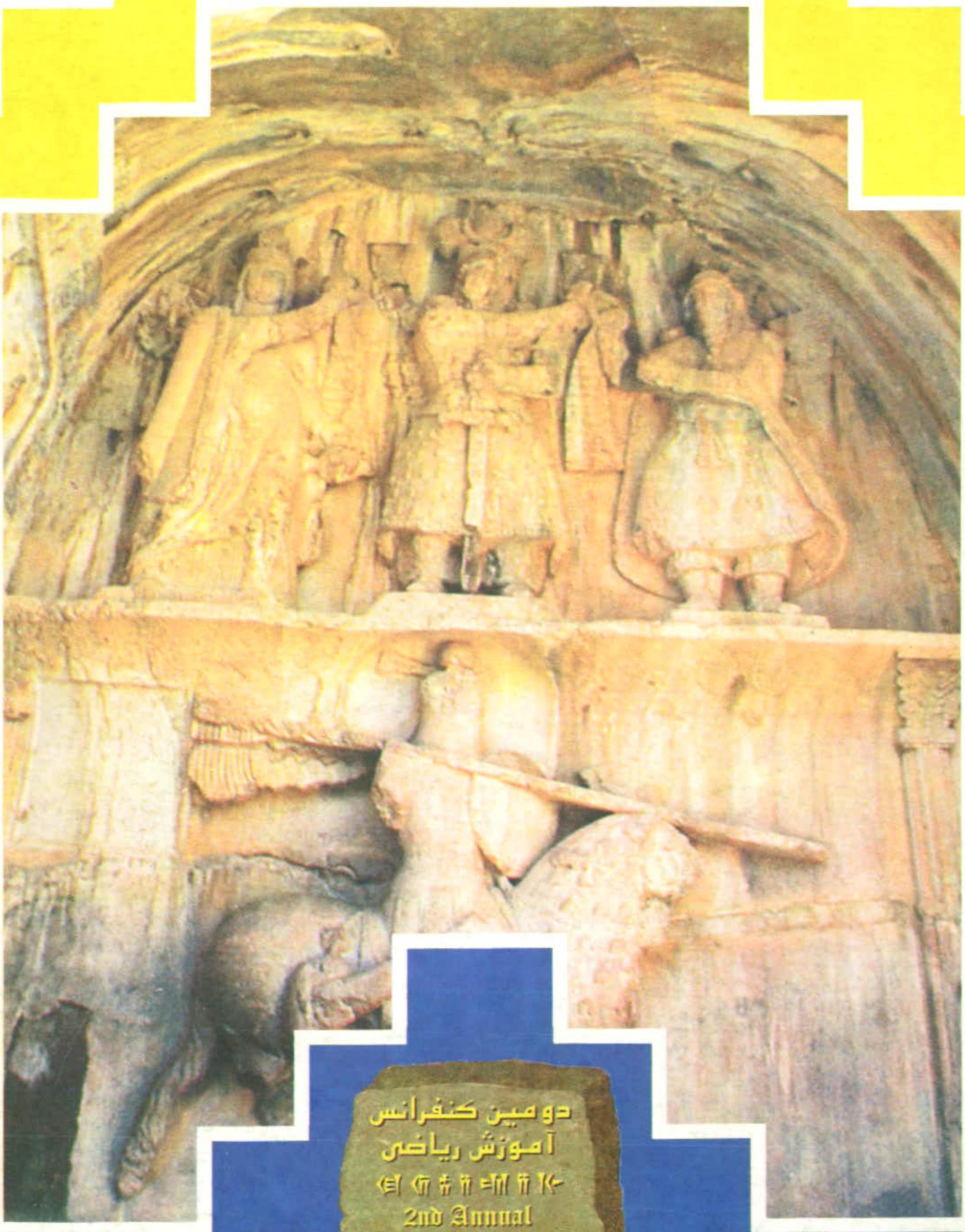
سال یازدهم
شماره ۴۷
زمستان ۱۳۷۵
۱۵۰ تومان

رشد آموزش ریاضی



دومین کنفرانس
آموزش ریاضی

2nd Annual
Iranian Mathematics
Education Conference

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
تعلیم و تعلّم عبادت است

رشد آموزش ریاضی
Roshd Mathematics Education Journal

سال یازدهم ـ زمستان ۱۳۷۵ ـ شماره مسلسل ۴۷
نشریه گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی ـ تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۳۰۳)

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

روی جلد شماره قبلی اشتباهاً سال دوازدهم درج شده بود که با پوزش بدینوسیله اصلاح می‌شود.

• مجلهٔ رشد آموزش ریاضی به منظور اعتلای دانش حرفه‌ای و موضوعی علاقه‌مندان و دست‌اندرکاران آموزش ریاضی، سه شماره در هر سال تحصیلی منتشر می‌شود. تمام علاقه‌مندان می‌توانند مقالات تحقیقی، توصیفی و تجربی خود را برای چاپ در اختیار این مجله بگذارند.

رعایت نکات زیر در مورد مقاله‌ها ضروری است.
- مطالب ارسالی باید بر یک روی کاغذ و با خط خوانا نوشته شود.
- مشخصات دقیق نویسنده، میزان تحصیلات، تجربه آموزشی و پژوهشی و آدرس نویسنده در مقاله درج شود.
- مقاله‌های ترجمه شده با اصل مقاله همراه باشد.
- منابع مقاله در انتهای آن ذکر شود.

لازم به ذکر است که مجله در رد، قبول، ویرایش و تلخیص مقاله‌های رسیده آزاد است. همچنین مقاله‌های ردشده بازگشت داده نمی‌شود.

بنام خدا

سخنی با خوانندگان

رسید مژده که آمد بهار و سبزه دمید
وظیفه گربرسد مصرفش گل است و نبید

قبل از هر سخنی، نزدیک شدن بهار و آغاز سال جدید را خدمت خوانندگان عزیز تبریک می گوییم. بهار پیام آور شادابی، شکفتگی، نوآوری و سرزندگی است و زندگی زمانی زیباتر خواهد شد که این شادابی و نوآوری را به همهٔ جنبه های آن، به ویژه ریاضی سرایت دهیم، جایی که به ظاهر اثری از سرسبزی، شادابی و روح زندگی بخش وجود ندارد! در آستانهٔ سال تحصیلی جدید، با برگزاری نخستین کنفرانس آموزش ریاضی ایران در اصفهان، روح تازه ای در کالبد نیمه جان آموزش ریاضی کشور دمیده شد و امید است که با برگزاری دومین کنفرانس آموزش ریاضی در شهریور ۱۳۷۶، امید به توانایی این جسم تازه جان گرفته بیشتر گردد. هدف از برگزاری این کنفرانسها ایجاد زمینه برای انجام پژوهشهای اصیل و بنیادی در زمینهٔ آموزش ریاضی در ایران است تا با دستاوردهای این پژوهشها بتوان به رفع مشکلات نظام آموزش دربارهٔ برنامه ریزی، تدریس، یادگیری و ارزشیابی ریاضی همت گمارد و زمینه را برای تولد مبارک آموزش ریاضی که هنوز دوران جنینی خود را در ایران می گذراند، فراهم آورد.

البته باید توجه داشت که چنین تولدی باید متکّی بر یافته های اصیل پژوهشی باشد تا بتواند، نقطهٔ عطفی در جریان آموزش ریاضی در ایران عزیزمان به حساب آید.

این پژوهشها نمی تواند جدای از روند تحقیقات آموزشی در سطح بین المللی انجام شود زیرا با توجه به تنشهای موجود بین جهانی بودن و بومی ماندن در قرن بیست و یکم (ژاک دلور ۱۹۹۶)، تهیهٔ استاندارد ملی برنامهٔ درسی باید دقیقاً در جهت کاهش این تنش و تصمیم گیری دربارهٔ پاسخ به این سؤال باشد که چگونه جزئی از جامعهٔ جهانی ریاضی باشیم و در عین حال، عنصرهای فرهنگ ملّی ریاضی را در برنامهٔ درسی ریاضی ساری و جاری کنیم. بنابراین هدف نخستین محور کنفرانس «ضرورت تدوین استانداردهای ملّی برنامهٔ درسی ریاضی» ترغیب کردن علاقه مندان به بارش ذهنی، و فراهم کردن مقدمات انجام پژوهشهای ضروری در جهت تدوین این استانداردهاست.

دومین محور کنفرانس، «نقش آموزش ریاضی در اعتلای ریاضی» است. این موضوع بخصوص در رابطه با سال ۲۰۰۰ ـ سال جهانی ریاضی ـ که توسط اتحادیهٔ بین المللی ریاضی پیشنهاد شد، اهمیت ویژه ای پیدا کرده است. این روزها بحث برسر استقبال از سال ۲۰۰۰ میلادی است که هدفش «همگانی کردن ریاضی» است. بررسی راههای نظری و عملی برای تحقق این هدف نیازمند اقدام جدی است و سؤالی که برای علاقه مندان به ریاضی مطرح می شود این است که چگونه می توان به این مهم دست یافت. کمیتهٔ علمی متواضعانه از تمام علاقه مندان به آموزش ریاضی می خواهد که به نقش آموزش ریاضی در اعتلای ریاضیات که هدف اصلی سال جهانی ریاضی است، بپردازند زیرا نمی توان آرزوی همگانی کردن ریاضی را داشت اما به چگونگی آن به معنای وسیع کلمه، نپرداخت.

سومین محور کنفرانس، «ضرورت تحوّل در آموزش مستمر جهت اعتلای دانش حرفه ای معلّمان ریاضی» است. یک برنامهٔ درسی خوب به شرطی موفق می شود که معلّمان آموزش دیده و پرتوان مسئول اجرای آن باشند و این مستلزم آن است که در برنامهٔ آموزش معلّمان در ایران تحوّل اساسی صورت گیرد تا پاسخگوی نیاز کنونی آموزش و پرورش باشد. معلّمان عزیز و فداکار اغلب با تلاش فراوان و با سعی و خطا به انتخاب شیوه های تدریس پرداخته اند و کمتر فرصت بازبینی در آنها را داشته اند. آموزش معلّمان در ایران معمولاً محدود به دانش موضوعی، چندین درس در حوزهٔ علوم تربیتی (شامل روشهای تدریس واصول و فنون معلّمی) و تدریسهای عملی (تمرینهای معلّمی) است که سالهاست به شیوهٔ قبلی تدریس می شوند. با این حال، نقش دانش حرفه ای معلّمان کمتر مورد بررسی قرار گرفته و از نظریه های آموزشی مبتنی بر تجربه های غنی معلّمان کمتر گفتگو شده است. هدف از طرح این موضوع به عنوان یکی از محورهای اصلی کنفرانس، این مهم است که چه چیزی معلّم را معلّم می کند؟ به قول حافظ، آن معلّمی چگونه حاصل می شود؟ (ستون روایتهای معلّمین ریاضی دقیقاً در راستای به نظریه کشیدن این تجربه هاست.)

چهارمین محور کنفرانس ارائهٔ یافته های پژوهشی دربارهٔ شیوه های تدریس مفاهیم ریاضی با تأکید برحسابان است. شیوه های تدریس در حال حاضر به طور عمومی تدریس می شوند که در نوع خود موجّه هستند؛ اما روش تدریس ریاضی اختلاف بنیادی با سایر روشهای تدریس دارد و دارای ویژگیهای منحصر به فردی است. تا وقتی که یک مدرّس روش تدریس، ریاضی را در سطح معقولی نداند، چگونه می توان از او انتظار داشت که به گوناگونی روشهای ارایهٔ آن آگاه و مسلط شود؟

علت تأکید بر حسابان این است که هم بخش عمده ای از ریاضی نظام جدید آموزش متوسطه از جنس حسابان است و هم بخش عظیمی از نیروهای دانشگاهی صرف تدریس حسابان می شود. در سطح بین المللی، در مورد روشهای تدریس حسابان پژوهشهای زیادی انجام گرفته است و چند نفر از مدعوین کنفرانس در این زمینه به ارایهٔ یافته های پژوهشی خود می پردازند.

امید است که کنفرانسهای آموزش ریاضی ایران هم بتواند به معرفی ابعاد مختلف آموزش ریاضی به عنوان یک حوزهٔ معرفتی بپردازد و هم با ایجاد ارتباط با مراکز پژوهشی و پژوهشگران برجسته در سطح بین المللی، به ریشه یابی مشکلات تدریس و یادگیری، برنامهٔ درسی، ارزشیابی و آموزش معلّمان ریاضی پرداخته و پیشنهادهای عملی به جامعهٔ آموزشی ایران ارائه دهد.

آموزش ریاضی چیست؟

زهرا گویا
دانشگاه شهید بهشتی

امروزه شهرت ریاضی شبیه شهرت خودرو سواری در ۵۰ سال قبل است. در آن موقع، تصوّر عمومی بر آن بود که خودروها گرانقیمت و خطرناک هستند و هیچکس به جز یک مرد ثروتمند توانایی داشتن یک خودرو را ندارد، یا هیچکس به جز یک رانندهٔ حرفه ای نمی تواند رانندگی کند. به همین ترتیب، هنوز باور عمومی آن است که ریاضی برای افراد استثنایی، برای اجتماع نخبگان و برای تعداد اندکی است. الان زمان آن رسیده است که کسی برای ریاضی همان کاری را بکند که فورد با ساختن مدل T برای خودروهای سواری انجام داد (آنها را به تولید انبوه رساند.).

ویلیام، دابلیو سایر[۱] *(۱۹۷۱)*

ریاضی تنها به عنوان یک موضوع درسیِ دارای هدفهای محدود مطرح نیست. بسیاری از محققان براین باورند که ریاضی، جریان طبیعی تفکّر بشری است. از همان زمان که کودک با شعف الگوی ساده ای را در حین بازی تشخیص می دهد و بعد از مشاهدهٔ اشیا، در مورد چگونگی عملکرد آنها حدسهایی می زند، در واقع به شیوه ای طبیعی به نخستین تجربه های خود از درک ریاضی دست می یابد. مردم ریاضی رابه کارمی برند و برای انجام کارهای خود به آن نیاز دارند. بسیاری از رشته های تحقیقی ـ تحصیلی از علوم انسانی و اقتصاد گرفته تا علوم مهندسی و پایه، همگی به ریاضی به عنوان یک نیروی محرکه وابسته هستند. می توان گفت که تقریباً همهٔ افراد با توجیه های مختلف، نیاز روزافزونی به یادگیری ریاضی دارند. علاوه بر نیاز رشته های مختلف به ریاضی به عنوان نیروی محرّکه و ابزار انجامِ کار، ریاضی قدرت خلاقیت و تفکّر و توانایی استدلال را تقویت می کند، نظم فکری به وجود می آورد و زیبایی شناسی را در بشر ترغیب می نماید. هر انسانِ دارای هوش متعارف، توانایی فهمیدن، یادگرفتن و لذت بردن از ریاضی را در سطحهای مختلف دارد. در نتیجه، وظیفهٔ هر نظام آموزشی فراهم آوردن شرایط مناسب تدریس و یادگیری ریاضی و ایجاد انگیزه در فراگیرندگان است تا به قول ویلیام سایر، تولیدهای این شاخه از علم به طور انبوه در اختیار همگان قرار گیرد.

به گفتهٔ شونفِلد[۲] (۱۹۸۷)، به طور خلاصه آموزش ریاضی یعنی هرآنچه که مربوط به آموزش و یادگیری ریاضی می شود. در واقع، «بحثهای اساسی و نیروهای مؤثر در آموزش ریاضی را می توان با دو عنوان برنامهٔ درسی ریاضی[۳] و **چگونگی تدریس و یادگیری ریاضی**[۴] مطرح نمود که هر دو عنوان، طبیعت ریاضی، محتوا، فرآیند یاددهی ـ یادگیری، تفاوتهای فردی در یادگیری، ماهیت دانش ریاضی و بسیاری مباحث دیگر را دربر می گیرند. علاوه بر اینها، تغییر دیدگاه نسبت به خود علم ریاضی و پیدایش فلسفه و روانشناسی تربیتی، همگی از نیروهای اساسی در تشکیل دیسیپلین آموزش ریاضی هستند[۵]» (۱۹۷۱).

این مقاله، به معرفی یک مدل چهار وجهی برای مطالعهٔ آموزش ریاضی می پردازد. چهار وجه این مدل عبارتند از ریاضی، فلسفه، روانشناسی و جامعه شناسی؛ و آموزش ریاضی در قلب این چهار وجهی قرار دارد. این مدل به اختصار MAPS نامیده می شود.

آموزش ریاضی چیست؟

مسئولیت عمدهٔ بسیاری از متخصصان و پژوهشگران، مطالعه در مورد چگونگی دستیابی به دانش ریاضی توسط فراگیرندگان است. این عده شامل معلمهای ریاضی، ریاضیدانها، تولیدکنندگان برنامه های درسی ریاضی، آموزش دهندگان معلمان و پژوهشگران است که همگی آنها را می توان با عنوان آموزشگر ریاضی[۶] معرفی نمود و شاخه ای که پذیرای این مسئولیت است، آموزش ریاضی[۷] نامیده می شود. هدف یک آموزشگر ریاضی این است که از نقطه نظر ذهنی و احساسی، تجربهٔ یادگیری ریاضی دانش آموز را بهینه کند، تجربه ای که برای بسیاری از آنها شادی بخش نبوده و الزاماً شایستگی های دانش آموزان را بیشتر نکرده است. به طور کلی، ریشه یابی علتهای عدم یادگیری ریاضی دانش آموزان از جمله وظایف آموزش ریاضی است. اما قبل از

آن، لازم است که مبانی آموزش ریاضی به بحث گذاشته شود.

به گفتهٔ فی[8] (۱۹۸۱)، آموزش ریاضی به طور اساسی با علوم تجربی ـ فیزیکی متفاوت است. این حوزهٔ معرفتی، بیشتر شبیه علوم اجتماعی است که سعی در فهمیدن دنیایی دارد که اغلب پارامترهای مهم آن قابل تکرار از زمانی به زمانی یا از محلی به محل دیگر نیستند. از جمله موضوعهای مهم آموزش ریاضی، یادگیری، تدریس، برنامهٔ درسی و ارزشیابی ریاضی هستند. اما از همه اساسی تر این واقعیت است که مبانی هر تصور مفهومی از آموزش ریاضی به طور جداناپذیری از خود علم ریاضی نشأت گرفته است. برای مثال، موضوع بحث انگیز فلسفهٔ ریاضی و پاسخهای مختلفی که برای سؤال «ریاضی چیست؟» مطرح می شوند، همگی در تبیین مبانی نظری آموزش ریاضی تأثیرگذار هستند. «آموزش ریاضی نیاز به رویکردهای جامع و فرانظریه هایی[9] دارد که از یک فلسفهٔ شایستهٔ ریاضی تشکیل شده باشد. یک فلسفهٔ شایستهٔ ریاضی باید خود ریاضی را به عنوان یک نظام از دیدگاه فعالیتهای همکاری و ارتباط بین انسان و اشیای ریاضی و تعامل اجتماعی ببیند.» (اِستینر[10]، ۱۹۸۷).

بعضی از محققان ریاضی، تنها عامل مؤثر در آموزش ریاضی را علم ریاضی می دانند. هاردی در مراسم افتتاحیهٔ اتحادیهٔ ریاضی در سال ۱۹۲۵ اعلام کرد «در تدریس ریاضی تنها یک چیز دارای اهمیت اساسی است و آن چیز آن است که معلم باید با تمام توانِ خود و صادقانه تلاش کند تا موضوعی را که می خواهد درس بدهد خوب درک کرده و بفهمد و بعد حقایق ریاضی را در محدودهٔ ظرفیت ذهنی و حوصلهٔ دانش آموزانش، برای آنها توضیح داده و تفسیر کند (ص ۳۰۹)». چنین دیدگاهی، تا مدتها تأثیر منفی بر جریان آموزش ریاضی گذاشت و تصویر «ریاضی محصور در برج عاج» را در نزد جامعه پررنگ تر کرد. به گفتهٔ هیگنسون[11] (۱۹۸۰)، «به جز چند ریاضیدان منزوی و غیرفعال (از نظر اجتماعی)، باقی آنها می دانند که به غیراز ریاضی، ابعاد مهم دیگری نیز در ساختن آموزش ریاضی دخیل هستند. حتی از دیدگاه محافظه کارانهٔ هاردی نیز، به نقش مؤثر ظرفیت ذهنی و علاقمندی دانش آموز به طور غیر مستقیم بها داده شده است.» بررسی ظرفیت ذهنی و علاقمندی دانش آموز به موضوع، سؤالهای دیگری را در رابطه با روانشناسی تربیتی و نقش آنها در یادگیری ریاضی مطرح می کند. از طرف دیگر، مطالعات وسیع در رابطه با ریاضی به عنوان یک فعالیت اجتماعی و نقش عوامل فرهنگی و اجتماعی در یادگیری ریاضی، بُعد جامعه شناسی را به آموزش ریاضی می افزاید. با توجه به ابعاد چهارگانهٔ ریاضی، فلسفه و معرفت شناسی، روانشناسی و جامعه شناسی، هیگنسون به معرفی یک مدل چهار وجهی برای مطالعهٔ آموزش ریاضی می پردازد.

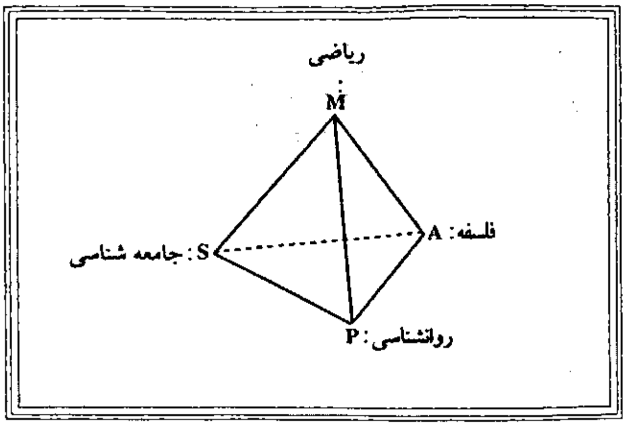
مدل چهار وجهی مطالعهٔ آموزش ریاضی

یکی از تصویرهای مناسبی که می توان از آموزش ریاضی ارائه داد، تصویر هندسی یک چهار وجهی است که چهار وجه آن از چهار حوزهٔ معرفتی **ریاضی، فلسفه و معرفت شناسی، روانشناسی و جامعه شناسی** تشکیل یافته است. هیگنسون این مدل آموزش ریاضی را MAPS[12] می نامد و معتقد است که این چهار وجهی تصویر دقیق تری از مثلاً چهار خط موازی با هم ارائه می دهد زیرا در این مدل، جنبه های تعامل و پویایی بین وجه ها به خوبی نشان داده می شوند. او در ادامه می افزاید: «این واقعیت که چهار وجهی بسته است، ممکن است بلافاصله این ادعا را بهتر بنمایاند که وجود و تعامل بین هر چهار حوزهٔ معرفتی شرط لازم و کافی برای تعیین ماهیّت آموزش ریاضی هستند.» (ص ۵).

برای نشان دادن کارآیی مدل و موجّه بودن ادعای فوق، باید آن را مانند هر تعریف دیگر مورد آزمایش قرار دهیم. یکی از آزمایشها، طرح سؤالهای **چه ریاضی ای، چه موقع، چه کسی، کجا، چرا و چگونه** در رابطه با یادگیری ریاضی است. برای مثال، بُعد ریاضی مدل می تواند پاسخگوی **چه** باشد. در حالی که بُعد فلسفی به **چرا**، بُعد اجتماعی به **چه کسی و کجا** و بُعد روانشناسی به **چه موقع و چگونه** باید بپردازند.

با توجه به مدل، می توان هم برجنبه های گسسته و هم پیوستهٔ آن متمرکز شد. همانطور که هیگنسون می گوید، «از دیدگاه پیوسته، می توان در مورد وجود نقطهٔ بهینه که با زمان تغییر می یابد، فرضیه سازی کرد. در طول زمان، تغییر و تحولات اساسی در هر چهار بُعد مدل اتفاق می افتد، ابزار و دیدگاههای جدید به وجود می آیند، ریاضی روز به روز توسعه یافته و شاخه های تازه ای در آن به وجود می آید. علم روانشناسی و روانشناسی یادگیری به کشف رمز و رازهای جدید انسان می پردازد و ارزشهای اجتماعی دائماً در حال تغییر هستند، در نتیجه، برای مثال اگر در زمان t_1، بهترین ترکیب M، A، P و S موقعیت بهینهٔ p_1 را درجایی داخل چهار وجهی به وجود آورد، ممکن است در زمان t_2 نقطهٔ بهینهٔ p_1 تغییر مکان دهد.» (هیگنسون، ص۵). این رویکرد نشان می دهد که در زمانها و مکانهای مختلف، همان طور که فِی عنوان کرده بود، یک آموزش ریاضیِ تثبیت شدهٔ غیرقابل تغییر ایده آل که جوابگوی نیازهای همهٔ افرادَ باشد وجود ندارد.

اگر حالت گسستهٔ مدل را در نظر بگیریم، چهره های دیگری از آموزش ریاضی را می توانیم ببینیم. از دیدگاه صورت گرایی و منطق ریاضی، مجموعه ای با چهار عضو، دارای یک مجموعهٔ توانی با ۱۶ عضو است. اگر مجموعهٔ تهی و خود مجموعهٔ چهار عضوی را کنار بگذاریم، چهارده ترکیب برای مجموعهٔ توانی باقی می ماند. با توجه به مدل چهار وجهی، این چهارده ترکیب عبارت از چهار رأس M، A، P و S، شش یال MA، MP، MS، AP،



AS و PS و چهار وجه MAP، MAS، MPS و APS می باشد. با این ساختار، می توان به مطالعهٔ تأثیر یک عامل بر عاملهای دیگر پرداخت. بعضی از این ترکیبها، حوزه های معرفتی تعریف شده ای هستند. برای مثال، MA فلسفهٔ ریاضی، معرفت شناسی و دیدگاههای مختلف نسبت به ماهیت ریاضی را مورد بررسی قرار داده و به مطالعهٔ مکتبهای مختلف فلسفی ریاضی می پردازد. مطالعهٔ ساختار و ماهیت دانش ریاضی، بسیاری از کارهایی که در زمینهٔ رشد تکوینی توسط پیاژه انجام گرفت و رابطهٔ روانشناسی شناختی[13] و ریاضی در وجه MAP قرار می گیرند. همچنان که مطالعات مربوط به تعامل اجتماعی، ریاضی به عنوان یک زبان، ریاضیات قومی[14] و نقش عوامل فرهنگی و اجتماعی در وجه MPS واقع می شوند. در ضمن، MAPS به معنای نقشهٔ راهنمای عمل و برنامه ریزی است و در انتخاب هریک از یالها یا وجه ها، به عنوان یک راهنما و هدایتگر است.

کاربرد مدل

مدلهای تمثیلی نمایش دهنده های هستی های پیچیده هستند که درک بهتر آن هستی ها را تسهیل می کنند. یک مدل خوب، روابطی که قبلاً گنگ بوده اند را آشکار می کند و به حل مسائل کهنه کمک می نماید. برای مثال، از زمان پیدایش آموزش عمومی همیشه این سؤال مطرح بوده است که چرا بسیاری از فراگیرندگان در یادگیری ریاضی مشکل دارند؟ یا موفقیت و افت تحصیلی ریاضی یعنی چه و چگونه افزایش اولی و کاهش دومی را تضمین کنیم؟ برای ریشه یابی علتها و پاسخ به چنین سؤالهایی، می توانیم از مدل چهار وجهی MAPS کمک بگیریم. پاسخهایی که هریک از حوزه های چهارگانهٔ ریاضی، فلسفه، روانشناسی و جامعه شناسی به سؤالهای فوق می دهند به احتمال زیاد با هم متفاوت هستند و وظیفهٔ آموزش ریاضی آن است که نقطهٔ بهینه را با توجه به تعامل چهار حوزه بیابد و براساس آن برنامه ریزی کند.

این مدل، همچنین به درک بهتر جریان تاریخی آموزش ریاضی کمک می کند. برای مثال، حوادثی که بعد از پرواز قمر مصنوعی شوروی سابق در سال ۱۹۵۷ در آمریکا اتفاق افتاد و پیدایش نظریهٔ مجموعه های کانتور و نظریهٔ عدم تمامیت گودل، مهمترین نیروهای تأثیر گذار بر جریان تهیهٔ برنامه های درسی دوران ریاضی جدید[15] و پیدایش گروه مطالعهٔ ریاضی مدرسه ای (SMSG)[16] بودند. در آن دوره، یال MS یعنی پیشرفتهای علم ریاضی و حوادث اجتماعی بعد از جنگ جهانی دوم از یک طرف و بحث دربارهٔ مکتبهای فلسفی ریاضی (مانند صورت گرایی و فلسفهٔ منطقیون) و تأثیر آنها بر علم ریاضی و چگونگی انتخاب محتوا از طرف دیگر (یال MA) از نیروهای مؤثر در آموزش ریاضی بودند واین در حالی بود که با پیدایش نظریه های یادگیری جدید و بحثهای جدید پیرامون معرفت شناسی و فلسفه ریاضی، وجه MAP نقش جدید و مؤثری در آموزش ریاضی بازی کرد.

مدل MAPS می تواند ما را در پیش بینی نقش آموزش ریاضی در اعتلای ریاضی در آینده کمک کند. مسائل عمدهٔ اجتماعی که رأس جامعه شناسی مدل را تشکیل می دهند، نقش ویژه ای در آموزش ریاضی خواهند داشت. برای نمونه، رشد بی سابقهٔ جمعیت در ایران در دو دههٔ گذشته و کنترل بجا و بموقع آن در چند سال اخیر، مسائل جدیدی را برای آموزش ریاضی مطرح می کند، چرا که برای اولین بار در تاریخ اخیر خودمان، تعداد دانش آموزان ابتدایی کاهش میلیونی داشته است. از طرف دیگر، سیل جمعیت دو دههٔ گذشته به سمت دورهٔ راهنمایی و سپس متوسطه در جریان است که آموزش آنها نیازمند جرح و تعدیل برنامه های آموزش ریاضی خواهد بود. همچنین، جامعهٔ جهانی با شتاب به سوی قرن بیست و یکم که قرن اطلاعات و خدمات نامیده شده در حرکت است و «از هم اکنون تا سال ۲۰۰۰[17] میلادی، برای اولین بار در تاریخ بشر، بیشتر شغلهای جدید نیازمند آموزش بعد از دورهٔ متوسطه هستند» (NRC[18], ۱۹۸۹) و میزان نیازمندیهای عمومی به ریاضی نیز به سرعت افزایش خواهند یافت. تمام این تحولات اجتماعی، دیدگاههای جدید و مسائل تازه ای را برای آموزش ریاضی به وجود می آورند.

همچنین، مدل MAPS دامنه های تحقیقات آموزش ریاضی را وسیعتر می کند. تحقیقات آموزشی که به طور سنتی، غالباً کمّی، آماری و براساس روشهای علمی انجام می شدند توانایی پاسخگویی مسایل این رشته را نداشتند و گاهی با عکس العمل شدید معلمان ریاضی مواجه شده اند زیرا مربوط بودن نتایج و یافته ها از جانب آنها زیر سؤال رفته است. این مدل با لازم و کافی دانستن تعامل بین چهار بُعد، افقهای جدیدی را برای تحقیقات اصیل، مفید، مربوط و حرکت آفرین ترسیم می کند. روشهای تحقیق کیفی از قبیل مردم شناسی[19] و تحقیق عمل (اقدام پژوهی)[20] جلوه های زیبا و ناگفتنی از تعامل بین ریاضی، جامعه شناسی، روانشناسی و فلسفه را می نمایانند. این روشهای جدید، ابعاد آموزش ریاضی را بسیار گسترده تر می کنند و مسائل

معرفت شناسی[۲۱] درون این رشته را نیز از زاویه های جدیدتری مورد بررسی قرار می دهد.

یکی از مشکلات جدّی فرآیند آموزش و یادگیری ریاضی، مسألهٔ آموزش دانشجو ـ معلّمان و آموزش ضمن خدمت معلمان است. مطالعهٔ عمیق این مدل می تواند به آموزشگران ریاضی، ریاضیدانها و مجریان آموزشی کمک کند تا چارچوب جدیدی برای این نوع آموزشها تهیه کنند. شاید بتوان به کمک این چارچوب، به بررسی بهتر نیازهای آموزشی معلمان که در واقع ستون فقرات جامعهٔ آموزشی و ریاضی هستند، پرداخته و راه و روشهای مناسب تری متکی بریافته های پژوهشی برای آموزش مستمر معلمان پیدا کرد.

به طور خلاصه، این مدل می تواند توجه ما را به ابعاد مختلف آموزش ریاضی بیشتر کند همچنان که ممکن است در دراز مدت، کارآیی آن نیز زیر سؤال برود چرا که حوزه های معرفتی جدیدی در گسترش آن دخیل خواهند بود. به گفته هیگنسون (۱۹۸۰)، «ممکن است این مدل ناقص، از نظر منطقی غیردقیق یا دارای استفادهٔ بسیار محدود در تولید سؤالها یا بینشهای جدید باشد. این به طور مشخص مهم نیست. موضوع مهم آن است که ما آموزشگران ریاضی دربارهٔ خود و حرفهٔ خودمان شروع به صحبت بکنیم. بگوییم که مسایل ما چه هستند و چگونه می توانیم شروع به حل آنها بکنیم. اگر مدل MAPS بتواند محرک چنین فعالیتهایی باشد، دارای ارزش قابل ملاحظه ای است. اگر ما سکوت گیج کننده ای را که تا حال وجود داشته است حفظ کرده و ادامه دهیم، درصد کودکانی که کلاسهای درس ریاضی را گیج کننده و کلافه کننده می دانند، کاهش نخواهد یافت»! . (ص۷)

مراجع:

۱ـ The National Council of Teachers of Mathematics. (1970). **A History of mathematics education in the United States and Canada: Thirty - Second yearbook.** Reston, VA: Author.

۲ـ Fey, J.T. (1981). Insights from ICME IV for US Mathematics Education. In L A. Steen & D.J. Albers (Eds.).**Teaching Teachers, Teaching Students: Reflection on Mathematics Education.** Birkhauser.

۳ـ Steiner, H.G.(1987).Philosophical and epistemological aspects of mathematics and their interaction with theory and practice in mathematics education. **For the Learning of Mathematics.** 7 (1). FLM Publishing Association, Canada.

۴ـ Hardy,G.H. (1925). What is Geometry? Presidential Address to the Mathematical Association. **Mathematical Gazette**. xII. 175, (309 - 316).

۵ـ Higginson, W. (1980). On the Foundations of mathematics education. **For the Learning of Mathematics.** FLM Publishing Association, Canada.

۶ـ Wilson , C (1971). **The open access curriculum.** Allyn and Bacon.

۷ـ Schoenfeld, A.H. (1981). (Ed). **Cognitive Science and Mathematics Education.**

۸ـ National Research Council. (1989). **Everybody Counts: A report to the nation of the future of mathematics Education.** National Academy Press.

پانوشتها

۱ـ William.W. Sawyer in "Open Access Curriculum, p. 209

۲ـ Schoenfeld

۳ـ Curriculum

۴ـ Instruction

۵ـ NCTM, Thirty - Second yearbook

۶ـ Mathematics Educator

۷ـ Mathematics Education

۸ـ Fey

۹ـ Metatheory

۱۰ـ Steiner

۱۱ـ Higgenson

۱۲ـ MAPS (M - Mathematics, A - Philosophy, P- Psychology, S- Sociology). درضمن MAPS به معنای نقشهٔ راهنمای عمل و برنامه ریزی است.

۱۳ـ Cognitive Psychology

۱۴ـ Ethnomathematics

۱۵ـ New Math Era

۱۶ـ School Mathematics Study Group

۱۷ ـ با توجه به این واقعیت و نیاز روزافزون دنیا به ریاضی، کنگره بین المللی ریاضیات، سال ۲۰۰۰ را سال همگانی کردن ریاضیات اعلام کرده است.

۱۸ـ National Research Council

۱۹ـ Ethnographic Research Method

۲۰ـ Action Research

۲۱ـ Epistemology

جادهٔ تندرستی

عین الله پاشا
دانشگاه تربیت معلم

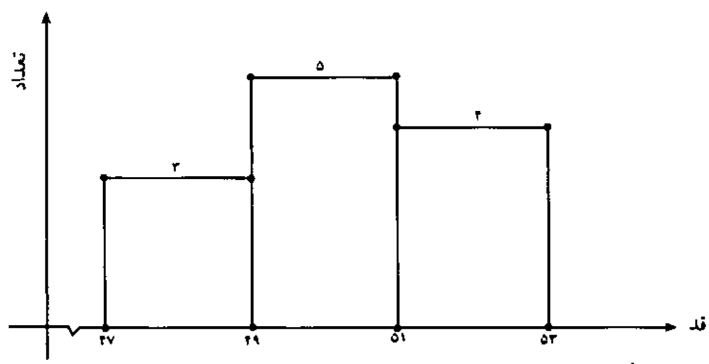
برای دستیابی به اهدافی لازم است براساس مشاهدات و نتایجی برنامه ریزی کنیم. در این راه علم آمار کمک فراوان می کند و شاید بتوان گفت که بدون استفاده از روشها و تکنیکهای آن رسیدن به هدف امکان پذیر نباشد. این ویژگی علم آمار به جایی رسیده است که گفته اند «*آمار راهی به سوی ناشناخته هاست*». در این مقاله با طرح یک مسأله و حل آن سعی می کنیم تا حدی آمار را از این دیدگاه بشناسیم.

