپذیر در آن بازه و یا توابع پیوسته ای که بر هیچ بازه ای پیوستهٔ یکنواخت نیستند. این اشیاء آنچنان ما را شگفت زده می کنند که به نظر متناقض (پارادوکس) می آیند. امّا چرا؟ زیرا آنها کاملاً عاری از شهود هندسی هستند. آنها صرفاً دارای معانی عددی صوری هستند، عاری از هر نمایشی که به طور شهودی قابل درک باشد. آنچه هیلبرت از این مطلب نتیجه گرفت آن بود که اگر چه وایرشتراس پایهٔ دقیق قابل توجهی را برای حساب بینهایت کوچکها بنیان گذاشت ولی بحث در پایه گذاری بیان آنالیز به هیچ وجه خاتمه نیافته بود.

«دلیل این امر آن است که معنی بینهایت هنوز برای ریاضیدانها کاملاً روشن نیست. مسلماً بینهایت کوچکها و بینهایت بزرگها از آنالیز وایرشتراس حذف شده اند تا جایی که این عبارات به رابطهٔ بین اندازه (حد) عددی بینهایت تعریف شده به وسیله اعداد حقیقی تقلیل پیدا کرده اند. و حتی بیش از این، در مورد مفهوم خود اعداد حقیقی به عنوان مجموعه ای که کامل شده و تمام است. صورتبندی برهان منطقی که به وسیله آن این مفهوم بیان می شود ـ مخصوصاً زمانی که ما با همهٔ اعداد حقیقی با خاصیت مشخصی مواجه می شویم و یا یک عدد حقیقی با خاصیت مشخص وجود دارد ـ این صورتبندی ها بدون هیچ محدودیتی و به طور دایم به کار می رود.»

اگرچه ممکن است صورت گرایی شهود را از پشتوانه هندسی اش محروم کند، اما هنوز ممکن است محرکی برای تقویت شهود در سطح دیگری باشد و حتی باعث درک عمیق تر و غنی تری برای معانی شود. ما می توانیم برغنای ایدهٔ پیوستگی اعداد حقیقی آن گونه که امروز آن را درک می کنیم بازتابی داشته باشیم و آن را با نوع درک عمیق از این ایده در قرن هجدهم مقایسه کنیم آنگاه درمی یابیم که مسأله محکوم کردن صورت گرایی به آن گونه که گفته شد مطرح نیست بلکه منظور مشخص کردن مکان و ارزش آن در یک قالب آموزشی داده شده است.

۷. نتیجه گیری

هستهٔ اصلی مشکلات اصلی تدریس آنالیز در یک تناقض نهفته است: آنالیزی که صرفاً با پیوستگی عددی در ارتباط است، در حالی که شهود دانش آموز ـ دانشجو از ابتدا و برای مدت طولانی بر پیوستگی هندسی استوار است. به نظر من در برنامه های آموزشی، یک اشتباه آموزشی (پداگوژیک) وجود دارد. اگر هیچ مفهومی را به غیر از پیوستگی عدد نفهمیم و جستجو نکنیم. برای انجام این امر، ما مرور کوتاهی بر ایده پیوستگی هندسی و فضایی که در اینجا موجودند، مانند فرمولهای سطح و حجم و قضیه تالس داریم.

اگر واقعاً طالب ارایه محتوای شهودی برای اشیای عینی ریاضی هستیم، اگر بخواهیم نگرشی هندسی برای مسایل بویژه در آنالیز ایجاد کنیم، آیا عاقلانه است که جستجوی پیوستگی فضایی را فراموش کنیم؟ آیا پیوستگی فضایی نیست که به اعداد گنگ حقیقت و معنا می دهد؟ آیا مسأله چگونگی اندازه گیری کمیتها نبود که بتدریج به ساختاری رهنمون شد که آن را اعداد حقیقی می نامیم؟ این پیمایش سریع از چند واقعه در تاریخ آنالیز از قرن هفدهم تا اوایل قرن بیستم میلادی به خوبی نشان می دهد که پاسخگویی به جرّو بحث های درونی ریاضی که در آنها برای نقش دقت در آنالیز وقار خاصی قایل شده اند مستلزم آن است که آنالیز بسیار فراتر از نوع سؤالهایی برود که بتوان در مقابل دانش آموزان دبیرستانی قرار داد. از این رو مسأله این نیست که آموزش تاریخ آنالیز را در کلاسهای درسی خود معرفی کنیم، بلکه مسأله این است که معلمان خود را نسبت به نیاز به بازتاب بر مسیر تاریخی و معرفت شناختی موضوع حساس کنیم تا تدریس آگاهانه تری داشته باشند. کتاب مقدمات ریاضی بورباکی «Elements de Mathématiques» با جملات زیر شروع می شود.

«از زمان یونانیان هر کس که ریاضیات را مطرح می کند، برهان را هم مطرح می کند. حتی بعضی ها شک دارند باور کنند که ممکن است بتوان برهان را در خارج از ریاضی و به همان معنی دقیقِ مورد قبول یونانیان و به همان معنی که ما امروز به آن منتسب می کنیم، اِقامه کرد. اگر بگوییم که این مفهوم هنوز عوض نشده است اشتباه نکرده ایم، زیرا آنچه که به عنوان برهان برای اقلیدس مطرح بوده هنوز برای ما نیز برهان است».

واضح است که رویکردی به ریاضی وجود دارد که به طور مشخص علمی است و بر برهان دقیق استوار است. ولی همچنان که این دقت در تاریخ ها و فرهنگ های مختلف نسبی است به سطح مطالعه نیز بستگی دارد.

اگر تحصیلات دانشگاهی معلم مجرّد و صوری باشد، این معلم ریاضی آینده خواه ناخواه دارای گونه ای از تفکّر ریاضی خواهد بود که باعث ایجاد فاصله بین او و دانش آموزانش می شود. اگر این معلم بخواهد که خود را به سطح دانش آموز برساند، «او باید محتوی هر مفهومی و هر مسأله ای را دوباره کشف کند که به گونه ای مقدماتی باشند مانند کسی که هنوز دید نظری پیدا نکرده است»[4] نگاهی دوباره به تاریخ به او اجازه می دهد تا مسایل اصیل و نو را بیابد و آنگاه می تواند تلاش ریاضیدانها برای پالایش واژه ها و مفاهیم ریاضی که به شدّت عینی و شهودی اند و به همین دلیل مبهم می باشند، بهتر بفهمد و به دانش آموزان عرضه کند. از این رو او می تواند مراحل ساخته شدن مفاهیم و ابزار اساسی آنالیز را نشان دهد و به دانش آموزان خود کمک کند تا احساس نقادی و نیاز به دقت را با نشان دادن این که چگونه بعضی از راه حلها رضایت بخش نیستند، در آنها بوجود آورند. بدین گونه، دانش آموزان او می توانند به مسیری رهنمون شوند که نیاز به این تعریف و یا آن قضیه را درک کنند. این همان موضوعی است که اریت طی نامه ای به دوست خود میتاگ لفلر نوشت:

«من معتقدم که [...] آشنا کردن مبتدیان با همهٔ این ریاضیات جدید که مسلماً بهتر و بسیار دقیق تر از ریاضیات باستان است، خالی از خطر نخواهد بود. احساس من این است که مبتدیان اوّل باید برای فهمیدن این نظریه های جدید آماده شوند و مسیر کهن را تعقیب کنند و به آنها اشتباهها و برهانهای نامناسب را که مدت های طولانی دیده نشده بودند، نشان داده شوند و مشخص شود که چه روشهای دیگری سبب رفع آنها شد. دلیل این موضوع آن است که در آموزش مسیر توسعه و تحول علوم باید در نظر گرفته شود. اجازه دهید که توضیح دهم یک واقعیت مطمئن تجربی نشان می دهد که وجود اشتباهات مفیدتر از حقایق تام برای گسترش تفکر و پیشرفت علوم بوده اند. آیا نباید خوشحال باشیم. حالا باور داریم که هر تابع پیوسته مشتق‌پذیر است، هر معادله دیفرانسیل جواب دارد و هر تابع دارای بسط مکلورن است؟ فکر نمی کنم اشتباه کنم که به این نتیجه رسیده ام که ارائه بسیار پیچیدهٔ دقت مدرن و ویژگی مجرد آن شاید اصلاً برای ریاضیدانان مبتدی مفید نباشد و یا حداقل می توانیم آن را به تعویق بیاندازیم و این دقت که همیشه به اندازهٔ کافی سازنده نیست را به عنوان جلای این عمارت ریاضی نگه داریم.

پاورقی ها و تذکرات

۱. قضیه ای که در اصول اقلیدس ۲.۶ ارائه شده است چنین است: خطی که به موازات یک ضلع مثلث رسم شود دو ضلع دیگر را به یک نسبت قطع می کند، این قضیه در فرانسه به قضیه تالس معروف است.

۲. یا اشیای فضایی: شیئی «فضا» یک مفهوم قدیمی است (از تجسم مکانیک در قرن هفدهم) و آنچه که «فضای اقلیدسی» نامیده می شود نیز از ابداعات قرن هفدهم است.

3. Bourbaki,théorie des ensembles, Introduction,1970

4. Hauchard, C., 'sur L' appropriation des concepts de suite et de Limite', Doctoral thesis, Louvain.

منابع

Bkouche, Charlot & Rouche, *Faire des mathematiques: le plaisir du sens*, Armand Colin, 1991.

Grabiner, J., 'Is mathematical truth time - dependent?' *American Mathematical Monthly*, **81**, 1974.

Harthong, J. & Reeb, G., 'Intuitionnisme 84' in *La mathématique non standard*, Éditions du CNRS, 1989.

Hilbert, D., 'Über das Unendliche', *Mathematische Annalen* **95**, 1926.

Lakatos, I., *Proofs and Refutations: The logic of Mathematical Discovery*, Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

Salanskis, J.M., 'L'analyse non standard et la tradition de l'infini', *Revue d' Histoire des Sciences*, **XLI**, 2, 1988.

منحنی لورنز و ضریب جینی

بحثی از اقتصاد سنجی

دکتر عین الله پاشا ـ دانشگاه تربیت معلم

چکیده

در مباحث مختلف علوم، معرفی شاخصهایی که بتواند ویژگی خاصی را اندازه گیری کند و به علاوه در شرایط مطلوبی صدق کند، از اهمیت زیادی برخوردار است. در اقتصاد اندازه گیری نابرابری توزیع ثروت در جامعه به وسیله منحنی لورنز و ضریب جینی انجام می شود. در این مقاله منحنی لورنز و ضریب جینی معرفی می شوند.

فرض کنیم X ثروت فردی از افراد جامعه باشد. X یک متغیر تصادفی است، زیرا مقدار آن از فردی به فرد دیگر تغییر می کند و این تغییر به عوامل تصادفی بستگی دارد. X می تواند تمام مقادیر نامنفی را اختیار کند. تابع توزیع X به صورت زیر تعریف می شود:

$$F(t) = P(X \leq t)$$

چون مقادیر تابع F احتمال پیشامدها هستند پس، بین ۰ و ۱ قرار دارند و چون با افزایش t احتمال پیشامد $X \leq t$ و در نتیجه مقدار تابع F افزایش می یابد، F تابعی صعودی است. چون ثروت افراد نامنفی است، به ازای هر $t \leq ۰$ و به ویژه به ازای $t = ۰$ مقدار F برابر ۰ است:

$$F(t) = ۰ \ , \quad t \leq ۰$$

اگر تابع F نسبت به t دارای مشتق $\frac{dF(t)}{dt} = f(t)$ باشد، f را چگالی x می نامیم و با توجه به قضایای اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

$$F(t) = \int_۰^t f(r)dr$$

چون f مشتق یک تابع صعودی است، به ازای هر x داریم $f(x) \geq ۰$.

تعبیر F(t). در مقدمهٔ بالا تابع F(t) تعریف و ویژگیهای ریاضی آن معرفی شد. اینک می خواهیم بدانیم F(t) بیان کنندهٔ چه مفهومی است؟ با توجه به تعریف F، F(t) برابر احتمال آن است که فردی از جامعه ثروتی کمتر از t داشته باشد. بنابراین F(t) نسبتی از افراد جامعه است که ثروت آنها از t کمتر است. اگر تابع F را در ۱۰۰ ضرب کنیم، ۱۰۰F(t)، درصد افرادی از جامعه است که ثروت آنها از t کمتر است.

امید ریاضی: اگر متغیر تصادفی X مقادیر $a_۱$، $a_۲$، ... را به ترتیب با احتمالهای $p_۱$، $p_۲$، ... اختیار کند، آن گاه امید ریاضی یا میانگین X که با نماد m نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$$m = \sum_i a_i \, p_i \, .$$

اگر X دارای چگالی f باشد، میانگین به صورت زیر محاسبه می شود:

$$m = \int_۰^\infty xf(x)dx \, .$$

چون بحث ما دربارهٔ ثروت افراد است، کماکان فرض می کنیم x ثروت فردی از افراد جامعه باشد، در این صورت m ثروت متوسط جامعه است. یعنی اگر تمام ثروتها را روی هم بریزیم و بین افراد به طور مساوی تقسیم کنیم به هر نفر مبلغی معادل m می رسد.