در دنیای کنونی، تشخیص سریع سلامتی یاعدم سلامتی نوزاد در همان بدو تولد بسیار مهم است همچنین بسیار مهم است که بدانیم آیا نوزاد در دوران جنینی دارای رشد طبیعی بوده است یا خیر؟ شاید یک راه مطمئن این باشد که انواع و اقسام آزمایشها و اندازه گیریها برای هر نوزاد انجام گیرد. امّا، با توجه به هزینه های بالای اکثر آزمایشها و وقت گیر بودن برخی از آنها این روش اصلاً پسندیده نیست. به علاوه، ناراحتیها و مشکلاتی که این آزمایشها برای نوزاد دارند خوشامدگویی مناسبی برای ورود او به دنیای ما نیست. از این رو عاقلانه است که به دنبال ساده ترین و در عین حال مؤثرترین روش برای تشخیص سلامت و رشد طبیعی نوزاد باشیم. تجربه های طولانی و مطالعات پزشکی نشان داده است که در رشد طبیعی، یک «رابطهٔ طبیعی» بین قد و وزن نوزادان موجود است، یعنی نوزادی که وزن «خیلی زیاد» و یا وزن «خیلی کم» داشته باشد به احتمال قوی (نه قطعاً) از لحاظ سلامتی مشکلاتی دارد. تعیین مرزی برای قضاوت دربارهٔ وزن «خیلی زیاد» و یا وزن «خیلی کم» بر عهدهٔ علم آمار است.

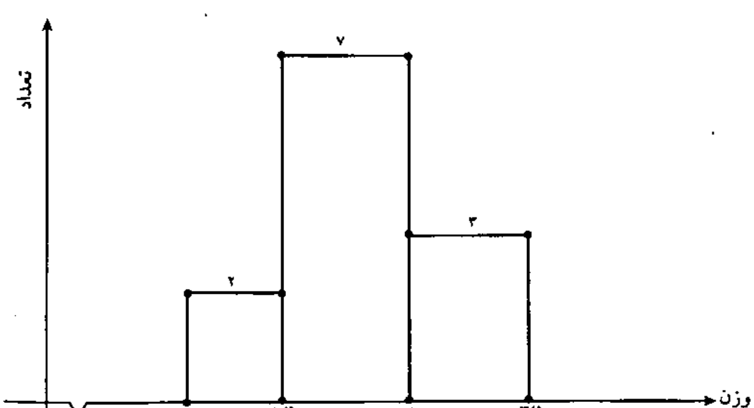
روش آماری در این گونه موارد به این صورت است که ابتدا مشاهداتی براساس ضوابطی که تعیین شده است به دست می آوریم. با مطالعهٔ مقدماتی، این مشاهدات «رابطهٔ مناسبی» را حدس می زنیم و سرانجام به کمک قوانین علم آمار، برازندگی این حدس را آزمایش می کنیم. این مراحل را با جزئیات بیشتر برای تعیین رابطهٔ بین قد و وزن نوزادان در موقع تولد به کار می بریم. برای این منظور، ابتدا اقدام به انجام مشاهده و جمع آوری اطلاعات می کنیم. ما تعداد ۱۲ نوزاد که سلامتی آنها مورد تأیید پزشکان قرار گرفته است انتخاب می کنیم و قد و وزن آنها را اندازه گیری می کنیم. در اصطلاح آماری قد و وزن را **متغیر *تصادفی*** می نامیم و آنها را به ترتیب با نماد x و y نشان می دهیم. بدین ترتیب، ***داده های خام*** که همان اطلاعات به دست آمده از مشاهده است به صورت زیر به دست می آید

(۴۹,۳/۱۵) (۵۳,۳/۶۰) (۵۰,۳/۲۰) (۵۱,۳/۲۰)
(۴۷,۲/۸۰) (۴۷,۲/۷) (۵۲,۳/۴) (۴۸,۲/۹)
(۴۹,۳/۰۰) (۵۲,۳/۲۰) (۵۲,۳/۵۰) (۵۱,۳/۱۰)

در این جدول، داده ها به صورت زوج مرتب (X,Y) آمده است که در آن X نمایندهٔ قد برحسب سانتیمتر و Y نمایندهٔ وزن برحسب کیلوگرم است. نمودارها و آمارهای هریک از این دو متغیر به طور جداگانه در زیر رسم و محاسبه شده اند.



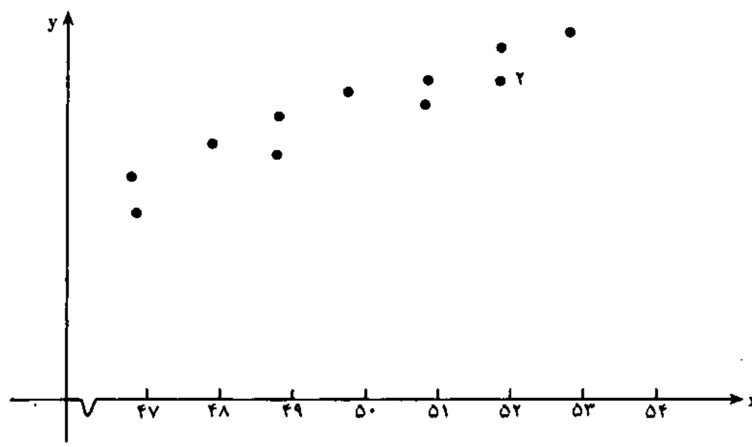
$$\bar{x} = 50/08\ ,\ \sigma_x = 2/06\ ,\ C.V. = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \times 100 = 4$$



$$\bar{y} = 3/14\ ,\ \sigma_y = 0/279\ ,\ C.V. = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} \times 100 = 8$$

در محاسبات بالا، $\bar{x}$ و $\bar{y}$ به ترتیب میانگین قد و وزن نوزادانی است که مورد مشاهده قرار گرفته اند. σ_x و σ_y به ترتیب انحراف معیارهای قد و وزن است. این دو کمیّت، تغییرات این دو متغیر را در اطراف میانگین آنها اندازه گیری می کنند. C.V. ضریب تغییرات را اندازه می گیرد. به عبارت دیگر، C.V بازگو کنندهٔ تغییرات برای هر واحد از میانگین است و به کمک آنها می توانیم تغییرات دو متغیر را با هم مقایسه کنیم. مثلاً در مثال مورد بحث ما، تغییرات وزن ۲ برابر تغییرات قد است.

برای آنکه بتوانیم رابطهٔ موجود بین دو متغیر قد و وزن را حدس بزنیم از *ابر پراکندگی* استفاده می کنیم. ابر پراکندگی نمودار نقاطی به صورت (x,y) است که در آن x نشان دهندهٔ قد و y نشان دهندهٔ وزن همان نوزاد است. ابر پراکندگی این دوازده نوزاد به صورت شکل زیر است:



عدد ۲ در کنار نقطهٔ مربوط به $x = 52$ نشاندهندهٔ این امر است که دو نوزاد با قد و وزن یکسان داشته ایم.

با مشاهدهٔ ابر پراکندگی در جستجوی تابعی به صورت $y = f(x)$ هستیم که منحنی آن به «*بهترین وجهی*» از میان این نقاط بگذرد و در عین حال صورت ساده ای داشته باشد.

تابع $y = f(x)$ که بیان کنندهٔ وزن برحسب قد است، تعیین کنندهٔ مدلی است که دو متغیر قد و وزن را به هم پیوند می دهد. با ملاحظه اجمالی ابر پراکندگی، به نظر می رسد یک مدل خطی می تواند برای این مسأله مناسب باشد. بنابراین سعی می کنیم مقادیر a و b را چنان به دست آوریم تا خط

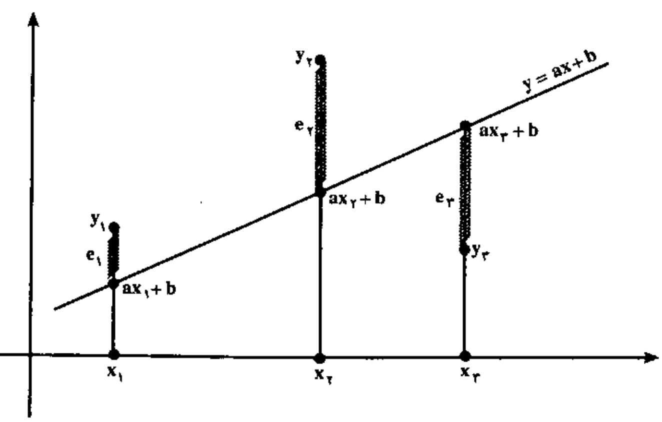
$$y = ax + b$$

به «بهترین وجهی» از میان نقاط ابر پراکندگی عبور کند. در این جا لازم است معیاری برای عبارت «بهترین وجه» ارائه کنیم. معیاری که معمولاً به کار می رود به نام معیار *کمترین مربعات* شناخته شده است. برای آنکه دلیل انتخاب این معیار روشنتر شود، کمی به توجیه مدل می پردازیم:

می دانیم برای مشاهدهٔ اول قد برابر ۴۹ سانتیمتر و وزن برابر ۳/۱۰ است. مدل $y = ax + b$ پیشنهاد می کند که اگر نوزادی دارای قد ۴۹ سانتیمتر باشد، وزن او از رابطه $y = 49a + b$ محاسبه شود. البته همانطور که می دانیم، وزن این نوزاد ۳/۱۰ است که ممکن است با آنچه که از برابری $y = 49a + b$ به دست می آید تفاوت داشته باشد، از این رو در این مدل سازی خطایی برابر $49a + b - 3/10$ ایجاد می شود. برای رهایی از علامت این خطا، روش مناسب آن است که این مقدار را به توان ۲ برسانیم. از این رو مربع خطایی که در مشاهدهٔ اول حاصل می شود عبارت است از $(49a + b - 3/10)^2$. به طور کلی با فرض $e_i = ax_i + b - y_i$ [1]، مجموع مربع خطاها عبارت است از

$$\sum e_i^2 = \sum (ax_i + b - y_i)^2$$

$\sum e_i^2$ را برای سه نقطه می توانیم در شکل زیر ببینیم:



با این مقدمات، در روش کمترین مربعات می خواهیم a و b را چنان تعیین کنیم تا عبارت $\sum e_i^2$ می نیمم شود. بنابراین، مسأله به می نیمم کردن یک تابع دو متغیری به صورت

$$g(a,b) = \sum_i (ax_i + b - y_i)^2$$

تبدیل می شود. با استمداد از مطالب ریاضی، از عبارت بالا نسبت به a و b مشتق می گیریم و با مساوی صفر قراردادن این مشتقات، دستگاه معادله ای حاصل می شود که از حل آن، a و b به دست می آید:

$$\frac{\partial g(a,b)}{\partial a} = 2\sum x_i (ax_i + b - y_i) = 0$$

$$\frac{\partial g(a,b)}{\partial b} = \sum (ax_i + b - y_i) = 0$$

پس ازانجام محاسبات لازم، مقادیر a و b به صورت زیر به دست می‌آیند :

$$a = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad , \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

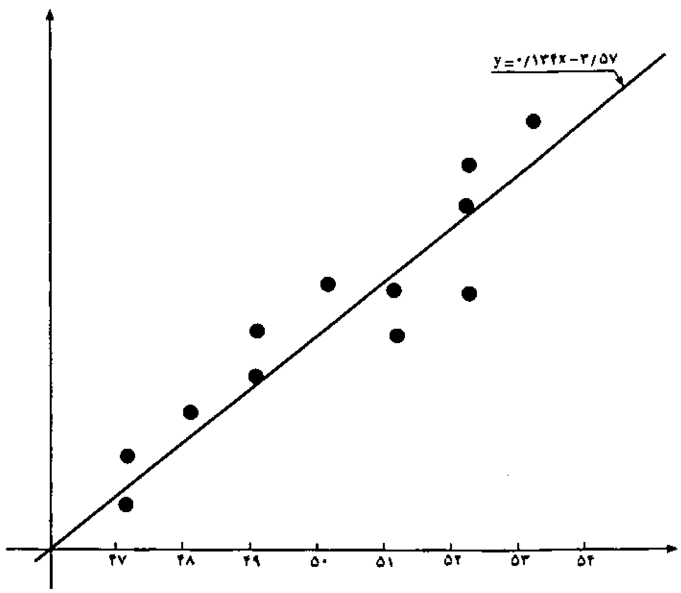
در عبارت بالا، r ضریب همبستگی است که مقدار آن به صورت زیر است :

$$r = \frac{\frac{۱}{n}\sum x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x . \sigma_y}$$

در دستورهای بالا، برای مسأله مورد نظر قبلاً $\bar{x}$ و $\bar{y}$ و σ_x و σ_y را حساب کرده بودیم. $\sum x_i y_i$ نیز از حاصلضرب اندازهٔ قد و وزن در هر مشاهده و جمع آنها به دست می‌آید. با انجام این محاسبات، خط مورد نظر برای قد و وزن نوزادان به صورت زیر به دست می‌آید :

$$y = ۰/۱۳۴x - ۳/۵۷$$

این خط و نقاط حاصل ازمشاهدات را در شکل زیر می بینیم :



نمودار ابر پراکندگی و خط $y = ۰/۱۳۴x - ۳/۵۷$

به کمک این خط، می توانیم با دانستن قد نوزادی وزن مناسب آن را حدوداً تعیین کنیم، مثلاً اگر قد نوزادی برابر $x = ۵۱/۵$ باشد *انتظار* داریم وزن او تقریباً برابر

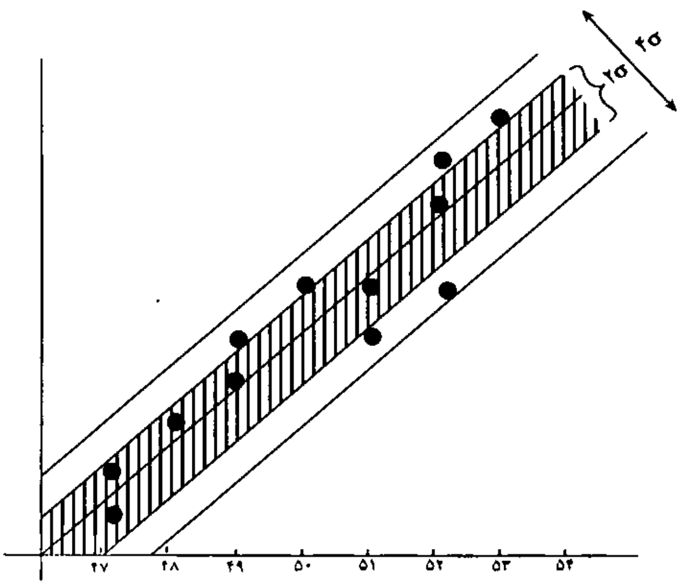
$$y = ۰/۱۳۴\times ۵۱/۵ - ۳/۵۷ = ۳/۳۳۱$$

باشد. ولی عملاً ممکن است، وزن نوزاد با قد ۵۱٫۵ با آنچه که در بالا به دست آمد تفاوت داشته باشد. می خواهیم میزان قابل قبول را برای این اختلاف، با اطمینان معینی بدست آوریم، آنچه که به عنوان معیاری برای این اختلاف می تواند به کار رود میانگین مجذورات خطاهاست و یا عبارت تعدیل یافته آن که به صورت زیر است :

$$\sigma = \sqrt{\frac{۱}{n-۲}\sum e_i^{۲}}$$

که برای مشاهده های در دست مطالعه، مقدار بالا برابر $\sigma = ۰/۱$ محاسبه و به دست می آید. براساس قضایای موجود در علم آمار، ثابت می شود حدود ۶۰٪ نوزادان سالم اختلاف وزن آنها با آنچه که از روی مدل محاسبه می شود، حداکثر برابر ۰٫۱ است. همچنین برای حدود ۹۵٪ از نوزادان سالم، این اختلاف حداکثر ۰٫۲ است. پس اگر دو خط $y = ۰/۱۳۴x - ۳/۵۷ \pm ۰/۱$ را رسم کنیم انتظار داریم حدود ۶۰٪ از وزن نوزادان سالم بین دو خط بالا قرار گیرند. همچنین حدود ۹۵٪ وزن نوزادان سالم بین دو خط $y = ۰/۱۳۴x - ۳/۵۷ \pm ۰/۲$ قرار می گیرد. با توجه به این یافته اگر نوزادی در بدو تولد دارای قدی برابر x باشد، انتظار داریم وزن او بین دو خط بالا قرار گیرد. اگر شرایط با انتظار پیش بینی شده خیلی متفاوت باشد، برای پزشک ایجاد شک می کند و به پیگیری موضوع می پردازد.

این خطوط در شکل زیر رسم شده اند. مجموعهٔ این خطوط که به نحوی تعیین کنندهٔ وزن و قد مناسب در نوزادان تازه متولّد شده است، جادهٔ تندرستی نامیده می شود.



جاده تندرستی

پا نوشتها

۱- Error

تکنولوژی اطلاعات و آموزش ریاضی: اشتیاقها، امکان ها و واقعیتها

نویسنده: دیوید تال ـ دانشگاه واریک[1]
مترجم: شیوا زمانی ـ دانشگاه صنعتی شریف

این مقاله به صورت سخنرانی در آخرین روز هشتمین کنگرهٔ بین المللی آموزش ریاضی در ۲۱ جولای ۱۹۹۶ در سویل اسپانیا ارائه شد.

این سخنرانی [مقاله] به طرح نقطه نظرهای بحرانی در رابطه با استفاده از تکنولوژی اطلاعات در آموزش ریاضی می پردازد. همچنان که امکانات جدید توسعه پیدا می کنند، این مقاله نیز با بازتاب بر فرآیندهای تفکّر انسانی، تحول و توسعهٔ پژوهشگران مشتاق را در استفاده از تکنولوژی برای تدریس ریاضی در نظر می گیرد، سپس به ارائه دست آوردهای احتمالی این تحقیق و واقعیتهایی که در کلاس درس امکان دسترسی به آنها هست می پردازد.

۱. زمان تغییرات عظیم

در زمانه ای زندگی می کنیم که دائماً در حال تغییر است. نسل حیوانهای نادری مانند وال و فیل که میلیونها سال روی زمین زندگی می کرده اند با انقراض احتمالی به دست بشر تهدید می شوند و حال ممکن است که تداوم بخشی از نسل انسانی، یعنی ریاضیدان، بر اثر رقابت با تکنولوژی اطلاعات مورد تهدید قرار گیرد.

آیا ریاضی در حال انقراض است؟

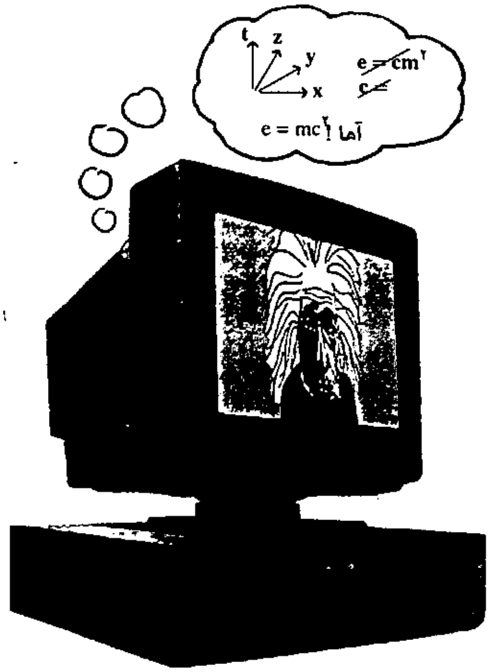
همان طور که رئیس انجمن سلطنتی، سِر مایکل عطیّه[2] گفته است:

در حالی که قرنهای هجدهم و نوزدهم شاهد جایگزین شدن تدریجی ماشین به جای کار دستی (یدی) بود، اواخر قرن بیستم شاهد ماشینی شدن فعالیتهای فکری است. به جای دست، این مغز است که به عضو زائدی تبدیل شده است.
(عطیّه، ۱۹۸۶، صفحهٔ ۴۳)

تکلیفهای یکنواختی که چگونگی انجام آنها به طور سنّتی در آموزش ریاضیات تدریس می شد، به گونه ای چشمگیر به تکنولوژی محول شده است. صندوق دار یک سوپر مارکت دیگر بهای اجناس را جمع نمی بندد و مقدار پول بازگشتی را حساب نمی کند زیرا نرم افزارهایی وجود دارد که توسط آنها ماشین با خواندن شمارهٔ رمز[3] هر جنس، بهای آن را مشخص می کند یعنی نه تنها ماشین محاسبات لازم را انجام می دهد، بلکه یک صورت حساب قلم به قلم نیز برای مشتری چاپ می کند و موجودی صاحب کالا را به طور خودکار کنترل می کند. آیا این بدین معناست که مهارتهای سنتی ریاضی روزبه روز کم اهمیت تر می شوند؟

تکنولوژی اطلاعات تفاوت بین توانایی انجام مهارتهای استاندارد و توانایی «اندیشیدن ریاضی» را برجسته می کند. تکنولوژی کنونی حریف یک ذهن خلاق ریاضی نیست. همان طور که ادوارد دوبونو[4] در یک برنامهٔ اخیر تلویزیونی شبکهٔ بی بی سی[5] با عنوان «پرسش و پاسخ با خبرگان»[6] یادآور شده است، «مهندسی ضعیف» به مغز انسان توانایی ساختن ارتباطات

انجمنی و پرشهای منظم نگرشی را می دهد، در حالی که تکنولوژی امروزی به دلیل طراحی منظم و منطقی آن، ناتوان از تفکر عمیق به گونه ای است که اینشتین می توانست تصور کند، **«اگر من در قطاری که با سرعتی نزدیک سرعت نور حرکت می کند نشسته باشم چه اتفاقی می افتد؟»**



امّا آیا کامپیوتر می تواند فکر کند؟

این قدرت تصور، محصول کارکرد پیچیدهٔ مغز است که به نوبهٔ خود به چگونگی یادگیری انسان مربوط است. در حالی که کامپیوتر را با تعویض نرم افزار و پاک کردن تمام داده های قبلی از حافظه می توان دوباره برنامه ریزی کرد، ذهن انسان از تجربه هایی که در طول یک عمر حاصل شده اند ساخته شده است و با بنای نوآموخته ها بر روی دانسته های قدیمی و حفظ زیرکانهٔ عناصری از دانسته های قدیمی در کنار معلومات جدید به طور تدریجی تحول می یابد. در این میان، باورهای گروهی جمعیت ریاضی مانند یک عامل پایدار کننده عمل می کند، آشناها را حفظ می کند و برای سازگاری با امکانات جدید زمان می طلبد.

در همین زمان، تکنولوژی با گامهایی آنچنان سریع پیش می رود که پیش بینی مرحلهٔ بعدی کار خطیری است:

اگر چگونگی تغییر ماه به ماه شبکهٔ اینترنت[۷] را در نظر بگیرید ـ اگر کسی بتواند پیش بینی کند که سه ماه بعد، نُه ماه بعد، حتی امروز، چه اتفاقی می افتد، من به احترام او سر تعظیم فرود می آورم. من فکر می کنم در اینجا ما با پدیده ای روبه رو هستیم که آن چنان سریع حرکت می کند که هیچ کس دقیقاً نمی داند به کجا می رود.

(بیل گیتس[۸]، ۱۹۹۶)

نتیجه این است که مشتاقان همواره می خواهند در جریان تازه ترین تحولات تکنولوژی قرار بگیرند و اغلب، قبل از اینکه بیشتر افراد آخرین ابداع را جذب کرده باشند، تا مرز ابداع جدید پیش می روند و با سرعتی حرکت می کنند که نشان می دهد تأثیرات طولانی مدت تکنولوژی، اغلب تا مدتها پس از تغییراتی که هم اینک رخ داده اند ناشناخته باقی می مانند.

پس چگونه می توانیم برای فهمیدن تأثیر تکنولوژی اطلاعات [بر زندگی بشر] تلاش کنیم؟

مسیر انتخاب شدهٔ شخص من این است که باید از تحولات و امکانات تکنولوژی آگاه باشم، اما به شرطی که ببینیم این تحولات و امکانات چگونه با ماهیت یادگیری انسان در تعامل هستند، ما به عنوان آموزشگران ریاضی، نیازمند دانستن واقعیتها و امکانها برای یادگیری انسان، در عصر تکنولوژی اطلاعات هستیم.

۲. صورتهای مختلف دانش ریاضی

اولین گام، در نظر گرفتن ماهیت دانش ریاضی است، بدین طریق می توان دید که چگونه بخشهای مختلف این ساختار دانش تحت تأثیر تکنولوژی قرار می گیرند.

تکامل انسان میلیونها سال قبل از شکل گیری زبان آغاز شد. بنابراین، اولین شکل ریاضیات، مرحلهٔ مجسّم[۹] بود که شامل دست ورزی[۱۰] فیزیکی اشیاء می شد. این شکل از ریاضیات هنوز اولین صورتی است که کودک درمسیر رشد خود با آن سروکار دارد و مراحل اولیهٔ آموزش ریاضی را تشکیل می دهد. *نمایش تصویری*[۱۱] به شکل نقاشی غارها حدود ۴۰۰۰۰ یا ۵۰۰۰۰ سال قدمت دارد و *زبان نوشتاری*[۱۲] در حدود ۵۳۰۰ سال قبل به صورت فونیک[۱۳] شکل گرفت. در این زمان مدتی بود که از نمادهای حساب نیز در داد و ستد استفاده می شد. نمادگذاری حساب به شکل های متنوع برای شمارش و اندازه گیری، در تمدنهای باستانی مانند بین النهرین و مصر به وجود آمد و سپس در دوهزارو پانصد سال پیش، یونانیها نظریهٔ مجرد هندسه را به طور کلامی[۱۴] از طریق اثبات اقلیدس بیان کردند.

نمادهای جبری قابل دست ورزی و استفاده، نسبتاً دیرتر یعنی در قرن شانزدهم میلادی معرفی شدند و شکوفایی حسابان درقرن هفدهم رخ داد. همین توانایی محاسبه با نمادها است که در سرعت بخشیدن بسیار زیاد به موفقیت های بشری در سه قرن اخیر سهم داشته است و همین توانایی است که نقطه تمرکز آموزش ریاضیات در مدارس شده است.

تنها در قرن اخیر بود که تلاش شد تمامی دانش ریاضی در قالب یک نظریهٔ صوری بر پایه تعریفهای کلامی و استنتاج های منطقی تجدید سازمان شود.

پس تا قبل از توسعهٔ کامپیوتر، ما صورتهای گوناگونی از ریاضیات داشتیم که شامل پنج قسمت زیر بود:

(۱) *ریاضیات مجسّم*، با انجام عملهای فیزیکی روی اشیای واقعی،

(۲) *ریاضیات نیمه مجسم* که به صورت کلامی تشریح می‌شود، در آن خواص فیزیکی اشیاء باکلمات بیان شده اند و در قالب یک نظریهٔ نظاموار[۱۵] استنتاجی مانند هندسه اقلیدسی بنا شده اند.

کاری متوالی برای آموزش ریاضی تعیین کرد. کامپیوتر در ابتدای ورود خود به صحنه بر *نمادگذاری* مقدماتی *محاسبات عددی* تمرکز یافت، سپس یک صفحهٔ نمایش *گرافیکی* به آن افزوده شد و بلافاصله پس از آن نوبت به یک وسیلهٔ مجسّم رسید که اجازهٔ انتخاب و دست ورزی اشیاء روی صفحهٔ نمایش را می داد. نرم افزاری که انسان را قادر به دست *ورزی نمادین* کند، به برنامه ریزی پیچیده تری نیاز داشت و چندین بار از نو تولد یافته است تا محیط آشناتری برای کاربر[۱۸] کامپیوتر ایجاد کند.

تفکر خلاّق انسان و فرآیند الگوریتمی کامپیوتر

(۳) *ریاضیات مجرد یا نمادین*، (حساب، جبر، حسابان و غیره)، که از عملیات روی اشیاء جهان واقعی (مانند شمارش) ناشی شده است و همراه با محاسبات و دست ورزی با نمادها توسعه یافته است.

(۴) ترکیبی از (۲)، (۳)، با برقراری ارتباط بین زبان نمادین و بازنمایی تصویری[۱۶] (گرافیکی)

(۵) *ریاضیات صوری*، که در آن مفاهیم توسط اصلهای کلامی ـ نمادین[۱۷] تعریف می شوند و خواص بعدی به وسیلهٔ اثبات صوری نتیجه می شوند.

این صورتهای متفاوت ریاضیات به گونه ای پیچیده با یکدیگر در ارتباط درونی هستند امّا هر یک ویژگی های متفاوتی دارند که هر کدام باعث شناخت بیشتر فرآیند یادگیری می شوند.

۳. امکانات جدید کامپیوتر

تکنولوژی کامپیوتر به گونه ای توسعه پیدا کرد که به قسمتهای مختلف این ساختار دانش کمک کرد و برنامه های

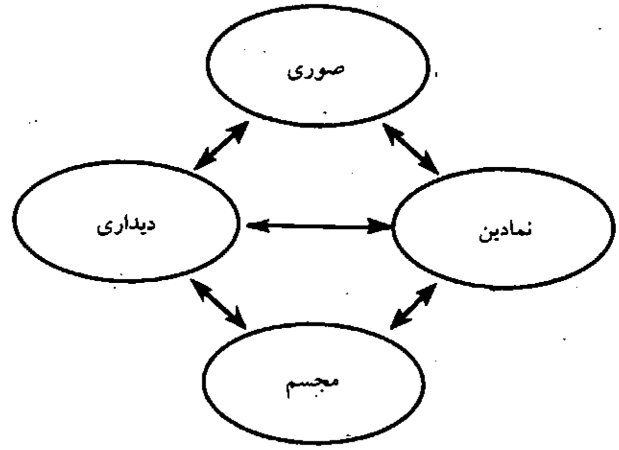
تاکنون، از کامپیوتر کمتر در رابطه با اثباتهای صوری در آموزش ریاضی استفاده شده است (با استثنای با ارزشی چون استفاده از زبانی مانند ISETL با ساختار صوری نظریهٔ مجموعه ها که با کمیّت پذیرها استنباطهای منطقی کامل شده است.) نرم افزارهای «اثبات قضیه» و «بررسی درستی قضیه» در موضوعات مشخصی موجودند و از کامپیوترها برای انجام مراحل طولانی بررسی که فراتر از توان یک فرد است استفاده می شود که از آن جمله می توان به اثبات کامپیوتری مشهور قضیهٔ چهاررنگ توسط آپل و هاکن[۱۹] در سال ۱۹۷۶ اشاره کرد.

اما استاندارد تکنولوژی کامپیوتر هنوز دارای همان نقطه‌ضعفهایی است که در طرح پیشروِی چارلز باباج[۲۰] در قرن نوزدهم به آن اشاره شده بود:

ماشین تحلیل گر[۲۱] بدون شک ادعای شروع هیچ چیزی توسط خودش را ندارد. ماشین می تواند هر کاری را که ما دستورالعمل انجامش را می دانیم اجرا کند. می تواند بر طبق برنامهٔ تحلیلی عمل کند، اما قدرت پیش بینی روابط و حقایق تحلیلی را

ندارد. کار آن کمک به ما در دسترسی به چیزهایی است که هم اکنون از آنها آگاهیم.

(آدا لاولیس[22]، ملاحظاتی بر ماشین تحلیل گر آقای باباج، به نقل از *اوانس*، س[23]، ۱۹۸۳، صفحهٔ ۳۱) با وجودی که کامپیوترهای مدرن یک محیط انسانی مجسم با یک صفحهٔ نمایش قابل دست ورزی و امکانات نمادین در اختیار ما قرار می دهند، بااین حال هنوز نیاز به ذهن یک ریاضیدان دارند تا با به کارگیری تجربه های فکری خود تصمیم بگیرد که چه چیزی مهم است و چه چیزی نیاز به اثبات دارد.



۴. کامپیوترها در آموزش ریاضی

پیش از اینکه کامپیوترها به طور وسیع در دسترس قرار بگیرند، در مورد ارزش آن ها در آموزش [ریاضی] تردیدهایی وجود داشت:

دور از ذهن است که تمام دانش آموزان در این ردهٔ سنی [یک کامپیوتر] را مانند یک خط کش محاسبه یا کتاب جدولها وسیلهٔ محاسباتی مناسب و قابل استفاده ای بیابند. (اتحادیهٔ ریاضی، ریاضی ۱۱ تا ۱۶، ۱۹۷۴[24])

چنین توهّماتی خیلی زود از میان رفت و خط کش های محاسبه و کتابهای جدولها تنها مدت زمان کوتاهی دوام آوردند و سپس کاملاً متروک شدند.

۴.۱ الگوریتمهای عددی

اولین میکروکامپیوترها (برای مثال، اَپل[25] در ۱۹۷۶) با زبان برنامه نویسی بیسیک[26] فروخته شد. بدین ترتیب شور و شوقهای اولیّهٔ ریاضیدانها و شاگردانشان، برنامه نویسی برای روش های عددی خودشان بود. مشتاقان معتقد بودند که *برنامه نویسی* باعث درک فرآیندهای ریاضی توسط دانش آموزان می شود. در عمل، تعداد کامپیوترها در مقابل حجم برنامه نویسی رو به افزایش توسط دانش آموزان در آن زمان بسیار کم بود و بنابراین این فعالیت دامنهٔ زیادی نیافت. تحقیقاتی انجام شد تا نشان دهد کودکانی که به زبان بیسیک برنامه نویسی می کنند درک بهتری از استفاده از حروف به عنوان متغیرهای جبری، دارند. (برای مثال به تال و توماس، ۱۹۹۱ رجوع کنید[27]). اما بیسیک به عنوان زبانی با ساختار ضعیف شهرت بدی یافت و به مرور زمان که کامپیوترهای بیشتری در دسترس قرار گرفتند، برنامه های کار (اولویتها) نیز تغییر پیدا کردند و برنامه نویسی به زبان بیسیک با نظر اکثریت، به تاریخ سپرده شد.

۴.۲ تجسم های گرافیکی

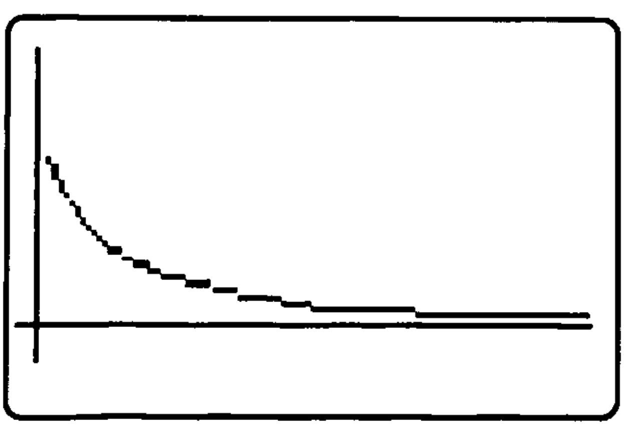
در اوایل دههٔ هشتاد، گرافیکهای با کیفیت بالا، منجر به شروع مرحلهٔ جدیدی شد که شامل تسهیلاتی مانند رسّامها برای بازنمایی توابع و برنامه نویسی به زبان لوگو[28] برای کودکان در هر سنّی بود.

امکانات دیداری همچنین موجب مطالعات تجربی دربارهٔ آشوب[29] و فراکتالها توسط ریاضیدانها شد و *رویکردهای گرافیکی* جدیدی را در آموزش موضوعاتی مانند هندسه، آمار، حسابان و معادلات دیفرانسیل معرفی کرد. حال می توانستیم به کودکان در تجسم ایده های ریاضی کمک کنیم.

زمان خلاقیتهای بزرگ فرا رسیده بود و آموزشگران ریاضی با نوشتن قطعات کوچک نرم افزار به تجسّم مفاهیم ریاضی کمک می کردند.

به زودی شواهد قابل توجهی به دست آمد که نشان می داد یک رویکرد بصری به نمودارها می تواند دانش آموزان را یاری کند تا درک مفهومی عمیقتری به دست بیاورند بدون آنکه لزوماً تأثیری بر توانایی کار با نمادهای مربوطه داشته باشد. (مثلاً هَیْد[30] و پالمیتر[31]، ۱۹۹۱). اما از طرف دیگر، شواهدی نیز نشان می داد که دانش آموزانی که فاقد ذکاوت لازم برای تعبیر و تفسیر نمودارها بودند، ممکن بود دچار بدفهمی های جدی[32] بشوند.

یک مثال کلاسیک، موردی بود که کودکان کم سن منحنی کاهش دمای یک مایع را روی یک صفحهٔ نمایش با خانه های روشن (pixel) تقریباً بزرگ مشاهده می کردند، آنها حرکت منحنی از یک خانه به خانهٔ دیگر را به عنوان یک افت ناگهانی دما تعبیر می کردند. (لین و ناخمیاس[33]، ۱۹۸۷)



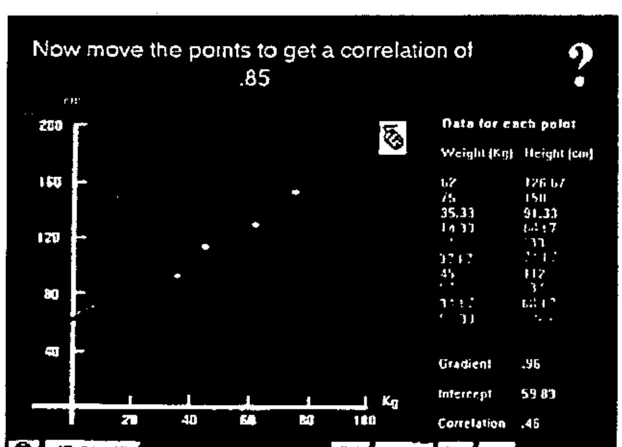
به وضوح دیدن افت ناگهانی درجه حرارت

به همین ترتیب، وقتی که نمودار توابع رسم می شوند، انتخاب بُردی که تصویر مناسبی از تابع به دست دهد اهمیت زیادی می یابد و ممکن است نمودار روی صفحه به نادرستی تعبیر و تفسیر شود.

۴.۳ *کنترل مجسّم*[۳۴]

در سال ۱۹۸۴، «موش»[۳۵] معرفی شد تا برای کامپیوتر یک محیط مجسم و فعال ایجاد کند. حال به جای تحریر زنجیره ای از نمادها، کاربَر می توانست مستقیماً با حرکات شهودی دست، صفحهٔ نمایش را انتخاب و کنترل کند. موش اجازهٔ یک رویکرد کاملاً متفاوت به یادگیری را داد که در آن، دانش آموزان به جای آنکه اول مراحل انجام محاسبات را یاد بگیرند، تشویق به جستجوی فعال شوند.

برای نمونه، آمار اغلب با روشهای گام به گام شبیه دستورهای «کتابهای آشپزی» تدریس می شود، زیرا از دانش آموزان که بگذریم، تنها تعداد کمی از معلمان، تجربهٔ کافی برای درک زیربنای صوری[۳۶] این علم را دارند. در اینجاست که می توانیم از نرم افزاری که یک محیط جستجوی فعال را پدید می آورد استفاده کنیم تا «معنایی» به طبیعت داده های آماری بدهیم و ببینیم وقتی داده ها تغییر می کنند تعبیر و تفسیرهای دقیق آماری چگونه اند. برای مثال، برای دادن خط «بهترین برازش[۳۷]» به داده ها و محاسبهٔ قانونهای گوناگونی مانند «تقریب کمترین مربعات[۳۸]»، می توان با استفاده از نرم افزار کامپیوتر خط برازش را آنقدر حرکت داد تا مطلوب به نظر بیاید و یا نقاط معرف داده ها را به اطراف حرکت داد تا دیده شود که جابه جایی آنها چه تأثیری روی تنوّع اندازه های برازش دارد.

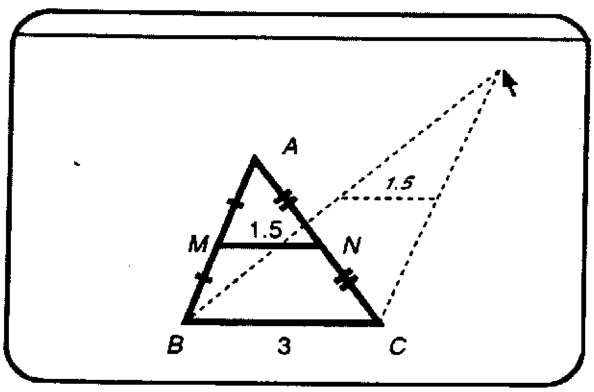


آمار بصری تحت کنترل مرحلهٔ مجسّم

بدین ترتیب می توان به مفاهیم پیچیدهٔ ریاضی یک معنای شهودی و بصری ـ فضایی[۳۹] داد، بدون (یا قبل از) آنکه نیازی به یادگیری عملیات گام به گامی باشد که کامپیوتر از آنها در انجام محاسبات داخلی خود استفاده می کند.

برنامه های تعاملی هندسی محیط های جستجوی مجسّم را ارائه می دهند که اجازهٔ مفهوم سازی پویا و جدیدی را از شکلهای هندسی می دهد.

برای مثال مثلث ABC را که نقاط میانی ضلعهای AB و AC آن یعنی M و N به هم وصل شده اند می توان مثلاً با تغییر محل رأس A به این طرف و آن طرف کشید و ملاحظه کرد که طول MN همواره نصف طول BC است. حال این شکل دربردارندهٔ مفهوم جدیدی است که نسبت به تغییر مکان مثلث ناورداست یعنی برای هرمثلثی درست است و تنها بستگی به ساختار داده شده دارد و محیطی غنی برای جستجو و فرضیه سازی فراهم می کند. با این حال توجه کنید که عملهای مجاز عبارتند از انتخاب یک نقطه و حرکت دادن آن به اطراف. حرکتی که یک مثلث را بلند کند و با حفظ اندازه و شکل آن، آن را روی مثلث (همنهشت) دیگری قرار دهد وجود ندارد. این محیط، مبنای انتقالهای اقلیدسی را در بر ندارد و به نوعی از دانش ریاضی منجر می شود که با آنچه که در بنای نظاموار قضیه ها و اثباتهای اقلیدسی مورد نیاز است، متفاوت است.



دست ورزی با مثلثی که وسطهای دو ضلع آن به هم وصل شده اند

۴.۴ *سیستم های جبری کامپیوتری*

سیستم های جبری کامپیوتری با جلوه های گوناگونی موجود بود تا اینکه در سال ۱۹۸۴ ماهنامهٔ ریاضی آمریکا[۴۰] یک آگهی تمام صفحه برای سیستم جبری کامپیوتری ماکسیما[۴۱] انتشار داد. در این آگهی ادعا شد که این نرم افزار می تواند عبارتها را ساده کند، از آنها عامل مشترک بگیرد یا آنها را بسط دهد، معادلات را به طور تحلیلی یا عددی حل کند، مشتقگیری کند، انتگرالهای معین و نامعین را محاسبه کند و بسط تیلور یا لورن توابع را بدهد.

در کمتر از یک دهه، کامپیوترها به طور متوالی امکانات عددی، *گرافیکی* و *نمادین* را گسترش دادند که هر یک از آنها

روشهای جدید مفهوم سازی ایده های ریاضی را امکـان پـذیر کردند. و این روشها به عنوان سه روش اصلی ارائهٔ حسابان در دانشگاه مورد نظر قرار گرفتند:

یکی از اصول راهنما «قانون سه شیوه» است، که می گوید تا آنجایی که ممکن است هر مبحث باید همان طور که به طور تحلیلی تدریس می شود به طور گرافیکی و عددی نیز آموزش داده شود. هدف طراحی و ارائهٔ درسی است که در آن این سه دیدگاه با یکدیگر در تعادل باشند، و فراگیرندگان ایده های اصلی را از زاویه های متعددی مشاهده کنند.

(هافزهالت[۴۲] ۱۹۹۱، صفحهٔ ۱۲۱)

تغییرات تدریس حسابان در آمریکا بر پایهٔ ردهٔ وسیعی از نرم افزارها است که از نمایش های متنوعی برای مفهومها استفاده می کنند. شواهدی وجود دارد که نشان می دهد فراگیرندگان با صورت بندی[۴۳] کردن راه حل مسأله ها به طریقی که بتواند توسط الگوریتمهای کامپیوتری به دست بیاید، یاد می گیرند که همراه با سیستم های جبری کامپیوتری فکر کنند وبدین گونه از آن سیستم ها استفاده کنند.

(دیویس و همکاران[۴۴]، ۱۹۹۲)

اگرچه، تحقیقات دیگری نیز نشان می دهد که بسیاری از دانش آموزانی که از سیستم های جبری کامپیوتری استفاده می کنند روابط درونی مفاهیم و عملیات را درست نمی فهمند و ایده های ریاضی را مانند کسانی که تجربهٔ بیشتری در ریاضیات سنتّی دارند، به یکدیگر ربط نمی دهند. برای مثال، دانش آموزان ممکن است از رسّامها[۴۵] برای «دیدن» جوابهای معادلات استفاده کنند، اما لزوماً آنها را با مفهوم نمادین مسأله مربوط نسازند. کالدوِل[۴۶] (۱۹۹۵) انتظار داشت که دانش آموزان بتوانند ریشه ها و مجانبهای تابع گویای

$$f(x)=\frac{x(x-4)}{(x+2)(x-2)}$$

را توسط روشهای جبری و فقط با تعداد قابل توجهی از جوابهای تقریبی داده شده مانند ۰٫۰۱ و ۳٫۹۸ که از روی نمودار خوانده شده بود بیابند. حال آن که هانتر و همکاران[۴۷] (۱۹۹۳) متوجه شدند که یک سوم دانش آموزانی که از یک سیستم جبری کامپیوتر استفاده می کردند، قبل از درس می توانستند به سؤال زیر پاسخ دهند:

اگر $u = V + 3$ و $V = 1$، در مورد u چه می توانید بگویید؟

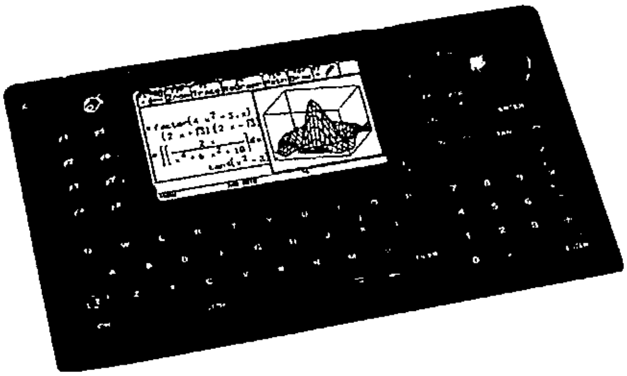
امّا نه پس از درس، زیرا به دلیل نداشتن تمرین روی جایگذاری مقادیر در عبارتها در طول درس، به نظر می رسید که دانش آموزان این مهارت را بر اثر عدم استفاده از دست داده اند.

می توان نشان داد که واقعیت کلاس درس با امکاناتی که مشتاقان تکنولوژی درذهن ترسیم کرده اند متفاوت است.

۴.۵ تکنولوژی شخصی قابل حمل

تکنولوژی روند تکاملی خود را برای استفاده های شخصی از ماشینهای رومیزی تا ماشین حسابها و کامپیوترهای قابل حمل طی کرده است. ماشین حسابهای با چهار عمل اصلی آنقدر پیشرفت کرده اند که شامل توابع علمی، امکانات برنامه ریزی و بالاخره نمایش های گرافیکی شده اند.

اکنون در سال ۱۹۹۶، ما کامپیوترهای دستی ای داریم که تمام الگوریتمهای نمادین و عددی را که بخش اصلی امتحانهای ریاضی بودند انجام می دهند و شامل به کارگیری برنامهٔ *کابری ژئومتر*[۴۸] برای کشف ایده های هندسی نیز هستند. بدین ترتیب اغلب امکاناتی را که تا به حال مورد بحث قرار دادیم در اختیار داریم با این امتیاز افزوده که دانش آموز می تواند از آن امکانات، به ارادهٔ خود در هر زمان و در هر مکان استفاده کند، اگرچه باز می باید دستورها خط به خط تایپ (تحریر) شوند و آزادی فعالیت در یک محیط کامپیوتری کاملاً مجسّم وجود ندارد.



۴.۶ چند رسانه ای

دو سه سال اخیر، شاهد پدید آمدن نرم افزار چند رسانه ای تعاملی[۴۹] برای استفاده در مطالعات فردی بوده است. این نرم افزار که تاکنون تنها تا حدودی شناخته شده است، مدعی است که اطلاعات متنوعی را با ارائهٔ توضیحاتی به صورت متن، کلمات و تصاویر ویدئویی با استفاده از یک محیط نرم افزار در اختیار یادگیرنده قرار می دهد و بدین ترتیب با ارائه امکانات تعاملی، زمینهٔ کشف فرآیندها و مفهوم های ریاضی را فراهم می کند. این نرم افزار ما را قادر می سازد که به واحدهای تعاملی کوچکتر دههٔ هشتاد که به طور کلی در محیطی منسجم تر قرار گرفته است بازگردیم.

۴.۷ شبکه سراسری جهانی[۵۰]

اخیراً شبکهٔ سراسری جهانی به واقعیتی تبدیل شده است که از طریق آن، اطلاعات و نرم افزار از فردی به فرد دیگر در روی

کرهٔ زمین انتقال می یابد. درسهای ریاضی برای تعاملهای چند رسانه ای، کم کم در سطح جهان در دسترس همگان قرار خواهد گرفت. دانش آموزان به طور روزافزونی این آزادی را می یابند که در زمانهایی که خود مناسب تشخیص می دهند، به نرم افزارها دسترسی داشته باشند، در حالی که هنوز وعده های بیشتری در مورد آینده داده می شود. در حال حاضر، اغلب این وعده ها با آنچه در واقعیت رخ می دهد تفاوت دارد، زیرا شبکهٔ اینترنت با تعداد بسیار زیاد کاربرها در آستانهٔ مسدود شدن قرار گرفته است و عرض باند آن باریکتر از آن است که بتواند حجم زیاد داده ها را برای صدا و تصویر در زمان واقعی (یعنی زمان وقوع) انتقال دهد.

مردم می گویند امروزه این اینترنت است که چند رسانه ای ها را با خود حمل می کند، اما این صحبت مانند این است که بگوییم سگها می توانند روی پاهای نداشته بایستند!
(رابرت ایکس. کرینگلی[51]، امپراتوری های تصادفی[52]، ۱۹۹۶، صفحهٔ ۳۴۴)

هنوز تغییرات سریعی در جریان است و ظرفیت بالاتری برای حمل در انتظار است به طوری که وجود یک بزرگراه اطلاعاتی سراسری جهانی غیرقابل اجتناب به نظر می رسد.

۵. شکل گیری یک نظریه برای در نظر گرفتن این شواهد

حال چگونه می توان استنباط درستی از این تغییرات داشت؟ واضح است که تکنولوژی اطلاعات برای ماندن آمده است و ما به عنوان آموزشگران ریاضی نیازمند یک توافق جمعی برای چگونگی استفاده از آن هستیم. در حال حاضر، بسیاری از معلمان نسبت به این تکنولوژی مشکوک هستند زیرا این تکنولوژی فرآیندهایی را انجام می دهد که معلمان تمام عمر خود را وقف آموزش آنها به دانش آموزانشان کرده اند. کافی است نقطه نظرات لودیت[53] را مطرح کنیم و آنگاه از واقعی بودن امکان تغییر جریان زندگی خودمان [توسط تکنولوژی] دچار ترس شویم.

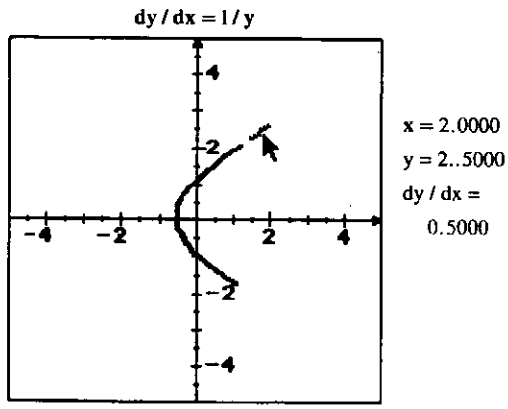
همزمان، باید بکوشیم تا به نوعی، از فرآیندهای دخیل فهم بیشتری پیدا کنیم تا قادر باشیم در مورد بهترین نوع استفاده از امکانات جدید به طور منسجم و هماهنگ قضاوت کنیم. من در مطالعهٔ شخصی خود مسیری را پیمودم که زنجیره ای از تحولات تکنولوژیکی به من دیکته کرده بود. من چند کار تجربی در مورد درک دانش آموزان از مفهوم حد انجام داده بودم و با ورود نرم افزارهای گرافیک، وارد دنیای کامپیوتر شدم و یک رویکرد گرافیکی در حسابان ارائه دادم. در همین زمان، من در یک کمیتهٔ اتحادیهٔ ریاضی[54] با جمع کثیری همکاری می کردم که به برنامه ریزی الگوریتمهای عددی اشتغال داشتند و به مرور زمان، ما کوشیدیم که ایده های جدید دست ورزی نمادین را نیز به کار گیریم. با تلفیق ویژگیهای متفاوت تجسّم و نمادگذاری من در مورد چگونگی عملکرد انسانی، درک نافذ[55] جهان واقعی، *عمل* متناسب با آن درک برای بقا و تداوم حیات و *بازتاب* بر اندیشه های شخصی برای بالا بردن هرچه بیشتر تأثیر آن اعمال اندیشیدم. در این ترکیب، ***درک نافذ، عمل و بازتاب*** به طور مناسبی با هم جور شدند تا به من کمک کنند که دیدگاههای خود را در مورد رشد و توسعهٔ شناختی[56] صورت بندی (فرموله) کنم. من تقابل آشکاری بین آنچه آن را «ریاضیات بر پایهٔ اشیاء[57]» می نامم و مهمترین معرّف آن هندسه است با «ریاضیات بر پایهٔ عمل[58]» که معرف آن اعمال شمارش و اندازه گیری در حساب است دیدم. همچنین دیدم که بازتاب بر این تجربه ها به متخصصان ممتاز امکان توسعهٔ یک «ریاضیات بر پایهٔ خواص ویژه» را با اصلهای موضوعی و استنتاجهای صوری می دهد. در دههٔ ۱۹۶۰، «ریاضیات جدید[59]» کوشید تا یک برنامهٔ درسی ریاضی منطبق بر یک رویکرد نظریهٔ مجموعه ای را «بر پایهٔ خواص ویژه» تهیه کند. اما این حرکت تلاش مذبوحانه ای بود، زیرا برای یادگیری [ریاضی] در مراحل ابتدایی ممکن است ترکیبی از مراحل مجسّم، نیمه مجسّم (بصری) و نمادین، راه حل عملی تری ارائه کند. این ترکیبی است که اتفاقاً یک کامپیوتر به خوبی می تواند آن را ارائه دهد.

۵.۱ *ریاضیات مجسّم و نیمه مجسّم (بصری)*

کامپیوتر می تواند روش مجسّمی برای دست ورزی با اشیای نیمه مجسّم ریاضی ارائه کند. این روش با قدرتمندی امکان «معنا دادن» به مفهوم های دقیق در یک مرحلهٔ ابتدایی مجسّم را ایجاد می کند. این روش می تواند چیزی که من آن را «ریشهٔ شناختی[60]» می نامم ارائه دهد که از آن یک نظریهٔ رفته رفته پیچیده امکان رویش می یابد (تال ۱۹۸۹). این موضوع نه فقط در هندسه بلکه در شاخه های دیگر ریاضیات نیز می تواند رخ دهد. برای مثال می توان آن را از طریق حل یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول که در بستری از تجربه های وسیعتر تجسّم و دست ورزی با نمودارهاست، روشن ساخت. این ایده از آنجا ریشه می گیرد که من مفهوم صوری مشتق را با یک روش دیداری ابتدایی به عنوان گرادیان نمودار در نظر می گیرم. از مماسها یا تقریبهای خطی موضعی یا هر مفهوم صوری دیگری در مراحل اولیه سخنی به میان نمی آورم، بلکه فقط با بزرگ کردن نمودارها روی صفحهٔ کامپیوتر، می توان دید که خیلی چیزها «موضعاً مستقیم» هستند، یعنی، با بزرگنمایی زیاد، به شکل خط مستقیم و به طور نافذ درک می شوند. سپس این مطلب را می توان با رویکردهای نمادین و عددی مربوط ساخت و به ایدهٔ مشتق یک معنای قابل محاسبه داد. همچنین، ریشهٔ ایدهٔ مستقیم بودن موضعی می تواند برای تجسّم حل معکوس این مسأله مورد استفاده قرار گیرد ـ یعنی ـ ساختن نموداری که گرادیان آن داده شده است.

در این قالب، نرم افزار کامپیوتر می تواند با استفاده از مفهوم

گرادیان، یک پاره خط کوچک از آن گرادیان را رسم کند. اگر این عمل، مثلاً با حرکت به اطراف توسط موش یا نشانهٔ صفحهٔ کامپیوتر توسط کاربر قابل کنترل باشد، می‌توان خطهای کوتاه را از دو انتها به هم چسباند و جوابی برای معادله ساخت. جواب «موضعاً مستقیم» است، در واقع تصویر از پاره خطهای تقریباً مستقیمی تشکیل یافته است که گرادیان آنها توسط معادلهٔ دیفرانسیل داده شده است.



ساختن حل یک معادلهٔ دیفرانسیل به طور مجسّم

بدین طریق، کامپیوتر محیطی را فراهم می‌کند که در آن یادگیرنده می‌تواند در یک سطح انسانی اساسی ایده‌های ریاضی را به طور فیزیکی تجربه کند. این کار امکان دید و حرکت فیزیکی را بدون نیاز هم زمان به تمرکز روی زبان نمادین و محاسباتی که برای ارائهٔ یک جواب لازم است فراهم می‌کند.

پس از اینکه چنین بصیرتهایی توسط انسان به دست آمد، هنوز لازم است که با روش کلّی عددی دقیق‌تر، قادر به ساختن یک جواب باشیم. حل نمادین چنین مسأله‌ای مستلزم فعالیتهای ذهنی کاملاً متفاوتی است.

۵.۴ ریاضیات نمادین

با الهام از متفکرانی چون دوبینسکی[۶۱] (۱۹۹۱) و اسفارد[۶۲] (۱۹۹۱) که در زمینهٔ رشد شناختی فرآیندها و مفهوم‌های ریاضی مطالعه کرده‌اند، من این توفیق را یافتم که با تشریک مساعی با ادی گری[۶۳]، دیدگاهی را توسعه دهم که نه تنها برای تحلیل چگونگی استفادهٔ افراد از نمادگذاری، بلکه برای تحلیل چگونگی تعامل ما با دست‌ورزی نمادین کامپیوتر نیز مفید است.

ما مانند متفکران قبلی متوجه شدیم که نمادها در حساب، جبر، حسابان و گسترهٔ وسیعی از دیگر موضوعات ریاضی دارای یک ویژگی خاص هستند. نمادهای زیر این مطلب را روشن می‌کنند:

$$5+4\ ,\quad 3\times 4\ ,\quad 3a+2b$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a}\ ,\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x+\cos x}{x^2+3x+1}\right)$$

$$,\int_0^{2\pi} e^{2x}\cos x\,dx\ ,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

همهٔ این نمادها با نمایش یک *فرآیند* ریاضی که باید انجام شود و نیز نتیجهٔ آن فرآیند، نقش دوگانه‌ای را ایفا می‌کنند. به عنوان مثال، ۴ + ۵ *فرآیند* جمع را برای *پدید آمدن مفهوم* مجموع ۴ + ۵ که ۹ است تداعی می‌کنند، ۳a + ۲b هم یک فرآیند ارزشیابی و هم مفهوم یک عبارت جبری است، و $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ فرآیند ارزشیابی یک مجموع نامتناهی برای یافتن مقدار حدّی است (که عبارت است از $\frac{\pi^2}{6}$).

واژهٔ فرهوم[۶۴] به عنوان ترکیبی از نماد، فرآیند و مفهوم معرفی شد و هنگامی این ترکیب رخ می‌دهد که یک نماد نیازمند فرآیندی است تا مفهوم نتیجه شده را به دست دهد. (گِری و تال[۶۵] ۱۹۹۴)

ما علاقه‌مند بودیم که بدانیم افراد مختلف چگونه نمادهای حساب، جبر و حسابان را تعبیر و تفسیر می‌کنند که موجب می‌شود برخی دانش‌آموزان ریاضیات را اساساً درس راحتی بدانند در حالی که دیگران آن را به طور فزاینده‌ای دشوار احساس می‌کنند.

ما تأکید می‌کنیم که ایدهٔ شناختی فرهوم دربردارندهٔ هیچ توضیحی در مورد چگونگی بنای ساختار شناختی فرهوم نیست. در واقع یکی از هدفهای ما بررسی چگونگی شکل‌گیری مفهومی چنین نمادهایی بود. به هر صورت، تا قبل از استفاده از کامپیوتر، اغلب می‌دیدیم که معنای نمادها توسط دنباله‌ای از فعالیتها شکل می‌گیرد:

(الف) رَویّه کار[۶۶]، که در آن یک توالی متناهی از تصمیم‌ها و اعمال در یک دنبالهٔ هماهنگ و منسجم بنا شده‌اند.

(ب) *فرآیند*، که در آن راههای مؤثر روبه تزایدی برای رسیدن به یک نتیجهٔ واحد به صورت یک کل دیده می‌شود.

(پ) فرهوم، که در آن نمادها به شکل انعطاف‌پذیری به عنوان فرآیندهایی برای *انجام شدن* و مفهوم‌هایی برای *اندیشیدن* تجسم می‌شوند.

در ابتدا، شخص یک «طرحوارهٔ عمل[۶۷]» (به تعبیر پیاژه) را به صورت دنبالهٔ هماهنگی از عمل‌ها می‌سازد.

در سطح رویّه‌ای، تمرکز بر این است که چگونه هر گام انجام می‌شود و چگونه گام انجام شده به گام بعدی منتهی می‌شود. ما واژهٔ «رویّه» را برای یک دنبالهٔ متناهی مشخص از تصمیم‌ها و اعمال به کار می‌بریم. در مقابل، واژهٔ «فرآیند» به

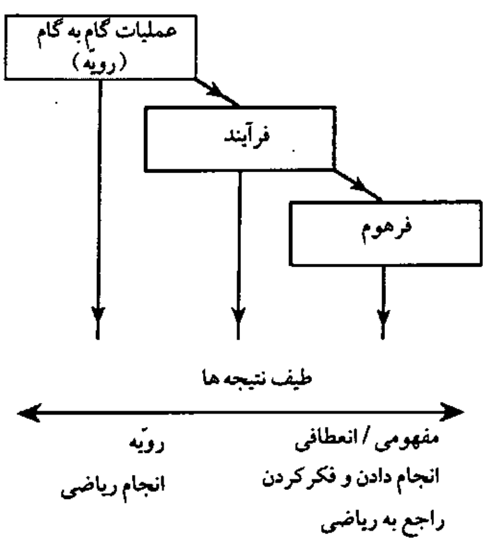
معنای کلی تری به کار می رود، مانند «فرآیند جمع» یا «فرآیند حل یک معادلهٔ خطی». یک فرآیند ممکن است چندین رویّهٔ مختلف داشته باشد که منجر به یک نتیجهٔ واحد می شوند. برای مثال، نمادهای ۲(x + ۳) و ۲x + ۶ متضمن دو رشته محاسبات متفاوت است، اما چیزی را نمایش می دهد که از نظر ما یک فرآیند واحد است. بدین ترتیب، تابع f(x) = ۲(x + ۳) همان تابع g(x) = ۲x + ۶ است زیرا این دو تابع دارای ورودی و خروجی یکسانی هستند.

عمل جمعی مانند ۷ + ۲ را می توان به شیوه های گوناگونی انجام داد، مثلاً با شمارش دو مجموعه به طور جداگانه، و سپس با یکدیگر، یا با شروع از ۲ و شمردن پس از آن تا ۷ تا اضافه شود[۶۸]، یا شروع از ۷ و شمردن پس از آن تا ۲ تا اضافه شود، یا خیلی ساده با دانستن این که ۷ + ۲ برابر ۹ است. بدین ترتیب نماد ۷ + ۲ نه تنها به عنوان یک فرآیند (جمع)، بلکه به عنوان یک مفهوم (مجموع) نیز دیده می شود، به این ترتیب که، ۷ + ۲ نه تنها ۹ را می سازد[۶۹]، بلکه ۷ + ۲ همان ۹ است. این مطلب می تواند به یک شبکهٔ غنی از رابطه ها منجر شود بدین ترتیب که، اگر «چیزی + ۲» ۹ است، آنگاه «چیزی» ۷ است به همین ترتیب با توجه به ارزش مکانی می توان حقیقتهای دیگری مانند ۳۹ = ۷ + ۳۲ یا ۹۰ = ۲۰ + ۷۰ را نتیجه گرفت. در این ضمن، کودکی که به عمل جمع تنها به عنوان انجام عمل جمع به صورت «ادامهٔ شمارش» نگاه می کند، احتمالاً عمل تفریق را به صورت «شمارش معکوس» می بیند، شمارش معکوس ۲ − ۹ در دو گام به صورت «۸ و ۷»، یا ۷ − ۹ به عنوان شمارش معکوس در ۷ گام «۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲» که منجر به رویّه های طولانی شمارش می شود که به تدریج آنقدر دشوار می شود که انجام آن امکان پذیر نیست.

رویّه ها به اشخاص امکان **انجام دادن** ریاضیات را می دهند، اما یادگیری تعداد زیادی از رویّه ها و انتخاب مناسب ترین آنها برای هدف خواسته شده به طور فزاینده ای مشکل آفرین و خسته کننده می شود. فرهوم نه تنها به شخص امکان انجام گام به گام عملیات (رویّه) را می دهد، بلکه به او اجازه می دهد که نمادها را به عنوان اشیای ذهنی ببیند. بدین ترتیب او نه تنها می تواند ریاضیات را **انجام دهد**، بلکه می تواند در مورد مفهوم ها نیز **فکر کند**. برای چنین دانش آموزی با ارتباط و اتصال ذهنی قوی، تجرید بیشتر موجب سادگی بیشتر می شود، در حالی که دانش آموز کمتر موفق با پیچیدگیهای دائماً فزاینده و احتمال شکست بیشتر روبه رو است.

یکی از پی آمدهای این مطلب آن است که دانش آموزانی که به قدر کافی ارتباطات ذهنی مناسب برقرار نمی کنند، موانع ذهنی بزرگتری دارند و بنابراین نیاز به یکنواخت سازی[۷۰] ریاضیات دارند تا بتوانند برای رسیدن به یک جواب، رویّه را «انجام دهند». بدین ترتیب، چنین دانش آموزانی تنها می توانند در یک قالب محدود مسأله ای را «انجام دهند» و این کار را یک «موفقیت» تلقی کنند اما ارتباطات بلند مدّتی را به وجود نمی آورند تا قادر به تفکّر در مورد ایده های پیچیده تری باشند.

حدسیّهٔ[۷۱] من این است که یکی از دلایل اصلی این که خیلی از دانش آموزان از تجربه های خود در مدرسه آسیب می بینند این است که ظاهراً یاد می گیرند چگونه ریاضیات را «انجام دهند» اما قادر نیستند ایده هایی را به هم ربط دهند که از نظر آنها یا بی معنی و یا بیش از حد پیچیده است. چنین دانش آموزانی که نیاز به کمک درمانی در مراکز آموزشی دارند، ممکن است از رویکرد (دیداری) بصری/گرافیکی بهره برند، زیرا چنین رهیافتی می تواند **اعتماد به نفس آنها را همانطوری که هستند افزایش دهد تا بالاخره قادر به معناسازی[۷۲] چیزی بشوند**. برای چنین دانش آموزانی ممکن است باز هم دشوار باشد که معنای نمادگذاری را بفهمند و آن را با ایده های بصری مربوط سازند. در این میان، دانش آموزان موفق تری که درکی از ارتباط و اتصال ریاضی دارند، با استفاده از نرم افزار کامپیوتر به عنوان وسیله ای برای فکر کردن می توانند قدرتشان را افزایش دهند و بدین ترتیب بهرهٔ غیرقابل تصوری از کامپیوتر ببرند.



اصولاً حدسیّهٔ من این است که نقش ما به عنوان آموزشگران ریاضی تنها آموزش رویّه (برای «انجام دادن» ریاضیات) نیست، بلکه آموزش روابط انعطاف پذیر بین شیوه های گوناگون درنظر گرفتن فرآیند و مفهوم (برای ریاضی «اندیشیدن») نیز هست.

۵.۳ *مشکلات بلند مدت با نمادها*

همچنان که برنامهٔ درسی ریاضی از طریق حساب، جبر و

حسابان توسعه پیدا می کند، نمادها نیز با اختلافات ظریفی عمل می کنند:

(i) فرهوم‌*های حساب*، مانند

$$۱/۵۴ : ۲/۳ \ \text{یا}\ ،\quad \frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳} \quad , \quad ۳\times ۴ \quad , \quad ۵+۴$$

که باالگوریتمهای صریحی می توان جواب آنها را به دست آورد، اما برای یادگیرندهٔ گام به گام، به طور فزاینده‌ای دشوارتر می شوند.

(ii) *فرهوم‌های جبری*، مانند $۲a + ۳b$ ، «جوابی ندارند» (مگر با جایگذاری عددی)، امّا می توان به وسیلهٔ استراتژیهای کلی‌تری با آنها کار کرد که باز هم یادگیرندهٔ گام به گام را وادار به یادگیری طوطی‌وار تکنیکهای مجزا از هم می کند.

(iii) *فرهوم‌های حدّ، مانند*

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{۳}-a^{۳}}{x-a}\ ,\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x+\cos x}{x^{۲}+۳x+۱}\right),$$

$$\int_{۰}^{۲n} e^{۲x}\cos x\,dx\ ,\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^{۲}}$$

مستلزم یک فرآیند بالقوهٔ نامتناهی «نزدیک شدن» به یک مقدار حدی هستند، که می توان آن را با تقریبهای عددی و گاهی با یک الگوریتم نمادین محاسبه کرد.

هریک از اینها مستلزم شیوه‌های جدید اندیشیدن دربارهٔ نمادگذاری است یعنی تغییراتی در مفهوم سازی ذهنی که ثابت شده است برای خیلی‌ها دشوار است. برای کودکی که به مجموع $۷ = ۳ + ۴$ تنها به عنوان یک رویّهٔ شمارش نگاه می کند که در آن «۴ به اضافهٔ ۳ , ۷ را می سازد» ممکن است دشوار باشد که از عهدهٔ نمادی مانند $۳x + ۴$ برآید که هیچ چیزی را «نمی سازد» مگر اینکه شاید او «قسمت ۳ + ۴ را انجام دهد که برایش معنایی دارد» و $۷x$ را به دست آورد. این موضوع باعث سردرگمی شدید بسیاری از دانش‌آموزانی می شود که یادگیری جبر را آغاز می کنند. همین طور، برای دانش‌آموزی که به «انجام دادن» ریاضیات در تعدادی متناهی دستورالعمل عادت دارد، ممکن است دشوار باشد که با بینهایت بالقوه در فرآیند حد کنار بیاید و ممکن است فکر کند که در پناه الگوریتمهای نمادین در حسابان و انجام آنها، دست کم می تواند به یک «جواب» برسد.

برنامهٔ درسی به جای اینکه دنباله‌ای راحت از گامهای منطقی متوالی باشد، در واقع مملو از موانع ظریفی است که همیشه برای یک خبره مرئی نیست.

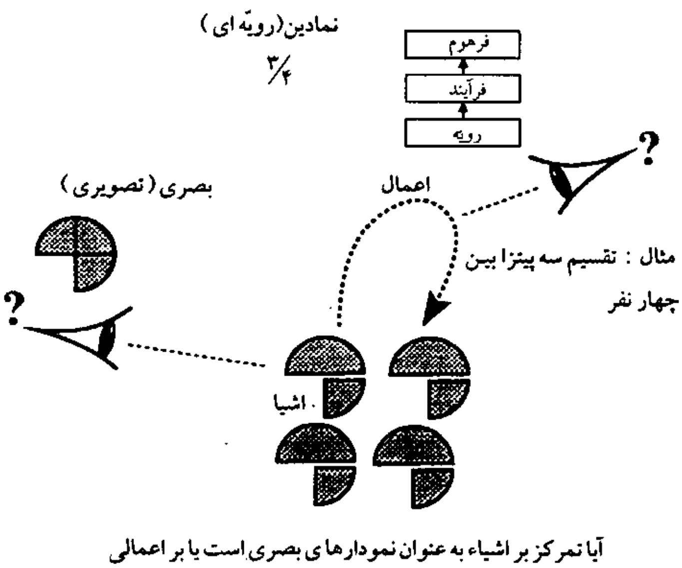
بنابراین، هنوز هم آموزشگران ریاضی باید بدانند که نقش آنها نه تنها «تدریس» ریاضیات بلکه آگاهی نسبت به راههای متفاوت یادگیری ریاضی کودکان است. آنها باید از افتادن در دام تدریس یکنواخت چگونگی *انجام دادن* رویّه‌ها بدون در نظر گرفتن چگونگی سازماندهی و اندیشیدن دربارهٔ مفاهیم منتج بر حذر باشند.