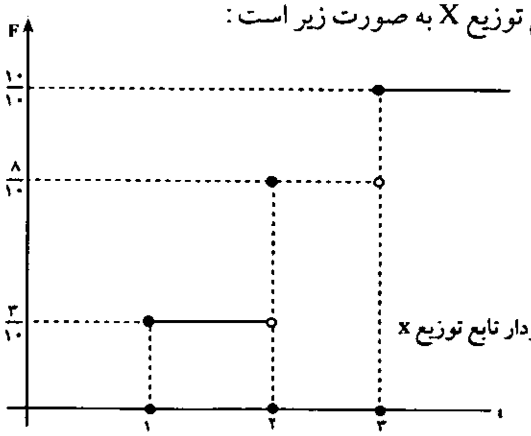
مثال ۱. فرض کنید جامعه متشکل از ۱۰ نفر باشد که ثروت ۳ نفر از آنها ۱ و ثروت ۵ نفر از آنها ۲ و ثروت ۲ نفر از آنها ۳ ریال باشد، در این صورت اگر X ثروت فردی از افراد این جامعه باشد، توزیع آن به شرح زیر است:

x	۱	۲	۳
	$\frac{۳}{۱۰}$	$\frac{۵}{۱۰}$	$\frac{۲}{۱۰}$

میانگین این توزیع عبارت است از

$$m = \frac{۳}{۱۰} + \frac{۱۰}{۱۰} + \frac{۶}{۱۰} = ۱/۹ \, .$$

نمودار تابع توزیع X به صورت زیر است:



شکل ۱ : نمودار تابع توزیع x

به کمک تابع توزیع و m ، تابع جدیدی به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$G(t)=\frac{1}{m}\int_0^t xf(x)dx \quad \text{(اگر X چگالی داشته باشد)}$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{x\le t} xp(X=x) \quad \text{(اگر X چگالی نداشته باشد)}$$

تابع G دارای ویژگیهای زیر است :

الف . G تابعی است نامنفی و صعودی . نامنفی بودن آن واضح است، برای صعودی بودن G توجه می‌کنیم که

$$\frac{dG(t)}{dt}=\frac{1}{m}t\,f(t)>0$$

ب . $G(0)=0$ و $G(\infty)=1$. این دو ویژگی نیز بنا بر تعریف G و m به سادگی ثابت می‌شوند.

با توجه به ویژگیهای الف و ب، ملاحظه می‌شود که G نیز یک تابع توزیع است. بنابراین G(t) نسبتی از افرادی را که دارای خاصیت معینی در جامعه‌ای هستند اندازه گیری می‌کند. حال ببینیم این خاصیت معین و جامعهٔ مربوطه کدام است؟

برای روشن شدن موضوع به محاسبهٔ G در مثال ۱ می‌پردازیم. با توجه به شکل ۱ مقادیر زیر برای G محاسبه می‌شود :

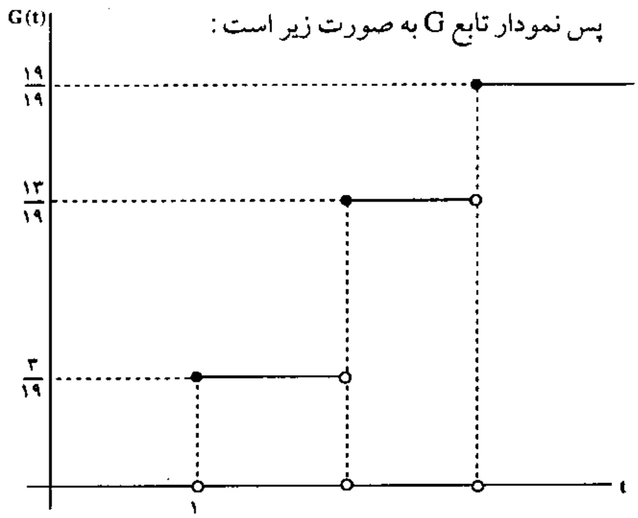
اگر $G(t)=0\ ,\ t<1$

اگر $=\dfrac{1\times\frac{3}{10}}{1.9}=\dfrac{3}{19}\ ,\ 1\le t<2$

اگر $=\dfrac{1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{5}{10}}{1.9}=\dfrac{13}{19}\ ,\ 2\le t<3$

اگر $=\dfrac{1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{5}{10}+3\times\frac{2}{10}}{1.9}=\dfrac{19}{19}\ ,\ 3\le t$

پس نمودار تابع G به صورت زیر است :



شکل ۲ : نمودار G(t)

ملاحظه می‌شود که ثروت این ۱۰ نفر روی هم ۱۹ ریال است. و تمام مقادیر G به صورت کسرهایی با مخرج ۱۹ هستند. اگر به مقدار $\frac{3}{19}$ توجه کنیم، ملاحظه می‌کنیم که عدد ۳ مجموعه ثروت کسانی است که هر کدام یک ریال (و یا کمتر) ثروت دارند. به همین ترتیب ۱۳ در صورت کسر $\frac{13}{19}$ مجموع ثروت کسانی است که هر کدام ۲ ریال و یا کمتر از آن ثروت دارند. در واقع $\frac{13}{19}$ نسبتی از کل ثروت است که در مجموع در اختیار کسانی است که هر کدام از آنها ثروتی کمتر یا مساوی ۲ ریال دارند. اختلاف بین $\frac{3}{19}$ و $\frac{13}{19}$ ، یعنی $\frac{10}{19}$ نسبتی از کل ثروت است که در اختیار افرادی با ثروت ۲ ریال است.

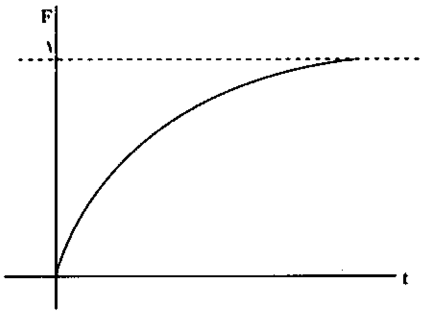
مثال ۲ . اگر $f(x)=e^{-x}\ ,\ x\ge 0$ ، چگالی x باشد، تابعهای F و G را حساب کنید :

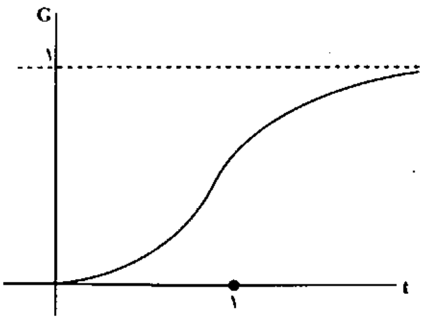
$$f(t)=\int_0^t e^{-x}dx=1-e^{-t}$$

$$m=\int_0^\infty xe^{-x}dx=1 \quad \text{(انتگرال گیری جزء به جزء)}$$

$$G(t)=\int_0^t xe^{-x}dx=1-te^{-t}-e^{-t}$$

نمودار این دو تابع به صورت زیر است :





چون برای tهای نزدیک ۰، G(t) مقادیر بسیار کوچک اختیار می‌کند، نسبت کسانی که ثروت کم دارند خیلی کم است. این نسبت برای مقادیر بیش از میانگین ($m=1$) به سرعت افزایش می‌یابد.

منحنی لورنز . تا به حال برای ثروت، دو تابع F و G را معرفی کردیم که هر یک از آنها تابعی از t هستند. منحنی لورنز از حذف t

بین دو تابع اخیر به دست می‌آید. در واقع منحنی لورنز نمایش تابعی است که G را برحسب F بیان می‌کند.

مثال ۳. در مثال ۲ دیدیم که

$$F(t)=1-e^{-t}\ , \quad G(t)=1-te^{-t}-e^{-t}$$

پس $e^{-t}=1-F$ و از این جا $-t=\ln(1-F)$ و در نتیجه

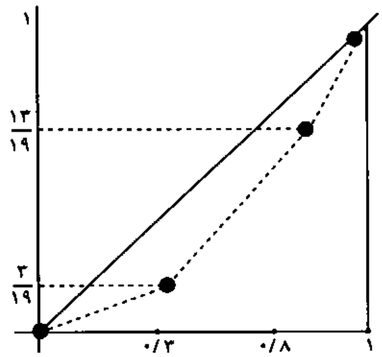
$$G=(\ln(1-F))(1-F)+F$$
$$=F+\ln(1-F)^{1-F}.$$

همانطور که در این مثال دیده می‌شود و غالباً هم چنین است دستور تابع لورنز پیچیده و شاید دستیابی به آن غیرممکن باشد. از این رو با استفاده از روش نقطه‌یابی برخی نقاط مهم تابع لورنـز را یافته و منحنی آن را رسم می‌کنند.

منحنی لورنز مربوط به مثـال ۱ را می‌توان از طریق نقطه‌یابـی رسم کرد. در واقع F مقادیر $\frac{۳}{۱۰}$ و $\frac{۸}{۱۰}$ و $\frac{۱۰}{۱۰}$ را اختیار می‌کند که به ترتیب این مقادیر متناظر با مقادیر $t=1, t=2, t=3$ است. برای این مقادیر از t، مقادیر G را می‌توان با توجه به شکـل ۲ به دست آورد که عبارت است از $\frac{۳}{۱۹}$ ، $\frac{۱۳}{۱۹}$ و ۱. پس تابعی که رابطهٔ بین F و G را بیان می‌کند به شکل زیر است.

F	۰	$\frac{۳}{۱۰}$	$\frac{۸}{۱۰}$	۱
G	۰	$\frac{۳}{۱۹}$	$\frac{۱۳}{۱۹}$	۱

نمودار این تابع مطابق شکل ۳ است.



شکل ۳: منحنی لورنز مثال ۱

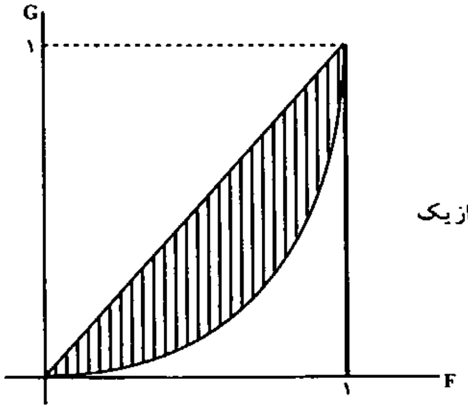
از لحاظ نظری می‌توان ثابت کرد که منـحـنـی لـورنـز دارای ویژگیهای زیر است:

الف. این منحنی از نقطه‌های (۰,۰) و (۱,۱) می‌گذرد.

ب. منحنی لورنز محدب است.

یک نمودار نوعی از منحنی لورنز در شکل ۴ رسم شده است.

همانطور که قبلاً اشاره شد منحنی لورنز برقرار کنندهٔ رابطه‌ای بین F و G است. با توجه به تغییرهای F و G، منحنی لورنز بیان می‌کند



شکل ۴: نموداری از یک منحنی لورنز

که اگر $100F$ درصد افراد جامعه (که ثروت آنها از میزان معینـی کمتر است) $100G$ درصد کل ثروت را در اختیار داشته باشنـد، آن گاه نقطهٔ (F,G) روی منحنی لورنز واقع است.

اگر ثروت به تساوی بین افراد توزیع شده باشد نقطـهٔ (F,G) روی نیمساز ربع اول قرار خواهد گرفت امّا چون در اکثر مواقع عدهٔ زیادی از افراد جامعه ثروت کمی دارند خواهیم داشت $G \le F$.

هر چقدر G از F کوچکتر باشد، اختلاف در توزیع ثروت بیشتر است. از این رو اختلاف منحنی لورنز با نیمساز ربع اول به عنوان معیاری برای اندازه‌گیری عدم توزیع عادلانهٔ ثروت به کار می‌رود.

ضریب جینی. یکی از معیارهایی که به عنـوان عـدم تـوزیـع عادلانهٔ ثروت به کار می‌رود ضریب جینی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha = \text{ضریب جینی} = \frac{\text{مساحت سطح هاشوردار}}{\text{مساحت مثلث}}$$
$$= ۲\ (\text{مساحت سطح هاشوردار})$$

(شکل ۳)

α بین ۰ و ۱ قرار دارد. مقدار $\alpha=0$ بیان می‌کند که ثروت در جامعه به طور مساوی توزیع شده است. هـر چـقـدر α به یک نزدیکتر می‌شود. توزیع ثروت از حالت توزیع عـادلانـه دورتـر می‌شود. مقدار $\alpha=1$ بیان می‌کند که تمام ثروت در اختیار عدهٔ معدودی قرار دارد.

منبع

۱ـ ابوالفتحی، ابوالفضل؛ درآمدی بر شناخت شاخصهای نابرابری درآمد و فقر، مرکز آمار ایران ۱۳۷۱.

آموزش ریاضی و علوم
در دنیا

چه می‌توانیم یاد بگیریم؟

ترجمهٔ زهرا گویا
دانشگاه شهید بهشتی

یکی از انتشارات مرکز آموزش علوم، ریاضیات و مهندسی وابسته به شورای ملّی تحقیق

مردم اغلب به نتایج مطالعات بین المللی نگاه می کنند تا ردیف کشور خود را در رده بندی ها پیدا کنند. امّا دانستن این که مثلاً ۹ ساله های یک کشور در مقایسه با کشوری دیگر رتبهٔ بالاتری در علوم به دست آورده‌اند به تنهایی اطلاعات بسیار کمی در این مورد که چه چیزهایی باعث آن موفقیت شده است به ما می دهد. چرا دانش آموزان یک کشور موفقیتشان بیشتر از دانش آموزان کشورهای دیگر است؟ چه چیزی این تفاوت در موفقیت تحصیلی دانش آموزان در سطح بین المللی را توضیح می دهد؟

مطالعهٔ بی نظیر ریاضی و علوم در بیش از ۴۰ کشور دنیا که اخیراً به پایان رسید، اطلاعاتی را جمع آوری کرد که می تواند به طرح و بررسی سؤالهایی از این قبیل کمک کند. نتایج به دست آمده از سومین مطالعهٔ بین المللی ریاضیات و علوم (TIMSS) به ترتیب از پاییز ۱۹۹۶ اعلام می شود و تا بهار ۱۹۹۸ میلادی ادامه خواهد داشت. این بروشور به طور اجمالی، به شرح آنچه که از یک چنین مطالعهٔ بین المللی می توان یاد گرفت می پردازد، و این که چگونه این مطالعه انجام شد و ایالات متحده و سایر کشورها چه چیزهایی می توانند از این مطالعه به دست آورند؟ این بروشور، شامل جدول زمانبندی انتشار داده های TIMSS و راهنمایی دربارهٔ کسانی است که می توان برای اطلاعات بیشتر به آنها مراجعه کرد.

TIMSS چیست و از آن چه می توانیم یاد بگیریم؟

بسیاری از آمریکایی ها وقتی به قسمتهایی از TIMSS که شامل داده های مربوط به موفقیت تحصیلی دانش آموزان است نگاه می کنند، این سؤالها را مطرح می کنند:

آیا موفقیت دانش آموزان ایالات متّحده از سایر رقیبان خود بالاتر خواهد بود؟ آیا نسبت به آنچه که در مطالعهٔ بین المللی قبلی بودیم عملکرد بهتری خواهیم داشت؟ با این حال، این داده ها به تنهایی نمی توانند به ما کمک کنند تا بفهمیم که چه قسمتهایی را خوب انجام داده ایم یا چگونه می توانیم وضعیّت خود را بهبود بخشیم. برای فهم بیشتر، علاوه بر این داده ها، به اطلاعات اضافه تری دربارهٔ این که در اینجا و کشورهای دیگر چه چیزهایی تدریس می شوند و چگونگی آن

تدریسها نیازمندیم. TIMSS با نشان دادن این که معلمها در مدرسه ها، منطقه ها و کشورهای مختلف چه می کنند، فرصت شروع را به ما می دهد. با داده های TIMSS در مورد این که دانش آموزان در کشورهای مختلف چه یاد می گیرند و معلمها چه درس می دهند و چگونه درس می دهند، پژوهشگران می توانند سؤالهایی را دربارهٔ این که چه چیزهایی باعث تفاوت در یادگیری ریاضی و علوم دانش آموزان در کشورهای مختلف شده است مطرح کرده و برای آنها پاسخهایی بیابند.

TIMSS جامع ترین مطالعه بین المللی در مورد برنامهٔ درسی، تدریس و یادگیری ریاضی و علوم است که تا به حال انجام شده است. این مطالعه بین سالهای ۱۹۹۱ تا ۱۹۹۵ اجرا شد و بیش از ۵۰۰ , ۰۰۰ دانش آموز در سنین ۹، ۱۳ و ۱۸ در بیش از ۴۰ کشور مورد ارزیابی قرار گرفتند. برای مطالعهٔ بیشتر در مورد برنامه های درسی، بیش از ۱۶۰۰ چارچوب برنامهٔ درسی و کتاب درسی تجزیه و تحلیل شدند. از معلمها دربارهٔ آن که چه تدریس می کنند، چگونه تدریس می کنند و چرا آنها را آنگونه تدریس می کنند سؤال شد. در سه کشور، کلاسهای درس، ضبط دیداری (ویدئوئی) شدند و مطالعات موردی قالبهای آموزشی انجام گرفت. TIMSS **پروژهٔ اتحادیهٔ بین المللی برای ارزیابی موفقیت تحصیلی**[1] است و به وسیلهٔ **بنیاد ملی علوم**[2]، **مرکز ملی برای آمارهای آموزشی**[3] و دولت کانادا حمایت مالی شده است.

در مجموع، برخلاف مطالعات انجام شدهٔ قبلی از این نوع، TIMSS توضیحاتی با جزئیات لازم دربارهٔ برنامهٔ درسی در نظر گرفته شده[4] (قصد شده) برای ریاضی و علوم آنچنان که در اسناد حاوی هدفهای برنامهٔ درسی و کتابهای درسی دیده می‌شود و آنچه که واقعاً در کلاسهای درس تدریس می شود به ما می دهد. این مطالعه همچنین گزارشی در مورد رویکردهای تدریس ارائه می کند. تمام این اطلاعات دربارهٔ فرصتهای یادگیری دانش آموزان که از TIMSS به دست آمده است، قالبی برای ارائهٔ داده های TIMSS دربارهٔ موفقیّت تحصیلی دانش آموزان ارائه می دهد. وقتی که گروهی از دانش آموزان رتبه‌های بالایی در یک زمینهٔ خاص به دست می‌آورند، ما قادر خواهیم بود که به بررسی عواملی (فاکتورهایی) که در چنین موفقیّتی سهیم بوده اند بپردازیم.

با داده های TIMSS دربارهٔ این که دانش آموزان در کشورهای مختلف چه چیزهایی یاد می گیرند؛ این که در آن کشورها چه چیزهایی تدریس می شود و چگونه تدریس می شوند، پژوهشگران قادر خواهند بود سؤالهایی را دربارهٔ این که چه عواملی باعث آن تفاوتها در یادگیری ریاضی و علوم دانش آوزان در آن کشورها شده مطرح کرده و برای آنها پاسخهایی بیابند.

مشاهدات اولیه و سؤالهای ممکنه

مطالعهٔ فرصتهای [یادگیری] ریاضی و علوم[5] (معروف به SMSO) یک مطالعهٔ کوچک اکتشافی در شش کشور شرکت کننده در TIMSS است که در آن، پژوهشگران روشهایی را توسعه دادند تا در پژوهش TIMSS مورد استفاده قرار گیرد. مقصود از تهیهٔ این روشها کمک به در نظر گرفتن این حقیقت بود که مدارس و فرهنگها متفاوت هستند. همچنین، هدف از تهیهٔ این روشها کمک به پژوهشگران است تا داده ها و مشاهدات به دست آمده از مدرسه ها و فرهنگهای مورد مطالعه را با هم مقایسه کنند. کشورهایی که در این مطالعه شرکت داشتند ـ فرانسه، ژاپن، نروژ، اسپانیا، سوئیس و ایالات متحده ـ به این دلیل انتخاب شدند که انتظار می رفت تفاوتها در مدرسه ها و فرهنگهای آنها مشابه دامنهٔ تفاوتهایی باشد که در مطالعهٔ اصلی TIMSS دیده شده بود.

اگرچه پژوهشگران انتظار یافتن تفاوت در مدرسه و فرهنگهای مورد مطالعه را داشتند، با این وجود از آن چه که یاد گرفتند شگفت زده شدند. برای مثال، آنها دریافتند که حتی در یک فعالیّت سادهٔ مدرسه، می توان تنوّع عظیمی یافت. انجام تمرینهایی که برای آمریکایی ها یا هر کشور دیگری فرض شده محسوب می شود در بسیاری جاهای دیگر ناآشنا یا حتی ناشناخته است. برای مثال، «کار کلاسی[6]» را در نظر بگیرید. در ایالات متحده، «کار کلاسی» به معنای انجام تمرین نوشتنی به طور مستقل است. این نوع فعالیت بخش مشترک اغلب کلاسهای درس ریاضی در آمریکا است. با این حال، در فرانسه، پژوهشگران SMSO مشاهده کردند که کار مستقل دانش آموزان که بخش جدا نشدنی کار تمام گروه است با آنچه که در آمریکا «کار کلاسی» معنی می دهد بسیار

تفاوت دارد. آنچه که معلمها در فرانسه و آمریکا از دانش‌آموزان می‌خواهند تا انجام دهند، و دلیل آنها برای چنین درخواستی، به طور چشمگیری با هم تفاوت دارد.

این نوع مشاهدات از مطالعهٔ SMSO نمی‌توانند به عنوان ابزاری استفاده شوند که با آن دربارهٔ مؤثرترین روش تدریس یا بهترین برنامهٔ درسی قضاوت کنیم، بلکه این مشاهدات می‌توانند سؤالهایی را برای بررسیهای بعدی دربارهٔ فعّالیتهای آموزشی و کاربرد اجتماعی آنها برای یادگیری دانش‌آموزان مطرح کنند. کوتاه سخن، این مشاهدات اولیه، می‌توانند زمینهٔ مناسبی برای تجزیه و تحلیل داده‌های TIMSS و بحث دربارهٔ آنها فراهم کنند.

این نوع مشاهدات از مطالعهٔ SMSO نمی‌توانند به عنوان ابزاری استفاده شوند که به آن دربارهٔ مؤثرترین روش تدریس یا بهترین برنامهٔ درسی قضاوت کنیم، بلکه این مشاهدات می‌توانند سؤالهایی را برای بررسیهای بعدی دربارهٔ فعالیتهای آموزشی و کاربرد احتمالی آنها برای یادگیری دانش‌آموزان مطرح کنند.

برنامهٔ در نظر گرفته شده (قصد شده) در شش کشور SMSO مانند چیست؟

وقتی که پژوهشگران TIMSS دربارهٔ برنامهٔ درسی از کشورهای مختلف اطلاعات جمع‌آوری کردند، آنها به بررسی موادی از قبیل چارچوبها و کتابهای درسی پرداختند. تجزیه و تحلیل این داده‌ها روشن می‌سازد که در برنامهٔ درسی چه هست، انجام چه کارهایی از دانش‌آموزان انتظار می‌رود، و تصمیم‌گیریها دربارهٔ برنامهٔ درسی چگونه انجام می‌شود. پژوهشگران، این دیدگاه نسبت به برنامهٔ درسی را **برنامهٔ درسی در نظر گرفته شده (قصد شده)** می‌نامند زیرا این برنامه همان چیزی است که آموزشگران **قصد دارند** دانش‌آموزان آن را یاد بگیرند.

یافته‌های مطالعهٔ SMSO دربارهٔ برنامهٔ درسی قصد شده چیست؟ بخش بعدی نکات برجستهٔ این یافته‌ها را ارائه می‌دهد و سپس سؤالهایی را برای تجزیه و تحلیل بیشتر مطرح می‌کند.

مشاهده

تعداد موضوعهای ریاضی و علوم که در هر سال تحصیلی در کشورهای مختلف ارائه می‌شود بسیار متفاوت است و هیچ مجموعهٔ جهانی از موضوعهای ریاضی یا علوم که در هر پایهٔ تحصیلی تدریس شود وجود ندارد.

در بعضی از شش کشور مطالعه شده، موضوعهای مشخّصی؛ هم در ریاضی و هم در علوم در یک پایهٔ تحصیلی خاص مورد تأکید قرار می‌گیرند و پس از آن، برای چندین سال آن موضوع ادامه داده می‌شود. در مقابل، همان موضوعها می‌تواند در برنامه‌های درسی کشورهای دیگر بارها و بارها ظاهر شود، بدون آنکه در هیچ پایه‌ای، بر آنها تأکیدی قوی شده باشد. برنامهٔ درسی در ژاپن و اسپانیا، در هر سال تحصیلی، بر روی تعداد اندکی از موضوعهای ریاضی متمرکز می‌شود. ولی در برنامهٔ درسی نروژ، فرانسه و ایالات متحده این تمایل وجود دارد که تعداد بیشتری از موضوعها پوشش داده شود. در برنامهٔ درسی علوم نیز الگوی مشابهی دیده می‌شود، امّا نه الزاماً در همان کشورها: در فرانسه، ژاپن و نروژ، موضوعهای [علوم] کمتری امّا با عمق بیشتر در هر سال تحصیلی تدریس می‌شود.

مشاهده

مواد برنامهٔ درسی کشورهای مختلف از جهت ترتیب موضوعها، تأکید بر موضوعهای مشخّص و انتظارات برای اجرای دانش‌آموزان گوناگون هستند.

تفاوتهای جالبی در بین شش کشور برحسب این که چه موقع یک موضوع برای اولین بار در برنامهٔ درسی ظاهر می‌شود و چه موقع آن موضوع از برنامهٔ درسی خارج می‌شود، وجود دارد. برای مثال، برنامهٔ درسی ریاضی ژاپن، بعضی موضوعهای جبر را به دانش‌آموزان در سن ۸ سالگی معرفی می‌کند، در حالی که در اسپانیا این موضوعها خیلی پس از آن معرفی می‌شوند. همچنین، برنامهٔ درسی ژاپن، تقریباً در هر سال تحصیلی، «معادلات و فرمولها» را مورد تأکید قرار می‌دهد، در حالی که در نروژ و اسپانیا این موضوع در هیچ پایهٔ تحصیلی مورد تأکید قرار نمی‌گیرد.

در ایالات متحده، تمایل به ارائهٔ یک موضوع به صورت تکراری در طول چندین پایهٔ تحصیلی وجود دارد، در حالی که در ژاپن، موضوعها اغلب در یک دورهٔ زمانی دو ساله شروع شده و خاتمه می‌یابند. در فرانسه، موضوع «خواص شیمیایی ماده» در سن ۱۳ سالگی به دانش‌آموزان ارائه می‌شود و در سنین ۱۵، ۱۶ و ۱۷ نیز مورد تأکید قرار می‌گیرد، در حالی که در نروژ، همین

موضوع در سن ۱۰ سالگی به دانش‌آموزان معرفی می‌شود و پس از آن نیز هر سال به آن پرداخته می‌شود امّا هرگز مورد تأکید قرار نمی‌گیرد.