نقش متقابل روشهای بصری و نمادین

هر فرد محیط اطراف خود را از طریق درک برای دریافت اطلاعات، *بازتاب* برای اندیشیدن در مورد آن، و*عمل* برای دست‌ورزی آن می فهمد. هنگامی که روی اشیاء کاری انجام می شود، ممکن است یا بر روی خود اشیاء و نتایج عمل، یا بر روی عملیات انجام شده متمرکز شد. به عنوان مثال، یکی از راههای تقسیم سه پیتزا بین چهار نفر، نصف کردن دوتا از آنها، دادن هر نیمهٔ پیتزا به یک نفر، سپس تقسیم پیتزای باقی مانده به چهار قسمت، و دادن هر ربع آن به یک نفر است. به طور بصری، می توان دید که به هر فرد سه ربع از یک پیتزا می رسد. به روش دیگر، عمل تقسیم سه بر چهار را می توان به طور نمادین به صورت یک کسر بیان کرد.

بین این دو نقش، درک بصری یک ایدهٔ شهودی و در عین حال اولیه از کسر به دست می دهد. درحالی که درک نمادین مستلزم دقت بیشتری است اما قابلیت *بسط بلند مدّتی* را که به نمادگذاریهای ریاضی پیچیده‌تری منتهی می شود دارد.

این دو جنبهٔ متفاوت یک ایدهٔ واحد، به عنوان یک نمونهٔ معرّف نشان می دهد که چگونه درک بصری می تواند به یک ایدهٔ کلّی و جهانی در ریاضی منجر شود در حالی که درک نمادین یک راه عملی و گام به گام با قدرت محاسبهٔ بسیار زیاد را در اختیار ما قرار می دهد. به هر حال، این دو نوع درک همواره به راحتی با یکدیگر جور نمی شوند (به عنوان مثال، به مدلهای بصری مناسب برای جمع یا ضرب دو کسر یا تعمیم این ایده‌ها به اعداد گویای منفی فکر کنید). تمرکز عمده بر نمادها ممکن است به یک رویکرد



آیا تمرکز بر اشیاء به عنوان نمودارهای بصری است یا بر اعمالی که به صورت فرهوم نمادین شده اند؟

رویّه ای طوطی وار بیانجامد که با افزایش تعداد قانونهای نامرتبط، پیچیده تر می شود. تمرکز تنها روی درک بصری ممکن است منجر به نگرشی که در یک مبحث محدود در جریان است بشود بدون آنکه قابلیت چندانی برای تعمیم داشته باشد. فکر ارائهٔ یک ترکیب مناسب از بینش ریاضی و قدرت محاسباتی هنوز وسوسه کننده است. در این میان، کامپیوتر نه تنها به عنوان یک ابزار مکانیکی برای انجام عملیات الگوریتمی پیچیده، بلکه به عنوان محیطی برای مرتبط ساختن ایده های بصری و نمادین، می تواند این توانایی را به فرد بدهد که با ایده های ریاضی در عصر نوین تکنولوژی به یک نقطهٔ تعادل جدید دست پیدا کند. این راه حل یک نوشداروی جهانی نیست زیرا افراد مختلف روشهای متفاوتی برای کنار آمدن با دنیای ریاضی دارند، اما کامپیوتر تکیه گاههای گوناگونی را ارائه می دهد که می تواند حامی طیف وسیعی از رویکردها باشند.

۶. نیاز همیشگی به آموزشگران ریاضی

طبیعت فرّار تحولات تکنولوژی اطلاعات هنوز از هرگونه پیش بینی هم در زمینه های کلی و هم در زمینهٔ ریاضیات گریزان است:

> *هر کسی که به خود اجازه دهد نقش تکنولوژی را در آموزش ریاضی تشریح کند، خود را درگیر کاری از نوع تشریح یک آتش فشان در حال فوران کرده است ـ کوه ریاضی در مقابل چشمان ما در تغییر است ...*
>
> *(کاپوت[۷۲], ۱۹۹۲، صفحهٔ ۵۱۵)*

ممکن است دیگر نیازی نباشد که کودکان را برای کاربرد عملیات یکنواخت ریاضی معمولی به عنوان مهارت اصلی برای شغل آیندهٔ آنها آماده کنیم، اما آنها نیازمند آموزشی هستند که به آنان توانایی زندگی در یک دنیای تکنولوژیک جدید را بدهد.

شواهد موجود نشان می دهند که کافی نیست تنها به افراد ابزاری داد برای انجام عملیات گام به گام قبل از آن که این ابزار به صورت مناسبی با یک ساختار شناختی تلفیق شده باشد، یک ساختار شناختی که بتواند به رابطهٔ بین فرآیندها، مفهوم ها و نمایش ها معنایی بدهد.

در این دنیای جدید، ریاضیدان خلاق هنوز نقش بزرگی در رابطه با مشتاقانی که همواره می خواهند در جریان تازه ترین تحولات تکنولوژی قرار بگیرند و با ابداع امکانات جدید آن را پیش ببرند دارد. واقعیت فرآیند یادگیری همچنان نیازمند هدایت بازتابیِ معلم خوب است.

پانوشتها

۱ـ Mathematics Research Centre, University of Warwick.
۲ـ Sir Micheal Atiyah
۳ـ Bar - Code
۴ـ Edward de Bono
۵ـ BBC
۶ـ Brainstrust
۷ـ Internet
۸ـ Bill Gates
۹ـ Enactive
۱۰ـ Manipulative
۱۱ـ Pictorial
۱۲ـ Written language
۱۳ـ Phoenicia
۱۴ـ Verbally
۱۵ـ Systematic
۱۶ـ Graphical representation
۱۷ـ Verbal - symbolic
۱۸ـ User
۱۹ـ Appel & Haken
۲۰ـ Charles Babbage
۲۱ـ The Analytical Engine
۲۲ـ Ada Lovelace
۲۳ـ Evans, C
۲۴ـ Mathematical Association / Mathematics 11to 16/1974
۲۵ـ Apple
۲۶ـ BASIC
۲۷ـ Tall & Thomas
۲۸ـ Logo
۲۹ـ Chaos
۳۰ـ Heid
۳۱ـ Palmiter
۳۲ـ Misconception
۳۳ـ Linn & Nachmias
۳۴ـ Enactive control
۳۵ـ Mouse
۳۶ـ Underlying formalities
۳۷ـ Line of best fit
۳۸ـ Least squares fit
۳۹ـ Visio Spatial
۴۰ـ American Mathematical Monthly
۴۱ـ Macsyma

۴۲_Hughes Hallett
۴۳_Formulating
۴۴_Davis et al
۴۵_Graph plotters
۴۶_Caldwell
۴۷_Hunter et al
۴۸_Cabri Géometre
۴۹_Multi - media interactive
۵۰_The World Wide Web
۵۱_Robert X. Cringely
۵۲_Accidental Empires
۵۳_Luddite
۵۴_Mathematical Association Committee
۵۵_Perception
۵۶_Cognitive development
۵۷_Object - based mathematics
۵۸_ Action - based mathematics
۵۹_ New math
۶۰_Congnitive root
۶۱_ Dubinsky
۶۲_ Sfard
۶۳_Eddie Gray
۶۴ـ فرهوم یا Procept از دو کلمهٔ فر Process به معنی فرآیند و concept به معنی مفهوم ساخته شده است.
۶۵_Gary a Tall
۶۶_Procedure
۶۷_Action Schema
۶۸ـ به این عمل counting on یا *ادامهٔ شمارش* گفته می شود.
۶۹ـ واژهٔ ساختن شاید نامأنوس باشد زیرا همیشه کودکان یاد می گیرند که بگویند مثلاً ۷ + ۲ می دهد ۹، امّا تأکید متن بر ساختن است تا کودکان بیاموزند که چگونه یک عدد را به شکلهای گوناگون می توان ساخت. (م)
۷۰_Routinising
۷۱_Conjecture
۷۲_Make sence
۷۳_Kaput

References

Apple, K.& Haken, W. (1976). 'The solution of the four colour map problem', *Scientific American* (October), 108 - 121.

Atiyah, M.F. (1986).. Mathematics and the Computer Revolution. In A. G. Howson & J.-P. Kahane (Eds.), *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*. Cambridge: CUP.

Caldwell, J.H. (1995). 'Assessment and graphing calculators'. In L. Lum (ed.) *Proceedings of the Sixth Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, (pp.99 - 105). Reading MA: Addison - Wesley.

Cringely, R. X.,(1996). *Accidental Empires, (How the boys of Silicon Valley make their millions, battle foreign competition, and still can't get a date)*, New York: Penguin.

Davis, B., Porta, H. & Uhl, J. (1992). 'Claculus &

Mathematica: addressing fundamental questions about technology', *Proceedings of the Fifth International Conference on Technology in Collegiate Mathematics,* (Addison - Wesley), 305 - 314.

Dubinsky, E. (1991). 'Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking'. In D.O. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking,* Kluwer: Dordrecht, 95 - 123.

Evans, C. (1983). *The Making of the Micro,* Oxford University Press.

Gates, W. (1996), quotation of a statement made in the TV programme, *Triumph of the Nerds,* broadcast internationally in Spring 1996.

Goldenberg, P. (1988). 'Mathematics, Metaphors and Human Factors: Mathematical, Technical and Pedagogical Challenges in the Educational Use of Graphical Representations of Functions', *Journal of Mathematical Behaviour,* 72, 135 - 173.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). 'Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic', *Journal for Research in Mathematics Education* 26, 115 - 141.

Heid, K. (1988). 'Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool', *Journal for Research in Mathematics Education* 19, 3 - 25.

Hughes Hallett , D. (1991). 'Visualization and Calculus Reform'. In W. Zimmermann & S. Cunningham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* MAA Notes No.19, 121 - 126.

Hunter, M., Monaghan, J.D. & Roper, T. (1993). 'The effect of computer algebra use on students' algebraic thinking'. In R. Sutherland (ed.), *Working Papers for ESRC Algebra Seminar,* London: Institute of Education.

Kaput, J.J. (1992). 'Technology and Mathematics Education'. In D. Grouws (ed.) *Handbook on research in mathematics teaching and learning,* (pp. 515 - 556). New York: Macmillan.

Linn, M. C. & Nachmias, R. (1987). 'Evaluations of Science Laboratory Data: The Role of Computer - Presented Information', *Journal of Research in Science Teaching* 245, 491 - 506.

Mathematical Association, (1974). *Mathematics* 11 - 16.

Palmiter, J. R. (1991). 'Effects of Computer Algebra Systems on Concept and Skill Acquisition in Calculus', *Journal for Research in Mathematics Education* 22, 151 - 156.

Sfard, A. (1991). 'On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin', *Educational Studies in Mathematics,* 221, 1 - 36.

Tall, D.O. & Thomas, M.O.J. (1991). 'Encouraging Versatile Thinking in Algebra using the Computer', *Educational Studies in Mathematics,* 222, 125 - 147.

Tall, D.O. (1989). 'Concept Images, Generic Organizers, Computers & Curriculum Change', *For the Learning of Mathematics,* 93, 37 - 42.

میزگرد هیأت تحریریه مجلهٔ رشد آموزش ریاضی

هیأت تحریریهٔ مجلهٔ رشد آموز ریاضی با اتکال به خالق قلم و ستایش کنندهٔ اندیشه و تفکّر، تصمیم گرفته است که خلاصه‌ای از بحثهای انجام شده در جلسه های هفتگی را در اختیار خوانندگان گرامی قرار دهد. این کار، به خوانندهٔ متفکّر و نقّاد، فرصت آشنایی با تعامل اندیشه ها و روند شکل گیری دیدگاههای آموزش ریاضی در مجله را می دهد. ضرورت این آشنایی ناشی از آن است که هدف اولیهٔ تأسیس مجله، خدمت به رشد توانائیهای آموزشی معلمان ریاضی بوده است. با این حال، با توجّه به شناخت مختصری که جامعهٔ ریاضی ایران از **آموزش ریاضی** به عنوان یکی از حوزه های معرفتی دارد، به طور قابل پیش بینی و شاید ناخودآگاه، مجله بیشتر در جهت ارتقای دانش موضوعی معلمان و یادگیرندگان ریاضی بوده است. با تأکید بر اهمیّت و ضرورت دانش افزائی ریاضی معلمان، هیأت تحریریه پس از بحثهای طولانی، بیشتر و بیشتر به افزایش دانش حرفه ای معلمان ریاضی به عنوان یک نیاز مبرم باور پیدا کرده است. به همین منظور، مجله بر خود واجب می داند در جهت معرفی **آموزش ریاضی** به جامعهٔ ریاضی و بخصوص معلمان ریاضی، قدم بردارد و این اقدام، در همین راستاست.

میزگرد با طرح سؤالهای مشخصی شروع شده و بحثها دربارهٔ این سؤالها ادامه پیدا کرده است. گفت و شنودها ویرایش ادبی نشده اند تا حالت خودمانی و محاوره‌ای خود را از دست ندهند. به طور طبیعی، گاهی حرفها تکرار شده اند و گاهی از دقّت لازم برخوردار نیستند و این درواقع، جریان عادی شکل گیری یک فکر است! بحثهای هیأت تحریریه در جهت وادار کردن افراد به **تفکّر بلند**[1] است که این کار تأثیر مثبتی بر جریان یادگیری انسان دارد.

پاشا: ما نباید وظایف معلم رابیشتر و بیشتر کنیم. نباید همهٔ مسئولیتها را به عهدهٔ معلمان بگذاریم. معلم دلش می سوزد اگر متوجه شود که با اندک اشتباهی ممکن است فرصتهای زیادی از دست برود.

مدقالچی: معمولاً می گویند امکانات، نیروی انسانی و بودجه در تعیین اهداف بسیار مهّم هستند و همیشه بین اینها تناقض هست. چون مجری امکانات را می بیند و برنامه ریز ایده آلها را.

پاشا: معلم دلش می‌سوزد که ببیند براساس یک اشتباه کوچک، کلی از امکانات از دست رفته است.

زنگنه: به نظر من میزگرد هیأت تحریریه یک برنامهٔ مستمر می باشد.

گویا: یک مورد تکاندهنده این است که اگر دست اندرکاران برنامه ریزی درسی، شناختی از برنامهٔ درسی به عنوان یک علم نداشته باشند جریان برنامه ریزی درسی نگران کننده خواهد شد. در واقع باید برنامه ریز با معلمان رابطهٔ نزدیک داشته باشد و نقش آنها را به عنوان یک نقش محوری مورد توجه قرار دهد.

مدقالچی: ایراد این است که مؤلف و برنامه ریز همه می خواهند کارشان تمام و کمال باشد اما عملاً کارهایشان باهم ارتباطی ندارد.

گویا: بعضی کسانی که در جهت برنامه ریزی آموزش می بینند، جذب بدنهٔ آموزش وپرورش در جای صحیح خود نمی شوند. وقتی طرح می دهید باید چگونگی اش مشخص شود. مثلاً معلمان چگونه تعلیم ببینند و نقش آنها در آموزش تا چه حد و چگونه باید باشد؟

مدقالچی: ما در شناسایی توانایی ها و ایجاد ارتباط با معلمها بسیار ضعیف عمل کرده ایم. می توانیم معلمان توانا را بشناسیم و معرفی کنیم؛ در نظام آموزشی ما که متمرکز است باید با استفاده از تجربیات معلمها و ایجاد ارتباط مستقیم، آنها را فعّال کنیم. معلمهای ما می خواهند کاری بکنند امّا منابع در اختیار ندارند و مجله می تواند یک منبع خوب برای آنها باشد.

زنگنه: ما باید حرفهای معلمها را چاپ کنیم و شاید یکی از بهترین جاها برای شنیدن آن حرفها همان میزگردهایی است که آقای دکتر پاشا به آنها اشاره کردند. مقالات ترجمه ای از نوعی که درمورد احتمال هندسی معرفی کردم برای کمک به تدریس بهتر محتوای کتابهای درسی نظام جدید آموزش متوسطه می توانند مفید باشند.

پاشا: در آموزش مدرسه ای ما، جایی برای اشتباه کردن دانش آموزان و معلمهای ریاضی نیست در صورتیکه ریاضی از طریق حدس و آزمایش اعتلا پیدا می کند.

بابلیان: در مقالهٔ لوگو در کلاس درس نیز استفاده از رهیافت حدس و آزمایش برای بهتر فهمیدن مطلب پیشنهاد شده است. «دانش آموزان باید بیاموزند که مجبور نیستند برای اولین بارجواب درست بدهند. آنها در حقیقت درمی یابند که به ندرت با اولین تلاش می توان به جواب درست رسید واینکه پاسخهای غلط بخش مهمی از مسأله حل کردن هستند.» (رشد ۴۶، استفاده از لوگو در کلاس درس).

حاجی بابایی: می خواهم دوباره به بیانیهٔ ۱۹۶۲ اشاره کنم. یکی از پیامدهای این بیانیه آنست که جامعهٔ ریاضیدانهای ما را مورد

خطاب قرار می دهد. در این بیانیه به شدت به برنامه ریزها حمله کرده اند که چرا اصرار دارید که همه را ریاضیدان آینده بار بیاورید؟ وجوه دیگر برنامه حائز اهمیّت بیشتری است تا تنها ایـن بُعد آن (یعنی ریاضی مجرد) ریاضیدانهای ما بدانند که ریاضیـدانـهـای معروف دنیا در قبال آموزش مدرسه و برنامه درسی ریاضی چگونه احساس مسؤلیت کرده اند و بدانند که اینها هم باید پـا را پـیـش بگذارند.

زنگنه: اغلب کسی که محتوا را می داند روش را نمـی دانـد و کسی که روش را می داند محتوا را نمـی دانـد و لازم اسـت کـه آموزشگر ریاضی هر دو را بداند.

حاجی بابایی: در این بیانیه به جنبه های اجتماعی ریاضی بیشتر توجه و تأکید شده است.

زنگنه: مسائلی که در کتاب ریاضی مدرسه ای نوشتهٔ هاوسون مطرح شده عوامل و پارامترهای بسیاربسیار پیچیده ای هستـنـد، انتخاب مواد درسی به علت پیچیدگی، به تواناییهای تخصصی نیاز دارد و رشته های دیگری را وارد صحنه می کند. این کتاب بدی ها و عواقب آنها رامطرح می کند. باید بدانیم که عوامل درگـیـر در برنامه ریزی درسی چیست و این تـوهّم که آموزش ریاضی همان روش تدریس است را از بین ببریم. بیانیهٔ ۶۲ در واقع هشداری به عواقب برنامهٔ دوران ریاضیات جدید بود. بزرگان خود ما هم چنین نظری داشته اند. در مقدمـهٔ کتاب آنالیز ریاضی، مرحوم دکـتـر مصاحب گفته است «کمدی ریاضی جدید» در عین حالی که او از نظر فلسفهٔ ریاضی طرفدار راسل و منطقیون بوده است.

مدقالچی: راجع به بیانیهٔ ۱۹۶۲ باید دید که وضعیّت اجتماعی آن زمان آمریکا و کانادا چگونه بوده است. در آن زمان بحران جنگ سرد بوده است. شاید برای جبران شکست جامعه، ریاضیدانهـا هم دخالت کردند که به موفقیّت جامعه کمک کنند.

حاجی بابایی: برنامه ریزان دوران ریاضیات جدید تجریـد را به شدت وارد برنامهٔ درسی ریاضی کردند در حالی که ریاضیدانهای معروف در بیانیهٔ ۱۹۶۲ آن دیدگاه افراطی را به شدت نفی کردند.

زنگنه: درمقابل افراط دوران **ریاضی جدید**، **نهضت رجعت به ریاضیات سنتی** با همان افراط مطرح شد و پس از آنها ضرورت آموزش **حل مسأله** که پولیـا در ۱۹۴۵ مطرح کرده بود، دوبـاره عنوان شد و الآن افراط و تفریطها تقریبـاً به یک حالت پایـداری رسیده است. هاوسون ریاضیدان و آموزشگر معروف ریاضـی، به یک برنامهٔ عمومی ریاضی اشاره می کند.

گویا: هاوسون در سال ۹۰ کتاب برنامه درسی ملی را نوشته است و طی آن با بررسی برنامه درسـی ۱۴ کشور به دنبال یافتـن پاسخی برای این سؤال است که آیا می توان برنامـه هـای درسـی مشترکی داشت که در عین حال شاخص های فرهنگی و قومی خود را دارا باشد؟ گویا: باید به این سؤال که چگونه می توان بین زندگی واقعی مردم و ریاضیات مدرسه ارتباط برقرار کرد پاسخ داده شود.

مدقالچی: ایرادی که افراد به ریاضی محض می گیرند این است که شما برای جامعه چکار می کنید؟ هریک از ریاضیدانها تحقیق منفرد می کنند. ما هنوز نمی توانیم با رشته های علمـی ارتـبـاط پژوهشی برقرار کنیم. پس هیچ شکی نیست که این بیانیه برای آن جامعه نوشته شده و باید ریشه یابی کنیم که در چه جوّی نوشته شد و زمینهٔ آن چه بود و همچنین شکی نیست که مفاد این بیانیـه در جامعهٔ ما نیز می تواند تأثیر گذار باشد. ولی باید توجه داشته باشیم که چگونه می توانیم این مسائل را با جامعـهٔ آموزشی خود تطبیق دهیم. نقاط قوت و ضعف دانش‌آموزان ما باید در نظر گرفته شود.

زنگنه: منظور این است که در تغییرات برنامـهٔ درسی مطالب خوب موجود را حفظ کنیم.

مدَقالچی: مثلاً وقتی ریاضیات جدید تدوین شد، آمار و حلقه همزمان وارد برنامهٔ درسی شد ولی الآن می گویند حلقه باید حذف شود ولی آمار باید بماند و قوی تر شود.

مدقالچی: بهرحال باید بدانیم هر موضوعی که وارد بـرنـامـه درسی می‌کنیم دلیلش چیست؟

چه فلسفه ای داشته است و اگر می خواهیم مبحثی را جایگزین کنیم، دلیلش را بدانیم.

گویا: یکی از ملاک ها برای مطرح کردن مباحث جـدیـد در برنامهٔ درسی ریاضی سودمندی اجتماعی بوده است. بهرحال هر مبحثی که وارد برنامـهٔ درسی می شود باید مفید باشد. یـکـی از توجیهات حذف آن قسمتها این بوده است که آن مباحث مـجـرد فایدهٔ لازم را ندارند. با نظر دکتر مدقالچی موافقم که حتمـاً باید برای مباحثی که به برنامـهٔ درسی اضافه یا از آن حذف می شونـد دلیل قانع کننده داشته باشیم.

جلیلی: معمولاً برنامه ریز آنچه را که دوست دارد می نویسد و مؤلف آن تعداد از مباحثی را که دوست دارد تألیف می کند و معلم تنها آن بخشهایی را که دوست دارد تدریس می کند و دانش‌آمـوز هم آنچه را که دوست دارد می خوانـد و عـمـلاً چیزی از برنامـه نمی‌ماند! اما باید برنامه درسی به طور اصولی تدوین شود تا هدفها را تأمین نماید، سپس مؤلفان آنها را رعایت کنند و معلم نیز کتاب را عیناً تدریس نماید. هیچکس قائم به ذات نباشد و سلیـقـه ای عمل نکند تا در جهت آموزش ریاضی قرار گیریم.

زنگنه: به نظر می رَسد دلیل اینکه برنامـهٔ درسی و به دنبال آن تألیف کتابهای درسی سلیقه ای بوده، این است که استانداردهایی نداشتیم.

زنگنه: اگر استانداردهای مبتنی بر فرهنگ ملی برای تألیـف و برنامه ریزی کتب درسی داشته باشیم در اینصورت دلیل اضافه یـا حذف کردن مباحث درسی مشخص می شود.

پس بهرحال باید ما از جایی شروع کنیم.

۱- Think aloud

روایت معلمان

به دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه ای برخوردار است. مجله در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایتها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده ای به وجود می آورد تا به تبیین نظریه های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه ها به عمل دَر می آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می کند.

از همکاران گرامی انتظار می رود که روایتهای خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیّت تجربه های خود واقف شوند و با پویایی به غنی ترکردن آنها بپردازند.

امیرحسین اصغری

دبیر منطقه ۳ دانشجوی کارشناسی ارشد

ریاضی محض دانشگاه شهید بهشتی

همین امسال با شروع دورهٔ کارشناسی ارشد ریاضی، اولین تجربه های معلمی را در دبیرستان کسب کردم. ماجرا از این قرار بود که باید به عنوان معلم حل تمرین با دانش آموزان ریاضی یک، کلاس داشته باشم، کلاسهایی که نمره ای نداشت. خوب همه چیز برای آنچه هر معلمی یا هر دانش آموز سابقی می داند مهیا بود. یک معلم بی تجربه و جوان، کلاس بدون نمره و دانش آموزانی که هفته ای را در آن کلاس باهم گذرانده بودند. (کلاسهای معمول درس زودتر شروع شده بود).

بنابراین تصمیم گرفتم با انتخاب مسائل مناسب، توجه خودم و کلاس را به کنترل جریان یادگیری معطوف کنم و نه به کنترل یادگیرنده ها.

مسائل مناسب چه بودند؟ شرایط زیر را در انتخاب مسائل درنظر گرفتم.

الف ـ همهٔ دانش آموزان شهامت و توان لازم جهت مشارکت در حل آن را در خود ببینند.

ب ـ مسائل در ارتباط با مفاهیم ارائه شدهٔ کتاب درسی باشد.

پ ـ دربرگیرندهٔ یک استراتژی مهم حل مسأله باشد.

و بالاخره اولین روز فرا رسید.

پس از بجای آوردن تعارفات رایج کلاس درس گفتم:

ـ یک مجموعهٔ سه عضوی مثال بزن (با اشارهٔ انگشت به یکی ازدانش آموزان)

∗ $\{a,b,c\}$ [آفرین طعنه آمیز بچه ها]

ـ زیرمجموعه های آن را بگو(با اشاره به دیگری)

∗ $\varnothing,\{a\},\{b\},\ldots,\{a,b,c\}$ (همه با هم)

ـ $\{a\}$ چند عضو دارد؟

∗ یکی

ـ $\{b\}$ چند عضو دارد؟

∗ یکی. [به همین ترتیب تعداد عضوهای زیرمجموعه ها را شمردیم]

ـ پس زیرمجموعه هایی که تعداد عناصرشان فرد است، چندتاست؟

∗ چهارتا: $\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b,c\}$

ـ یک مجموعهٔ ۲۶ عضوی چند زیرمجموعه با تعداد عناصر فرد دارد؟

∗ ۲۷ تا (چند تا از بچه ها)

و از اینجا آموزش واقعی شروع شد! با توجه به مثالی که از آن شروع کرده بودیم، ۲۷ یک حدس طبیعی بود. باید می آموختیم چگونه

حدس خود را امتحان کنیم.

۲۷ را روی تخته نوشتم بدون آنکه در مورد درستی یا نادرستی آن نظری بدهم.

- چند نفر از دانش آموزان پرسیدند: چرا؟

در حالی که در مورد دلیل احتمالی ارائه جواب بالا صحبت می کردم، بعضی از دانش آموزان با اشاره به اینکه فقط تعداد مجموعه های تک عضوی ۲۶ تاست و بعضی دیگر با بررسی مجموعه هایی با تعداد عناصر کمتر حدس بالا را رد کردند. به همین ترتیب با بررسی حدسها، عدم توجه به عدد خاص ۲۶ (تعمیم مسأله، برای یک مجموعه با تعداد عناصر دلخواه)، به دست آوردن جواب در حالتهای ساده و تشکیل جدول زیر به طور همزمان

تعداد عضوها	۱	۲	۳	۴	...
تعداد زیرمجموعه های مطلوب	۱	۲	۴	۸	...

در پی یافتن جواب بودیم. اینکه اعداد در سطر دوم، دوبرابر می شوند، خیلی سریع آشکار شد و با پرسیدن در مورد مجموعهٔ ۱۰ عضوی، ۲۶ عضوی و ۷۳ عضوی، لزوم تغییر جدول به شکل زیر احساس شد:

تعداد عضوها	۱	۲	۳	۴	...
تعداد زیرمجموعه های مطلوب	$۲^{۰}$	$۲^{۱}$	$۲^{۲}$	$۲^{۳}$	...

اکنون جواب را در اختیار داشتیم و تمام توجه به کادربندی جواب مسأله بود.

پس از آن، برای جلب توجه کلاس به چیزی فراتر از جواب، مسأله زیر را مطرح کردم:

حاصل جمع زیر را به دست آورید.

$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}+\cdots+\frac{۱}{۱۰۰\times۱۰۱}$$

خوب، از کجا شروع می کردیم؟ قدم اول **فهمیدن** صورت مسأله بود، جمع صدتا کسر! آشکارا مشخص بود که روش معمول (مخرج مشترک گیری) اگر بدون اشتباه هم صورت بگیرد، نیاز به ساعتی وقت دارد. بنابراین بچه ها شروع به حدس زدن کردند (عموماً حدسهای بی دلیل) و بعضی دیگر روش گاوس را برای جمع ۱ تا ۱۰۰ پیشنهاد کردند. از آن جایی که یافتن ارتباط بین این دو مسأله بسیار حساس بود، پیشنهادها را تک تک مورد بررسی قرار می دادیم. تشخیص اینکه عدد ۱۰۰ به کار رفته در مسأله اهمیت اساسی ندارد (تعمیم) به سختی طی می شد و من دائماً در مورد کاری که درمسأله قبل صورت داده بودیم سؤال می کردم تا بالاخره به مسأله ای شبیه مسأله زیر رسیدیم:

$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}+\cdots+\frac{۱}{۲۰\times۲۱}$$

و از اینجا کار به راحتی پیش رفت و به روال مسألهٔ قبل، ساده ترین حالتها بررسی شد:

$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۲\times۳}+\frac{۱}{۳\times۴}=\frac{۳}{۴}$$

و این فرآیند به همین ترتیب ادامه یافت تا آن که در نهایت، به یافتن الگو و حدس زدن جواب مسأله منجر شد.

در پایان، با نوشتن مجدد دو مسأله روی تخته در کنار یکدیگر، آمادهٔ مرور آنچه دو مسأله به ظاهر بی ربط بالا را به یکدیگر ارتباط می داد، بودیم:

تعمیم، بررسی حالتهای ساده (تخصیص) و حدس زدن جواب.

و آماده بودیم که در جلسهٔ بعد به سراغ مسأله یافتن تعداد مقسوم علیه های یک عدد طبیعی برویم، که خود حدیثی دیگر است.

نکته های قابل توجه:

نکته اول: درهم ریختن طبقه بندی رایج کلاسهای درس در این کلاس بود، یعنی طبقه بندی ای که براساس آن، دانش آموزان با نمرات بالا، پرتوان، و دانش آموزان با نمرات پایین، کم توان، درنظر گرفته می شوند. در حالی که در بررسی مسائل بالا، دانش آموزان دستهٔ اول یا ساکت بودند، یا گاهی چنان حدسهایی می زدند که ناگفتنی است! و این بر خلاف تصوّر رایج بود. مثلاً دانش آموزان با نمره های بالا برای مسألهٔ اول جوابهائی شامل n و x می دادند در حالی که جواب مسأله دوم توسط بعضی از دانش آموزان دستهٔ دوم به راحتی حدس زده شد (با برداشت صحیح از ارتباط دو مسأله).

بعضی از دانش آموزان دستهٔ اول روی جوابهای به شکل ۲^{n} پافشاری می کردند (برداشت نادرست از ارتباط دو مسأله).

نکته دوم: اکثر دانش آموزان مایل بودند که در مورد درستی حدسشان از من تأییدیه بگیرند، بدون اینکه حتی در یک مورد آن را آزمایش کرده باشند. در تمام این موارد بررسی به خودشان واگذار شد.

نکتهٔ سوم: دشوار بودنِ درک ارتباط دو مسأله در شروع مسألهٔ دوم.

لازم به تذکر است که در نوشتهٔ بالا، به عمد، هیچ گونه تلاش در جهت تعبیر و یا عمومیت دادن موقعیت صورت نگرفته است.

چشم اندازی از هشتمین کنگره جهانی آموزش ریاضی در اسپانیا

محمدمسعود ابوطالبی

در تاریخ پانزدهم تا بیست و یکم جولای ۱۹۹۶ برابر با بیست و پنجم تا سی و یکم تیر ماه ۱۳۷۵ ، هشتمین کنگرهٔ جهانی آموزش ریاضی (ICME)[1] در شهر سویل مرکز منطقه اندلس اسپانیا برگزار گردید . در این کنگره چهار هزار نفر ریاضیدان، متخصص آموزش ریاضی و معلم ریاضی از بیش از یکصد کشور جهان شرکت داشتند . هدف از تشکیل این کنگره کمک به توسعه آموزش ریاضی در زمینه تحقیق، تدریس و یادگیری بود .

اولین کنگره در سال ۱۹۶۹ در لیون فرانسه و با شرکت ۶۰۰ نفر محقق و معلم ریاضی تشکیل شد . سه سال بعد در سال ۱۹۷۲ دومین کنگره در اگستر انگلستان و پس از آن کنگره های بعدی هر چهار سال یکبار به ترتیب در کشورهای آلمان، آمریکا، استرالیا، مجارستان و کانادا برگزار شد .

کنگره های ICME در طی سه دهه اخیر تأثیرات قابل توجهی بر شیوه های تدریس ریاضی در سطح جهانی گذاشته اند . این کنگره عامل توسعه و پیشرفت ریاضی و آموزش آن محسوب می شود . در اهمیت ICME همین بس که تاریخ آن در حقیقت تاریخ آموزش ریاضی در سه دههٔ آخر قرن بیستم است . در طول این سه دهه که از عمر برگزاری ICME می گذرد، تبادل نظرات و تضارب آرا میان معلمان و محققان ریاضی در بهبود کار معلمان و ارتقای سطح حرفه ای آنان بسیار مفید و سودمند بوده است . به بیان دیگر، هیچ واقعهٔ درخور توجه و با اهمیتی در طول سه دههٔ گذشته در عرصهٔ آموزش ریاضی در سطح جهان رخ نداده است مگر آنکه کنگره هایICME زمینه ساز بروز این وقایع و نوآوری های جدید و بستر مناسبی برای تعمیم و انتقال این نوآوری ها به دیگر صاحبنظران و دست اندرکاران آموزش ریاضی بوده است . اگر اکنون رشته ای به نام «آموزش ریاضی» در حوزه های دانشگاهی و مراکز تحقیقاتی جهان وجود یافته و اذهان بسیاری از ارباب فکر و نظر را به خود به عنوان یک رشته علمی و برخوردار از روش شناسی خاص معطوف داشته است و روزبروز از شکوفایی بیشتری برخوردار می شود، بی شک به واسطهٔ فضای مناسب این کنگره و مباحث ارزشمند آن بوده است .

اتحادیهٔ جهانی ریاضی(IMU)[2] و کمیسیون بین المللی تدریس ریاضی(ICMI)[3] به عنوان سازمانهای بین المللی طرف مشورت یونسکو که بیش از دویست انجمن تخصصی در سطح جهان را گردهم می آورند، هر چهار سال یکبار برگزاری کنگره[4] (ICME) (کنگرهٔ جهانی آموزش ریاضی) را به یکی از انجمنهای وابسته واگذار می کنند . بر این اساس برگزاری هشتمین کنگره (ICME) در سال جاری (۱۹۹۶م)، به اتحادیه انجمنهای معلمین ریاضی اسپانیا (FESPM) محول شد و این اتحادیه نیز به نوبه خود این وظیفه را به انجمن آموزش ریاضی اندلس تفویض کرد . نهایتاً این اجلاس در دانشگاه شهر سویل مرکز منطقه اندلس اسپانیا تشکیل گردید .

گونزالس سانچزواسکوئز رئیس اتحادیه انجمنهای معلمین ریاضی اسپانیا در پیامی به این کنگره علل تشکیل این همایش عظیم علمی و تحقیقی را چنین تبیین کرد :

«ممکن است عامه مردم از این موضوع متعجب شوند که چگونه تعداد زیادی از معلمین و محققین ریاضی یک هفته کامل به بحث درباره موضوعی می پردازند که ظاهراً حرف جدیدی برای گفتن ندارد . موضوعی که تدریس آن محدود به مجموعه ای از دستور العمل های حساب، جبر و هندسه می شود تا به حل تعدادی مسئله سنتی ریاضی که در چندین دهه تکرار شده اند بپردازد . اما حقیقت غیر از این است . ریاضیات یک علم زنده است که بدون آنکه دستاوردها و پیروزیهای گذشته را نفی و طرد نماید، مرتباً نو و باز آفرینی می شود . این دانش روز به روز به سوی حوزه های علمی و فرهنگی دیگری گسترش می یابد و نه فقط به حوزهٔ مهندسی و فیزیک بلکه در قلمرو جامعه شناسی، زبانشناسی، زیست شناسی و غیره نیز وارد می شود . نگاهی به تأثیرات کنونی علوم محاسباتی، کاربرد ماشین های حساب و کامپیوترها

کافیست تا نشان دهد به چه سرعتی منابع و اندیشه های ریاضی در جامعه امروز استقرار می یابند.

توجه به این نکته ضروری است که ما دیگر تنها با ریاضیات به عنوان علمی که به طور سنتی «منطق و ریاضیات دقیق» شناخته می شد سر و کار نداریم. هر چند که اینها (ریاضیات سنتی) پایه های مهم و منطقی هر فعالیت ریاضی را تشکیل می دهند، اما شاخه های بالنسبه جدیدی نظیر آمار و حسابان بوجود آورنده ریاضیات عدم قطعیّت است که اگر چه واجد یقین و قطعیت نیستند اما محتمل و ممکن اند. شاهد مثال ما در این زمینه مطالعه پدیده های نامنظم بسیاری در طبیعت و جامعه است. طرح و بسط تئوری فاجعه به منظور مطالعه بر روی موقعیتهای استثنایی و غیر دائمی نظیر زلزله و آتشفشان، نمونهٔ خوبی در این زمینه است.

نکته مهم این است که امروز این انقلاب در کامپیوتر و محتواهای جدید ریاضیات نمی تواند مورد غفلت در عرصه تعلیم و تربیت واقع شود. به همین دلیل مسائل مربوط به آموزش معلمان جدید و نیز تحول در آموزش ضمن خدمت معلمان شاغل از فوری ترین و خطیر ترین مسائل امروز جامعه تعلیم و تربیت در سطح بین المللی است. مسئله مهم در این آموزشها، صرفاً بسط و گسترش دانش معلمان نیست بلکه مسئله مهمتر انتخاب مناسب ترین محتوا و بکارگیری جذابترین روشهاست. ریاضیات دیگر نباید به روش سخنرانی یکطرفه و درحالی که دانش آموزان کاملاً منفعل هستند تدریس شود بلکه معلم می باید همچون رهبر یک ارکستر به طور پیوسته هدایت کننده و نشان دهندهٔ راه باشد.»

در این اجلاس برنامه های مختلفی از قبیل سخنرانی های افتتاحیه و اختتامیه، سخنرانی های منظم، گروههای کاری، گروههای موضوعی، گروههای مطالعاتی، نمایشگاهها و کارگاههای آموزشی جریان داشت که نظر به ضرورت آشنایی خوانندگان محترم با ابعاد مختلف این کنگره، به اختصار به مسائل طرح شده در هر یک از این برنامه ها ذیلاً اشاره می شود:

سخنرانی های عمومی

مطابق سنت معمول در سایر کنگره ها، در مراسم افتتاحیه این کنگره نیز سخنرانی هایی توسط شخصیتهای برجسته علمی ایراد گردید. در برنامه افتتاحیه آقای میگوئل گوزمان رئیس کمیته اجرایی کنگره از اسپانیاو خانم آناسیرپینسکا نایب رئیس کمیته اجرایی کنگره از کشور کانادا و در برنامهٔ اختتامیه آقای دیوید تال از چهره های سرشناس آموزش ریاضی انگلستان و آقای جان لانگه رئیس مؤسسه تحقیقاتی فرویدنتال هلند سخنرانی کردند که به ترتیب خلاصه ای از این چهار سخنرانی در زیر آورده می شود:

۱ ـ نقش ریاضیدانان در آموزش ریاضی: میگوئل گوزمان

آموزش ریاضی کاری بس پیچیده است. گروههای مختلفی که جامعهٔ ریاضی را تشکیل می دهند در قبال مشکلات این کارمسئولیت مشترکی دارند و باید باهم تشریک مساعی نمایند تا بر مشکلات آموزش ریاضی به نحو مؤثری فائق آیند. دراین سخنرانی به طور خاص به آن دسته از مسائل و وظایفی اشاره گردید که حل آنها منوط به دخالت ریاضیدانان است. زیرا این ریاضیدانان هستند که به دلیل نوع خاص آگاهی و تجاربی که دارند می توانند هم چشم انداز صحیح و هم روشنایی مناسب به موضوع ببخشند، همچنین دراین سخنرانی به موانعی اشاره شد که در حال حاضر درساختار فعلی جامعهٔ ریاضی وجود دارد و موجب خنثی شدن همکاری میان گروههای مختلف در جامعهٔ ریاضی از قبیل متخصصین علم ریاضی ومتخصصین آموزش ریاضی می گردد.

۲ ـ آموزش ریاضی به کجا می رود؟ آنا سیرپینسکا

مقصود سخنران از این عنوان یادآوری تأملات و تفکرات موریس کلاین (Morris Kleine) در بارهٔ اساس و شالودهٔ ریاضیات است. کلاین در کتاب خویش تحت عنوان« ریاضیات، ازدست رفتن قطعیت»(Mathematics the loss of certainty) به تفصیل دراین باره به بحث پرداخته است. وی یکی از فصول این کتاب را به همین عنوان نامیده است. کلاین در این کتاب دربارهٔ نگرانی های ریاضیدانان نسبت به انسجام وسازگاری نظریه هایشان، منبع ومأخذ عقاید راسخشان و نقش شهود ومنطق درریاضی به بحث می پردازد. وی می گوید بااین حال ریاضیدانان تنها در ایام آخر هفته(تعطیلات) به فکر کردن دربارهٔ این موضوعات می پردازند و در طول هفته و ایام کار با اعتماد به نفس و عقیده راسخ به تحقیق خود مشغولند و در اغلب مقالات آنها نشانه ای از شک دربارهٔ قطعیت و یقینی بودن شالودهٔ ریاضی که نتایج تحقیقاتشان بر اساس آنها استوار است، دیده نمی شود. سخنران با الهام از این بحث، سؤالات مختلفی را مطرح ساخت از این قبیل که: براستی آیا وضعیت محققین در قلمرو آموزش ریاضی از این حیث متفاوت است؟ چگونه است که هر گزارش تحقیقی در زمینهٔ آموزش ریاضی می باید با شرح و تفصیل با ارائه چارچوب نظری تحقیق آغاز شود؟ آیا آموزش ریاضی خود یک رشته ویک دیسیپلین علمی است؟ اگر چنین است به چه صورتی می توان در بارهٔ اساس و بنیانهای آن صحبت کرد؟

۳ ـ تکنولوژی اطلاعات و آموزش ریاضی: دیوید تال

«در حالیکه قرنهای هجدهم و نوزدهم شاهد جایگزین شدن تدریجی ماشین به جای کار یدی بود، اواخر قرن بیستم نظاره گرماشینی شدن فعالیت های فکری است. این دیگر مغزاست که بیشتر از دست بی ثمر و زائد می شود.»

(مایکل عطیّه، ۱۹۸۶)

سخنران بااشاره به این گفتهٔ مایکل عطیّه این نگرانی را ابراز کرد که آیا با رشد روزافزون تکنولوژی اطلاعات تهدیدی متوجه ریاضیدانان شده است؟ اجرای عملیات معمول(routine)ریاضی که به طور سنتی درریاضیات تدریس می شود هم اکنون با پیشرفت تکنولوژی بنحو چشمگیری کنارزده شده است. در یک فروشگاه با بکارگیری کامپیوترهای مجهز به نرم افزاری که بار کد اجناس را می خواند، صورتحساب چاپ شده به مشتریان تحویل می شود و حساب موجودی کالاهای مختلف درانبار حفظ و نگهداری می شود. آیا این نمونه و بسیاری نمونه های دیگر به معنای این نیست که مهارتهای سنتّی ریاضی کم اهمیت می شوند؟تکنولوژی اطلاعات تفاوت میان توانمندی در بکارگیری مهارتهای استاندارد و توانمندی در داشتن فکر ریاضی را بارز کرده است.

۴ ـ مسائل واقعی در مورد ریاضیات دنیای واقعی: جان لانگه

ما در آموزش ریاضی به دانش آموزان، به مسائل واقعی نیاز داریم ونه به مسائلی که به طور تصنعی یا به شکلی عجیب وغریب ساخته شده اند. اما چه چیز یک مسئله را مسئلهٔ خوب می سازد؟ این امر تا حدود زیادی بستگی دارد به هدف مسئله، به سن دانش آموزان و اهداف برنامهٔ درسی. هنگامی که ما به تدریس ریاضیات در دنیای واقعی می پردازیم در هرحال به مسائل واقعی دسترسی پیدا می کنیم. با این وجود موانع زیادی بر سراین راه وجود دارد. معلمان احساس عدم امنیت می کُنند، آنها نیاز به سابقه و زمینه بیشتری در ریاضیات دارند. طراحان سؤالات ارزشیابی خیلی احساس اعتماد به نفس نمی کنند. ریاضیدانان قانع به کنارگذاشتن برخی از ساختار ریاضی نیستند. اولیا احساس می کنند که قادر به کمک به دانش آموز خویش نیستند. در این سخنرانی سعی گردید با ارائه شواهدی از چند کشور موضوعات فوق مورد بحث و تحلیل قرار گیرد.

سخنرانیهای منظم

در جریان این اجلاس، نزدیک به شصت سخنرانی دیگر توسط صاحبنظران برگزار شد که البته عمومی نبود زیرا این سخنرانی ها در سه روز و هر روز دو نوبت و درهرنوبت به طور همزمان حدود ده سخنرانی ایراد گردید که هر یک از شرکت کنندگان به تناسب علاقه و حوزهٔ تخصصی خود دریکی ازاین سخنرانی ها شرکت می کردند. خلاصه ای از برخی از این سخنرانی ها به شرح زیر عرضه می شود:

تدریس ویادگیری ریاضیات برای آینده

درطول یکصدوپنجاه سال گذشته جامعه و به تبع آن مدارس دچار تغییرات وسیع و بنیادی شده است. در جوامع مربوط به دوران کشاورزی، تعلیم و تربیت نه تنها غیر ضروری تلقی می شد بلکه وجود افراد عادی که تاحدی آموزش دیده بودند نیز به حال جامعه خطرناک جلوه می کرد. در دوران صنعتی، تعلیم و تربیت به تدریج اهمیت یافت و در دنیای امروز شما شانسی برای اشتغال در جامعه نخواهید داشت مگر آنکه حداقل دوازده سال تحصیل کرده باشید. جامعهٔ آینده نه تنها این روند را حفظ خواهد کرد بلکه نقش تعلیم و تربیت را پررنگ تر خواهد ساخت. از آنجا که ما نمی توانیم فرزندانمان را به مدت مثلاً ۵۰ سال در مدارس آموزش دهیم تا به درد زندگی آینده بخورند لذا می باید مدارسمان را سودمندتر و کارآمدتر بسازیم تا نسل نو پس از طی دوران محدود تحصیل بتواند در مواجهه با نیازهای متنوع و روبه رشد جامعهٔ آینده موفق باشد. این بدان معناست که ما باید در مورد موضوعاتی از قبیل «دانش»، «یادگیری» و«مهارتها» تجدید نظر نماییم. درریاضیات ما باید به این سؤال پاسخ دهیم که چه چیزی حقیقتاً مصداق «دانش ریاضی» است و چه چیزی مصداق آن نیست، هرچند ظاهراً در قالب معلومات ریاضی ارائه شود. از نظر سخنران فرآیند یادگیری می باید از مسائل مرتبط با زندگی آغاز شود. همچنین از نظر وی تعداد زیاد محاسبات الگوریتمی می تواند مانع از یادگیری صحیح شود. به جای پرداختن دانش آموز به محاسبات یکنواخت و الگوریتمی، از اولین روزهای مدرسه، ماشین حساب باید جانشین انجام اینگونه محاسبات یکنواخت گردد و در عوض، زمان درس ریاضی آزاد شود تا یادگیری حقیقی ریاضی صورت پذیرد و ریاضی موضوعی برای فهمیدن و عرصه ای برای بروز خلاقیتها شود.

فرآیند تدریس و یادگیری در آنالیزمقدماتی

تحقیق آموزشی انجام شده درقلمرو مفاهیم مربوط به آنالیز مقدماتی ابزار مناسبی برای فهم مشکلات یادگیرندگان و عدم موفقیت راهبردهای سنتی تدریس فراهم آورده است. سخنران در بخش اول بحث خود به نتایج اصلی این تحقیق اشاره نمود و در بخش دوم از سخنانش محدودیت های رویکردهای ادراکی و شناخت شناسی بکار گرفته شده در این تحقیق آموزشی را نشان داد و بر خطر بکارگیری نسنجیدهٔ ابزار تجربی تحقیق درعالم تعلیم و تربیت تأکید ورزید.

آموزش ریاضی از نگاهی شرقی

اصلاحات جدیدِ آموزش ریاضی در چین به واسطهٔ دو عامل به جریان افتاد: پیشرفت و توسعهٔ جامعهٔ چین و حرکت کشورهای غربی در زمینهٔ آموزش ریاضی. دراین سخنرانی، سخنران سعی نمود توضیح دهد که چگونه آموزش ریاضی در چین در حال حاضربه سوی یک الگوی جدید در حرکت است. این تغییر و

تحوّل، تغییری نظام یافته و عمیق به سوی قرن بیست ویکم است. همچنین در این بحث به چگونگی فرآیند تغییر، طراحی و کنترل برنامهٔ آموزش ریاضی اشاره شد.

ریاضیات قومی (Ethnomathematics) منشأ و آیندهٔ آن

تاریخ و جغرافیای رفتار انسانی به ما اجازه می دهد که نگاهی نو به ظهور و بروز اندیشه های ریاضی در محیط های فرهنگی مختلف بیاندازیم. با این زمینه ما می توانیم چارچوبی فکری برای «ریاضیات قومی» بسازیم. دراین سخنرانی به نمونه هایی از اندیشه های ریاضی برخاسته در میان اقوام وملل مختلف اشاره گردید و بررابطه میان اندیشهٔ ریاضی وفرهنگ قومی تأکید شد.

تغییر چهرهٔ آموزش جبر درمدارس

در گذشته جبر در مدارس اساساً به صورت حساب تعمیم یافته تلقی می شد. در حال حاضرکوشش هایی در جهت غنی ساختن محتوای جبر از قبیل اشتمال بر «حل مسئله»، مفاهیم کارکردی، مدلسازی و تعمیم الگو و نیز کاربرد کامپیوتر به منظور تشویق تفکر جبری، صورت گرفته است، که موجب ارائهٔ تعریف جدیدی از آموزش جبر درمدارس شده اند.

برنامهٔ تحقیقات دکتری ودانشگاهی دربارهٔ آموزش ریاضی در دانشگاه اسپانیا

دراین سخنرانی به سه موضوع زیر پرداخته شد: پیشرفتهای جدید درزمینهٔ تحقیقات در آموزش ریاضی در دانشگاههای اسپانیا از سال ۱۹۸۴ به بعد، اصلاحات شکل گرفته در رشتهٔ آموزش ریاضی و برنامه های دورهٔ دکتری دراین رشته. هدف این سخنرانی عبارت بود ا از ارائه سابقه و زمینهٔ تحقیقات دانشگاهی در آموزش ریاضی در سطح پیشرفتهٔ آن و بیان پیشرفت های به دست آمده در حال حاضر و تبیین خطوط اصلی تحقیقات که در سالهای آتی در دانشگاههای اسپانیا در این رشته صورت خواهد گرفت. طبق اظهار سخنران تا کنون تعداد قابل توجهی ازرساله های دکتری در موضوعات مختلف مربوط به این رشته هدایت و به انجام رسیده است.

دربارهٔ استعارات ومدلهای تغییر مفهومی در ریاضیات

تحقیق درزمینهٔ رشد مفاهیم ریاضی از مهمترین مطالعات در میان انواع مطالعات مربوط به آموزش ریاضی است. در این سخنرانی، گذشته، حال و آینده این نوع از تحقیق مورد بررسی قرار گرفت و به طور خاص با فکری انتقادی به استعارات مختلفی که الهام بخش مطالعه دربارهٔ تغییرات مفهومی در طول زمان بوده اند، پرداخته شد. تمرکزاصلی بحث براین بود که از چه طریقی اندیشهٔ تکاملی رشد زیستی[4] موجب شکل گیری نحوهٔ رویکرد محققین به موضوع از زمان پیاژه و ویگاتسکی(Vygotsky)شد.

نظریهٔ عمومی فرآیندهاوسیستمها در تحقیق ریاضی و در تحقیق آموزش ریاضی

اشتغال به ریاضی به معنای کشف و شناسایی الگوها و نظم و ترتیب در فرآیندهای حقیقی و تولید سیستمهای تشکیل شده از عناصر و اجزاء، تبدیلات و روابط به منظور کشف رفتار آنهاست. دراین سخنرانی تفسیری ازمفاهیم ساختار و پویائی یک سیستم ریاضی عرضه گردید. همچنین به کاربردهای این فرآیند کلی (نظریهٔ سیستمها) در تحقیقات ریاضی و آموزش ریاضی اشاره شد.

پروژه به عنوان جزئی از برنامه درسی ریاضیات

نگرانی های جاری دربارهٔ قابلیتها و توانایی هایی که درس ریاضی باید دردانش آموزان بوجود آورد و باور نسبت به ارتباط میان یادگیری و وجود انگیزه دردانش آموز، مؤید این نظر است که کارهای پروژه ای می تواند نقش منحصر بفردی را در آموزش ریاضی دانش آموزان بازی کند. دراین سخنرانی با اشاره به نوآوریهای صورت گرفته دربرنامهٔ درسی، راههای مناسب برای تلفیق کارهای پروژه ای و برنامهٔ درسی ریاضی نشان داده شد.

تغییر و دگر گونی آموزش ریاضی در کلاسهای ابتدایی

دراین سخنرانی توضیح داده شد که چگونه شیوهٔ آموزشی ساخت گرا(constructivist) موجب بهبود کیفیت محتوای ریاضی و امر آموزش در کلاسهای ابتدایی مدارسی گردید که در آن مدارس دانش آموزان با قومیت ها و زبان های مختلف به تحصیل اشتغال داشتند. در صفحات بعد در بخش «گروههای موضوعی» مفهوم وشیوه آموزش ساخت گرا توضیح داده خواهد شد.

مشاهده و استدلال در فضاهای پارامتری

اغلب حل یک مسئله به مسئله ای هندسی در فضای پارامتری تحویل می شود. سخنران سعی نمود این موضوع را در بررسی دومسئلهٔ زیر نشان دهد:

مسئلهٔ اول: اعداد حقیقی U، V و W داده شده اند به طوری که $U<V$ و $W<V$. آیا می توان یک چندجمله ای درجهٔ چهارم تکین[5] f با مقادیر بحرانی U و V و W پیدا کرد؟ آیا f با توجه به تغییر متغیر $X \to X+P$ یکتاست؟

مسئلهٔ دوم: قوسی از منحنی A داده شده است که دو سر آن بر خط L مماس است. آیا می توان خط مستقیم D را در صفحه حرکت

داد و آن را در جهت عکس به محل خودش برگرداند بدون آنکه D در هیچ زمانی مماس بر قوس A شود؟

این مسئله به توپولوژی در یک نوار موبیوس منتهی می شود. جواب وابسته به A است.

ساخت گرایی اجتماعی به مثابه فلسفهٔ ریاضیات

ساخت گرایی اجتماعی به عنوان فلسفهٔ ریاضیات با منشأ و ضمانت دانش ریاضی ارتباط دارد. این فرآیند هم در محتوای تحقیقات ریاضی وهم در محتوای تعلیم ریاضی، که با یادگیری و ارزشیابی سروکار دارد، صورت می پذیرد. دراین سخنرانی گزارشی نظری از این فرآیند که در عادات انسانی به چشم می خورد باتکیه بر آثار لاکاتوش و ویتگنشتاین ارائه شد. این نظریه می باید به عنوان یک فلسفهٔ فرامدرن ریاضی[۶] نامیده شود زیرا که این نظریه منطق را به عنوان اساس و شالودهٔ دانش ریاضی کنار می گذارد و به جای آن فعالیت ها و محاوره های بشری متکی به ظرف و زمینه های خاص را قرار می دهد. همچنین دراین سخنرانی به رابطهٔ میان فلسفهٔ ریاضی و آموزش ریاضی توجه شد و بر این حقیقت تکیه شد که پیشرفت در فلسفهٔ ریاضی و مفاهیم غیر رسمی متناظر آن، نتایج مهمی برای آموزش ریاضی بدنبال دارد. همچنین تا حدی به این مسئله اشاره شد که توجه به موضوعاتی نظیر یادگیری و ارزشیابی حداقل از منظر نظریهٔ ابطال پذیری و ساخت گرایی نتایج مهمی برای علم ریاضی و فلسفهٔ آن دربر دارد.

محدودهٔ تواناییها، یادگیری و ارزشیابی دانش هندسه در ظرف محیط

در این سخنرانی دربارهٔ مسئلهٔ پیچیدهٔ فرآیندهای مهارت دریادگیری و ارزشیابی صحبت شد و چشم انداز تاریخی مختصری راجع به رویکردهای تحقیقی مختلفی از جمله رهیافت مفهومی، ساختاری، دارای سلسله مراتب (hierarchical)، مربوط به درجات فراگیری و مربوط به محدودهٔ شناختی تواناییها ارائه شد. همچنین سخنران بر موضوع طراحی محیط یادگیری که موجب ارتقای رشد تواناییهای مرتبهٔ بالاتر دانش آموز می شود و نیزبر موضوع توسعهٔ مستمر و تنوع پذیری تکیه کرد.

سایه روشن برنامه درسی اخیر ژاپن برای مدارس متوسطه

برنامهٔ درسی ملی ژاپن که در حال حاضر جریان دارد از سال ۱۹۶۱ برای دورهٔ دوم متوسطه به اجرا گذاشته شده است. از جمله اهداف این برنامه سوادآموزی ریاضی[۷] و آموزش تفکر ریاضی[۸] است و نیز مقدماتی از کامپیوتر دربرنامه گنجانده شده است.

سخنران ضمن تشریح این برنامه به مشکلاتی که در اجرای آن بروز کرده است، اشاره کرد و اظهار نمود این مشکلات که از آن به نام «بحران در آموزش ریاضیات» یاد می شود جامعهٔ تعلیم و تربیت ژاپن را جداً نگران کرده است. وی علامت اصلی این بحران راعدم رغبت و علاقهٔ دانش آموزان به ریاضیات وعلوم اعلام کرد.

اصلاح کاربردها، تاریخچهٔ مختصر

سخنران چشم اندازی تاریخی از حرکت اصلاحی جاری در آموزش ریاضیات از بُعد بین المللی ارائه کرد. وی بر کاربرد ریاضیات، معرفی مدلسازی ریاضی و رویکردهای متکی بر متن در اجرای برنامهٔ درسی در سطوح متوسطه و دانشگاهی تأکیدداشت.

مشکلات و چالشها در اجرای روش «حل مسئله» دربرنامهٔ درسی ریاضیات مدارس

در طول پانزده سال گذشته یک گرایش بین المللی روبه رشد در جهت تأکید بر روش حل مسئله در برنامهٔ درسی مدارس بوجود آمده است. دراین سخنرانی به اصلی ترین مشکلاتی که دراجرای این روش مشاهده شده است و نیز چالشهای جدیدی که درعرصهٔ تحقیق بر روی این موضوع وجود دارد اشاره شد وسعی گردید این مشکلات وچالشها در پرتو یک تحقیق بین المللی که اخیراً دراین زمینه صورت گرفته است مورد بحث و بررسی قرار گیرند.

تجربه ای از کینگ پو(Qing Pu) ـ گزارشی دربارهٔ اصلاح استانداردها در آموزش ریاضی در چین

از سال ۱۹۷۷ تا ۱۹۹۲ در استان کینگ پو، یک اصلاح آموزشی درمقیاسی وسیع تجربه شد. در اثر این تجربه، تعداد دانش آموزان مدارس راهنمائی استان که در ریاضی به صلاحیت لازم دست یافته بودند از ۱۶٪ به ۸۵٪ و بیشتر افزایش یافت.

کمیسیون آموزش دولت این امر را به عنوان مهمترین پیشرفت در اصلاح آموزش پایه تلقی کرد و تصمیم گرفت این تجربه رابه دیگر نقاط کشور چین گسترش دهد. دراین سخنرانی، ضمن اشاره به مطالب فوق، به طور خلاصه به سازماندهی منحصر بفرد روشهای این تجربهٔ آموزشی که مناسب کار گروهی معلمان است و نیز نتایج تدریس اصول و راهبردهای این تجربه که به منظور هدایت دانش آموزان به مطالعهٔ مؤثرتر ریاضی است اشاره شد.

محققین در برابر معلمان ریاضی و دانش آموزان چه مسئولیتی دارند؟

سخنران با اشاره به اینکه در بسیاری از کشورها تحقیقات کمّی در زمینهٔ آموزش ریاضی انجام می شود، اضافه نمود که به طور

مکرر شنیده می شود که این تحقیقات اندک نیز به نوبهٔ خود تأثیرات کمی بر آنچه واقعاً در محیط کلاسها جریان دارد، می گذارد. وی ضمن تشریح این مسئله چنین نتیجه گیری کرد که شاید این امر ناشی از این است که تحقیقات از یک طرف ارتباط کافی با واقعیت های کلاسهای درس ندارند و از طرف دیگر تعمیم پذیر نیستند و بیشتر به مباحث نظری می پردازند.

ریاضیات و درک متعارف(common sense)

چه رابطه ای میان ریاضیات و درک متعارف افراد وجود دارد؟ تا چه اندازه تدریس ریاضیات به عنوان امری که مردم از آن دارای درک متعارفی هستند امکان پذیر است؟ و دراین راه چه خطرات گریز ناپذیری وجود دارد؟ اینها اهم مطالبی بود که سخنران سعی نمود به ایضاح و تبیین آنها بپردازد.

اضطراب از تدریس ریاضی

کاستیهای راه و روش آموزش ریاضیات به دانشجو معلمان در دانشگاهها، موجب درک منفی آنان از ریاضیات و آموزش ریاضی می شود و به نوبهٔ خود در تدریس این درس توسط آنان به دانش آموزان دورهٔ متوسطه تأثیرات منفی دارد. سخنران با استناد به تحقیقی که در کشور آلمان دربارهٔ تلقی اجتماعی دانشجو معلمان از ریاضیات در ابتدای تحصیل آنان در دانشگاهها صورت گرفته بود، چنین نتیجه گرفت که تصور دانشجو معلمان در ابتدای تحصیل آنها در دانشگاهها از ریاضیات، عمدتاً ناشی از تجارب تحصیلی آنان در دورهٔ متوسطه بوده است و هنگامی که این نتایج با تلقی آنان از ریاضیات در پایان دورهٔ تحصیل در دانشگاه مقایسه گردید مشخص شد که چگونه معلمان تجارب منفی خود از شیوهٔ تدریس ریاضیات دردوران تحصیل خود در دورهٔ متوسطه و دانشگاه را به صورت آشکار و ضمنی تبدیل به تصور نفرت انگیز یا دوری طلبانه از ریاضیات نموده و این نگرش را به دانش آموزان منتقل می نمایند و متقابلاً موجب گسترش اضطراب از ریاضی می شوند. به بیان دیگر، اگر معلمی دردوران تحصیل خود تجربهٔ ناخوشایندی از درس ریاضیات داشته باشد به نوبهٔ خود در هنگام تدریس، دیگر ریاضیات درس نمی دهد بلکه عدم علاقمندی به ریاضیات را آموزش می دهد.

تعلیم وتربیت نو ومحتوای نو، نمونهٔ آمار

معلمان ریاضی در کلیهٔ سطوح علاقمند شده اند تا برنامهٔ آموزشی جدیدی را که تأکید بر یادگیری فعال و نیز کار گروهی و تبادل نظر میان دانش آموزان دارد، بپذیرند. دعوت به اصلاح برنامه ها اغلب شامل دعوت به تجدید نظر در اهداف یادگیری از قبیل تأکید بر «مهارتهای انعطاف پذیر حل مسئله» است. در «آمار» بر اثر تغییری که دراین رشته به وسیله تکنولوژی و فعالیتهای حرفه ای صورت گرفته محتوای آموزشهای اولیه تاحدی از ریاضیات به سوی تجربه و کار با داده ها تغییر یافته است. تعامل و برهم کنش این گرایش ها موجب تغییرات سریع در آموزش آمار شده است. در این سخنرانی گرایشهای جاری در آموزش آمار مورد بررسی قرار گرفت و نتایج حاصل از آنها درعرصه آموزش تشریح گردید.

مشکلات بیان کلیشه ای درمدارس و طبیعت بازکاربردها

آموزشگران ریاضی با این مشکل و تنگنا مواجه هستند که آیا «حل مسئله» قابل تدریس است؟ دربسیاری از موارد دانش آموز از طریق کار بر روی مثالهای مختلفی می آموزد که چگونه به حل مسئله بپردازد. دراینجا این سؤال مطرح است که آیا راهی صریح و روشن برای تدریس این مهارت وجود دارد؟ یافته های روانشناسی شناختی[9] دلالت دارد براین که فرد باید طرح نهفته در مسئله را کشف نماید و آن طرح کلّی اولیّه به طور مستقیم قابل تدریس است. پس می توان ضمن کار بر روی نمونه های زیاد ومختلف از طریق تدریس این طرح کلی اولیه که در مسائل وجود دارد دانش آموز را موفق به حل مسئله نمود. دراین سخنرانی یافته های تجربی دراین زمینه عرضه گردید.

مسابقات ریاضی در چین، موفقیتها ونارسایی ها

دراین سخنرانی به طور تفصیلی به اقداماتی که در جریان مسابقات ریاضی در چین صورت گرفته اشاره شد. همچنین تأثیر این مسابقات بر آموزش ریاضی و مسائلی که به واسطه توجه زیاد به مسابقات ریاضی در چین بروز کرده مورد بحث قرار گرفت.

***

همچنین علاوه بر سخنرانی های فوق سخنرانی های دیگری نیز در کنفرانس ارائه گردید که درزیر به عناوین آنها اشاره می شود:

- **شرایط نامتوازن درسیستم آموزشی**
- **هندسه و حسابان نمادین**
- **ساختارهای شناختی دانش آموزان**
- **بعضی از وجوه برنامهٔ درسی ریاضی دررشته های مهندسی**
- **وسیله های انتقال «معنی»**
- **نقش جدید برای اسناد برنامه درسی - از مرحله طرح ریزی اولیه تامرحله نهایی**
- **موضوعات و مسائل در ارزشیابی: یک داستان بی پایان**
- **ارزشیابی میزان سودمندی تدریس کاربردهای ریاضی**
- **آیا بازسازی هندسهٔ مدارس به کمک کامپیوتر موجّه است؟**
- **آیا ساخت های معنایی واژگان بکار رفته در مسائل ریاضی توسط دانش آموزان فهمیده می شود؟**

ـ کاربرد نرم افزارهای خاص در آموزش ریاضی
ـ مطالبی که من در بارهٔ «حل مسئله» از تاریخ و تحقیق آموخته ام
ـ تغییرات مهم شناختی در یادگیری ریاضیات
ـ نوآوری در آموزش ریاضیات
ـ تصورات اساسی مربوط به مفاهیم ریاضی و راههای اصلی درک آنها در تمامی پایه های تحصیل
ـ آموزش ریاضی و فرهنگ در آفریقای جنوبی
ـ ریاضیات برای کار: چشم اندازی آموزشی
ـ نقش زبان مادری در یادگیری ریاضیات
ـ آموزش نقادانه ریاضی: برخی ملاحظات فلسفی
ـ فلسفه آموزش ریاضی: رویکردی پدیده شناسانه
ـ موضوعاتی تاریخی و آموزشی دربارهٔ ابزارهای رسم
ـ ارائه مدل نظری درباره پیشرفت حرفه ای معلمان
ـ ملاحظاتی دربارهٔ مسائل و ابعاد آموزش ضمن خدمت معلمان ریاضی
ـ المپیاد ریاضی آرژانتین، گذشته، حال و آینده
ـ ریاضیات در صحنه: رویکردی درهم تنیده برای تحول برنامهٔ درسی
ـ رویکرد مفهومی ومحاسباتی درتدریس ریاضیات
ـ یک دهه از آموزش مدلسازی ریاضی
ـ برداشتهای موریس فرشه درباره ریاضیات و تجربه
ـ حمایت از رشد توانائیهای ریاضی نوجوانان
ـ استانداردهای روسیه: مفاهیم و تصمیمات
ـ کودکان را برای آینده آموزش دهید، نه برای گذشته

❁❁

گروههای کاری

به منظور مشارکت فعال کلیهٔ شرکت کنندگان در بحث و بررسی مسائل کلیدی در آموزش ریاضی، گروههای کاری بیست و ششگانه ای در کنگره تشکیل گردید. قبلاً به هنگام ثبت نام اولیه، از شرکت کنندگان درخواست شده بود تا به ترتیب اولویت مورد نظرشان دو گروه کاری را انتخاب نمایند تا دست برگزار کنندگان کنفرانس درانتخاب هر فرد برای یک گروه کاری باز باشد. این گروههای کاری در طول کنفرانس بطور همزمان طی چهار روز، چهار جلسهٔ ۹۰ دقیقه ای تشکیل دادند و به بحث و بررسی و تبادل نظر درباره موضوعات تعیین شده پرداختند. در زیر به برخی ازاین گروهها ومباحث مطروحه درآنها اشاره می شود:

انواع دانش ریاضی

انواع مختلفی از دانش درعملیات ریاضی کاربرد دارد که شامل نوع الگوریتمی، صوری، بصری وشهودی می شود که دراین گروه کاری راجع به این انواع بحث و گفتگو شد. همچنین نمونه هایی از تدریس که سعی بر تلفیق این انواع مختلف داشت ارائه شد. بعضی از مسائلی که دراین گروه مورد بحث قرار گرفت به شرح زیر بود:

۱ ـ نقش دانش شهودی، الگوریتمی وصوری در عملیات مختلف ریاضی
۲ ـ نقش این انواع در قلمروهای خاص ریاضی(ازقبیل حساب، جبر، هندسه، احتمال، حساب دیفرانسیل وانتگرال)
۳ ـ مشابهتها و تفاوتها بین تفکرریاضی پیشرفته و ابتدایی
۴ ـ جنبه های فلسفی مربوط به انواع مختلف دانش ریاضی.

نوآوری در ارزشیابی

دراین گروه نوآوری های اخیر درارزشیابی از یادگیری ریاضی در محدودهٔ کلاس درس تا سطح ملی مورد توجه قرار گرفت. همچنین بر روی آن دسته از نوآوری هایی که موجب بهبود یادگیری دانش آموزان شده است و نیز دربارهٔ چرایی و چگونگی آنها تکیه و تأکید شد. گروههای بحث کوچکتری بر اساس سؤالهای خاص ارزشیابی و یا روشهایی که هم اینک در مدارس بکار می رود و نشانه نوآوری در امتحانات کتبی، شفاهی و عملی بود تشکیل شد. زیر گروههای کوچک دیگری نیز به موضوعات زیر پرداختند: ارزشیابی از فرآیند ذهنی، ثبت پیشرفت کلاسهای بزرگ، روشهای طرح سؤال و آزمون، سبک ارزشیابی درونی و بیرونی، بکارگیری بانک سؤالات توسط معلم، بکارگیری نظریه های یادگیری درطراحی ارزشیابی و سنجش نتایج امتحانات. پس از بحث و تبادل نظر بر روی این موضوعات، نتایج کار زیرگروهها در جلسه عمومی گروه عرضه گردید.

بطور کلی هدف از تشکیل این گروه کاری، فراهم آوردن زمینه مناسب جهت تبادل اطلاعات روزآمد درباره نوآوری های ایجاد شده درارزشیابی بود ولذا در پایان کار این گروه شبکه های همکاری میان شرکت کنندگان بر اساس علایق مشترکشان طراحی شد تا در موضوعات مورد علاقه خود، پس از کنفرانس به تبادل اطلاعات و همفکری با یکدیگر بپردازند.