کتابهای درسی نیز در میزان انتظارات از دانش‌آموزان با هم تفاوت دارند. برخلاف سایر کشورهای SMSO، در ژاپن، و به طور خفیف‌تر در فرانسه و اسپانیا، مواد درسی در کتابهای علوم برای ۱۳ ساله‌ها، پیچیده‌تر و سازمان یافته‌تر حول زمینه‌های مهّم علمی است. در ریاضی، موضوع نسبتاً پیچیدهٔ «خواص و معنای اعداد حسابی» ۲۰ درصد از حجم کتابهای درسی در فرانسه را اشغال می‌کند امّا همین موضوع تنها ۸ درصد از حجم کتابهای درسی نروژ و ۲ درصد از حجم کتابهای درسی سوئیس را به خود اختصاص می‌دهد.

سؤالی برای پرسیدن

آیا کم واقعاً بیشتر است؟

بعضی از اصلاحات اخیر در آموزش ریاضی و علوم برمبنای این تفکر هستند که اگر تعداد کمتری موضوع با عمق بیشتر به دانش‌آموزان عرضه گردد، درک و فهم عمیق‌تری در آنها به وجود می‌آید: به این ایده اغلب با عنوان «کم بیشتر است» اشاره می‌شود.

برای مثال، یک برنامهٔ درسی ریاضی برای پایهٔ چهارم، ممکن است زمان بسیار بیشتری را به کسرها و زمان کمتری را به هندسه، اندازه‌گیری و تقسیمهای متوالی اختصاص دهد. این تأکید می‌تواند به این لحاظ باشد که به دانش‌آموزان در توسعهٔ درک عمیق‌تر از کسرها کمک شود.

در علوم، هدفهای [برنامهٔ درسی] برای یک پایه ممکن است حول مجموعهٔ کوچکی از موضوعهای مرتبط در زیست شناسی سازمان دهی شود تا برای دانش‌آموزان موقعیتی به وجود آید که آنها در یکی از زمینه‌های علوم زیستی با دقت و عمق بیشتری به مطالعه بپردازند: بدیلی دیگر می‌تواند شامل موضوعهای متنوعی باشد، به طریقی که آشنایی بیشتری با برد وسیعتری از مطالعات علمی ارائه دهد.

SMSO نشان می‌دهد که کشورهای مختلف دربارهٔ این که به هر موضوع چقدر زمان اختصاص داده شود، چند موضوع در هر پایهٔ تحصیلی ارائه گردد و سطح پیچیدگی مورد تأکید چه باشد، انتخابهای متفاوتی انجام می‌دهند. این گوناگونی بین المللی فرصتی ایجاد می‌کند تا بفهمیم دانش‌آموزان، تحت رویکردهای مختلف به برنامهٔ درسی، چه یاد می‌گیرند.

مشاهده

در کشورهای مختلف به راههای بسیار متفاوتی دربارهٔ این که چه باید تدریس شود تصمیم گیری می‌شود.

در فرانسه، ژاپن، نروژ و اسپانیا، مؤسسه‌های دولتی متمرکز، توسعهٔ چارچوبهای برنامهٔ درسی ملّی را کنترل می‌کنند. این چارچوبها، فهرستی از هدفهای برنامهٔ درسی که ناحیه‌ها و مدرسه‌ها باید آنها را اجرا کنند ارائه می‌دهند. از طرف دیگر، هر یک از بخشهای[7] سوئیس، چارچوب برنامهٔ درسی خود را دارد. برنامهٔ درسی در ایالات متحده غیر متمرکزتر از برنامه‌های درسی در هر یک از شش کشور مورد مطالعهٔ SMSO است.

در آمریکا، هدفهای برنامهٔ درسی به وسیلهٔ ایالتها و منطقه‌های آموزشی به طور منفرد، تبیین می‌شوند.

سؤالی برای پرسیدن

یک برنامهٔ درسی ملی چگونه عمل می‌کند؟

چارچوبهای برنامهٔ درسی، راهنماها و کتابهای درسی به راههای بسیار متفاوتی در سرتاسر دنیا تهیّه شده و مورد استفاده قرار می‌گیرد. کشورها در این که آیا برنامهٔ درسی ملّی مشخص شده است، چگونه مشخص شده است، چه کسی اختیار مطلق برای تبیین هدفهای ملّی را دارد، و چگونه معلمها موظف هستند که با برنامهٔ درسی کار کنند، با هم تفاوت دارند. آیا این ترتیب‌های

متفاوت [برنامهٔ درسی] بر آنچه که معلمها واقعاً تدریس می کنند تأثیر می‌گذارد؟ آیا نوع کنترل برنامهٔ درسی بر یادگیری دانش آموز تأثیر می گذارد؟ آیا یک برنامه درسی ملّی، انسجامی در برنامهٔ درسی محلّی، تدریس و ارزیابی ایجاد می کند؟

مشاهده

تدریس در شش کشور SMSO چگونه است؟

پژوهشگران آنچه را که معلّمها انجام می دهند به عنوان **برنامهٔ درسی اجرا شده**[8] تعریف می کنند. این برنامهٔ درسی ای است که توسط دانش آموزان تجربه می‌شود. پژوهشگران SMSO چند مشاهده در کلاسهای درس ریاضی و علوم در هر یک از شش کشور [مورد مطالعه] انجام دادند ـ این مشاهدات کمتر از آن بود که به ما اجازهٔ نتیجه گیری عمومی دربارهٔ روندهای ملّی یا فعالیتهای این کشورها را بدهند. با این وجود، نتایج این مشاهدات سؤالهای مهمّی دربارهٔ ارتباط بین فعالیتهای تدریس و یادگیری دانش آموزان مطرح می کند. این سؤالها می توانند به هدایت تفسیرهای داده های موفقّیت تحصیلی TIMSS کمک کنند.

در این شش کشور، نوع تدریس به نظر متفاوت می آید.

بعضی از متخصّصان حرفه ای معتقدند که تدریس ریاضی و علوم در تمام دنیا شبیه به هم است. با این حال، مشاهـدات SMSO نشان می دهد تدریس این موضوعها [ریاضی و علوم] ممکن است که به شدت تحت تأثیر کشور و فرهنگ باشد. برای مثال، پژوهشگران در خارج از ایالات متحده، با این تمرین متداول در آمریکا، که از دانش آموزان خواسته می شود ورقه هـای خـود را برای بررسی تکلیف های منزل یکدیگر با هم مبادله می کنند ناآشنا بودند. تفاوتهای دیگری نیز از کشوری به کشور دیگر یافت شد که از آن جمله می توان به انـدازهٔ کلاس، نقش معلّم، و تکلیف منزل نوعی[9] و تکلیفهای داخل کلاسی که معلمها به دانش آموزان می دهند اشاره کرد.

پرسشنامـهٔ معلم در TIMSS از معلّمها دربارهٔ نوع آماده شدنشان برای تدریس، فعالیتهـای تدریس، استفاده از کتاب درسی و باورهای آنهـا دربـارهٔ مباحث آموزشی سؤال می کند کـه ایـن پاسخها آموزشگران را قادر می سازد تا از داده های TIMSS بیشتر دربارهٔ رابطهٔ بین کشور و عمل تدریس بیاموزند. در بعضی کشورها، نوارهای دیداری (ویدئویی) تهـیّه شده تا نگاه گذرایی به چگونگی تعامل بین معـلّمها با دانش آموزان، و چگونگی معرفی محتوا و تدریس برنامـه درسـی داشته باشد.

سؤالی برای پرسیدن

مطالعه دربارهٔ معلّمها چه می گوید؟

چگونگی تفکر معلمها دربارهٔ تدریس خودشان و چگونگی عمل تدریس، کلید درک آموزش ریاضی و علوم در یک کشور است. چند نمونه از پرسشنامـهٔ معلّمان TIMSS دربارهٔ چگونگی تدریس از معلّمان سؤال کرده است. برای مثال، از معلمان سؤال شده بود که تا چـه انـدازه در کلاسهای خود از دانش آموزان می خواهند که استدلالی را که در ورای یک ایده نهفته است توضیح دهند یا آن که از آنها می خواهند که دربـارهٔ آنچه که مشاهده کرده اند یا آنچه که اتفاق افتاده اسـت توضیحی بنویسند؟ همچنین از معلمان سؤال شده بود که تا چـه انـدازه از دانـش آمـوزان خـود می خواهند که با استفاده از جدولها، چارتها یا نمودارها روابط را معرفی کرده و تجزیه و تحلیـل کنند و بگویند که چرا [آن روابط وجود دارند.] با پاسخهایی که ارائه شده، آموزشگران می توانند تنوع بین المللی درباورها و تدریسهای متداول معلمان و چگونگی ارتباط این تنوع با یـادگـیـری دانش آموزان را مورد بررسی قرار دهند.

مشاهده

به نظر می رسد که در هر کشور یک شیوهٔ مشخّصه و رویکرد خاص به تدریس وجود دارد.

پژوهشگران SMSO فکر کردند که ممکن است الگوهای بازگشتی تدریس و فعالیتهای کلاس درس وجود داشته باشند که ریشه در فرهنگ هر یک از کشورهای مورد مطالعه داشته باشند. آنها شواهدی برای پشتیبانی از این ایده یافتند. برای مثال، در درسهای ریاضی مشاهده شده، معلّمهای فرانسوی تمایل به ارائه نظری موضوعهای درسی پیچیده داشتند، همچنان که بسیاری از معلمهای اسپانیایی نیز چنین تمایلی داشتند. درسهای ریاضی در نروژ به نظر می رسید که کمتر معلّم ـ محور بوده و بیشتر بر درگیری فعال با ایده های معرفی شده تمرکز دارد. نمونهٔ کوچکی از درسهای مشاهده شدهٔ ریاضی و علوم در ایالات متحده، بیشتر متمایل به هدایت توسط معلّم بودند و نشان دادند که معلم بر تعریفها و واژه ها تأکید می ورزد.

سؤالی برای پرسیدن

عوامل فرهنگی چه نقشی ایفا می کنند؟

اگر الگوهای مشخّصه ای از فعالیتهای تدریس ریاضی و علوم در یک کشور وجود داشته باشد، این الگوها چگونه با موفقیت تحصیلی دانش آموز گره خورده است؟ آیا الگوهای خاصّ تدریس می توانند با موفقیّت تحصیلی و اجرای دانش آموز مرتبط شوند؟ آیا تفاوتها بین کشورها برجسته تر است یا در درون هر کشور؟ چگونه این تفاوتها دلالت بر تلاشهایی جهت «انتقال» تمرینها و ایده های آموزشی در زمینه های مختلف دارد؟ آیا این تمرینها و ایده های آموزشی می‌توانند وارد یا صادر شوند؟

TIMSS: فرصتی برای یادگیری

لحظه ای به جدول زمانبندی استخراج داده ها و مشاهدات مربوط بـه TIMSS نظری بیفکنید این جدول در انتهای این نوشته آمده است. یافتـه هـای اوّلیهٔ SMSO نمونه ای است از آنچه کـه خواهد آمد. داده های TIMSS خیلی بیش از این ها دربـارهٔ آموزش ریاضی و علوم در سرتاسـر بیش از ۴۰ کشورِ مورد مطالعه، به ما خواهند گفت.

برای هریک ازکشورهـای درگیـر، داده هـای TIMSS داستـانـی بـه مـا می گویند که با هدفهای ملّی شروع می شود و با ارائهٔ تصویرهای کوتاهی از زندگی کلاس درس ادامه می یابد.

تجزیه و تحلیل برنامه های درسی، چارچوبها و کتابهای درسی TIMSS به فهم بیشتر **برنامهٔ در نظر گرفته شده (قصد شده)** کمک خواهد کرد. از ضبط های دیداری (نوارهای ویـدئـویـی) TIMSS، مطالعات موردی و داده های پیمایشی معلمان، اطلاعات بیشتری در مورد روشهـای تدریس و فعالـیّتهای کلاس درس ـ **برنامهٔ درسی اجرا شده** به دست خواهیم آورد. وقتی که ایـن اطلاعات را با داده های موفقیّت تحصیلی TIMSS ـ که پژوهشگران به آن **برنامهٔ حاصل شده**[10] می گویند ـ کنار هم می گذاریم، آنگاه قادر خواهیم بود که سؤالهای مـهّمی بپرسیم. سؤالهائـی دربارهٔ این که هر یک از این تفاوتهای بین ملّتها چه تأثیری بر آنچه که دانش آموزان واقعاً یاد می گیرند می گذارند.

در حال حاضر خیلی زود است که بگوییم چگونه داده های TIMSS می توانند به کشورها در رابطه با فعّالیتها و سیاستگزاریهای آموزشی آنها کمک کنند. فعالیتهای آموزشی و سیاستگزاری های بعضی کشورها به نظر جاذب و قابل تقلید می آیند. با این حال، آنها الزامـاً به آسانی قابل صدور نیستند. ریشه های فرهنگی آن [فعالیتها و سیاستگزاریها] عنصر اصلی در تأثیرگذاری آنها هستند.

چند سال گذشته، موجهای تغییرات و اصلاحات در آموزش ریاضیات و عـلـوم در ایـالات متحده و جاهای دیگر را با خود به همراه آورده است. داده هـای TIMSS تصویری از آمـوزش علوم و ریاضیـات آمریکا در تلاشهـای اوّلیهٔ اصلاح و تغییر را نشان می دهد. به علاوه، مـا بـه اطلاعاتی دربارهٔ سایر نظامها و فعالیتهای آموزشی دسترسی خواهیم یافت که می‌توانند به ما در راه تلاشهای مستمر برای بهبود [وضعیّت آموزش ریاضی و علوم] آگاهی داده و الهام بخش باشند.