طراحی یک برنامه درسی از آغاز[۱۰]

پیش فرض تشکیل این گروه کاری این بود که شرکت کنندگان تصور نمایند آموزش ریاضی تا کنون وجود خارجی نداشته و آنان در سال ۱۹۹۶ احساس نیاز کرده اند که چنین امری را ابداع نمایند دراین صورت برنامه درسی چه شکل و صورتی پیدا می کرد؟

این سؤال درمیان اعضای گروه مطرح گردید که با قبول این فرض برنامه درسی ایده آل ومورد قبول آنان تا چه اندازه با برنامه ای که هم اینک از مرحله کودکستان تا پایان دوره متوسطه درجریان است فاصله پیدامی کرد؟ همچنین چه نوع موانع سیاسی، اجتماعی

و اقتصادی می بایست برای انجام این تغییردربرنامه از پیش پا برداشته شود تا ما از موقعیتی که در آن قرار داریم بتوانیم به سمت ایده آل خود حرکت کنیم؟ بعضی از مطالبی که در اینجا ارائه گردید به این سؤال از چشم انداز موضوع درسی نگاه می کرد (چه بخشی از ریاضیات موجود در مدارس می بایست در هر برنامه درسی حفظ شود؟ چه موضوعات درسی که هم اینک در برنامه درسی مدارس تدریس نمی شود می بایست در این برنامه جدید مطرح شود؟) مطالب دیگری نیز دربارهٔ تأثیر این ایده بر آموزش، تربیت معلم، امتحانات و نیزنتایج حاصل از تحقیقات در آموزش ریاضی که می تواند برای این ایده (برنامه درسی از آغاز) مفید واقع شود مطرح شد.

پیوند میان ریاضیات و دیگرموضوعات درسی در مدارس

دراین گروه، دیدگاههای مختلفی در چهار سطح تحصیلی ارائه گردید: دورهٔ قبل از دبستان(که تقریباً فعالیتهای ریاضی با دیگر فعالیتها به صورت درهم تنیده وجود دارد)، دورهٔ ابتدایی(که ریاضیات و دیگر موضوعات درسی به وسیله یک معلم تدریس می شود)، دورهٔ اول متوسطه و دورهٔ دوم متوسطه(که معلمین متفاوتی برای دروس ریاضی و دروس دیگر بکار گرفته می شوند).

دراین گروه این مطالب مورد ملاحظه قرار گرفت: بخشی از تاریخچهٔ غنی فعالیتهایی که در زمینه پیوند میان ریاضیات و دیگر دروس صورت گرفته است، دلایل و فلسفه این کار، مطالعه و بررسی طراحی تدریس ریاضی به صورت تلفیقی، گزارشهایی از اجرا و تحقیق بر روی این موضوع، ارائه نمونه هایی از درسهای ریاضی تلفیق شده، توجه به دانش آموزانی که از پیشرفت تحصیلی زیاد ویاکم به هنگام تدریس ریاضی به صورت درهم- تنیده باسایر دروس برخوردارند، تفکر درباره نظریه های یادگیری و تدریس مربوط به این روش، احساس نیاز در بکارگیری روش پدیده شناسی آموزشی مطابق با نظر هانس فرویدنتال، تمرین چگونگی عرضهٔ ریاضی درمتن دیگر دروس و توجه به مسائل فرهنگی، زبانی و رسانه ای دراین ارتباط. توجه به این مسئلهٔ اساسی که تلفیق ریاضیات با دیگر دروس درمدرسه نیازمند ایجاد تعادل میان یادگیری ریاضی درزمینه دیگر دروس و یادگیری ریاضی به صورت تنها وجدا شده است.

تدریس ریاضی درفرهنگهای مختلف

دراین گروه این مطالب مورد توجه و بررسی قرار گرفت: ارائه گزارش تحقیقات جاری دربارهٔ فرهنگ و تدریس و یادگیری ریاضی، رابطهٔ میان معلم وشاگرد؛ توجه به تجارب قبلی دانش آموز به عنوان پایه ای برای ساخت دانش وی؛ کمکهای فرهنگی به توسعهٔ ریاضیات خاص(نظیر سیستمهای شمارش، حساب، حل مسئله)؛ توسعهٔ اندیشه های جدید برای تحقیقات بین فرهنگی در زمینه ابعاد مهم و خطیر فهم ریاضی و حل مسئله درداخل و خارج ازمدرسه و نیز توجه به ملاحظات نظری دراین باب.

بازگشت بزرگسالان به آموزش ریاضی

هدف این گروه کاری عبارت بود از پیشنهاد مجموعه ای از توصیه ها دربارهٔ آموزش ریاضی به جمعیتهای مختلفی از بزرگسالان که به سیستم آموزشی رجوع می کنند. دیگر بحث های این گروه عبارت بود از: چه محتوایی برای تدریس ریاضی به بزرگسالان باید درنظر گرفته شود، چه سطوحی از پیشرفت تحصیلی باید برای آنان منظور شود و چه راهبردهایی درتدریس ریاضی به بزرگسالان باید بکار گرفته شود.

تدریس ریاضی به عنوان یک رشته علمی

مباحث این گروه کاری معطوف به چند سؤال زیر بود:

۱ـ چه مسیرهایی تاکنون طی شده است تا ما به مفهوم«تدریس ریاضی به مثابه یک رشته علمی» رسیده ایم؟ آیا براین دیدگاه صحه جهانی گذاشته شده است؟ تا چه اندازه؟

۲ـ آیا تفاوت میان تدریس ریاضی و آموزش ریاضی صرفاً یک مسئله زبانی برخاسته از فرهنگهای مختلف است؟

۳ـ بر اساس الگو و مدلهای ذهنی (Paradigm) مختلف چه مشخصات و خصوصیاتی اعتبار علمی یک رشته را معین می کند؟

۴ـ تدریس ریاضی همچنان که با ریاضی پیوند دارد با رشته های مختلفی نظیر علم شناخت، تعلیم وتربیت، روانشناسی، جامعه شناسی و انسان شناسی نیز پیوند دارد. میزان و نحوه ارتباط تدریس ریاضی با هریک از این حوزه های معرفتی چیست؟

با توجه به موضوعات فوق زیرگروههایی جهت بحث و تبادل نظر تشکیل گردید و میزگردی نیز در پایان با حضور نمایندگان این زیرگروهها تشکیل شد.

* * *

عناوین بقیه گروههای کاری به شرح زیر بود:

- **برقراری ارتباط در کلاس درس**
- **نگرشها و انگیزه دانش آموزان**
- **مشکلات دانش آموزان دریادگیری ریاضی**
- **تدریس درکلاسهای متشکل از دانش آموزان باتواناییهای متفاوت[11]**
- **ریاضیات و جنسیت**
- **ریاضیات برای دانش آموزان تیزهوش**
- **ریاضیات برای دانش آموزانی که دارای نیاز ویژه هستند**
- **زبان و ریاضی**
- **تغییر برنامه درسی در مدارس ابتدایی**

- تغییر برنامه درسی در مدارس متوسطه
- تأثیر تکنولوژی بر برنامه درسی ریاضی
- نقش تکنولوژی در کلاس درس ریاضی
- ریاضیات به عنوان یک درس سرویس دهنده در سطح آموزش عالی
- آماده سازی و ارتقای معلمان
- ارزشیابی از تدریس، مراکز و سیستمها
- ریاضیات، تعلیم وتربیت، جامعه و فرهنگ
- همکاری میان کشورها و منطقه ها در آموزش ریاضی
- معیارهای کیفیت و مرتبط با نیاز بودن تحقیقات در زمینه آموزش ریاضی
- ارتباط میان تحقیق وعمل درآموزش ریاضی

***

گروههای موضوعی

علاوه بر گروههای کاری، گروههای دیگری دربارهٔ بیست وشش موضوع تشکیل شده بود که هر گروه در دو روز جداگانه و به طورهمزمان با سایر گروههای موضوعی دو جلسه ۹۰ دقیقه ای برگزار کردند تا پیشرفته ترین نظریات در حول و حوش موضوع گروه را به بحث بگذارند. همانند گروههای کاری در بدو ثبت نام درخواست شده بود تا هرشرکت کننده به ترتیب اولویت و علایق شخصی خویش، دو گروه موضوعی را انتخاب نماید تانهایتاً عضویت وی در یک گروه موضوعی در زمان تشکیل کنفرانس به وی اعلام شود. بدین ترتیب تمامی شرکت کنندگان در گروههای موضوعی بیست وششگانه سازماندهی شده بودند. ذیلاً به بعضی مباحث مطروحه در چند گروه موضوعی اشاره می شود:

ریاضیات دورهٔ ابتدایی

در جامعه امروز، هر شهروند نیاز به آگاهی از دانش ریاضی دارد. آموزش ریاضی از دوره ابتدایی آغاز می شود وباید به گونه ای این آموزش پایه گذاری شود که تا زمانهای دراز ادامه یابد. اگر بپذیریم که آموزش مادام العمر برای همگان ضروری است، در آن صورت ریاضیات یک نقش حیاتی در ساختن تفکّر علمی و ذهن نقّاد ایفا می کند. دراین گروه مطالب زیر مورد توجه و بحث قرار گرفت: چه نوع ریاضی در دوره ابتدایی باید آموزش داده شود؟ چگونه باید رابطه میان معلم و دانش آموز را سازماندهی کرد؟ معلم چه مسئولیتی را در کلاس درس شخصاً بر عهده می گیرد و چه مسئولیتهایی را به دانش آموزان تفویض می کند؟ چگونه معلم انتقال برخی از مسئولیتها به دانش آموزان را هدایت می کند؟ این کار چه تأثیری بر دانش، توانایی فرضیه سازی، انتخاب و استدلال دانش آموز می گذارد؟ چگونه دانش آموزان را قادر می سازد که در مواجهه با یک زمینهٔ نا آشنا از انتخاب ناصواب خود مطلع شوند و دست به انتخاب مجدد بزنند.

ریاضیات دورهٔ متوسطه

مباحث این گروه درزمینهٔ تحقیق درباره برنامهٔ درسی، تدریس، ارزشیابی وهماهنگی میان این ابعاد آموزش ریاضی دردورهٔ متوسطه بود. درطول بحثها سعی شد به سؤالات زیر پاسخ داده شود: چه تأثیر متقابلی میان برنامه درسی جدید، راهبردهای جدید تدریس، روش های جدید ارزشیابی و پیشرفت حرفه ای معلمان وجود دارد؟ اندیشه های مهم درریاضیات دورهٔ متوسطه چیست و چه متون جذاّب و جالبی موجب دسترسی دانش آموزان به این اندیشه های برجسته می شود؟ مهمترین سؤالات تحقیق که می باید پاسخ روشنی برای آنها فراهم شود تا موجب تغییر دربرنامه درسی، تدریس و یادگیری ریاضی دردهٔ آینده شودچیست؟ چه مسائلی درزمینهٔ برقراری ارتباط میان ریاضیات متوسطه و دوره ابتدایی، ریاضیات متوسطه و آموزش عالی و ریاضیات متوسطه و دنیای واقعی کار وجود دارد؟

پرورش خلاّقیت ریاضی

خلاّقیت، موضوعی است که غالباً درتدریس ریاضی مورد غفلت واقع می شود. معمولاً معلمان ریاضی چنین تصورمی کنند که ریاضیات بالاتر از هر چیز به منطق نیاز دارد و خلاقیت کار چندانی با یادگیری ریاضی ندارد. ازسوی دیگر اگر ما ریاضیدانی را مورد ملاحظه قرار دهیم که به نتایج جدیدی درریاضیات نائل می شود نمی توانیم در این کار، استفادهٔ وی از قوه خلاقیتش رانادیده بگیریم. در این گروه موضوعی، این مسائل مورد بحث و بررسی قرارگرفت: معنای خلاقیت درقلمرو ریاضیات مدرسه چیست؟ درآموزش مدرسه ای چه روشهایی می تواند مورد استفاده قرار بگیرد تا خلاقیت ریاضی پرورش یابد؟ آگاهی علمی ما و نتایج تحقیقی درباره خلاقیت ریاضی چیست؟

آمار واحتمال در دورهٔ متوسطه

دراین گروه جهت گیریهای تدریس آمار و احتمال در دوره متوسطه در سالهای آتی مورد بحث قرار گرفت. همچنین درک کودکان از مفاهیم پایه آمار و احتمال و مسائل کلی نظیر برنامه درسی، ارزشیابی، آموزش معلمان، کاربرد تکنولوژی در آموزش این دروس مورد تبادل نظر واقع شد. از دیگر مسائل بررسی میزان تأثیر نتایج تحقیقات بر چگونگی تدریس آمار و احتمال درآینده بود. دراین گروه سعی شد تا شرکت کنندگان حسب علاقه خود درباره یکی از موضوعات احتمال ویا تحلیل

داده ها متمرکز شوند. علاوه براین نشستی نیز برای پاسخگویی به سؤال زیر تشکیل شد:

چگونه آمار و احتمال به بهترین شکل در مجموع برنامه درسی مدارس گنجانده می شود؟

تدریس ریاضی از دیدگاه ساخت گرا[۱۲] (constructivist)

در این گروه به بررسی تأثیر نظریهٔ ساخت گرا در یادگیری، بر تدریس ریاضیات در کشورهای مختلف پرداخته شد. دراین گروه موضوعی، راجع به تأثیر این نظریه برکلاس درس، تغییرات بوجود آمده در امتحانات، برنامه درسی و سیاستهای آموزشی گزارشهایی ارائه شد. همچنین بر روی تأثیرات متقابل شیوه کار و سیاست آموزشی جاری بر نظریه های یادگیری ریاضی و شناخت ریاضی تأکید شد. نظر به اهمیت نظریهٔ ساخت گرا در آموزش ریاضی و علوم و نو بودن نسبی آن برای جامعهٔ آموزشی ایران، جهت اطلاع خوانندگان محترم، ذیلاً به برخی از **مشخصات و ویژگیهای آموزش ساخت گرا** اشاره می شود:

۱ ـ بنانهادن آموزش بر پایه دانش قبلی دانش آموز

دانش قبلی دانش آموز ممکن است از طریق تجارب زندگی واقعی بدست آمده باشد. لذا ضرورت دارد معلم این دانش قبلی دانش آموز را تشخیص دهد تا بداند چه نقاط قوتی در آگاهیهای قبلی وی وجود دارد که می توان بر اساس آنها دانش جدید را استوار ساخت، همچنین چه مطالبی قبلاً توسط دانش آموز درک شده است و لذا به توجه کمتری نیاز دارد و نیز چه فواصل و حلقه های مفقوده ای در آگاهیهای دانش آموز موجود است که باید مورد توجه قرار گیرد.

۲ ـ تمرکز بر فکر کردن بجای ترغیب به ارائه پاسخ مورد انتظار

دانش آموزان بدون آنکه به آنها گفته شود چگونه مسائل را حل نمایند، خود به حل مسئله می پردازند. معلمان به کودکان نمی گویند که کدام پاسخ و حل آنها صحیح است و کدام غلط. این بدان معنا نیست که تمامی پاسخهای آنها صحیح تلقی می شوند، بلکه از طریق سؤال کردن از فرد دانش آموز یا از گروه دانش آموزان و یا تعامل میان کلاس و معلم، دانش آموزان خود به ارزیابی صحت واعتبارپاسخهایشان می پردازند. هردانش آموزی تشویق می شود به روشی که برای او معنا بخش و قابل فهم است، مسائل را حل کند. راه حلهای متفاوت مورد کاوش و جستجو واقع می شوند.

۳ ـ فرصت دادن برای فکر کردن

هیچ دانش آموزی در کلاس تماشاچی و برکناراز شرکت در فعالیتهای کلاسی نیست. دانش آموزان نیاز به زمان و فرصت برای استدلال کردن، امتحان ایده ها و نظرات و همچنین توصیف و ارائهٔ اندیشه های خود دارند. ترغیب کودکان به ساختن ایده ها و افکار بجای تمرکز صرف بر ارائهٔ اطلاعات و تمام کردن برنامه درسی، مورد تأکید است.

۴ ـ انتظار از دانش آموزان برای توضیح دادن افکار و پاسخهایشان ویا قضاوت کردن درباره آنها

دانش آموزان به هنگام توضیح و یاارائه نظراتشان، برروی آن نظرات، اندیشه می کنند. هنگام توضیح دانش آموز، معلم پی به نحوهٔ درک و استدلال وی که موجب شکل گرفتن پاسخ است می شود. این آگاهی صریح از افکار کودک هم مفید است و هم سخت و دشوار.

۵ ـ پرسش و طرح سؤال

سؤالات از سوی معلم بدین جهت طرح می شوند تا دانش‌آموزان، علاقمند و تشویق به سنجیدن و روشن کردن اعتبارو صحت «روش»، «استدلال»و«جواب» خود شوند. نقش دیگر سؤالات، ایجاد زمینه برای مقایسه تفاوت ها و شباهتهای راه حلهای دانش آموزان است. غالباً مشابهت ها موجب بروز ایده های تعمیم‌ـ پذیر و کلّیت بخش در دانش آموزان می شوند. از آنجا که سؤالات بیانگر توجه و علاقهٔ سؤال کننده است، لذا طرح سؤالات موجب ارج نهادن به افکار دانش آموز و نیز تقویت اعتماد به نفس او می شود و سرانجام دانش آموزان یاد می گیرند که از یکدیگر سؤال نمایند. البته در ابتدا بسیاری از سؤالاتی که توسط دانش آموزان طرح می شوند با وساطت و کمک معلم صورت می گیرد.

۶ ـ انتظار از دانش آموز برای «گوش دادن»

دانش آموزان باید یاد بگیرند که چگونه به ابراز نظر مخالف بپردازند بدون آنکه مرتکب توهین به دیگری شوند ونیز چگونه سؤالات خود را طرح کنند بدون آنکه بی احترامی به طرف مقابل شود. انتظار می رود هر دانش آموزی به حق دیگران در«توضیح دادن منظور خویش و سؤال کردن و پاسخ شنیدن»، احترام بگذارد. تا وقتی که تمام کلاس ساکت و توجّه به گوینده نداشته باشد، معلم نمی تواند آموزش دهد و دانش آموزان نیزنمی توانند مقصود خود راتوضیح دهند. «گوش دادن» علامتی از احترام قائل شدن برای دیگران و مشارکت در بحث و سؤال کردن، علامتی از اطمینان و اعتماد به نفس است.

۷ ـ بخشی از ریاضیات ابداع وخلاقیت است(invention) وبخشی قرارداد وقاعده(convention)

دانش آموزان باید مستقیماً از معلم سمبلها و نمادها و نیز اصطلاحات ریاضی رابیاموزند. معلم مسئولیت دارد استانداردهای مربوط به اینکه چه چیزی از نظر ریاضی صحت دارد و نیزاستانداردهای مربوط به اثبات ریاضی را مراعات کند و بر آنها صحه بگذارد و دانش آموزان نیز مسئولیت دارند که این استانداردها را درعملیات و افکارریاضی شان مراعات

نمایند.

۸ ـ مفاهیم ریاضی از طریق حل مسئله مورد تحقیق و مطالعه قرار می گیرند

غالباً مسائل یک زمینه واقعی دارند اما موضوع واقعی، معنی دار بودن آنها است. حتی یک مسئله انتزاعی ممکن است برای دانش آموز با معنی باشد اگر دانش آموز مسئله رابفهمد و درگیر حل کردن آن شود.

۹ ـ عدم بکارگیری دائمی گروههای ریاضی متجانس و یکدست درکلاس

نباید همیشه یک نوع گروه بندی درکلاس صورت گیرد. بعضی اوقات تمام کلاس باهم، گاهی گروههای کوچک همکاری، زمانی گروههای دونفره و دردیگر اوقات دانش آموزان به تنهایی باید به فعالیت بپردازند. به منظور تغییر دادن میزان سختی یا درجهٔ انتزاعی بودن مسائل و یا تغییر دادن اندازه و نوع اعداد در مسائل، دانش آموزان برحسب تواناییشان به گروههای کوچک تقسیم می شوند. اما به هنگام تغییر دادن موضوع ریاضی، از گروههای کوچک استفاده نمی شود. تمامیِ کلاس به مشارکت وادار می شوند حتی اگر گروههای متفاوت، مسائل متفاوت حل کنند.

آینده حسابان (calculus)

هدف از تشکیل این گروه موضوعی، حمایت از بهبود و پیشرفت تدریس حسابان با در نظر داشتن تفاوتهای فرهنگی بود. دراین گروه مطالب و مسائل زیر مورد بحث و مداقه قرارگرفت: چگونه برنامه درسی سنتّی حسابان تحت تأثیر عواملی از قبیل نتایج تحقیق در آموزش ریاضی، رویکردهای نو در ریاضیات و حرکتهای اصلاحی مختلف در تدریس حسابان، قرار گرفته است؟ اهداف آموزش درس حسابان چیست؟ چه ارتباطی میان درس حسابان و پیش حسابان، آنالیز ریاضی، ریاضیات گسسته و معادلات دیفرانسیل وجود دارد؟ تکنولوژی جدید چه تأثیری بر تدریس حسابان گذاشته است؟ درحوزه حسابان واژهٔ «درک کردن» چه معنایی دارد؟

باشگاههای ریاضی

این گروه موضوعی، برای اولین بار در ICME هشتم تشکیل شد. هدف از تشکیل این گروه، بررسی نقش باشگاهها در حمایت از توسعه ریاضی درمیان دانش آموزان دوره متوسطه بود. در این گروه بر روی فعالیتهایی که موجب برانگیختن حس رقابت در دانش آموزان و سوق دادن آنان به سوی تشکیل گروه و بعضاً آماده شدن برای مسابقات می شود بحث و تبادل نظر شد. در جلسات این گروه، سخنرانی های کوتاهی از سوی برخی از شرکت کنندگان درباره تجاربشان در ادارهٔ باشگاهها و یاشرکتشان در باشگاهها ارائه شد. همچنین دراین گروه دربارهٔ ترغیب به تشکیل باشگاهها، شیوه های عمل، موادّ ریاضی مورد استفاده درفعالیتهای باشگاه و نیز تأثیر علمی واجتماعی باشگاهها برروی دانش آموزان عضو، تبادل نظر شد.

تحقیقات تطبیقی بین المللی

دراین گروه، انگیزه وهدف از اجرای مطالعات تطبیقی و نیز محدودیتهای اینگونه مطالعات مطرح گردید. در اولین جلسهٔ گروه، به ازای هر یک از مطالعات تطبیقی یک زیر گروه تشکیل گردید که شرکت کنندگان علاقمند به هر تحقیقی، گردهم جمع شده و به طورمشروح تر و تفصیل یافته تر درباره آن تحقیق، به بحث و گفتگو پرداختند. در میان مطالعات و تحقیقات تطبیقی عرضه شده، هم تحقیقات با مقیاس وسیع و هم تحقیقات با مقیاس محدود به چشم می خورد. ازجمله می توان به تحقیقات زیر اشاره نمود:

دومین مطالعه بین المللی ریاضی(SIMS)[13]، سومین مطالعه بین المللی علوم و ریاضی(TIMSS)[14]، تحقیق درباره فرصتهای یاد گیری علوم و ریاضی(SMSO)[15]، اولین و دومین مطالعهٔ ارزشیابی بین المللی پیشرفت آموزشی(IAEP)[16]، مطالعات مقایسه ای میان آمریکا و ژاپن و مطالعه بین المللی بر روی تدریس و یادگیری ریاضی. در دومین جلسه این گروه که جلسه مشترک کلیه زیرگروهها بود، میزگردی تشکیل گردید و در اطراف این سؤال: که«ما چه چیزی می توانیم از مطالعات تطبیقی بین المللی بیاموزیم؟» گفتگو شد. همچنین متخصصین حوزه های مختلف هرکدام راجع به حوزه تخصصی خود نظیر تحلیل برنامه درسی، واقعیتهای کلاس درس، همکاری جهانی و منطقه ای به بحث پرداختند.

***

عنوانهای بقیهٔ گروههای موضوعی به شرح زیر بود:

- **ریاضیات دانشگاهی**
- **یادگیری ریاضی از راه دور**
- **آموزش ریاضی در محل کار**
- **اثبات و اثبات کردن: چرا، کی وچگونه؟**
- **«حل مسئله» در سراسر برنامه درسی**
- **آیندهٔ هندسه**
- **آیندهٔ جبر و حساب**
- **فرآیندهای نامتناهی در برنامهٔ درسی**
- **ریاضیات وهنر**
- **تاریخ ریاضی و تدریس ریاضی**
- **مدل سازی ریاضی و کاربردها**
- **نقش ماشینهای حساب در کلاس درس**

- یادگیری تعاملی باتکیه بر کامپیوتر
- تکنولوژی برای نمایش بصری
- آموزش ریاضی با بکارگیری دست ورزیها
- بازیها و ریاضی
- راههای آیندهٔ نشر درزمینه آموزش ریاضی

***

گروههای مطالعاتی

گروههای مطالعاتی چندی به عنوان گروههای رسمی زیر مجموعه کمیسیون بین المللی آموزش ریاضی(ICMI) قرار دارند که معمولاً به طور پیوسته و حتی خارج از زمان برگزاری کنفرانسهای ICME فعالیت و برنامه های جاری و دردست اقدام دارند.

اسامی این گروهها عبارتست از:

- گروه بین المللی [برای پژوهش در] روانشناسی آموزش ریاضی (PME)[17]
- گروه بین المللی[برای پژوهش در] روابط میان تاریخ و آموزش ریاضی(HPM)[18]
- گروه بین المللی زنان و آموزش ریاضی(IOWME)[19]
- اتحادیه جهانی مسابقات ملی ریاضی(WFNMC)[20]

هر یک از این گروههای مطالعاتی، در طول برگزاری کنفرانس اقدام به تشکیل سه جلسهٔ دوساعته نمودند و ضمن آن به بررسی اقدامات صورت گرفته درفاصلهٔ بین کنفرانس قبلی و این کنفرانس و نیز تعیین مسیرآینده پرداختند.

علاوه بر این، گزارشی از مطالعات انجام گرفته درفاصله ICMEهفتم و هشتم حول سه موضوع زیر، تحت عنوان "ICMI Study" ارائه گردید:

«آموزش ریاضیات و جنسیت»، «چشم انداز تدریس هندسه درقرن بیست و یکم» و«تحقیق در آموزش ریاضی چیست و چه نتایجی دارد؟» که در زیر به بررسی فشرده موضوع دوم می پردازیم.

چشم انداز تدریس هندسه درقرن بیست ویکم

در هفتمین کنفرانس بین المللی آموزش ریاضی که در سال ۱۹۹۲ در کبک(Quebec) کانادا تشکیل شد، موضوع «آموزش هندسه و ارائه تصویری ازآن برای قرن بیست و یکم» انتخاب گردید و قرارشد بر روی آن مطالعات و بررسیهایی صورت گیرد. در تعقیب این خط مشی، دانشگاه کاتانیا موافقت کرد که میزبان کنفرانس مطالعاتی در این زمینه باشد و (ICMI) کمیته بین المللی برنامه (I.P.C) را تعیین کرد. درسپتامبر سال ۱۹۹۵ کنفرانس مورد اشاره در دانشگاه کاتانیا تشکیل شد و مباحثات آن به صورت یک کتاب درسطح وسیعی منتشر گردید. همچنین کمیتهٔ بین المللی برنامهٔ درژانویه ۱۹۹۶ درباره انتشار کتابی دیگردرزمینهٔ آموزش هندسه به بحث وتبادل نظر پرداخت که انتظار می رود این کتاب[21]در اوایل سال ۱۹۹۷ منتشر شود.

و اما چرا مطالعه درباره هندسه؟

بیش از دوهزار سال است که هندسه اقلیدسی نقشی محوری درآموزش ریاضی بازی کرده است و به عنوان مدلی مناسب از فضایی فیزیکی درسایر علوم بکاررفته است. درحقیقت هندسه یک طبیعت دوگانه دارد. از یک طرف باواقعیت مرتبط است واز سوی دیگر یک نظریهٔ قیاسی است. با این حال به نظر می رسد در سالهای اخیر، هندسه نقش محوری خودش را در آموزش ریاضی ازدست داده است. این امر ناشی از عوامل زیر است:

- هندسه های نااقلیدسی نشان داده اند که دیگر تنها یک نوع هندسه وجود ندارد و به همین جهت این سؤال را طرح کرده اند که چرا نباید آموزش دیگر انواع هندسه مورد توجه قرار گیرد؟
- توجه و اقبال به ریاضیات جدید بر گرایش به جبری کردن هندسه مهرتأیید گذارده واین انتقال را تسهیل کرده است.
- افزایش تعداد سایر موضوعات مربوط به ریاضی و علوم کامپیوتر دربرنامه های درس ریاضی به همراه عدم افزایش ساعات این درس دربرنامه، عرصه را بر آموزش هندسه تنگ کرده است.

جامعهٔ ریاضی به شدت احساس می کند که نقش محوری هندسه و مخصوصاً هندسه ترکیبی (synthetic)و سه بعدی باید حفظ شود و حتی توسعه یابد. امابه منظور نیل به این هدف ضرورت دارد که مشکلات این کار شناسایی و تجزیه و تحلیل و برطرف شوند. دراینجا به بعضی ازاین مشکلات به طور خلاصه اشاره می شود:

۱ - روش سنّتی آموزش هندسه اقلیدسی به عنوان یک محصول آماده شده(ready- made product) ناکافی و نامناسب است.

۲ - درمدت زمان طولانی مشکلات ذاتی هندسه دست کم گرفته شده است.

۳ - در آماده سازی معلمین این درس، افت قابل توجهی مشاهده می شود. همچنین کتابهای درسی و لوازم کمک آموزشی ناکافی و نامناسب است.

۴ - باید تأثیر (ومحدودیتهای) کاربرد تکنولوژی کامپیوتر در آموزش هندسه شناسایی شود.

۵ - درصد بالایی از تحقیقات بعمل آمده درهندسه درخارج از دانشکده های ریاضی ومشخصاً درحوزه های مهندسی، کامپیوتر، علوم، شیمی و تصویر پردازی کامپیوتری صورت گرفته است و لذا این سؤال مطرح می شود که آیاممکن و عاقلانه است که

موضوعات جدیدی در آموزش هندسه معرفی و مطرح شوند بدون آنکه سطح کار به حد یک مجموعهٔ کم محتوا از حقایق و تکنیکهای بی ارتباط باهم تنزل پیدا کند و نیز بدون آنکه نقش اساسی و آموزشی هندسه ازدست برود؟ درمطالعات ICMI سعی بر این است که همه این جنبه ها مورد بررسی قرارگیرد.

راه آینده

۱ ـ به غیراز پایه های ابتدایی، هیچ برنامهٔ مشترک دردرس هندسه که به صورت جهانی و مرتبط با نیازهای همهٔ کشورها و همهٔ دانش آموزان باشد وجود ندارد. به عنوان خطوط راهنمای اصلی، برنامهٔ درسی هندسه می باید شامل تخمین، محاسبه واندازه گیری اندازه ها و نیز مطالعهٔ صفحات نمایش اشیای فضایی باشد.

۲ ـ **هندسه مقدماتی** و مطالعه دربارهٔ بنیانها و شالوده های هندسه، تقریباً درتحقیقات ریاضی امروز نقش کم اهمیتی پیداکرده است. اگر ما بخواهیم امیدوار باشیم که این مطالعات دوباره احیاء شود، می باید همکارانمان را به خصوص در سطوح دانشگاهی متقاعد کنیم که دانش مربوط به هندسهٔ مقدماتی مطلقاً برای ساختن نظریه های پیشرفته تر، کاربردها و بکارگیری نرم افزارهای کامپیوتری ضروری است. هرکس اعم از معلم و مؤلف کتب درسی می بایست حداقل یکبار درزندگی خود هندسهٔ اصیل(authentic geometry) را تجربه کرده باشد.

۳ ـ در پایه های تحصیلی اول تا هشتم آموزش هندسه محدود به آشنایی با اصطلاحات و واژه‌ها و یادگیری فرمولهای محاسبهٔ سطح و حجم است که این بسیارنامطلوب است. از پایه های ابتدایی دانش آموز باید یاد بگیرد که موقعیتهای فضایی و رابطهٔ میان اشکال سه بعدی و نمایش دوبعدی آنها (اشیاء چگونه هستند و چگونه پدیدار می شوند) را «ببیند» و «تفسیر» کند. حتی در پایه های اولیهٔ تحصیل، ممکن است دانش آموز شروع به تولید حدس های ساده و استدلال، توصیفات شفاهی از اشیای هندسی و تبدیل و رمز برگردانی یک کد به کد دیگر (از جمله زبانی، بصری، کامپیوتری) کند واز این جا یادگیری جنبه های انتزاعی تر و سازمان یافته تر هندسه در کلاس های بالاتر پایهٔ گذاری می شود.

۴ ـ در پایه های بالاتریعنی از پایه نهم تادانشگاه زمان بسیار کمی به هندسه ترکیبی اختصاص داده شده است و در موارد زیادی دانش آموزان به صورت فعّال دست اندرکارفهم مسائلی از قبیل اینکه حقیقتاًیک « نظریهٔ اصل موضوعی» چیست و یا اثبات یک قضیه به چه معناست، نمی شوند. می توان نشان داد که اثبات یکایک قضایا مهم نیست؛ آنچه مهم است این است که دانش آموزان ساختار یک استدلال استنتاجی را به طور روشن و واضح درک کنند. بعلاوه اثبات قضایا نباید به هندسهٔ کلاسیک محدود شود. در سطوح دانشگاهی و حتی دروس پیشرفتهٔ هندسه، باید به ارتباط سازمان یافته میان نظریه های عمومی انتزاعی و قضایای نظیرشان که شهودی و بصری هستند توجه شود. متأسفانه این توجه به طور عمومی وجود ندارد.

۵ ـ در تمام پایه های تحصیلی مشاهده می شود که هندسه به صورت یک موضوع جدا و منقطع از بقیهٔ موضوعات ریاضی آموزش داده می شود. در حالی که می باید ارتباط میان هندسه و بقیهٔ بخشهای ریاضی به طور سازمان یافته مورد تأکید قرار گیرد. به عنوان مثال، مشاهدهٔ اعداد بر روی یک خط، تفسیرهندسی معادلات جبری از قبیل $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ با استفاده از اشکال هندسی، داشتن یک حس هندسی از قواعد حسابان مانند ترسیم نمودار یک تابع و بسط تایلر درجه ۱ و۲ و۳والی آخر آن، بکارگیری نمودار میله ای و دیگر نمودارهای بصری درآمار، استفاده از نمودارها و دیاگرام ها در هر جا که می تواند مفید واقع شود، برقراری ارتباط میان هندسهٔ نظری با ترسیمات هندسی(از قبیل پرسپکتیو) و نیز نمودارهای کامپیوتری وغیره همه و همه می تواند به فهم بهتر ریاضی و برقراری ارتباط میان هندسه و دیگر بخشهای ریاضی کمک شایان توجهی نماید.

۶ ـ درآموزش ریاضی به طور عام و هندسه به طور خاص، باید تأکید بیشتر بر روی فهم فرآیندحل مسئله باشد تا بر نتیجه و یابرآمد فرآیند.

موضوعات بی ارتباط با نیاز دانش آموز باید کنار زده شود تا زمان بیشتری برای آموزش جنبه هایی ازهندسه که با نیازهای فرهنگی و واقعی وی مرتبط هستند فراهم شود.

طرح موضوعات جدید و غیر سنتی و نیز کاربردهای هندسه به منظور جلب علایق و توجه دانش آموزان می تواند مفید باشد، اما درهرحال وارد کردن یک موضوع جدید در برنامه درسی مدارس می باید هماهنگ بابقیهٔ برنامه بوده و لازم است کارشناسان برنامه ریزی درخصوص منافع و ضررهای اینکار به دقت بیندیشند.

۷ ـ در هر موضوع درسی، ارزشیابی تأثیری قوی برمقولهٔ تدریس و یادگیری دارد. چنانچه ارزشیابی ازدانش آموز دردرس هندسه محدود به آزمونهای کتبی شود، این امر برای بررسی فرآیند تدریس و یادگیری هندسه ناکافی و نامناسب خواهد بود. ارزشیابی دردرس هندسه باید شامل موارد زیر باشد:

ـ بیان شفاهی حل مسائل، کاوش دربارهٔ سوالهای باز پاسخ و سؤالهایی که به طرح سؤالهای دیگر منجر می شوند، بحث و گفتگو، گزارش کتبی از نتایج بررسی ها (و یا حتی فعالیتهایی که با کامپیوتر صورت می گیرد)و ترسیمات و ساخت مدلهای انتزاعی سه بعدی.

۸ ـ بهبود بخشیدن موقعیت (آموزش هندسه) بی نهایت مشکل و دشوار است. می باید برای نیل به این منظور در چند جهت کار شود: ایجاد بهبود درکتابهای درسی، ایجاد بهبود دربرنامه های تربیت

معلم و آموزشهای ضمن خدمت، ایجاد بهبود در برنامه و نیز شیوه های ارزشیابی، ایجاد تغییر در فعالیتهای کلاس درس به صورتی تدریجی و هماهنگ بااهداف اصلی آموزش هندسه.

***

«معرفی برنامه های ملی(National Presentations)»

علاوه بر برنامه های فوق، در کنگره فرصتی فراهم آمد تا چند کشور هر کدام به مدت یک ساعت به معرفی ابعاد اصلی آموزش ریاضی درکشور خودشان بپردازند. این کشورها عبارت بودند از استرالیا، مجارستان و اسپانیا. نظر به محدودیت صفحات مجله امکان پرداختن بیشتر به این موضوع نیست و امید است در شماره های آتی مجله لااقل گزارشی از یکی از کشورهای فوق تنظیم و ارائه شود.

«پوسترها، پروژه ها، کارگاههای آموزشی و نمایشگاهها»

پوسترها: درمحوطه وسیعی درجنب محل برگزاری جلسات، نزدیک به ششصد پوستر از سوی شرکت کنندگان در کنگره عرضه شده بود که عمدتاً نوآوری درشیوهای تدریس وارزشیابی و برنامه های جدید آموزش ریاضی درموضوعات خاص را به بینندگان معرفی می کرد.

ویدئو ونرم افزارهای کامپیوتر: درحدود پنجاه فیلم ویدئویی و هفتاد نرم افزار کامپیوتردرزمینه های مربوط به شیوه های نو در آموزش ریاضی، ارزشیابی و سایر مباحث آموزش ریاضی به نمایش درآمد.

پروژه ها: تعداد بیست پروژه در آموزش ریاضی درکنفرانس معرفی وارائه گردید. شرکت کنندگانی از کشورهای آرژانتین، اسپانیا، کلمبیا، فرانسه، برزیل، آمریکا، سوئیس، آفریقای جنوبی، پرتغال، انگلستان و ونزوئلا در این بخش به معرفی و ارائهٔ پروژه های خود پرداختند. عنوانهای بعضی از پروژه ها به شرح زیر بود:

- تقویت ریاضیات مدارس ازطریق شبکه ای از مؤسسات آموزشی (کلمبیا)
- اجرای استانداردهای حرفه ایNCTM برای تدریس ریاضیات (آمریکا)
- برنامهٔ جدید ریاضیات ابتدایی به وسیله کاربرد پروژه و ماشین حساب (آمریکا)
- مرکز ریاضی برای معلمین ابتدایی (آفریقای جنوبی)
- مرکز تدریس ریاضیات (انگلستان)

کارگاههای آموزشی: درطول کنگره، نُه کارگاه آموزشی ازسوی نمایندگانی از کشورهای استرالیا، اسپانیا و انگلستان برگزار گردید. همچنین شرکت Casio و شرکت Texas Instrument اقدام به تشکیل کلاسهایی جهت آشنایی علاقمندان با عملکرد وکاربرد پیشرفته ترین مدلهای ماشینهای حساب از تولیدات شرکت خود کردند که مورد توجه و استقبال آموزشگران ریاضی شرکت کننده در کنفرانس قرار گرفت.

نمایشگاهها: از جمله فعالیتهای چشمگیر درحاشیهٔ کنگره، برپایی نمایشگاههای مختلف درارتباط با آموزش ریاضی بود. ازجمله آنها می توان به برپایی نمایشگاه کتاب و نرم افزار اشاره نمود. دراین نمایشگاه که ناشرین سرشناسی از قبیل مک گروهیل، آکسفورد، کمبریج، کلوور وNCTM شرکت داشتند، تازه های کتاب، نرم افزارها و برنامه های کامپیوتری در زمینه آموزش ریاضی عرضه گردید که بسیارمورد استقبال شرکت کنندگان در کنگره واقع شد.

همچنین اتحادیهٔ انجمنهای معلمان ریاضی اسپانیا(FESPM) اقدام به برگزاری چندین نمایشگاه تحت عناوین زیرنمود:

نمایشگاه کتابهای قدیمی ریاضی، نمایشگاه وسایل اندازه گیری سنتّی، نمایشگاه وسایل قدیمی اندازه گیری زمان، نمایشگاه عکاسی و ریاضیات، نمایشگاه موادّ آموزشی برای معلمان، نمایشگاه ریاضیات و تمبر، نمایشگاه ویدئو و فیلم آموزش ریاضی و نمایشگاه ماشینهای حساب مکانیکی.

***

سخن پایانی

چنان که ملاحظه شد این کنگره دارای ابعاد متنوع ووسیعی بود که حاصل کار و فعالیتهای آموزشی و پژوهشی هزاران نفر از ریاضیدانان و آموزشگران ریاضی از پنج قاره جهان را در طول چهار سال گذشته به نمایش گذارد و زمینه های تبادل ـ نظر و تعاطی افکار بیش از چهار هزار نفر رادر طول یک هفته فراهم ساخت. برنامه های کنگره به گونه ای طراحی شده بود تا شرکت کنندگان به پاسخ بسیاری از سؤالات و گشودن گره تعدادی از مشکلات خود دست پیدا کنند و موضوعات ومسائل جدیدی رابرای مطالعه در طول چهار سال آینده، مطرح سازند. در خلال جلسات و درحاشیه آنها هر محقق و اندیشمندی در تکاپوی آشنایی با محققان جدیدی بود که حرفی نو برای گفتن داشتند و نوری جدید به موضوعات مورد نظر می افکندند. آنان درتلاش بودند تا با بهره مندی از بزرگراههای اطلاعاتی و تکنولوژیهای جدید ارتباطی، گروههای مطالعاتی مشترک تشکیل دهند و مثلاً فردی از آفریقای جنوبی باهمفکری در ژاپن و صاحبنظری درکانادا و یا آلمان برروی موضوعی مشترکاً کارنمایند و تجارب خود را مبادله کنند. حقیقتاً تلاشی که در این عرصه به چشم می خورد تلاشی تحسین برانگیز بود؛ اما در کنار این تحسین، نگرانی و تأملی جدی برای راقم این سطور بروز می کرد؛ نگرانی و تأمل در اینکه جایگاه ما در این عرصه پرشتاب و پر تلاش کجاست؟ آیادر صحنهٔ آموزش ریاضی و آموزش دیگرعلوم و معارف درکشور ما

مشکلاتی جدی وجود ندارد که ما این چنین بی حرکت وبی خروش به تکرار روشهای سنتی خود در کلاسهای درس مشغولیم وازتوجه به ابعاد فنی تر و دقیق تر آموزشی غفلت می ورزیم؟

سعی نویسنده این گزارش که به عنوان مسئول دفتر برنامه ریزی و تألیف کتب درسی دراین کنگره شرکت داشت این بود که در حد توان پیام آوری امین وصادق ازایـن تـلاش گـسـتـردهٔ علمـی و بین المللی برای دفتر برنامه ریزی و نیز جامعهٔ ریاضی کشور باشد. دراین گزارش سعی گردید به دلیل وسعت کار صرفاً چشم اندازی از عرصه های متنوع این همایش عظیم علمی و آموزشی دراختیار خوانندگان محترم قرار بگیرد با این امید که اعضای محترم گـروه ریاضی دفتر برنامه ریزی و تألیف و نیز هیئت تحریریه مجله رشد به تناسب نیازمخاطبین و بااستفاده ازمدارک و منابع جمـع آوری شده از کنفرانس، موضوعات مهم تر و فوری تر را انتخاب نموده و گزارش مشروح و تفصیلی حول آن موضوعـات را بـه نـوبـت درشماره های آتی مجله درج نمایند. همچنین شایسته اسـت بـا هدایت شورای محترم برنامه ریزی ریاضی دفتر و به همت اساتید محترم و معلمان دلسوز، فکور و مبتکر ریاضی کشور، گروههای کاری حول موضوعات منتخب تشکیـل شـود. ایـن گـروهـهـا می توانند طی یک برنامه چهار ساله به تحقیق و بررسی علمـی و تجربی درباره این موضوعات بپردازند و حاصل کـار خـود را در کنفرانس های سالانه آموزش ریاضی کشور و نیزدر نهمین کنفرانس بین المللی آموزش ریاضی که درسال ۲۰۰۰ درژاپن برگزار می شود ارائه کنند. باشد تا از رهگذر این حرکت علـمـی پـژوهـشـی و آموزشی، شاهد تحولی جـدّی در برنامه ها و شیوه های آمـوزش ریاضی درمدارس و دانشگاههای کشور باشیم.

(بعون الله و توفیقه)

پانوشتها

1- International Congress on Mathematical Education
2- International Mathematics Union
3- International Commission on Mathematics Instruction
4 -The evolving idea of biological growth
5- monic quartic polynomial
6- Apostmodernist philosophy of mathematics
7- mathematical literacy
8- mathematical thinking
9- Cognitive psychology
10- A Curriculum from Scratch (Zero-based)
11-mixed-ability classes

۱۲ ـ انتخاب معادل مناسـب بـرای Constructivism تاحدی دشـوار است. دراینجا توجه خوانندگان محترم را به این نکته جلب مـی نـمـایـد کـه بکاربردن معادل «ساخت گرایی» برای این کلمه نباید با مفهوم «ساختارگرایی» اشتباه شود. به بیان دیگر کلمه «ساخت» در اینجا به معنای «ساختن» که معادل construction است بکاررفته و به معنای ساختار که معـادل structure است استفاده نشده است. به طور خلاصه می توان گفت که ساخت گرایی، نظریه ای است که بر نقش فعال دانش آموز در ساختن دانش از طریق تأثیر متقابل یادگیری قبلی ویادگیری جدید وی تأکید دارد. دانش آموز به هنگام مواجهه با اطلاعات جدید درمقام برقراری ارتباط میان آگاهی های قبلی و اطلاعات جـدیـد خـود برمی آید. این ارتباطات به وسیله خود دانش آموز ساخته می شـود و بـه یـک دانش جدید تبدیل می گردد. عنصر مهم دراین نظریه این است که افراد به وسیله ساختن فعالانه دانش خودشان، به یادگیری نائل می شوند.

13- Second International Mathematics Study
14- Third International Mathematics and Science Study
15- Survey of Mathematics and Science Opportunity
16- International Assesment of Educational Progress
17- International Group for the Psychology of Mathematics Education
18-International Group for the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics
19- International Organization of Women and Mathematics Education
20- World Federation of National Mathematics Competitions

۲۱ ـ نظر به اینکه این کتاب می تواند مرجع مفیدی برای اساتید، کارشناسان و دبیران ریاضی کشور باشد لذا جهت اطلاع رسانی به این عزیزان فهـرسـت محتویات این کتاب در زیر درج می شود:

- مقدمهٔ مشروحی درزمینهٔ آموزش هندسه، به قلم Mammana- villani
- فصل اول: گذشته و آینده هندسه، به قلم Hansen-malkevitch
- فصل دوم: استدلال درهندسه، به قلم Hershkowitz
- فصل سوم: هندسه و واقعیت، به قلم Malkevitch
- فصل چهارم: تکنولوژی کامپیوتروآموزش هندسه، به قلم Osta
- فصل پنجم: هندسه در کلاس درس ریاضی، به قلم Douady
- فصل ششم: تحول آموزش هندسـه از سـال ۱۹۰۰، به قلـم Griffiths, Laborde, Neubrand, Galuzzi
- فصل هفتم: تغییرات و جهت گیری ها دربرنامه های درسی هندسه، به قلم Hansen
- فصل هشتم: سنجش وارزشیابی درهندسه، به قلم Niss
- فصل نهم: صلاحیتهای معلمی و آموزش معلمان درارتباط باهندسه، به قلم Niss
- فصل دهم: راه آینده، به قلم (I.P.C.)

بازنگری شده درخت فامیلی سه تایی فیثاغورسی*

دفتر برنامه ریزی و تألیف
ترجمه آزاد: میرزا جلیلی

آقای A.R.Kanga [1]، اخیراً در مقاله ای یک روش غیر معمولی برای ایجاد سه تایی های فیثاغورسی ارائه داده است که بیان می کند که هر سه تایی اول فیثاغورسی را می توان به صورت یک گره (رأس) در شاخه یک شبکه درختی نشان داد. ما ادعا می‌کنیم که این شبکه را با روش معمولی تولید سه تایی ها نیز می توان ایجاد کرد. مطلب را بابررسی دوبارهٔ قضیه اساسی شروع می کنیم، که توضیح درباره جزییات آن در همهٔ کتابهای نظریه اعداد از جمله کتاب Rosen [2] آمده است.

برای پیدا کردن تمام مثلث های قائم الزاویه که طول اضلاع آنها اعداد صحیح است نیاز به یافتن تمام سه تایی های (x,y,z)از اعداد صحیح مثبت داریم که در معادلهٔ $x^2 + y^2 = z^2$ صدق کنند.

چنین سه تاییهایی به نام سه تاییهای فیثاغورسی خوانده می شوند و اول هستند هر گاه y، xو z مقسوم علیه مشترکی به جز یک نداشته باشند.

قضیه ۱. (x,y,z)یک سه تایی اول فیثاغورسی است، با فرض زوج بودن y، اگر و فقط اگر دو عدد صحیحm و n که نسبت به هم اول هستند به قسمی یافت شود که

$$x = m^2 - n^2 \quad , \quad y = 2mn \quad , \quad z = m^2 + n^2 \quad (1)$$

اگرm زوج باشد n فرد است و اگرm فرد باشد n زوج است که اثبات آن در کتاب Rosen آمده است.

دراین مقاله، از این به بعد هر زوج(m,n) را که در شرایط قضیه۱ صدق کند یک زوج فیثاغورسی می خوانیم. زیرا این زوج یک سه تایی فیثاغورسی ایجاد می کند. مثلاً اگر (m,n)=(۲ ، ۱)با توجه به قضیه ۱ سه تایی (x,y,z)=(۳ ، ۴ ، ۵)را به وجود می آورد که درآن، $z^2 = x^2 + y^2$.

توجه کنید که (m,n)=(۲ ، ۱) و $(m,n) = (2,-1)$ سه تاییهای (۳،۴،۵) و (۳،-۴،۵) که فیثاغورسی هستندایجاد می کنند. یک توجه جزیی دراین بحث حائز اهمیت است. معمولاً اگرمعادلات (۱)سه تایی فیثاغورسی (x,y,z)از زوج های صحیح (m,n) را بوجود بیاورد آن گاه، سه تایی های غیر فیثاغورسی$(-x, y, z)$ و$(x, -y, z)$ به ترتیب بوسیله زوجهای (m,n), $(n, -m)$ ایجاد می شوند. برای راحتی، زوجهای (m,n) و(n,m) و $(n, -m)$ را زوجهای وابسته می خوانیم. قضیه زیر یک نتیجه استاندارد دیگر ازسه تایی های فیثاغورسی است.

قضیه۲. اگر(m,n) با فرضm>n، یک سه تایی فیثاغورسی با فرض $k = |x - y|$، که k عددصحیح مثبت است، ایجاد کند آن گاه زوج، $(2m + n, m)$ نیز مولد یک سه تایی فیثاغورسی، با $|x - y| = k$ خواهد بود.

اثبات این قضیه که به جبر ساده و مقدماتی نیاز دارد به خواننده واگذار می شود.

قضیه فوق روشی برای ایجاد بیشمار سه تایی فیثاغورسی به دست می دهد که اختلاف کوچکترین اضلاع (یالهای) آنها همان اختلاف اعداد صحیح است.

مثلاً بااعمال مکرر قضیه ۲ برای زوج(۱ ، ۲)زوجهای (۲ ، ۵) و(۵ ، ۱۲) و(۱۲ ، ۲۹) را ایجاد می کنند که خود به نوبه سه تایی های زیر را تولید می نمایند:

(۳،۴،۵) ، (۲۱،۲۰،۲۹) ، (۱۱۹،۱۲۰،۱۶۹) ، (۶۹۷،۶۹۶،۹۸۵)

ایجاد درخت خانوادگی فیثاغورسی

قضیه۲، تابعی از زوج فیثاغورسی (m,n) به زوج فیثاغورسی $(2m + n, m)$ به صورت زیر ارائه می دهد:

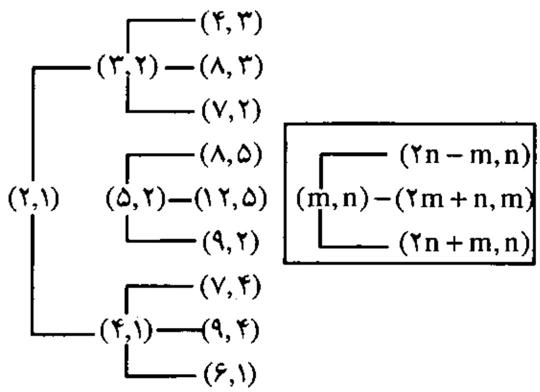
$$f: N \times N \to N \times N$$

$$f(m,n) = (2m + n, m)$$

مثلاً f، زوجهای وابسته (۲ ، ۱)، (۱ ، ۲) و (۱- ، ۲) را روی زوجهای فیثاغورسی (۲ ، ۵)، (۲ ، ۳) و (۱ ، ۴) تصویر می کند که به نوبه خود سه تایی های فیثاغورسی، (۲۹ ، ۲۰ ، ۱۹)، (۱۳ ، ۱۲ ، ۵) و (۱۵ ، ۸ ، ۷) را ایجاد می کنند.

قضیه۳. اگر f روی هر زوج فیثاغورسی (m,n) و زوجهای وابسته، (n,m) و (n,-m) عمل کند، آن گاه زوجهای حاصل (۲n − m, n) و (۲n + m, n) و (۲m + n, m) نیز همگی زوجهای فیثاغورسی هستند.

برهان: قضیه۳، ساده ولی پردردسر است. مفهوم این قضیه این است که ما می توانیم سه تاییهای فیثاغورسی را از یک سه تایی مفروض بااعمال f بر روی زوجهای وابسته فیثاغورسی که سه تایی فیثاغورسی اولیه را تولید کرده اند به دست آوریم. چون که هرکدام از این سه تاییها به نوبه خود یک سه تایی دیگری ایجاد خواهند کرد. و ما می توانیم چنین سه تاییهایی را به صورت یک درخت فامیلی نمایش دهیم که اولین سه ستون آن درزیر نمایش داده شده است:



طبق قضیه ۲ آن زوجهای فیثاغورسی که بوسیله خط افقی همانندی در نمودار به هم مربوط می شوند، برای اختلاف بین یالهای نمودار دارای ارزش یکسان هستند. Kanga یک روش غیر معمول برای ایجاد درخت به کار می برد که مبتنی بریک فرمول قدیمی دوباره کشف شده به وسیله V-V.Merchant است.

آیا درخت شامل تمام سه تاییهای فیثاغورسی است؟

ما با استفاده از اینکه، هر زوج(m,n) زوج(۱ ، ۲) رابه عنوان نیای خود دارد، نشان خواهیم داد که درخت شامل هر سه تایی فیثاغورسی است.

این مطلب را اول بااستفاده از مثال(۱۱ ، ۲۶) نشان خواهیم داد. فرض کنید(۱۱ ، ۲۶) زوج(m,n) را به عنوان نیای خود داشته باشد آن گاه، (۱۱ ، ۲۶) به صورت یکی از زوجهای (۲m + n, m)، (۲n − m, n) و (۲n + m, n) است. اینهابه نوبه خود، (۱۱,۴) = (m,n) و (۱۱- ، ۴) و (۱۱ ، ۴) را به دست می دهند که از آنهافقط(۴ ، ۱۱) یک زوج فیثاغورسی است.

به نوبت، (۴ ، ۱۱) می تواند زوجهای(۳ ، ۴) و (۳- ، ۴) و(۴ ، ۳) را به عنوان نیاهای بالقوه خود داشته باشد، اما تنها زوج(۳ ، ۴) یک زوج فیثاغورسی است پس (۳ ، ۴) زوجهای (۲- ، ۳) و(۲ ، ۳) و (۳ ، ۲) را به عنوان نیاهای بالقوه خود دارد که در آنها(۲ ، ۳) یک زوج فیثاغورسی است. بالاخره (۲ ، ۳) تنها زوج(۱ ، ۲) به عنوان یک نیا دارد.

توجه کنید که در این فرآیند همیشه مختص اول زوجها کاهش می یابند.

برای نشان دادن اینکه این فرآیند کلی است ما باید نشان دهیم

(a) اولین مختص در زوجهای مرتب همیشه کاهش می یابد. اما چونکه مختص ها از ۲m + n تا ۲n + m یا ۲m − n تا m تغییر می کنند، و m > n لذا این حالت همیشه درست است.

(b) ۱ = (m, n). امّا اگر مختص های (m,n) دارای مقسوم علیه مشترکی غیر از یک بودند آن گاه (۲m + n, m)، (۲n + m, n) و (۲m − n, m) نیز دارای همان عامل مشترک خواهند بود.

(c) دقیقاً یکی از نیاهای بالقوه، یک زوج فیثاغورسی است. ما دربالا نشان داده ایم که ۱ = (m, n). نیای زوج (a,b) با فرض a > b یکی از زوجهای (b, a − ۲b)، (b, −(a − ۲b)) یا (a − ۲b, b) است.

نشان دادن اینکه دقیقاً یکی از اینها دارای مختص های نامنفی با مختص اول بزرگتر از مختص دوّم است آسان است. به هر حال اگر (a,b) برابر (۲ ، ۱) باشد آن گاه نیای این زوج منحصراً (۰ ، ۱) است، که مختص های نامنفی ندارد ولی یک زوج فیثاغورسی نیست.

یادداشتها

بنابراین برای هر زوج مفروض(a, b) با فرض ۱ = (a, b) و a > b ما می توانیم به طور منحصر به فردی یک نیای بلافصل پیدا کنیم c,d > ۰, (c,d) = ۱ c < d و از آنجا یک زنجیری از این نیاها که به (۱ ، ۲) خاتمه پیدا می کند و این تنها زوج غیرفیثاغورسی است که دارای نیا نمی باشد.

پانوشتها

* این مقاله ترجمهٔ آزاد از منبع , The mathematical gazzet 18No:4/82, July 1994 است.

مراجع

۱ ـ Kagna.A.R درخت فامیلی سه تاییهای فیثاغورسی IMABulletin 26,15-27(1990)
۲ ـ Rosen-K.R، نظریه مقدماتی اعداد یا کاربرد-Addison Wesly (1988).
۳ ـ Merchant.V-V «بازنگری فیثاغورس»، علوم امروز، (1983)78,17

حسابان در قرن هفدهم ۲

قسمت دوم

نوشتهٔ: ساندهایمر و راجرسُن
ترجمهٔ علیرضا مدقالچی
دانشگاه تربیت معلم

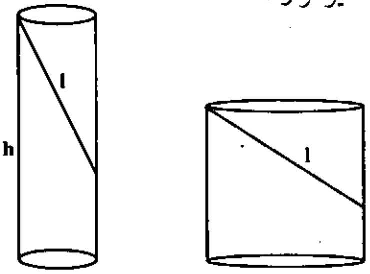
در حوالی سال ۱۶۱۰ میلادی کپلر، منجم بزرگ، مسألهٔ مشابهی را مورد بررسی قرار داد که از اندازه گیری حجم بشکه های نوشابه ها ناشی می شد. (او کتابی را به نام Stereometria Doliorum در این موضوع منتشر ساخت.) کپلر روش محاسبهٔ قیمت این نوشابه ها را مورد انتقاد قرار داد؛ قیمت این نوشابه ها برابر l یعنی طول میلهٔ اندازه گیری بود که در داخل بشکه مطابق شکل ۱۱ـ۹ از یک طرف در وسط و از طرف مقابل در انتهای بشکه قرار داشت. کپلر تشخیص داد که بسیاری از حجمهای مختلف می تواند فقط متناظر با یک l مفروض باشد (بعضی خیلی کوچک!)، و او به ازای l مفروض ارتفاع h_m از بشکه را به دست آورد که حجم آن ماکسیمم بود.

(تمرین: نشان دهید $h_m = \frac{2l}{\sqrt{3}}$)

مفهوم مشتقگیری همچنین از مفاهیم فیزیکی در *سینماتیک*، مطالعه سرعت اجسام متحرک دانش فراگیر قرن هفدهم ناشی شد. گالیله، مهمترین معاصر کپلر، تجربهٔ خود را با مطالعهٔ حرکت اجسام در سطوح شیب دار تحت ثقل دریافت که مسافت طی شده با مربع زمان تغییر می کند، $x = at^2$. گالیله برای ارتباط دادن این نتیجه با تغییر سرعت، $v = \frac{dx}{dt}$ از طریق مشتقگیری تعقیب نکرد؛ در عوض او قوانین مختلفی را برای سرعت مورد آزمایش قرار داد (امتداد v متناسب با x، بعد v متناسب با t) و کوشش نمود که قانون مسافت / زمان را به وسیلهٔ استدلالی نسبتاً مبهم، از روی نمودار سرعت نسبت به زمان بهبود بخشد (لهذا او در واقع کوشش می کرد از تابع سرعت نسبت به زمان انتگرال بگیرد). رهیافت مشابه به وسیلهٔ دکارت (در حوالی ۱۶۱۸) به کار رفت. آیا گالیله و دکارت تشخیص داده بودند که مسافت x از روی نمودار سرعت / زمان متناسب با *سطح* است؟ ما مطمئن نیستیم؛ بیان صریح رابطهٔ $x = \int^t v\,dt$ چهل سال بعد به وسیلهٔ معلّم نیوتن اسحاق برو[1] ارائه گردید (در زیر می بینید). مسلماً در طول این دوره این موضوع هرچه بیشتر مورد قبول واقع شد که توابع و خمها از روی سینماتیک تعریف می شدند. یعنی مکانها، مدارها و سرعتهای ذرّات به عنوان تابعی از زمان از توابعی که به طریق کلّی تعریف می شدند قابل تشخیص نیستند و درنتیجه زمان t یک پارامتر ریاضی همانند هر متغیر دیگری است. از این رو رهیافت به حسابان از طریق مکانیک به تدریج با رهیافت از طریق هندسه توأم گردید.

ما به اجمال سایر افرادی را که قبل از نیوتن و لایپنیتز در حسابان سهم داشتند می آوریم:

بلز پاسکال (۶۲-۱۶۲۳) مبتکری فوق العاده بود و سهم عمده ای در بسیاری از شاخه های ریاضی دارد. قبلاً بیان کردیم که او بنیانگذار نظریّه ریاضی احتمال است و اولین ماشین حسابگر را طراحی کرد و ساخت. او مطالعات خیلی جدی در خواص چرخزادها[2] کرد، و روش انتگرال گیری از توابع ساده مانند x^n و $\sin x$ را می دانست. نوشته های پاسکال، لایپنیتز جوان را به شدت تحت تأثیر قرار داد.



کریستین هویگنس[3] (۹۵ـ۱۶۲۹) دانمارکی ثروتمندی بود که در پاریس زندگی می کرد، او ریاضیدان، فیزیکدان و منجم برجسته ای بود. او بنیانگذار نظریه موجی نور است. کتاب او Horologium Oscillatorum (در ۱۶۷۳ منتشر شد)، در مورد ساعتهای آونگ دار و مقالات او پر از نتایج جدید در مورد خواصّ خمها است.

بسیاری از اینها درست وقتی پیدا شدند که لایپنیتز روش کلی خود را برای فیصله دادن به چنین مسایلی منتشر ساخت. هویگنس بسختی می توانست حسابان لایپنیتز را بپذیرد، زیرا احتمالاً پافشاری هویگنس (برخلاف ریاضیدانان قرن هفدهم) بر استانداردهای بالای هندسی ارشمیدس عامل این عدم پذیرش بود.

جان والیس[4] (۱۷۰۳ ـ ۱۶۱۶) به استادی ساویلی[5] در هندسه در دانشگاه اکسفورد رسید و به تشکیل انجمن سلطنتی کمک کرد (۱۶۶۰) [۱]. کتاب والیس به نام Arithmetica Infinitorum (در سال ۱۶۶۵ منتشر شد). به همراه کتاب Horologium

حسابان بینهایت کوچکهای کاملاً توسیع یافته در دورهٔ قبل از نیوتن ولایپنیتز بود. به طوری که از عنوان کتاب پیدا است والیس می خواست ثابت کند که قدرت «حساب» جدید (یعنی جبر) قدرت هندسهٔ قدیم نیست، روشهای جسورانهٔ او در بررسی سریها و حاصلضربها، نتایج جدیدی را به او ارزانی داشت. فرمول معروف والیس فرمول حاصلضرب مشهور او برای π است. او این نتیجه را با نوشتن مساحت ربع دایرهٔ واحد $x^۲ + y^۲ = ۱$ به دست آورد، یعنی (با نمادهای جدید) به عنوان انتگرال

$\int_۰^۱ (۱ - x^۲)^{\frac{۱}{۲}} dx$ نوشت. ریشهٔ دوم در این انتگرال موجب دردسر است، به طوری که در آن زمان هیچ فرمول دوجمله ای برای توانهای ناصحیح وجود نداشت. از این رو والیس $\int_۰^۱ (۱ - x^۲)^n dx$ را به ازای «$n = ۰, ۱, ۲, \ldots$» به دست آورد و جواب را برای $n = \frac{۱}{۲}$ به وسیلهٔ فرآیند پیچیدهٔ درونیابی حدس زد [۲]. این روش به نتیجهٔ زیر منجر شد

$$\frac{\pi}{۲} = \frac{۲ \times ۲ \times ۴ \times ۴ \times ۶ \times ۶ \times ۸ \times \ldots}{۱ \times ۳ \times ۳ \times ۵ \times ۵ \times ۷ \times ۷ \times \ldots}$$

جیمز گرگوری (۱۶۳۸ـ۷۵) یک اسکاتلندی بود که در ایتالیا تحصیل می کرد و او بر اجزای وسیعی از حسابان در ۱۶۶۸ مسلط بود. متأسفانه به سبب استفاده از روشهای هندسی به جای تحلیلی توسط گرگوری تعقیب کار او دشوار بود. سری

$$\tan^{-۱} x = x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - \frac{x^۷}{۷} + \ldots$$

به «سری گرگوری» معروف است؛ این فرمول در نوشتن $\tan^{-۱}_x$ به صورت

$$\int_۰^x \frac{dy}{۱ + y^۲} = \int_۰^x (۱ - y^۲ + y^۴ - y^۶ + \ldots) dy$$

و انتگرال گیری جمله به جمله به دست آمده است. گرگوری بسط اساسی معروف به سری *تیلور* را بسیار جلوتر از آنکه کتاب بروک تیلور در سال ۱۷۱۵ منتشر شود [۳] به صورت زیر معرفی کرد:

$$f(a + x) = f(a) + xf'(a) + \frac{x^۲}{۲!} f''(a) + \ldots$$

اسحاق برو (۱۶۳۰ـ۷۷) قبل از نیوتن در سال ۱۶۶۹ میلادی از استادی کرسی لوکاسی[۷] در کیمبریج کناره گرفت و نیوتن را به عنوان جانشین خود پیشنهاد کرد. لازم به ذکر است که دروس هندسهٔ برو در سال ۱۶۷۰ منتشر شد و با مسایل مماس و تربیعات در ارتباط بود. قبلاً ذکر کردیم که برو به وضوح می دانست که حرکت مستقیم الخط تحت نمودار سرعت/زمان با سطح متناسب است. از مطالعهٔ سینماتیک او رابطهٔ بین مشتق به عنوان شیب مماس و انتگرال به عنوان سطح را می دانست. یکی از نتایج برو که شامل این رابطه بود نتیجهٔ زیر است: فرض کنید منحنی های $y = f(x)$ ، $Y = F(x)$ طوری داده شده اند که عرضهای Y متناسب با سطحهای $\int_c^x y dx'$ است، یعنی $aF(x) = \int_c^x f(x') dx'$ ، در این صورت مماس در (y, Y) به $Y = F(x)$ محور x ها را در نقطهٔ $x - T$ می بُرد، که در آن T از $y/Y = a/T$ به دست می آید. برو برای اثبات این قضیه همانند روش فرما کمیتهای کوچک را مورد بحث قرار داد؛ درحالی که ما آن را مستقیماً با مشاهدهٔ اینکه شیب مماس، y مشتق Y است به دست می آوریم. برو نتایج زیادی را از این نوع ارائه داد، ولی رابطهٔ معنی داری بین انتگرال گیری و مشتق گیری توسط او ارائه نگردید، و پافشاری او بر زبان قدیمی هندسی تعقیب *درسهای هندسی* او را توسط دیگران مشکل ساخت.

از این رو، سالهای ۱۶۵۰ و ۱۶۶۰ دوران پیشرفت در انجام انواع روشهای بینهایتها بود. سریهای نامتناهی، حاصلضربهای نامتناهی و کسرهای مسلسل مد روز بودند. چاپ مقالهٔ سری مرکاتور[۸] (۱۶۶۸) [۴]:

$$\log(۱ + x) = \int_۰^x \frac{dy}{۱ + y} = \int_۰^x (۱ - y + y^۲ - y^۳ + \ldots) dy$$

$$= x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۴}{۴} + \ldots$$

بر پیشرفت حسابان تأثیر زیادی گذاشت؛ تشخیص اینکه یک تابع جبری نظیر لگاریتم را می توان به این طریق به عنوان یک سری توانی نمایش داد، توجه ریاضیدانان را به سریهای توانی به عنوان روش کلّی مطالعهٔ توابع مختلف جلب کرد. (خود نیوتن در بیان قضیهٔ دوجمله ای برای توانهای ناصحیح سهم دارد.) بسیاری از انتگرال گیریها این زمان انجام شد، مشتق گیری شناخته شد و رابطهٔ بین این دو مشخص گردید؛ تکنیکهای متنوع برای ارتباط یک انتگرال با انتگرال دیگر شناخته شده بود (از این رو برو قاعده ای برای انتگرال گیری به وسیلهٔ «تغییر متغیر» را در دست داشت.) حتی مسایلی نظیر معادلات دیفرانسیل حل شد. زمان برای ایجاد یک الگوریتم کلی مهیّا بود که می توانست با نماد یکسان، تمام اعمال اساسی حسابان بینهایت کوچکها را انجام دهد. این همان است که نیوتن ولایپنیتز به انجام آن موفق شدند.

نیوتن و لایپنیتز همواره در بین بزرگترین متفکرین بودند، و آفرینش حسابان قسمتی از سهم عمیق آنان به پیشرفت دانش بشری است. بحثهای زیادی (خیلی زیادی) در مورد اینکه چه کسی استحقاق دارد که اولین واضع در حسابان باشد انجام می گرفت؛ اکنون همه متفق القولند که این ابداعات به طور مستقل انجام شده است. در واقع کارهای نیوتن (در ۶ـ۱۶۶۵) بر کارهای لایپنیتز

(در ۶ـ۱۶۷۳) سبقت تاریخی دارد، ولی لایپنیتز اولین کسی بود که کارهایش را در زمینهٔ حسابان منتشر کرد و کارهای او اثر فوری خیلی زیادی روی تفکّر ریاضی آن زمان داشت.

اسحق نیوتن در سال ۱۶۴۲ (در سالی که گالیله فوت کرد.) در دهکده ولستروپه در لینکون شایر متولد شد. او در کیمبریج زیر نظر اسحق برو به تحصیل پرداخت و در سال ۱۶۶۹ جانشین استاد خود به عنوان استاد لوکاسی شد. مشهورترین کتاب نیوتن Principa است (عنوان کامل اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی، در سال ۱۶۸۶ منتشر شد). نیوتن در این کار منحصر به فرد قوانین مکانیک را بر پایهٔ اصول موضوع پایه گذاری کرد و قانون حرکت سیاره ای را از قانون عکس مجذور ثقل به دست آورد. رهیافتی که در پرنسیپا تقریر شده است مدلی برای گسترشهای بعدی در علوم فیزیکی شد.

اصلی ترین ابداع نیوتن، شامل حسابان ـ که او آن را روش فلوکسیونها[9] نامید ـ در سالهای ۱۶۶۵ و ۱۶۶۶ به دست آمد، زمانی که او از شیوع طاعون در کیمبریج به دهکدهٔ زادگاه خود فرار کرد، با کمال تعجب، برهانهای پرنسیپا حسابان را به کار نمی گیرد بلکه بر روشهای قدیمی هندسی استوار است. شاید به دلیل اینکه نیوتن این روش را منطقاً قانع کننده یافته بود. نیوتن در طول زندگی خود برای چاپ ابداعات خود بی میل بود، و ازاین رو میزان تأثیر او بر معاصرانش بسختی قابل ارزیابی است. روش فلوکسیون قطعاً تا قبل ۱۷۳۶ یعنی زمان مرگ نیوتن منتشر نشد.

نیوتن از نقطهٔ نظر مکانیکی فکر می کرد که: منحنی ها از حرکت پیوستهٔ یک نقطه تولید می شود. مختصات (x,y) را در صفحه «فلوئنتها[10]» (کمیتهای روان) می نامید، نسبت تغییرات فلوئنتها «فلوکسیونها» هستند که با $(\dot{x},\dot{y})$ نشان داده می شود (اینها مشتقهای جدید یعنی $\frac{dx}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ هستند و t به عنوان پارامتر زمان است؛ از این رو فلوکسیونها مؤلفه های سرعت هستند).