برای هر یک از کشورهای درگیر، داده هـای TIMSS داستانی به ما مـی گویند که با هدفهـای ملّی (و گاهی ایالتی و محلّی) شروع می شود و با ارائهٔ تصویرهای کوتاهی از زندگی کلاس درس ادامه می یابد. تمام اینها به اطلاعات پیچیده دربارهٔ تمرینهای عملی نظامهای آموزشی می افزاید. تجزیه و تحلیل این اطلاعات در قضاوت کردن غیر رسمـی دربـارهٔ [پیدا کردن] راههایی جهـت بهبود آموزش و پروش در ایالات متحده و در تمام دنیا مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

گزارش SMSO این حقیقت را برجسته می کند که ما باید برای پیچیدگی ایده هایی مانند برنامهٔ درسی، تدریس و فرهنگ احترام جدی قایل باشیم و توقع نداشته باشیم که از بین ایـن عـنـاصـر پیچیده بتوانیم روابط ساده انگارانه ای را نتیجه بگیریم. بررسی تنـوّع [موجود] در برنامه های در نظر گرفته شده و تمرینهای عملی تدریس جالب است. از شکلهای مختـلـفـی کـه آمـوزش در کشورهای دنیا دارد می توان بسیار آموخت. با این حال، مهمترین سؤال بر این نکته متمرکز است که چگونه این رویکردهای مختلف به برنامهٔ درسی و روشهای تدریس بر برآمدهای آموزشی تأثیر می گذارد: دانش آموزان در نظامهای آموزشی مختلف واقـعـاً چه یاد می گیرند و چه چیـزی بـر یادگیری آنها تأثیر می گذارد؟

بعد از این چه می آید؟

برنامه های گزارشی TIMSS

اکتبر ۱۹۹۶

- مشخص کردن جریان پداگوژی (گزارش SMSO)
- چندین دیدگاه، چندین آرزو[11]: یک بررسی بین کشورها راجع به هدفهای برنامهٔ درسی در ریاضیات مدرسه ای
- چندین دیدگاه، چندین آرزو: یک بررسی بین کشورها راجع به هدفهای برنامـهٔ درسی در علوم مدرسه ای
- یک دیدگاه شکافنده[12]: یک بررسی راجع به آموزش ریاضیات و علوم آمریکا

نوامبر ۱۹۹۷

اجرای ریاضی و علوم پایهٔ هشتم در دیدگاه بین المللی ـ یافته هایی از پرسشنامه ها و ارزیابیهای ایالات متحده

گزارش تکنیکی از یافته ها و پرسشنامه های ایالات متحده

مطالعات ضبط های دیداری (ویدئویی) کلاس درس TIMSS: یافته های اولیه و روش شناسی یافته هایی از مطالعات موردی قوم نگارانه در آلمان، ژاپن و ایالات متحده

پایگاههای داده ها (ارزیابی ها و پرسشنامه های ایالات متحده، نوارهای ویدئویی تـدریـس ریاضی در کلاس درس، مصاحبه های مطالعهٔ موردی و یادداشتهای میدانی)

تابستان ۱۹۹۷

نتایج موفقیت تحصیلی و پرسشنامهٔ پایهٔ چهارم

زمستان ۱۹۹۸

- نتایج موفقیت تحصیلی و پرسشنامهٔ پایهٔ آخر دبیرستان [پایه ۱۲]

- گزارشهای تکمیلی، مقاله ها و تجزیه و تحلیلها برای چندین سال ادامه خواهد یافت.

مرجع ها :

National Research Council (1996). *Mathematics and Science Around the World: What Can We Learn from the Survey of Mathematics and Science Opportunities (SMSO) and the Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)?* Washington, DC: National Academy Press.

Schmidt et al. (in press). *Characterizing Pedagogical Flow: An Investigation of Mathematics and Science in Six Countries.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

برای اطلاعات تکمیلی دربارهٔ SMSO و TIMSS، با افراد زیر تماس بگیرید :

Dr. William H. Schmidt, U.S. Ntional Research Coordinator, TIMSS Curriculum Analysis Project, Michigan State University, College of Education, 457 Erickson Hall. East Lansing, MI 48824: 517 - 353 - 7755: bschmidt @ pilot. msu. edu: http: //ustimss. msu.edu

Dr. Larry Suter, TIMSS Program Officer, National Science Foundation, Division of Research, Evaluation, and Communication, 4201 Wilson Boulevard, Arlington, VA 22230 : 703-306-1650: lsuter @ nsf.gov

Dr. Albert Beaton, Director, TIMSS International Study Center, Campion Hall 323. Boston College, Chestnut Hill. MA 02167: 617 - 552 - 4521: timss @ hermes, bc. edu

Dr. Lois Peak, TIMSS Project Officer. U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics, 555 New Jersey Avenue, NW. Room 402A, Washington, DC 20208: 202 - 219 _ 1804: Lois - peak @ ed. gov: http // www. ed, gov/NCES/TIMSS. html

تهیه این بروشور تحت نظارت کمیته ای از شورای ملی پـژوهـش[1] انجام گرفت. پـروژهٔ «از SMSO تا TIMSS»[2] تلاشی با تشریک مساعی کمیتهٔ آموزش علوم ریاضی[3]، کمیتهٔ آموزش علوم از آمادگی تا پایان متوسطه[4]، و مرکز شورای ملی پژوهش برای آموزش علوم، ریاضی و مهندسی است. این پروژه با حمایت مالی بنیاد ملی علوم[5] انجام گرفته است؛ نقطه نظرهای ارائه شده در این بروشور متعلّق به نویسنده است و الزاماً بازتاب نقطه نظرهای بنیاد ملی علوم نمی باشد.

برای نسخه های اضافی این بروشور با آدرس زیر مکاتبه نمائید :

Mathematical Sciences Education Board or Committee on Science Education K -12
Center for Science, Mathematics, and Engineering Education timss @ nas. edu
National Research Council
2101 Constitution Ave, NW (HA 450)
Washington, DC 20418

زیرنویس ها :

۱ـ Association for the Evaluation of Educational Achievement
۲ـ National Science Foundation
۳ـ National Center for Education Statistics
۴ـ Intended
۵ـ The Study of Mathematics and Science Opportunities
۶ـ Seatwork
۷ـ Cantons
۸ـ Implemented Curriculum
۹ـ Typical
۱۰ـ Attained Curriculum
۱۱ـ Many Visions, Many aims
۱۲ـ A Splintered Vision

مسأله های درس اول

(حل مسأله)

جوادحاجی بابایی

به دنبال معرفی مُدل چهار مرحله ای پولیا درباره حل مسأله در شماره قبل که نقطه شروع درس «آموزش از راه حل مسأله» است، درصددیم تا بدیلی کم نظیر برای تدریس ریاضیات ارائه کنیم. اگر چه پولیا خود گفته است که این مباحث و دیدگاه، حاصل تجربیات طولانی من است و ادعایی در مورد مسائل روانشناسی و تربیتی ندارم ولی بهرحال او ریاضیدانی است که خود تولیدکننده ریاضیات بوده است و طبق اظهار خودش سؤالهایی چون: چگونه باید آموخت؟ چگونه می توان حدس زد؟ چگونه می توان ابداع و اختراع کرد؟ و ... از زمانی که دانشجوی جوانی بوده، رهایش نمی کرده است و در نهایت باعث شده اند که پس از سالیان دراز تحقیق در مرزهای ریاضی به آموزش ریاضی بپردازد و آثاری چون «چگونه مسأله را حل کنیم؟» و «خلاقیت ریاضی» را بیافریند که به شهرت جهانی رسیده اند و دیدگاههای او به نظریه کشیده شوند و مکتب آموزش از راه حل مسأله در آموزش ریاضی پدید آید که اکنون قلب تپنده آموزش ریاضی نامیده می شود.

آموزش از راه حل مسأله اگرچه در شروع بسیار مشکل، غیرعملی و نشدنی بنظر می رسد ولی چنانچه معلم ابتدا خود بر ویژگیها و ظرافت های این روش آموزش ریاضی تسلط یابد، پیاده کردن آن در کلاس واقعی نه تنها شدنی بلکه هیجان آور و نتیجه آن غیرقابل تصور است. بنابراین در این سلسله بحث ها، درس ها و تمرین کردن ها که همکاری شما همکاران علاقه مند را می طلبد تلاش می کنیم تا آموزش از راه حل مسأله را معرفی کنیم همانند کسی که می خواهد شنا کردن بیاموزد بایستی به میان آب رویم، شاید و حتماً دچار دردسر شویم! و با مسأله درگیر شویم. پس قلم و کاغذ برگیرید و با سلاح درس اول (مقالهٔ مُدل پیشنهادی پولیا در شماره قبل) با مسأله های زیر دست و پنجه نرم کنید. این مسأله ها

در واقع مسائل درس قبل هستند امّا نه به شیوه سنتی بلکه با دیدگاهی دیگر که در زیر آن را تشریح می کنیم.

هدف ما جواب آخر نیست و از شما جواب نمی‌خواهیم بلکه می خواهیم فرآیند تفکر خود را مطابق با واقع ثبت کنید! فرض کنید یک ناظر بیرونی می تواند فرایند اندیشیدن و با مسأله درگیر شدن شما را نظاره کند و سپس گزارش کتبی ارسال کند. ما و خود شما اگر به دنبال این سؤال باشیم که چه عواملی باعث می شوند که یک مسأله حل کن، خوب حدس می زند و راه پیدا می کند و دیگری خوب حدس نمی زند و در حل مسأله پیش نمی رود ــ چه عواملی باعث می شوند تغییر دیدگاه بدهیم ــ چگونه سرچشمه های ابداع و اختراع به ذهن می رسند؟ ــ و هزاران سؤال از این نوع که در حقیقت مبانی نظریه آموزش ریاضی از راه حل مسأله را بوجود می آورند. آنگاه یک کار پژوهشی اصیل و نو انجام داده ایم. به خاطر داشته باشیم: عواملی که مانع حل مسأله می شوند بسیار مهمتر از آنهایی هستند که ما را به حل مسأله هدایت می کنند؛ همانگونه که پیش گیری مهمتر از درمان است. برای کار پژوهشی در این زمینه چرکنویس ها مهمتر از پاکنویس ها هستند همانطور که از چرکنویس ریاضیدانانها می توان به فرایند اندیشه آنها پی برد.

باید توجه داشته باشیم که از «آموزش ریاضی از راه حل مسأله» هنوز سخنی نگفته ایم بلکه اینها همه درس اول هستند که کار با چهارچوب پولیاست!

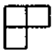
۱ ــ فرض کنید $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ اعداد حقیقی نامنفی باشند که مجموعشان برابر ۱ است تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ را با ضابطه $f(t)=\sum_{i=0}^{5} a_i t^i$ تعریف می کنیم به علاوه قرار می دهیم:

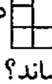
$$\mu=\sum_{i=0}^{5} i.a_i$$

الف) ثابت کنید اگر $\mu \le 1$ و $a_1<1$، آنگاه معادله $f(t)=t$ در $[0,1)$ ریشه ندارد.

ب) اگر $\mu>1$ آنگاه معادله $f(t)=t$ روی $[0,1)$ به طور دقیق یک ریشه دارد.

پ) در مورد تعمیم این مسأله چه می توان گفت؟

۲ ــ یک صفحه شطرنجی $2^n\times 2^n$ داریم. یکی از خانه های آن را به دلخواه کنار می گذاریم آیا می توان این صفحه را با موزائیک هایی به شکل  پوشاند؟

۳ ــ میدان مستطیل شکل $m\times n$ مفروض است. موزائیک هایی به شکل  در اختیار است. آیا می توان این میدان را با این موزائیک ها پوشاند؟ در مورد شرط لازم و کافی برای اینکه بتوان میدان را با این موزائیک ها پوشاند، چه می توان گفت؟

۴ ــ تمام توابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را که در شرایط زیر صدق می کنند بیابید.

برای هر a و b متعلق به اعداد حقیقی

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$
$$f(1)=1\ ,$$
$$f(x).f\left(\frac{1}{x}\right)=1\ ;\ x\neq 0$$

۵ ــ فرض کنید p یک چند جمله ای درجه دوم با ضرائب صحیح باشد و اعداد حقیقی a و b وجود داشته باشند طوری که:

$$p(a)p(b)=-(a-b)^2$$

مقدار $p(a)+p(b)$ را محاسبه کنید.

۶ ــ تعداد متناهی پاره خط که مجموع طول آنها ۱ است در صفحه داده شده اند. ثابت کنید خط مستقیمی وجود دارد که مجموع طول تصویر پاره خطهای داده شده بر این خط کوچکتر یا مساوی $\frac{2}{\pi}$ است.

۷ ــ اگر K عددی طبیعی باشد، ثابت کنید بی نهایت مربع کامل به صورت $n.2^k-7$ وجود دارد که در آن n عددی طبیعی است.

۸ ــ دنباله $\{a_n\}$ از اعداد صحیح به صورت زیر تعریف شده است:

$$a_1=2\ ,\ a_2=7\ ,\ -\frac{1}{2}\le a_{n+1}-\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\le\frac{1}{2}\ ;\ n\ge 2$$

ویژگیهای این دنباله را شناسایی کنید.

۹ ــ فرض کنید D یک نقطه درون مثلث ABC است که زاویه های آن حاده اند. به طوری که:

$$\hat{ADB}=\hat{ACB}+90^\circ$$
$$AC.BD=AD.BC$$

الف) مقدار عددی $\frac{AB.CD}{AC.BD}$ را بدست آورید.

ب) ثابت کنید خطوط مماس در نقطهٔ C بر دایره های محیطی مثلث ACD و BCD برهم عمودند.

۱۰ ــ مثلث ABC و خط L را که از نقطه C به موازات AB رسم شده است، در نظر بگیرید. فرض کنید نیمساز داخلی زاویهٔ A، پاره خط BC و خط L را به ترتیب در نقاط D و E قطع می کند و نیمساز داخلی زاویهٔ B، پاره خط AC و خط L را به ترتیب در نقاط F و C قطع می کند. نشان دهید اگر $CF=DE$ باشد، آنگاه $AC=BC$.

المپیاد ریاضی

یحیی تابش
دانشگاه صنعتی شریف

در شمارهٔ قبل حل مسأله های هندسهٔ سی و هفتمین المپیاد بین المللی (بمبئی ۱۹۹۶) ذکر شد. در این شماره حل بقیه مسایل ارائه می شود. همچنین داستان طرح یکی از مسایل هندسه نیز از زبان طراح آن ذکر خواهد شد.

حل مسایل ترکیبیات

مسأله های اول و ششم درسی و هفتمین المپیاد بین المللی ریاضی به مسایل ترکیبیات اختصاص داشت. در اینجا راه حلهای آقای ایمان افتخاری دانش آموز عضو تیم جمهوری اسلامی ایران برای این دو مسأله که متفاوت از راه حل طراح است و ایده های بدیعی در آن ظاهر شده است را ذکر می کنیم.

مسأله شماره ۱

فرض کنید که $ABCD$ یک مستطیل با اضلاع $AB = 20$ و $BC = 12$ باشد این مستطیل را به 12×20 مربع واحد تقسیم می کنیم. فرض کنید که r عدد صحیح مثبتی باشد یک مهره را از یک مربع به مربع دیگر فقط و فقط وقتی می توان حرکت داد که فاصله بین مراکز آنها $\sqrt{r}$ باشد هدف ما پیدا کردن یک دنباله از حرکات مجاز است که مهره را از مربع به رأس A به مربع به رأس B ببرد. ثابت کنید.

الف) اگر r بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد این کار ممکن نیست.

ب) برای $r = 73$ می توان این کار را انجام داد.

ج) آیا برای $r = 97$ این کار ممکن است.

حل: فرض کنید که در یک حرکت فاصله افقی دو مرکز a و فاصله عمودی آنها b باشد حال $a^2 + b^2 = r$ و چون $2|r$ لذا $2|a^2 + b^2$ بنابراین زوجیت a و b یکسان است نقطه شروع ما $(1,1)$ است و چون درهر مرحله مقداری که اضافه می شود زوجیتش در هر مؤلفه یکسان است لذا مراکز قابل دسترس دارای مختصاتی هستند که در هر دو مؤلفه زوجیّت یکسان دارد به عبارت دیگر اگر پس از چند حرکت به نقطه (m,n) برسیم آنگاه $m \equiv n$ (هنگ ۲) امّا نقطه $(1,20)$ دارای این خاصیّت نمی باشد.

حال فرض کنید که $3|r$ بنابراین $3|a^2 + b^2$ و چون ۳ عددی اوّل به صورت $4k + 3$ است این نتیجه می دهد که $3|a$ و $3|b$ به عبارت دیگر

$3|a^2 + b^2 \quad a \equiv 0,1,-1$ (هنگ ۳) $\Rightarrow a^2 \equiv 0,1$ (هنگ ۳)

$b \equiv 0,1,-1$ (هنگ ۳) $\Rightarrow b^2 \equiv 0,1$ (هنگ ۳)

بنابراین

$a^2 + b^2 \equiv (0+0)$ یا $(1+0)$ یا $(1+1)$ (هنگ ۳)

چون $3|a^2 + b^2$ بنابراین با استدلال بالا $3|a$ و $3|b$ درنتیجه اگر از نقطه $(1,1)$ به نقطه ای برویم هر مؤلفه آن نقطه به هنگ ۳ برابر ۱ خواهد بود یعنی اگر نقطه (n,m) را بعد از چند حرکت

بتوان پیمود آنگاه $n \equiv ۱$ (هنگ ۳) و $m \equiv ۱$ (هنگ ۳) ولی نقطه (۱,۲۰) دارای این خاصیت نیست زیرا $۲۰ \equiv ۲$ (هنگ ۳)

ب)

برای حالت $r = ۷۳$ چون $۷۳ = ۸^۲ + ۳^۲$ مثال زیر را ارائه می کنیم که در حرکت i ام به خانهٔ شماره i می رویم.

۰																			۱۳
								۹											
																			۵
								۱			۱۲								
																۸			
											۴								
																			۱۱
								۷											
																			۳
											۱۰								
																۶			
											۲								

حل قسمت ج) در این قسمت ادعا می کنیم که جواب منفی است. فرض کنید که چنین نباشد حال به چند نکته دقت می کنیم.

الف) تنها حالتی که ۹۷ را به صورت حاصل جمع دو مربع می توان نوشت به صورت $۹^۲ + ۴^۲ = ۹۷$ است که این را به راحتی می توان چک کرد.

ب) حرکت را بزرگ گوییم هرگاه حرکت ۹ تایی آن در جهت عمودی باشد و در غیر اینصورت آن را کوچک می گوییم حال تعداد حرکات بزرگ زوج است زیرا هر حرکت کوچکی زوجیت مؤلفه اوّل را ثابت نگاه می دارد و هر حرکت بزرگی آن را تغییر می دهد لذا چون در نهایت مؤلفه اوّل زوجیتش تغییر نمی کند لذا تعداد تغییر علامت ها که همان تعداد حرکات بزرگ است زوج می باشد.

ج) حال فرض کنید که a تعداد حرکات کوچک باشد آنگاه a فرد است زیرا هر حرکت کوچکی زوجیت مؤلفه دوم را تغییر می دهد و هر حرکت بزرگی زوجیت را ثابت نگاه می دارد حال چون در نهایت مؤلفه دوّم زوجیتش عوض می شود لذا تعداد تغییر زوجیت ها فرد است بنابراین a فرد می باشد.

با توجه به مطالب بالا بین دوتا از حرکات بزرگ و یا در ابتدای حرکات و یا در انتهای آنها تعداد فردی حرکت کوچک وجود دارد (چون در غیر اینصورت تعداد کل حرکات کوچک زوج می شد).

لم: ترکیب تعداد فردی حرکت کوچک مهره را در جهت عمودی دقیقاً ۴ واحد جابجا می کند.

اثبات لم: فرض کنید که i حرکت به سمت بالا و j حرکت به سمت پایین داشته باشیم (یعنی در حرکات کوچک i حرکت دارای مؤلفهٔ عمودی منفی و j تا دارای مؤلفه عمودی مثبت اند) حال جابجایی عمودی می شود: $۴ \times (j - i)$

چون $j - i$ عددی فرد است لذا یا $j - i = \pm ۱$ و یا $|j - i| \geq ۳$

$|j - i| \geq ۳ \Rightarrow |۴ \times (j - i)| \geq ۱۲ \Rightarrow$ |جابجایی عمودی| ≥ ۱۲

که تناقص است، بنابراین $j - i$ برابر ± ۱ است یعنی جابجایی کلی در جهت عمودی ۴ است $\square$

با استفاده از لم بالا مسأله را حل می کنیم.

الف) اگر این تعداد فرد حرکت کوچک در ابتدا باشد برآیند آنها در جهت عمودی ± ۴ است که حالت -۴ ممکن نیست بعد از این حرکت یک حرکت بزرگ باید انجام شود که دارای جابجایی ۹ است و جای فعلی نقطه ارتفاع ۵ دارد امّا $۹ - ۵ < ۱$ و $۵ + ۹ > ۱۲$ لذا این حرکت بزرگ ممکن نیست.

ب) اگر این حرکات در بین ۲ حرکت بزرگ باشد. بدون کم شدن از کلیت فرض کنید حرکت اولی جابجایی عمودی $+۹$ داشته باشد برآیند حرکات کوچک در جهت عمودی نمی تواند $+۴$ باشد زیرا $۹ + ۴ > ۱۲$ پس -۴ است یعنی برآیند این دو حرکت $+۵$ می شود حال یک حرکت بزرگ باید انجام شود که بازهم غیر ممکن است.

ج) اگر این حرکات در انتها باشد آنگاه با برگرداندن حرکت حالتی شبیه (الف) به دست می آید که قبلاً حل شد که این هم اثبات مسأله را کامل می کند.

مسأله ۶

فرض کنید که q , p , n اعدادی صحیح و مثبت باشند و $n > p + q$ همچنین فرض کنیم $x_۰$, $x_۱$, ..., x_n اعدادی صحیح باشند که در شرایط زیر صدق کنند

الف) $x_۰ = x_n = ۰$

ب) به ازای هر i که $۱ \leq i \leq n$ داریم $x_i - x_{i-۱} = p$ و یا $x_i - x_{i-۱} = -q$

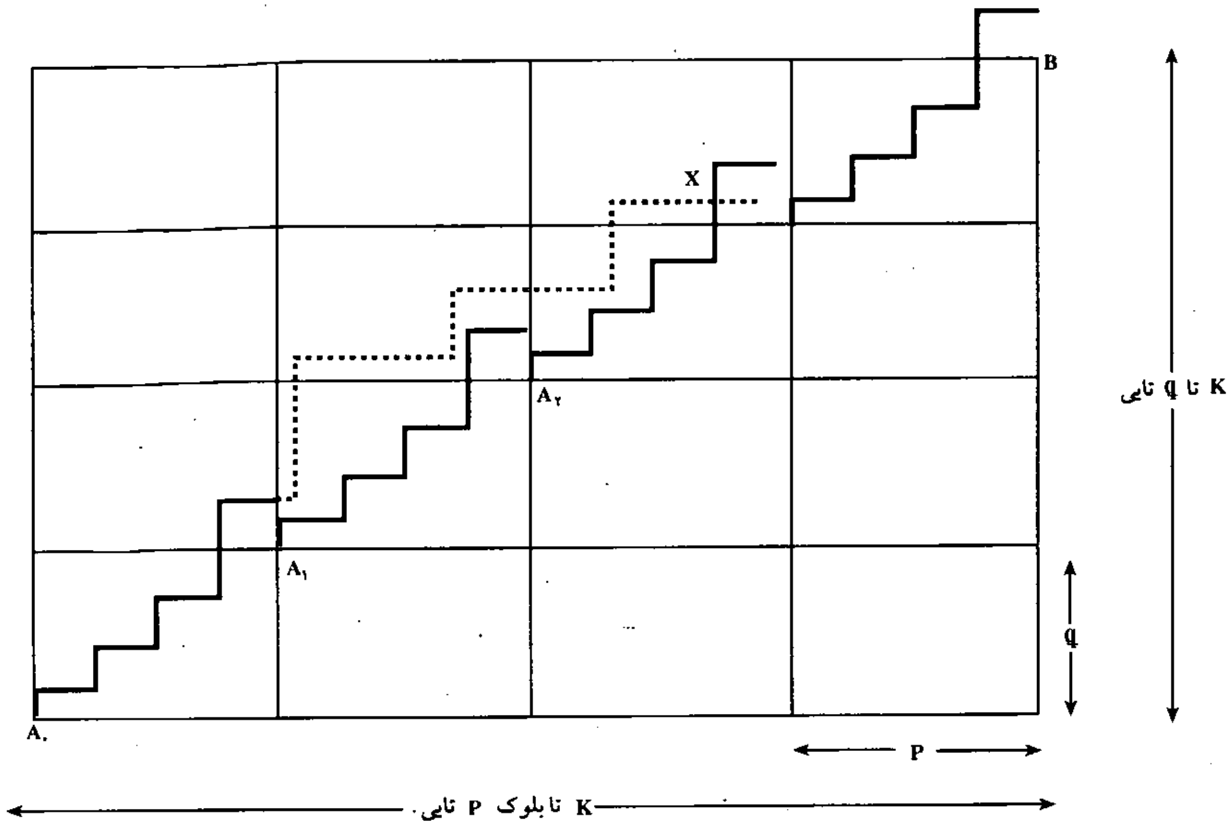
نشان دهید یک زوج مرتب (i,j) وجود دارد که $i < j$ و $x_i = x_j$ به طوری که $(i, j) \neq (۰, n)$

حل: برای اثبات این مسأله از یک ایده هندسی استفاده می کنیم:

دقت می کنیم که اگر در a مرحله $x_i - x_{i-۱} = p$ آنگاه

$۰ = x_n = ap - (n - a)q \Rightarrow ap = (n - a)q$

اگر $p = dp'$ و $q = dq'$ آنگاه هر x_i به وضوح بر d بخش پذیر است. قرار دهید $b_i = \frac{x_i}{d}$ حال این دنبالهٔ b_i هم با p' و q' همان خواص قبلی را دارد لذا می توان فرض کرد که $d = ۱$ یعنی $(p, q) = ۱$ حال با این فرض $q|a$ و $p|n - a$ بنابراین



$n = pk + ql$ و $a = ql$ بنابراین $qp.k = qpl$ لذا داریم $n = (p+q)k$ که $k > 1$

یک مستطیل $kq \times kp$ در نظر بگیرید: در هر مرحله اگر به جمله قبل p تا اضافه شده بود، یک واحد بالا بروید (با شروع از مبدأ) و اگر q تا کم شده بود یک واحد به راست بروید.

با بحث بالا kq حرکت به سمت بالا و kp حرکت به سمت راست داریم. بنابراین در نهایت به رأس بالایی می رسیم.

حال مستطیل را به مستطیل های $p \times q$ افراز کنید بنابراین در مجموع $k \times k$ تا از این مستطیل داریم. در مستطیل اول $(p \times q)$ نمودار را درنظر بگیرید (نموداری که با رنگ سیاه رسم شده است) اگر از نقطه A_1 بگذرد آنگاه x_{p+q} برابر صفر خواهد بود که کار تمام است پس فرض کنید از A_1 نمی گذرد بدون کم شدن از کلیت فرض کنید ابتدا ضلع بالا و بعد ضلع سمت راست را قطع کند (مانند شکل) این نمودار را در مستطیل های روی قطر انتقال دهید.

این در واقع نمودار سیاه را ایجاد می کند حال نمودار اصلی را هم با خط نقطه چین رسم می کنیم (مانند شکل) به وضوح این دو نمودار قبل از نقطه B جایی یکدیگر را قطع می کنند مثلاً در نقطهٔ X.

این نقطه روی نمودار است و لذا x_t که $(p+q<t)$ وجود دارد که متناظر این نقطه است از طرفی چون این نقطه روی نمودار سیاه است متناظر نقطه ای از نمودار در مستطیل اوّل است.

مثلاً فرض کنید که نقطه مستطیل اوّل به صورت (m,r) و نقطه مستطیل دیگر به صورت $(lp+m\ ,\ lq+r)$ باشد بنابراین

$$x_{m+r} \sim (m,r)$$
$$x_{l(p+q)+m+r} \sim (lp+m, lq+r)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{m+r} = rp - mq \\ x_{l(p+q)+m+r} = (lq+r)p - (lp+m)q = rp - mq \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$x_{m+r} = x_{l(p+q)+m+r}$$

طبق فرض $l(p+q)+m+r < n$ که حکم را ثابت می کند.

دو مسأله دیگر

برای مسأله های ۳ و ۴ سی و هفتمین المپیاد ریاضی راه حل طراحان مسأله را ارائه می کنیم.

مسأله ۳

فرض کنید N_0 نشان دهندهٔ مجموعهٔ اعداد صحیح غیر منفی باشد. همهٔ تابعهای مانند f از N_0 بتوی خودش را پیدا کنید

به طوری که به ازای هر m و n در $N.$ داشته باشیم،

$$f(m+f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

حل: با قرار دادن $m = n = 0$ به دست می‌آوریم $f(0) = 0$ و از اینرو برای هر $n \in N.$، $f(f(n)) = f(n)$. بنابراین معادلهٔ تابعی داده شده، معادل است با

$$f(m+f(n)) = f(m) + f(n) \quad , \quad f(0) = 0$$

همچنین مشاهده می‌کنیم که اگر $f(x)$ یک تابع غیرصفر باشد آنگاه f دارای نقطه‌های ثابت غیر صفر خواهد بود. فرض کنید a کوچکترین نقطهٔ ثابت غیر صفر f باشد. اگر $a = 1$ آنگاه به آسانی می‌توان چک کرد که $f(2) = 2$ و از طریق استقراء برای هر $n \in N.$ نتیجه می‌شود $f(n) = n$.

فرض کنید $a > 1$ باز از طریق استقراء $f(ka) = ka$، برای هر $k \geq 1$. حال نشان خواهیم داد که نقطه‌های ثابت f، همه به فرم ka هستند، به ازای بعضی مقادیر $k \geq 1$. ابتدا توجه کنید که مجموع دو نقطهٔ ثابت، خودش یک نقطهٔ ثابت است. فرض کنید b یک نقطهٔ ثابت دلخواه f باشد. اعداد صحیح غیر منفی q و r را چنان انتخاب کنید که $b = aq + r$، $0 \leq r < a$. آنگاه به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} b = f(b) &= f(aq+r) \\ &= f(r+f(aq)) \\ &= f(r) + f(aq) \\ &= f(r) + aq \end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌شود $f(r)=r$ و چون $r< a$، باید داشته باشیم $r = 0$. از اینجا این ادعا که نقطه‌های ثابت f همه به فرم ka هستند، ثابت می‌شود. چون مجموعهٔ $\{f(n): n \in N.\}$ مجموعه ای از نقطه‌های ثابت f است، این در حالت ویژه نتیجه می‌دهد که $f(i) = an_i$ برای هر $i < a$ با $n_0 = 0$ و $n_i \in N.$.

یک عدد صحیح مثبت دلخواه n را بگیرید و آن را به صورت $n = ka + i$ که در آن $0 \leq i < a$ بنویسید. با استفاده از معادلهٔ تابعی بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f(n) = f(i+ka) &= f(i+f(ka)) \\ &= f(i) + ka \\ &= n_i a + ka \\ &= (n_i + k)a \end{aligned}$$

ثابت می‌کنیم که یک چنین f در معادلهٔ تابعی داده شده صدق می‌کند:

بگیرید $m = ka + i$ و $n = la + j$، $0 \leq i,j < a$، آنگاه

$$\begin{aligned} f(m+f(n)) &= f(ka+i+f(la+j)) \\ &= f((k+l+n_j)a+i) \\ &= (k+l+n_j+n_i)a \\ &= f(m) + f(n) \end{aligned}$$

بنابراین اگر f معادل صفر نباشد، آنگاه f دارای فرم عمومی زیر است:

فرض کنید $a \in N$ و $n_1, n_2, \dots, n_{a-1} \in N.$ بطور دلخواه انتخاب شده باشند، آنگاه

$$f(n) = \left(\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + n_i\right)a .$$

مسأله ۴

اعداد صحیح و مثبت a و b طوری هستند که اعداد $15a+16b$ و $16a-15b$ هر دو مجذور اعدادی صحیح و مثبت می‌باشند. کمترین مقدار ممکن که این دو مجذور اختیار می‌کنند را پیدا کنید.

حل: فرض کنید $15a+16b = r^2$ و $16a-15b = s^2$، به طوریکه $S \in N$ و r. در اینصورت

$$\begin{aligned} r^4 + s^4 &= (15^2+16^2)(a^2+b^2) \\ &= 481(a^2+b^2) \end{aligned}$$

توجه کنید که $37 \times 13 = 481$. حال از این نکته استفاده می‌کنیم که -1، با توان چهارم هیچ عددی در هنگ ۱۳ یا هنگ ۳۷ همنهشت نیست (برای مشاهدهٔ این مطلب توجه کنید که همنهشتی $x^4 \equiv -1$ (هنگ ۱۳) به ازای بعضی مقادیر $x \in N$ با به کارگیری قضیه فرما نتیجه می‌دهد $(-1)^3 \equiv 1$ (هنگ ۱۳) که نادرست است؛ به همین ترتیب همنهشتی $x^4 \equiv -1$ (هنگ ۳۷) به ازای بعضی مقادیر $x \in N$ نتیجه می‌دهد $(-1)^9 \equiv 1$ (هنگ ۳۷) که بازهم نادرست است.)

چون $r^4 + s^4 \equiv 0$ (هنگ ۱۳)، پس یا $r \equiv s \equiv 0$ (هنگ ۱۳)، یا $r \not\equiv 0$ (هنگ ۱۳)، $s \not\equiv 0$ (هنگ ۱۳). حالت دوم غیرممکن است زیرا -1 با توان چهارم هیچ عددی در هنگ ۱۳ همنهشت نیست، بنابراین $r \equiv s \equiv 0$ (هنگ ۱۳) و مشابهاً $r \equiv s \equiv 0$ (هنگ ۳۷). بنابراین r و s هردو مضرب ۴۸۱ هستند، و در نتیجه $r > 481$, $s > 481$. به سادگی می‌توان مشاهده کرد که $r = s = 481$ صحیح است. زیرا از آنجا خواهیم داشت

$$a = 481.31 \quad , \quad b = 481$$

درنتیجه جواب مورد نظر 481^2 است.

داستان طرح یک مسأله

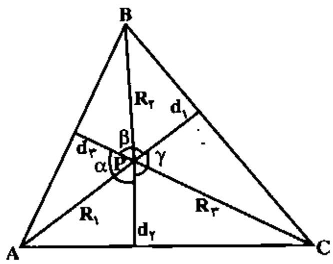
همانطور که قبلاً نیز ذکر کردیم مسأله ۵ در سی و هفتمین المپیاد بین المللی ریاضی مسأله بسیار دشواری بود که به قولی کمترین تعداد حل کامل در تاریخ المپیاد برای این مسأله توسط دانش آموزان شرکت کننده در المپیاد ارائه شد. در اینجا داستان طرح این مسأله از زبان طراح آن آقای سدراکیان[1] از کشور ارمنستان را می خوانیم.

مسأله

فرض کنید ABCDEF یک شش ضلعی محدب باشد که در آن AB موازی DE، BC موازی EF و CD موازی AF باشد. فرض کنید R_A ، R_C و R_E بترتیب نشان دهندهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث های FAB، BCD و DEF باشند و P نشان دهندهٔ محیط شش ضلعی باشد.

ثابت کنید. $$R_A+R_C+R_E \ge \frac{1}{2}P$$

برای بازسازی راهی که من برای طرح این مسأله طی کردم، مسأله زیر را درنظر بگیرید.



(شکل ۱)

نقطهٔ P درون مثلث مفروض است. فاصلهٔ این نقطه از رأسها برابر R_1 ، R_2 و R_3 و فاصلهٔ آن از ضلعها d_1 ، d_2 و d_3 است (به شکل نگاه کنید). ثابت کنید.

$$R_1+R_2+R_3 \ge 2(d_1+d_2+d_3)$$

این قضیه معروف اردوش ـ موردل است. یکی از اثباتهای این قضیه را که من می شناسم به صورت زیر است.

$$R_1=\frac{\sqrt{d_2^2+d_3^2-2d_2d_3\cos\alpha}}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sqrt{d_2^2+d_3^2-2d_2d_3\cos(\beta+\gamma)}}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{\sqrt{(d_2\sin\gamma+d_3\sin\beta)^2+(d_2\cos\gamma-d_3\cos\beta)^2}}{\sin\alpha}$$

$$\ge d_2\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+d_3\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

متشابهاً

$$R_2\ge d_1\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+d_3\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$R_3\ge d_1\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+d_2\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

از اینرو

$$R_1+R_2+R_3\ge d_1\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)$$

$$+d_2\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)+d_3\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)$$

$$\ge 2d_1+2d_2+2d_3$$

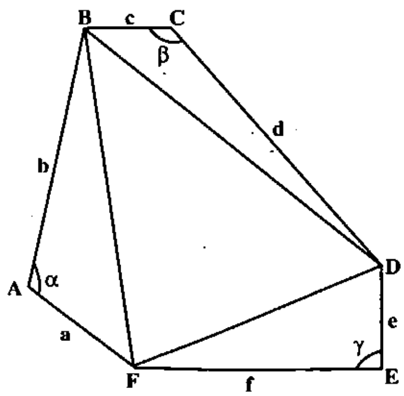
با بررسی این اثبات، می توان لم زیر را صورت بندی کرد.

لم: مثلثی با دو ضلع a و b که زاویهٔ بین آنها α است، داده شده است. برای هر β و γ بطوری که $0<\beta,\gamma<\pi$ ، رابطهٔ $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$

$$2R\ge a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+b\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

برقرار است، که در آن R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است.

حال یک شش ضلعی درنظر بگیرید که اضلاع مقابل آن موازی یکدیگر باشند (به شکل ۲ نگاه کنید).



(شکل ۲)

لم را برای سه مثلث نشان داده شده در شکل ۲ بکار ببرید.

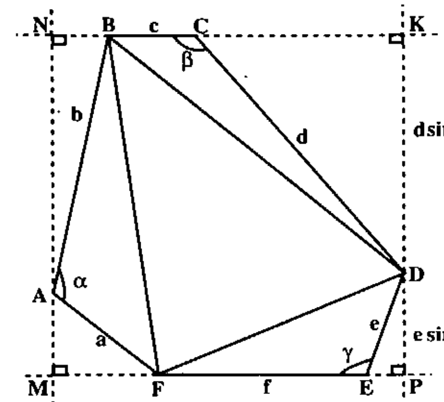
$$2R_A\ge b\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$2R_C \ge c\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+d\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$2R_E \ge e\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}+f\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

واضح است که حل مسأله بلافاصله از این نامساویها نتیجه نخواهد شد.

بیایید معنای هندسی نامساوی $2R_A \sin\alpha \ge b\sin\gamma + a\sin\beta$ را روشن کنیم.



(شکل ۳)

$$2R_A \sin\alpha = BF \ge b\sin\gamma + a\sin\beta = AN + AM$$

از اینرو، BF بزرگتر یا مساوی فاصلهٔ بین ضلعهای BC و EF است این مطلب به ما اشاره می کند که رابطهٔ

$$2R_A \sin\alpha \ge d\sin\beta + e\sin\gamma$$

یا

$$2R_A \ge d\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+e\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

باید برقرار باشد. بنابراین سه نامساوی جدید،

$$2R_A \ge d\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+e\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$2R_C \ge a\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+f\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

$$2R_E \ge c\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+b\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

را به نامساویهایمان اضافه می کنیم. از جمع کردن این شش نامساوی، نامساوی زیر را بدست می آوریم.

$$4R_A+4R_C+4R_E \ge b\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)$$

$$+a\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)+c\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)$$

$$+e\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)+d\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)$$

$$+f\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) \ge 2(a+b+c+d+e+f)$$

که از اینجا به دست می آوریم

$$R_A+R_C+R_E \ge \frac{a+b+c+d+e+f}{2}$$

طبیعی است که فکر کنیم این نامساوی برای هر شش ضلعی برقرار است ولی نمونه ای از یک شش ضلعی وجود دارد که برای آن این نامساوی صحیح نیست: $\hat{A}=90^\circ$ ، $\hat{B}=\hat{F}=135^\circ$ ، $\hat{C}=\hat{D}=\hat{E}=120^\circ$ و $BC=CD=DE=EF$.

مشابهاً می توان مسأله زیر را صورت بندی کرد.

مسأله

شش ضلعی محدب ABCDEF که در آن $AB = BC$ ، $CD = DE$ ، $EF = FA$ و $A\hat{B}C + C\hat{D}E + E\hat{F}A = 360^\circ$ داده شده است. ثابت کنید.

$$R_A+R_C+R_E \ge \frac{P}{2}$$

زیرنویس:

۱. Nairi M. Sedrakyan

برنامهٔ پیشنهادی برای نزدیک شدن به سال جهانی ریاضیات
(سال ۲۰۰۰ میلادی)

بهزاد منوچهریان ـ دانشکدهٔ ریاضی دانشگاه تهران

نزدیک یک قرن از برگزاری کنگره بین المللی ریاضیدانان در پاریس، می گذرد. هیلبرت با فهرست کردن بیست و سه مسئله اساسی و عرضه آن به عالم ریاضیات، سر منشأ تحولات بسیاری در ریاضیات قرن اخیر شد. تلاش ریاضیدانان نه تنها برای حل آن مسائل بلکه برای هزاران مسئلهٔ ریز ودرشتی که در همین قرن رخ نمودند این قرن را به آکنده ترین دوره ها از کارهای درخشان ریاضی مبدّل کرد.

اینک نمایندگان ریاضیدانان خواسته اند که در سال ۲۰۰۰ آینه ای آنچنان صیقلی و شفاف فراروی بشریت قرار دهند که هرچه بهتر جلوه ای از این همه درخشش را به دنیا نشان دهند.

در آستانه سال ۲۰۰۰ میلادی اتحادیهٔ بین المللی ریاضی در سال ۱۹۹۲، سال ۲۰۰۰ را سال جهانی ریاضیات اعلام کرد و یونسکو نیز از این پیشنهاد حمایت کرد.

ما نیز باید به سهم خود بکوشیم تا برنامه ای درخور برای استقبال از این موضوع تدارک ببینیم و از این دست آویز بسیار مناسب استفاده کنیم و همگام با کوششهایی که قطعاً در بسیاری از کشورها در جهت عمومی کردن ریاضیات و اعزاز جایگاه رفیع این بخش از معارف بشری صورت خواهد گرفت با بازشناسی امکانات، نیازها و نقاط ضعف و قوت خود در این راستا گامهای جدیدی برداریم.

بدینوسیله برنامه پیشنهادی خود را برای انجام سلسله فعالیتهایی در جهت مطرح کردن ریاضیات در سطوح گوناگون جامعه ارائه می کنم.

الف ـ موضوع استقبال از سال جهانی ریاضیات می تواند به عنوان یک کارملّی در مملکت ما مطرح شود. علت این ادعا به جایگاه ریاضیات درمجموعهٔ معارف بشری بازمی گردد. البته پیشنهاد این است که انجام این سلسله فعالیتها به طور مستمر و پویا تا بعد از سال ۲۰۰۰ نیز ادامه یابد.

ب ـ خوب است این مفهوم به عده ای از مسئولین سطح بالای مملکتی که کارشان با مقولهٔ ریاضیات نزدیکی بیشتری دارد تفهیم شود تا منشأ تشکیل هیأت امنایی قوی (و البته نه تشریفاتی!) برای سرپرستی این کار بزرگ ملّی فراهم شود. از جمله می توان به وزیر فرهنگ و آموزش عالی یا معاون پژوهشی وی، وزیر آموزش و پرورش یا معاون پژوهشی وی، دبیر انجمن ریاضی، و رئیس مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات را برشمرد[1].

ج ـ با توجه به ربط مستقیم این موضوع با انجمن ریاضی، لازم است تحت نظارت و با مدیریت این انجمن کمیته های علمی و اجرایی به منظورهایی که در زیر شمرده خواهد شد، تشکیل شود.

ج ـ ۱: تعریف کار اصلی؛ به این معنی که به سؤال «چگونه می خواهیم به استقبال سال جهانی ریاضیات برویم؟» پاسخ جامع و مانع داده شود.

توضیح: مثلاً می توان موضوع «عمومی کردن ریاضیات» را درسطوح مختلف جامعه عنوان کرد و سپس در تعریف جزئی تر به این پرداخت که عمومی کردن ریاضیات در سطح دانشگاه و یا دبیرستان و دیگر سطوح در چند مرحله و چگونه صورت می پذیرد. سپس با زمان بندی طرح و تقسیم کار بین سازمانهای ذی ربط عملی شدن امر را پیگیری نمود.

ج ـ ۲: تقسیم کار بین سازمانها و وزارتخانه ها و دانشگاهها

توضیح: همان گونه که گفتیم برای انجام یک کار بزرگ و ملی باید همه را درگیر کار کرد. مثلاً امر عمومی کردن ریاضیات در دانشگاهها را به خود دانشگاهها بسپاریم که وزارت فرهنگ و آموزش عالی هم بر این امر نظارت داشته و آن را پشتیبانی کند، یا عمومی کردن ریاضیات در سطح مدارس (پیش از دانشگاه) را به خود آموزش و پرورش بسپاریم، صدا و سیما با سفارش کار به اهل فن برنامه هایی پرمحتوا در جهت تبلیغ مثبت برای ریاضیات به صورت فیلم، کارتون و غیره رسالتش را در این ارتباط انجام دهد ونظایر اینها که در جای مناسب می توان به بحث گذاشت.

ج ـ ۳: نظارت بر حسن انجام کار که باز توسط کمیته ای با مدیریت انجمن ریاضی ایران صورت می گیرد.

این پیشنهاد احتیاج به بحث و تبادل نظر دارد و لازم است پخته تر شود. به سبب آن که غرض اصلی طرح فکربرنامه ریزی در ارتباط با سال ۲۰۰۰ (سال ریاضیات) بوده از تفصیل بیشتر خودداری می کنم. باشد، در مجال مناسبی توضیحات جزئی تر را خدمتتان عرض کنم.

۱ـ در زمان چاپ مجله مطلع شدیم که هم اکنون کمیته بزرگداشت سال ۲۰۰۰ تشکیل شده است و مشغول فعالیت می باشد

هیأت تحریریه

معلمین ریاضی و کنفرانس ریاضی تبریز

امیرحسین اصغری
گروه برنامه ریزی درسی پژوهشکدهٔ تعلیم و تربیت

میهمان نوازی عالی مردم خونگرم و صمیمی تبریز موجب آن شد که برخلاف گزارشهای معمول که نکات مثبت در آخر بیان می شود، در ابتدای گزارش تشکر کنیم بویژه از اداره کل آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی و اداره کل تربیت معلم و نیروی انسانی که شأن و احترام معلمین شریف ریاضی را حفظ کرده و با پذیرایی و اسکان شایسته مقام معلم را پاس داشته وتکریم کردند، صمیمانه از همه تشکر می کنیم. معلمین شریف ریاضی از یکدیگر می پرسیدند که چه برنامه هایی برای آموزش و پرورش تدارک دیده شده است؟ چرا که در برنامه کنفرانس خبری از برنامه ویژه آموزش و پرورش نبود! برنامه دبیران که به طور روزانه تنظیم می شد همواره حاکی از عدم آمادگی و برنامه ریزی بود و اگر چه سخنران بر مطالبی که بیان می کرد تسلط کامل داشت ولی معلوم نبود وقتی ۱۵۰ دبیر ریاضی از نقاط مختلف کشور به کنفرانس آمده اند ـ که شاید تجلّی آرزوی دیرین وحدت دانشگاه و مدرسه باشد ـ برای آنها چه باید ارائه شود؟ آیا باید ۶ مسأله برای آنها حل شود (سخنرانی اول مخصوص دبیران) و یا در مورد مطالبی که از ریاضیات دبیرستان رخت بربسته است سخن گفت (سخنران دوم) و یا ...

به همهٔ سخنرانها (در بخش دبیران) ـ بنا به گفته خودشان ـ شب قبل اطلاع داده شده بود که برای دبیران کلاس درس! تشکیل دهند، روز دوم دبیران اصرار اکید داشتند که جلسه یا میزگردی با حضور مؤلفین کتابهای درسی حاضر در کنفرانس و کارشناسان ریاضی دفتر برنامه ریزی و تألیف کتابهای درسی تشکیل شود که نهایتاً برگزارکنندگان کنفرانس با تشکیل چنین میزگردی موافقت کردند. این جلسه با حضور آقایان: دکتر مدقالچی، دکتر بابلیان و حاجی بابایی از دفتر برنامه ریزی و دکتر میرنیا از دانشگاه تبریز تشکیل شد (بقیه مؤلفین حاضر در کنفرانس شرکت در این میزگرد را نپذیرفتند)، جلسه خودمانی بود و بحثی آزادانه بین معلمین و اعضای میزگرد انجام شد و جلسه یک ساعته بیش از دو ساعت ادامه یافت، این جلسه بوی آموزش و پرورش می داد و موجب خشنودی معلمین شد.

اگر چه در سالهای اخیر با توجه به تشکیل کنفرانسهای آموزش ریاضی، موضوع عدم ضرورت حضور معلمین ریاضی در کنفرانس های ریاضی کشور بطور وسیع از طرف انجمن ریاضی ایران مطرح شده است، ولی به نظر می رسد با برگزاری سمینارهای تخصصی مانند جبر، آنالیز، معادلات دیفرانسیل و سیستم های دینامیکی در کشور، اگر کنفرانس ریاضی به یک همایش عمومی علمی و وسیع سوق داده شود مناسب تر باشد. در این صورت حضور معلمان و برنامه های مناسب برای آنها، به تأثیر فرهنگی ریاضیات در جامعه کمک بیشتری خواهد کرد با این حال اگر تنها فایدهٔ کنفرانسهای سالانهٔ ریاضی برای معلمان ایجاد ارتباط و برقراری رابطهٔ دوستی و همفکری با دیگر اعضای جامعهٔ ریاضی باشد، باز هم این حضور جای سپاسگزاری دارد. اگر مایلیم ارتباط مدرسه و دانشگاه به سرنوشت دانشگاه و صنعت دچار نشود، باید در سالهای آینده به فکر برنامه ای منسجم و دقیق باشیم و بدانیم این ارتباط چه معنایی دارد و چگونه باید برقرار شود.

پاسخ به نامه ها

آقای علی بردبار ـ دانش آموز ـ فسا

مجموعهٔ C_2 را که شما در صفحهٔ ۳ مقالهٔ خود تعریف کرده اید به صورت زیر است :

$$C_2=\left\{a+b\psi \middle| a,b\in R^*,\frac{1}{\psi}=0\right\}$$

ملاحظه می شود که تنها عضو با معنی C_2 ، $+\infty$ و $-\infty$ و تعدادی از اعضای با معنی که از $a=\infty$ و $b=1$ و $\psi=-\infty$ و یا $a=-\infty$ ، $b=1$ ، $\psi=\infty$ و ... به دست می آید . از این رو به نظر نمی آید که اعداد مناسبی تعریف شود .

ضمناً شرط لازم برای آنکه $R\subseteq C_2$ آن است که $\infty\times 0$ برابر صفر تعریف شود که این امر با $\frac{1}{\psi}=0$ منافات دارد .

آقای علی ثابتیان ـ شیراز

در نامهٔ محبت آمیز خود پرسشهایی در مورد امکان همکاری با هیأت تحریریهٔ مجله را مطرح کرده بودید در پاسخ باید به اطلاعتان برسانیم که اعضای هیأت تحریریه را سردبیر مجله انتخاب می کنند ، امّا همیشه هیأت تحریریه علاقه مند به کمکهای مشاوره ای همکاران عزیز می باشد .

آقای سعید عسگری ـ دانش آموز ـ تهران

بعضی از اصطلاحات به کار رفته شده در مقالهٔ شما خوش تعریف نیستند و برای آنها استدلال ارائه نکرده اید . امیدواریم در مقاله های بعدی این موضوع را در نظر بگیرید .

آقای نادرونديوسفی ـ میاندوآب

رشد شمارهٔ ۴۵ ، آخرین شمارهٔ سال تحصیلی ۷۵ ـ ۷۴ بوده است . برای دریافت شماره های سال ۷۶ ـ ۷۵ باید اشتراک خود را تمدید نمائید .

آقای محمدجواد قلندری ـ دانشجو ـ نوشهر

مقاله و برنامهٔ شما دربارهٔ تفاضلهای تقسیم شدهٔ نیوتن رسید . با توجه به اینکه همهٔ مطالب ارسالی شما و برنامه در کتابهای درسی آنالیز عددی موجود است از چاپ آنها معذوریم . در ضمن مطالبی هم که در مورد درس دانشگاهی معادلات دیفرانسیل ارسال فرمودید با خط مشی مجله همخوانی ندارد .

آقای حسن کفاش امیری ـ دبیر ـ بابلسر

نامهٔ محبت آمیز شما حاوی راه حل مسائل رشد شمارهٔ ۴۵ به دست ما رسید .

آقای جواد مهرجوفرد ـ دانش آموز ـ بیرجند

راه حل پیشنهادی شما برای اثبات قضیهٔ لموس صحیح است .

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
تعلیم و تعلم عبادت است

Roshd رشد آموزش ریاضی
Mathematics Education Journal

Vol. 11- No. 48 - 1997

P.O.Box 1587, Mathematic Department
Iranshahr Shomali,
Building No.4

In The Name of Allah


اول تا سوم شهریور ماه ۱۳۷۶ کرمانشاه ـ ایران
23-25 Aug. 1997 Kermanshah, I.R.IRAN
دومین کنفرانس
آموزش ریاضی
2nd Annual
Iranian Mathematics
Education Conference