فلوکسیون $\dot{x}$ برابر $\ddot{x}$ است و الی آخر. گشتاور فلوکسیون $\dot{x}$ کمیت بینهایت کوچک $\dot{x}o$ است، که در آن o یک کمیت بینهایت کوچک است. نیوتن به طورکلّی به صورت زیر بحث می کند: مثلاً منحنی سطح $x^{2} - axy - y^{2} = 0$ مفروض است، x را با $x + \dot{x}o$ و y را با $y + \dot{y}o$ جایگزین کنیم، و بنابراین به دست می آوریم

$$x^{2} - 2x\dot{x}o + \dot{x}^{2}o^{2} - axy - ax\dot{y}o - ay\dot{x}o - a\dot{x}o\dot{y}o - y^{2} - 2y\dot{y}o - \dot{y}^{2}o^{2} = 0$$

جملهٔ $x^{2} - axy - y^{2} = 0$ را از بین می بریم و باقی را بر o تقسیم می کنیم؛ باقی می ماند

$$2x\dot{x} + \dot{x}^{2}o - ax\dot{y} - ay\dot{x} - a\dot{x}\dot{y}o - 2y\dot{y} - \dot{y}^{2}o = 0$$

«ولی درحالی که o بینهایت کوچک فرض می شود به طوری که می تواند گشتاور کمیتها را نشان دهد، مضربهای آن نسبت به بقیه ناچیز هستند؛ ازاین رو من آنها را نادیده می گیرم، و آنچه که باقی می ماند عبارت زیر است:

$$2x\dot{x} - ax\dot{y} - ay\dot{x} - 2y\dot{y} = 0$$»

(این نتیجهٔ حسابان است، x و y توابعی مشتقپذیر از t هستند.)

oها چه نوع کمیتهایی هستند؟ آیا آنها صفر هستند؟ یا بینهایت کوچک (به هر معنی که باشد)؟ یا اعداد متناهی؟ نیوتن کوشش می کرد تا طبیعت آنها را با مفهوم اولیه حدّ بیان کند، ولی این موضوع (از پرنسیپا) به سختی آشکار است:

«آن نسبتهای نهایی که با آنها کمیتها صفر می شوند حقیقتاً نسبتهای کمیتهای نهایی نیستند، و حدّهایی از نسبتهای کمیتها هستند که بدون حدّ کاهش می یابند، همواره همگرا هستند، و به هرچه که میل کنند از هر تفاضل مفروضی نزدیکترند، ولی هرگز تجاوز نمی کنند، و به آن نمی رسند، تا اینکه کمیتها در بینهایت ناپدید شوند».

نیوتن در عمل بخوبی می دانست که با حسابان خود چه می خواهد بکند و قادر بود که در غیاب تعریفهای واضح آن را به کار گیرد؛ ولی تعاریف کمتر فانی بیشتر گیج کننده هستند.

گاتفرید ویلهلم لایپنیتز در سال ۱۶۴۶ در لایپزیگ متولد شد و بسیاری از عمر خود را در قصر هانوفر در خدمت دوکها بود (یکی از آنها جورج اول پادشاه انگلستان شد). او بزرگترین نابغهٔ جامعهٔ قرن هفدهم و علاقمند به تاریخ، الهیات، زبان شناسی، زیست شناسی، زمین شناسی، سیاست و ریاضیات بود، او ماشین حسابگر را ابداع نمود، ایدهٔ ماشینهای بخار را به دست آورد، زبان سانسکریت را یاد گرفت و کوشش نمود که یکپارچگی زبان آلمانی را فراهم کند. لایپنیتز، هویگنس را در سال ۱۶۷۲ در پاریس ملاقات کرد و دروس ریاضی را با او گرفت. او حسابان خود را بین سالهای ۱۶۸۴ و ۱۶۸۶ ابداع کرد. لایپنیتز همان قدر که فیلسوف بود دانشمند هم بود و می خواست زبان جامعی را بیابد که تمام تغییرات (شامل حرکت) را در برگیرد، و در کنار آن یک روش کلّی برای دانش موجود و برای اختراعات جدید بیابد. خواننده امروزی به این همت بلند او مشکوک است، ولی به هر حال روش لایپنیتز به نتایج مهمی انجامید: مبنایی برای منطق نمادی شد، و او بیش از همهٔ معاصرانش از اهمیت خوش تدبیری و نمادهای ریاضی و انجام سادهٔ اعمال به وسیلهٔ آنها آگاه بود. نمادگرایی را که او برای حسابان معرفی کرد درک و انجام روش او را برای دیگران آسانتر کرد، و این نمادگذاری تنها نمادگذاریی است که تا امروز باقی مانده است. اولین مقالهٔ لایپنیتز در حسابان شامل نمادهای dx و dy، قاعدهٔ ضرب $d(uv) = udv + vdu$ و شرایط $dy = 0$ برای مقادیر اکسترمم است، بعد او علامت انتگرال گیری را به صورت $\int$ معرفی کرد (که S طولانی برای نمایش «جمع» است)؛ و ... حساب دیفرانسیل» و «حساب

انتگرال» نیز از آن او است [۵].

چاپ حسابان لایپنیتز دورهٔ کاملاً پربرکتی را ایجاد کرد. دو مرید توانا یعنی دو برادر به نامهای یاکوب و جان برنویی مشتاقانه روشهای لایپنیتز را پی گرفتند. این دو با همکاری همدیگر ـ اغلب با رقابتی ناصواب ـ در سال ۱۷۰۰ بسیاری از حسابان در سطح امروزی برنامه های دانشگاهی، به علاوه، قسمتی از موضوعات پیشرفته ای نظیر حلّ بسیاری ازمعادلات دیفرانسیل و نتایجی از حساب تغییرات را به دست آوردند. در سال ۱۶۹۶ اولین کتاب درسی حسابان (The Analyse des infininent petits) به وسیلهٔ مارکی دولوپیتال منتشر شد. امروزه خاطره مارکی «با قاعده هوپیتال» برای یافتن $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ وقتی که f و g هردو به صفر میل می کند یادآوری می شود. حسابان لایپنیتز همانند حسابان نیوتن دارای پایهٔ منطقی ضعیف بود؛ او همچنین به وضوح نمی توانست بگوید که آیا کمیتهای dx، dy را باید متناهی یا صفر یا چیزی در این بین گرفت.

در خاتمه ذکر دو نکته ضروری است:

(۱) فقدان مبانی دقیق برای حسابان جدید انگیزهٔ انتقاد شد. بهترین این انتقادها از جانب اسقف برکلی فیلسوف ایده آلیست ایرلندی بود، برکلی از علوم نیوتن منزجر شد زیرا حامی ماده گرایی بود، و او در کتاب Analyst(در سال ۱۷۳۴ منتشر شد) خود بر نظریه فلوکسیون حمله کرد. برکلی مناظرگر ارزنده ای بود: او بینهایت کوچکها را به عنوان «شبحی از کمیتهای فناپذیر» به تمسخر می گرفت و بحثهای نیوتن را که در آن گاهی ناصفر و گاهی صفر درنظر گرفته می شد، «سند مغلطه» می دانست نظریّه او چنین است: «کسی که او فلوکسیون دوّم و سوّم، یا تفاضل دوّم و سوّم، را هضم کند، به نظرم با هر نقطه ای در الهیّات، مخالفت دارد.» گرچه انتقاد برکلی و انتقادهای مشابه توجیه پذیر بودند، ولی کاملاً مخرب بودند و مبانی بهتری برای حسابان فراهم نیاوردند. درحالی که آنها نیاز به کار بیشتر روی مبانی موضوع را مورد تأکید قرار می دادند.

(۲) بحثهای طولانی وجود دارد که کدام یک از نیوتن و لایپنیتز استحقاق اولویت ابداع حسابان را داشتند، بحثهایی که پیروان این دو مرد بزرگ با شوق و ذوق از یک طرف و تلخی و دشمنی از طرف دیگر انجام می دادند، با اتهام به دزدی آثار همدیگر نامطلوبتر جلوه می کرد.

این انتقادها و نزاعها بر ریاضیات ضعیف بریتانیا در قرن هجدهم درزمانی که پیشرفتهای فراوانی در ریاضیات اروپا به کمک حسابان انجام می گرفت سایه می انداخت. بدون شک عوامل دیگری را می توان برای ضعف ریاضیات بریتانیا، مانند تأکید بیشتر بر مفاهیم هندسهٔ منسوخ قدیمی و عدم احترام همگانی نسبت به اهمیت ریاضیات عنوان کرد. تبعیت کاملاً مشتاقانه از همهٔ روشهایی فلوکسیونی نیوتن به انقلابی در ۱۸۱۲ انجامید. در همان زمانی که «انجمن آنالیتیکال»[11] توسط ریاضیدانان جوان در کیمبریج برای توسعهٔ نمادگذاری لایپنیتز و تجدید نظر در ریاضیات بریتانیا تشکیل شد. ولی زمان زیادی طول کشید تا نوشته های آنالیزدانهای بین المللی کاملاً در انگلستان درک شوند (هاردی، ۱۹۴۹ را ببینید).

پانوشتها

[۱] انجمن سلطنتی لندن یکی از آکادمیهای علوم بود که از به هم پیوستن گروههای مختلف دانشمندان به وجود آمد. آکادمیهای علوم روح تازه ای بر پیکره تحقیقات آزاد، دمیده است. مثلاً، «این زمان وظیفه آکادمیها دستیابی به دانش جدید و ریشه کردن موهومات بود» (برنشتاین) در این زمان با دانشگاههایی که در قرون وسطی پایه گذاری شده بودند و کوشش می کردندتا علوم را به سبک قرون وسطی ثابت نگه دارند مخالفت می شد. اولین آکادمی ایتالیایی بود: نابلس ۱۵۶۰، رم (the Accademia dei lincei) ۱۹۰۳.

[۲] در واقع، والیس در حالت کلّی انتگرال $(1-x^{۲/\mu})^n$ را به ازای مقادیر مختلف وصحیح μ و n مورد بررسی قرار داد. برای جزئیات ادواردی را ببینید(۱۹۷۹).

[۳]سری کولین ماکلورن

$$f(x)=f(\cdot)+xf'(\cdot)+\frac{x^۲}{۲!}f''(\cdot)+\cdots$$

که فقط حالت خاصی از سری تیلوراست در سال ۱۷۴۲ منتشر شد. نامگذاری قضایا اغلب یک تصادف تاریخی است تا واقعیت تاریخی! تاریخ سری تیلور بسیار پیچیده است مورخین ریاضی مدعی هستند که حالت خاص را قبل از ۱۵۵۰ ریاضیدانان هندی می دانستند.

[۴] نیکولاس مرکاتور را (۸۷ـ۱۶۲۰) نباید با گرارد مرکاتور جغرافیدان (۹۴ـ۱۵۱۲) اشتباه شود که او «تصویر مرکاتور» را در ساخت نگاشت معرفی کرد.

[۵] اولین پیشنهاد لایپنیتز برای حساب انتگرال[1] «Calculus summatorius» بود. بعد با «Calculus integralis» جایگزین شد. آنالیز جدید مجدداً پیشنهاد اولیه لایپنیتز را قبول کرد.

1) Isaac Barrow
2) Cycloid
3) Christiaan Huygens
4) John Wallis
5) Savilian
6) Interpolation
7) Lucasian
8) Mercator
9) Fluxions
10) Fluent
11) Analytical society

مقالهٔ فوق ترجمهٔ قسمت دوم فصل ۹ از کتاب زیر است

E. Sondheime and R.Rogerson, Numbers and infinity, A historical accont of mathematical concepts, Cambridge, 1981.

انتخاب استراتژی در فرآیند حل مسأله

روح الله جهانی پور
دانشگاه صنعتی شریف

این مقاله، پروژهٔ پایان ترم نگارنده در درس « مباحثی در آموزش ریاضی » است. این درس توسط خانم دکتر زهرا گویا در نیمسال اول تحصیلی ۷۴ـ۷۳ برای دانشجویان کارشناسی ارشد ریاضی دانشگاه صنعتی شریف ارائه شده است.

مقدمه:

در قسمت اول مقاله، منظورمان را از استراتژی با ارائهٔ یک نمونهٔ تاریخی مشخص کردیم و گفتیم که بعضی از به ظاهر انتخاب استراتژی ها در واقع به صحنه آوردن ذخایر دانشی هستند. همچنین به اهمیت انتخاب استراتژی در رشد اندیشهٔ دقیق سازی ریاضی اشاره کردیم. و اکنون ادامهٔ مقاله:

۷: استراتژیهای پولیا

کتاب « چگونه مسأله را حل کنیم »، اثر پولیا، حاوی یک طرح چهار مرحله ای برای حل مسأله و آنگاه گردایه ای از استراتژیهای راهیابانه برای یافتن راه حل مسأله است. همانطور که در ابتدای سخن گفتیم اگر ریاضیدانی کتاب پولیا را مطالعه کند، همه چیز برای او بدیهی جلوه می کند، زیرا مدتها همین کارها را در حل مسائل متعدد انجام داده است. اما مطلبی که مورد توجه آموزشگران ریاضی است، *آموزش* این استراتژیها است. آیا می توان به دانش آموز یا دانشجو آموخت که برای حل مسأله، استراتژی مناسب و خوب را برگزینند؟ و اگر ممکن است چگونه؟ دو مشکل اساسی وجود دارد: یکی اینکه استراتژیهای پولیا کلی و پیچیده اند، یعنی هر استراتژی ای خود در واقع برچسبی است برای یک مجموعه از استراتژیهای جزئی تر که به کارگیری آنها به سادگی بیان آنها نیست. به همین دلیل، کنترل فرآیند در هنگام حل مسأله اهمیت پیدا می کند. دوم اینکه ارائهٔ الگو، ممکن است حل کننده را دچار اشتباه کند. شونفیلد ـ هم در کتاب خود [۹] و هم در مقالهٔ « هنر حل مسأله » [۱۱] به تفصیل و با ارائهٔ مثالهایی به مشکل اول می پردازد، لکن تعداد استراتژیهایی که بررسی می کند اندک است. می توان به نحو مشابه برای استراتژیهای دیگر و امکان تجزیهٔ آن به استراتژیهای کوچکتر نیز مثالهایی آورد. بررسی مشکل دوم نیز حائز اهمیت است.

استقرای ریاضی پیش از آنکه نوعی ابزار یا استراتژیِ به دست آمده از تجربهٔ حل مسأله باشد، ابزاری منطقی است. چه موقع می توان از استقراء برای حل مسأله استفاده کرد؟ معمولاً وجود متغیر n در یک عبارت و خواستن اثبات حکمی چون P در مورد n، یادآور استقرای ریاضی است. نباید این مطلب را یک الگو برای استفاده از استقراء تلقی کرد. مثلاً مسأله ای نظیر:

مسأله: ثابت کنید مجموع $S = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ برابر با $\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$ است، را می توان از طریق استقراء حل نمود.

حال به این مسأله توجه کنید :

مسأله : مطلوب است محاسبهٔ حد

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

گرچه این مسأله، یک مسألهٔ *یافتنی* است، ولی با دادن مقدار حد می توان آن را به یک مسأله *ثابت کردنی* تبدیل کرد. آیا اینجا نیز باید استقراء را به کار برد؟ واضح است که به کاربردن استقراء در محاسبهٔ حد معنی ندارد ولی عبارت موجود در حکم شامل n است.

یکی دیگر از استراتژیهایی که پولیا به آن اشاره می کند، **امتحان کردن حالتها یا مقادیر خاص است**. شونفیلد با مثالهایی نشان داده است که این استراتژی را می توان به چند استراتژی کوچکتر تقسیم کرد. در حل دومین مسألهٔ بالا ممکن است وسوسه شویم که حالتهای خاص را امتحان کنیم زیرا امتحان کردن مقادیر خاص هم از مواردی است که معمولاً برای حل مسائل شامل حکمی دربارهٔ عدد طبیعی n توصیه می شود. می توان چند مقدار به n داد و مقادیر حاصل برای $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ را ملاحظه کرد ولی اولاً فاکتوریل به طور وحشتناکی با افزایش n، افزایش می یابد و ثانیاً با یافتن چند جمله از دنباله، نمی توان مقدار دقیق حد دنباله را حدس زد بلکه فقط می توان گفت حد در اطراف چه عددی است. یک اندیشه راهیابانه در مورد این مسأله این است که یک جوری از شرّ رادیکال و فاکتوریل خلاص گردیم. A مثبت است، لگاریتم آن را بگیرید:

$$\log A = \lim_{n\to\infty} \log\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

ولی:

$$\log\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{n}\log n! - \log n$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k - \frac{1}{n}(n\log n)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{n}$$

عجب!! یک مجموع ریمانی به دست آوردیم. حد این مجموع ریمانی طبق تعریف برابر است با انتگرال :

$$\int_0^1 \log x dx$$

که لگاریتم، در پایهٔ e است. پس کافی است این انتگرال را حساب کنیم و بعد e را به توان آن برسانیم. نتیجه همان مقدار A است.

ظاهراً در حل این مسأله اندیشهٔ خلاقی را به کار برده ایم. ممکن است سؤال شود چگونه می توان به یادگیرندگان آموخت که از اینگونه استراتژیها استفاده کنند. همانطورکه گفتیم، بهترین راه آموختن، « عمل » است. باید یادگیرنده را در استخر مسائل انداخت. شونفیلد با الهام از همین ایده و با تشکیل جلسات حل مسأله با دانشجویان، ثابت کرده است که درصورتی که تعداد کمی استراتژی را انتخاب کنیم و به یادگیرندگان گوشزد کنیم که همواره به تمام آن استراتژیها برای حل مسألهٔ پیش رو توجه داشته باشند، می توان انتخاب استراتژی را به آنها آموزش داد. در گزارشهای او از جلسات و کلاسهای حل مسأله اش به این نکته اشاره شده است که چگونه تواناییهای حل مسأله دانشجویان حاضر در کلاس نسبت به زمانی که تازه کار را آغاز کرده بودند تغییر کرده و در واقع به نحو چشم گیری افزایش یافته است. به هر حال بر این نکته تأکید می کند که تعداد استراتژیهای آموزش داده شده اندک بوده اند و مسائل امتحانی نیز به گونه ای بوده اند که با همان چند استراتژی آموزش داده شده، حل می شده اند. اگرچه می توان با ادامهٔ این جلسات با یک گروه ثابت، به همین ترتیب توانایی های آنها را در استراتژیهای دیگر نیز افزایش داد، لکن این محدودیتها باعث می شود که باز هم به سؤال مطرح شده در بالا پاسخ کامل داده نشود. افزایش تعداد استراتژیها مشکل مهم دیگری نیز به وجود می آورد و آن کنترل فرآیند حل مسأله است. در این باره در بند بعد صحبت خواهیم کرد. آموزش به کارگیری و انتخاب استراتژی از طریق جلسات حل مسأله با یادگیرندگان بسیار مفید است اما اعتقاد من بر این است که اساسی ترین کار (یعنی پیش از آنکه بخواهیم انتخاب استراتژی را آموزش دهیم) اصلاح باورهای شخص دربارهٔ ریاضی است. به کسی که هنوز نمی داند در یک مسألهٔ هندسه به جای پرداختن به خصوصیات ظاهری شکل، باید به ماهیت ذاتی و پایه ای آن توجه کرد و استدلال و استنتاج منطقی دربارهٔ آن کرد، چگونه می توان انتخاب استراتژی برای حل مسألهٔ ثابت کردنی را آموزش داد؟ پس از اصلاح باورها دربارهٔ کل ریاضیات باید باورهای مربوط به مسأله و حل مسأله را نیز اصلاح نمود. طی همین مسیر است که می توان ایدهٔ نگرش به یک مسألهٔ ریاضی از دیدگاههای گوناگون و مقدمات اندیشه وحدت موضوعی در ریاضیات را که قبلاً نیز به آن اشاره کردیم در فراگیران ایجاد و تقویت نمود [۵].

لزوم داشتن باورهای صحیح نسبت به مسأله و حل مسأله در بعضی از مسائلی که شونفیلد به فراگیران کلاس خود می دهد، احساس می شود. مثلاً او مسألهٔ زیر را هنگام صحبت از استراتژی « حالتهای خاص را بررسی کنید » می آورد:

مسأله : ثابت کنید اگر اعداد حقیقی a ، b ، c و d در رابطهٔ

$$a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+da$$

صدق کنند، آنگاه $a=b=c=d$.

خود او در تحلیل راه‌حل‌های فراگیران به چند مورد از تبدیل اشتباه این مسأله به حالت شامل دو عدد حقیقی a و b اشاره می‌کند. در نهایت دانشجویان را متوجه ماهیت دوری حاصلضربهای طرف راست می‌سازد و آنگاه شکل صحیح مسأله برای حالت دوتایی استخراج می‌گردد. ولی این مورد، مشابه جبری یک مسألهٔ هندسی است که در آن دانشجویان به جای توجه به ماهیت واقعیتی که شکل بیان می‌کند، به خصوصیات ظاهری آن می‌پرداختند. اینجا نیز به جای توجه به ماهیت دوری فقط به قرار دادن $b=d=0$ بسنده می‌کنند و این نوع نگرش به یک مسأله، ناشی از باورهای نادرست است. چگونه می‌توانید به دانشجو بفهمانید که: به ماهیت دوری[۳] a ، b ، c و d توجه کن، درحالی که هدف، از ابتدا آموزش استراتژی استفاده از حالتهای خاص بوده است. در میان مسائلی که شونفیلد در همین زمینه داده است، مسألهٔ زیر نیز به چشم می‌خورد:

مسأله : اگر a ، b و c اعداد حقیقی باشند، ثابت کنید هر سه عبارت

$$a(1-b), b(1-c), c(1-a)$$

با هم نمی‌توانند از $\frac{1}{4}$ بیشتر باشند.

آیا حالت خاص این مسأله این است که: «ثابت کنید اگر a عدد حقیقی باشد، $a(1-a)$ نمی‌تواند از $\frac{1}{4}$ بیشتر باشد؟!» واقعاً این حالت خاص عجیب به نظر می‌رسد، هرچند همواره داریم $a(1-a)\le\frac{1}{4}$. ولی در این مورد باید کلی نگری را به متعلم آموخت. چه طور؟ به او آموزش دهید که بتواند به نحو مقتضی استراتژی «بدون کاسته شدن از کلیت، می‌توان فرض کرد. . . » را به کار بندد. ممکن است یک فکر اولیه برای حل مسألهٔ فوق این باشدکه چند مقدار برای a ، b و c انتخاب کنیم و مقادیر سه عبارت را حساب کنیم و ببینیم آیا واقعاً حکم صحت دارد یا نه. ولی نگاه کنید که اگر لااقل یکی از a ، b یا c از عدد ۱ بیشتر یا از صفر کمتر باشد، حکم واضح است زیرا لااقل یکی از عبارتهای فوق منفی می‌شود. بنابراین بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که هرسه عدد a ، b و c بین ۰ و ۱ واقعند. با این فرض سه عدد نامنفی $a(1-b)$ ، $b(1-c)$ و $c(1-a)$ را به دست می‌آوریم.

حال ببینید استدلال چقدر ساده می‌شود. همواره $x(1-x)\le\frac{1}{4}$. سه عدد داده شده را در هم ضرب کنید:

$$abc(1-a)(1-b)(1-c)\le\frac{1}{4}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4}=(\frac{1}{4})^3$$

کمی هم برهان خلف لازم داریم: اگر هر سه عبارت از $\frac{1}{4}$ بیشتر شوند حاصلضرب آنها از $(\frac{1}{4})^3$ اکیداً بیشتر می‌شود و این تناقض است!! به مثبت بودن این سه عبارت برای ضرب کردنهای اخیر نیاز داشتیم.

در آموزش استراتژیها از طریق دادن مسأله باید در انتخاب مسأله‌ها دقت فراوان کرد. زیرا هدف این است که با طرح یک مسأله، یک (یا یک نوع) استراتژی خاص را آموزش دهیم. اما بعضی مواقع ممکن است در یک استراتژی، استراتژیهای دیگری هم دخالت کنند یا آن استراتژی خاص در قالب استراتژی دیگری بگنجد. مثلاً شونفیلد در بحث آموزش استراتژی *بررسی و حل حالتهای خاص* به این مسأله اشاره می‌کند.

مسأله : حجم کرهٔ چهاربعدی واحد را بیابید.

او حالتهای خاص این مسأله یعنی یافتن طول فاصلهٔ واحد، مساحت دایرهٔ واحد و حجم کرهٔ واحد در فضای سه بعدی را می‌داند. در اینجا این حالتهای خاص به عنوان مسألهٔ کمکی عمل می‌کنند. مسألهٔ کمکی به دو صورت کمک می‌کند، یا روش حل آنها کمک می‌کند یا بخشی از راه حل مسألهٔ اصلی را به دست می‌دهد [۱۳]. برای این مسأله حالتهای خاص در واقع مسأله های کمکی هستند که روش حل آنها به ما کمک می‌رساند: کرهٔ واحد را به حجم ها تقسیم کنید و روی حجم ها از ۱- تا ۱+ انتگرال بگیرید. بنابراین، بررسی حالت خاص به استراتژی «استفاده از مسألهٔ کمکی» تبدیل شد.

۸ : انتخاب استراتژی و کنترل

تجزیهٔ یک استراتژی کلی به بخشهای تشکیل دهندهٔ آن، مشکلات جدیدی را به بار می‌آورد. انتخاب استراتژی در میانهٔ کار حل مسأله به هیچ وجه کار ساده ای نیست، اما اگر فضای جستجو را محدود کنیم ممکن است از حجم کار کاسته شود و این کار به واقع یعنی کنترل عملیات حل مسأله. مسأله حل کن، به طور بالقوه می‌تواند از صدها استراتژی مختلف و مفید استفاده کند، اما مناسبتر از همه در یک مسأله خاص کدام است؟ شونفیلد در کتاب خود، [۹]، دربارهٔ آموزش کنترل عملیات حل مسأله به یادگیرندگان، سخن گفته است. گفته های او جامع است و قصد افزودن مطلبی بر آنها نداریم، لکن در انتها به فراشناخت می‌رسد، زیرا کنترل عملیات حل مسأله مربوط است به دیدگاهی که شخص

نسبت به افکار خود دارد، یعنی می داند چه می کند یا نـه، و ایـن به نوعی با باورهای ریاضی او ارتباط پیدا می کند. آنچه مورد نظر من است ـ همانند بند قبل، اصلاح باورها است. گویی اهمیـت این موضوع به قدری است که جایگاه آن قبل از هر نوع آموزش دیگر قرار دارد[۰].

۹: خلاصه و نتیجه گیری

گفتیم که یکی از بخشهای مهم فرآیند حل مسأله، انـتـخـاب استراتژی است. به یک استراتژی تاریخی که حاوی جنبـه هـای متعددی از بحث ما بود اشاره کردیم. همچنین دیدیم که انتخاب استراتژی وابسته به ذخایر دانشی است و از طرفی گفتیم بعضی از اعمالی که به ظاهر، انتخاب استراتژی هستند، در واقع جزءذخایر دانشی به حساب می آیند. برای مثال فرآیندهای الگوریـتـمـی و سرراست و به کار بردن همانندها. رابطهٔ شهود و دقت با انتخاب استراتژی را نیز بیان کردیم. سیر تاریخی اکتشافات ریاضی از قرن هفدهم به این طرف، نشان دهندهٔ تلاش برای بالا بردن دقت ریاضی است که به تبع آن حل مسأله و جنبه های نظری آن و در این میـان انتخاب استراتژی برای دقت بخشیدن به واقعیات مطرح شدنـد. اشاره ای کردیم به استراتژیهایی که پولیا در کتاب «چگونه مسألـه را حل کنیم» می آورد و تلاشهای شونفیلـد بـرای آمـوزش ایـن استراتژیها را بررسی کردیم. مطلب نهایی این بود که پرداخـتـن به باورهای یادگیرندگان، شناخت و اصلاح آنها، باید در مرحلهٔ اول توجه آموزشگران ریاضی قرار گیرد. چه، اصلاح باورها دید شخص را نسبت به مسأله و حل آن تغییر می دهد و آمـوزشـهـای بعدی را آسانتر می کند و در ضمن او را به سمت **وحدت موضوعی** در ریاضی و داشتن دیدگاههای متعددی که ریشـهٔ فکری واحدی دارند، سوق می دهد.

منابع و مآخذ

[۰] Gooya, Z., **Influences of Metacognition - Based Teaching and Teaching via Problem Solving on Students' Beliefs about Mathematics and Mathematical Problem Solving**. Ph.D Thesis, Vancouver, University of British Columbia, (1992).

[1] Ayoub, Raymond., Euler and the Zeta Function. American Mathematical Monthly. 81(1974), 1067 - 1086.

[2] Boas, R. P., Can we make Mathematics intelligible. **American Mathematical Mouthly.** 87 (1981), 727 - 731.

[3] Bourbaki, N., The Architecture of Mathematics. **American Mathematical Monthly** .57 (1950), 221 - 232.

[4] Davis, Philip J., Leonhard Euler's integral: A Historical Profile of The Gamma Function. **American Mathematical Monthly.** 57 (1959), 849 - 869.

[5] Grabiner, Judith V., Is Mathematical Truth Time - Dependent?, **American Mathematical Monthly.** 81 (1974), 354 - 365.

[6] Halmos, P.R., The Teaching of Problem Solving. **American Mathematical Monthly.** 82 (1975), 466 - 470.

[7] Halmos, P.R., The Heart of Mathematics. **American Mathematical Monthly.** 87 (1980), 519 - 524.

[8] Halmos, P.R., Does Mathematics have Elements ? **The Mathematical Intelligencer.** 3 (1981), 143 - 153.

[9] Shoenfeld, Alan H., **Mathematical Problem Solving** .Academic Press, Inc. 1985.

[10] Stein S. K., The Mathematican as an explorer. **Scietific American.** (May 1961), 148 - 158.

[۱۱] آلن، هــ. شونفیلد، آموزش هنر حل مسأله. ترجمـهٔ محمد جلوداری ممـقـانـی، **نشر ریاضی**. سال ۱ شمـارهٔ ۱، فروردین ۱۳۶۷.

[۱۲] جورج پولیا، **چگونه مسأله را حل کنیم**. ترجمهٔ احمد آرام، انتشارات کیهان، چاپ اول، ۱۳۶۶.

[۱۳] جورج پـولـیـا، **خلاقیت ریاضی**. ترجـمـهٔ پرویـز شهریاری، انتشارات فاطمی، چاپ دوم ۱۳۷۳.

[۱۴] گ. هــ. هـاردی، **دفاعیهٔ یک ریاضیدان**. ترجمـهٔ سیامک کاظمی، انتشارات انقلاب اسلامی، چاپ اول، بـهـار ۱۳۷۳.

تذکر: از مرجـع [۸] برای بیان بخشهایی از مـقـالـه دربـارهٔ ریاضیات صوری و شهودی استفاده شده است.

مدل پیشنهادی پولیا برای حل مسأله*

زهرا گویا ـ جواد حاجی بابائی

جرج پولیا، در سال ۱۹۴۵ در کتاب «چگونه مسأله را حل کنیم؟» توجه تمامی دست اندرکاران آموزش و یادگیری ریاضی را به چارچوبی که برای حل مسایل ریاضی ارائه داده بود جلب کرد.

این مدل یا چارچوب چهار مرحله ای، می توانـد بـرای حـل مسایل ریاضی به کار گرفته شود. چهار مرحلهٔ ذکر شده عبارتند از:

۱ـ فهمیدن (درک) مسأله

۲ـ تهیهٔ طرحی برای حل مسأله

۳ـ به اجرا گذاشتن آن طرح

۴ـ بازنگری

کسانی که مشغول حل مسأله هستند، می توانند مهارت هـای فردی و استراتژی های مناسب را در قالب این چارچوب فرا بگیرند و دانش خود را توسعه دهند. البته باید توجه داشت که تمام اجزای این چارچوب درحال تعامل دائم با هم هستند؛ مثلاً ممکن است که کسی در مرحلـهٔ سوم متوجه شود که طرحی که تهیه کـرده بـه نتیجه نخواهد رسید، یا موانعی در راه وصول آن است. درنتـیـجـه دوباره به مرحله اول و دوم بازگشته و با درک جدیدی که از مسأله پیدا می کند، طرحی نو می ریزد و آن را به اجرا می گذارد. باید توجه داشت که در هر کدام از مراحل چهارگانه، امکان این بازنگری وجود دارد.

پولیا برای هر یک از مراحل چهارگانهٔ ذکر شده مواردی را ذکر کرده است که به مختصری از آنها اشاره خواهد شد.

۱ـ فهمیدن مسأله

در این مرحله برای کسی که قصد حل مسأله ای را دارد باید پیش از هر چیز روشن شود که مسأله از نوع «ثابت کردنی» است یا «پیدا کردنی» سپس تشخیص دهد که اجزای مسأله از جملـه داده هـا و مجهولات کدام ها هستند. در جهت دستیابی به این مهم، نکـات زیر را می توان در نظر گرفت:

ـ خواندن مسأله به طور پی در پی؛

ـ مراجعه به منابع دیگر برای روشن ساختن معنی های لغتها و عبارتهای کلیدی؛

ـ بیان دوبارهٔ مسأله با استفاده از عبارتهای آشناتر؛

ـ ارزشیابی داده های مسأله برای تعیین این که آیـا اطـلاعـات موجود برای حل مسأله کافی هستند و آیا داده های اضافی در مسأله وجود دارند یا خیر؛

ـ تعیین این که آیا فرضیه های پوشیده ای در مسأله وجود دارند که حاوی اطلاعات لازم برای حل مسأله است یا خیر؛

ـ رسم منحنی، شبیه یا مدل سازی مناسب با موقعیت مسأله؛

ـ درنظر گرفتن تفسیرهای بدیل.

۲ـ تهیه طرحی مناسب برای حل مسأله

هنگامی که مسأله خوب فهمیده و درک شد، می توان برای حل آن طرحی مناسب تهیه کرد. با توجه به اینکه هر مسأله ممکـن است از راه های مختلفی قابل حل باشد، باید در مورد استراتـژی هـایـی کـه می توانند مورد استفاده قرار بگیرند تعمق بیشتری کرد و سعی نمود از استراتژی یا استراتژی هایی که مناسب تر به نظر می رسند کمک گرفت.

به هر حال، کسی که می خواهـد *مسأله حل کن* خوبی باشد، باید توانایی تجدید نظر در طرح را در صورت عدم کارآیی استراتژی اولیهٔ خود داشته باشد.

چند نمونه از استراتژی هایی که ممکن است در طول حل مسأله مورد استفاده واقع شوند از این قرارند:

ـ تهیهٔ مدل، یعنی رسم الگوی مشابه یا رسم منحنی متناسب با موقعیت مسأله؛

ـ تهیه فهرست، جدول ها، و منحنی های منظم و سازمان یافته

ـ جستجو برای الگو؛

ـ کار کردن برعکس؛

ـ انتخاب نمادهای مناسب؛

ـ مشخص کردن اطلاعات داده شده، مورد احتیاج و خواسته شده؛

ـ نوشتن یک معادله یا یک فرمول؛

ـ حل یک مسألهٔ ساده تر و مرتبط با مسألهٔ داده شده؛

ـ تقسیم مسأله به زیر مسأله های مختلف و حل هرکدام از آنها؛

ـ استفاده از استدلال استنتاجی؛

ـ کنترل فرضیه های پنهان در صورت مسأله؛

ـ حدس یک جواب و آزمایش آن؛

ـ تغییر نحوهٔ نگرش به مسأله (تغییر دیدگاه)

۳ـ اجرای طرح

بعد از آنکه طرح مناسب برای حل مسأله تهیه شد، بایدآن را به مورد اجرا گذاشت. نکتـهٔ اساسی این است که شخص نظـارت کامل بر پیشرفت اجرای طرح داشته باشد تا اگر زمانی احـسـاس کرد که طرح ممکن است او را به حل مسأله رهنمون نکند بتوانـد طرح جدیدی را تهیه و به اجرا بگذارد.

سؤالاتی را که شخصِ درگیر حلِ مسأله در حالی که ناظر بـر پیشرفت طرح است می تواَند سؤاَلهاییِ مانند زیر از خود بپرسد:

ـ آیا این طرحی که تهیه کرده ام مرا به حل مسأله هدایت می کند؛

ـ آیا به طرح بدیلی نیاز دارم؟ آیا لازم است که طرح فعلـی را کنار گذاشته و طرح جدیدی تهیه نمایم؟

ـ آیا برای اجرای طرح خود به اطلاعات اضافه تر یـا کـمـک

دیگران نیاز دارم؛
ـ آیا من دقت و تلاشم را برای ردّیابی مراحل پیشرفت خود در حل مسأله مستند کرده ام؟

۴ـ بازنگری

پس از اتمام مرحلهٔ اجرا، حل کنندهٔ مسأله باید یک بازنگری بر تمامی مراحل اجرای طرح تهیه شده داشته باشد و یک بررسی کلی در مورد مسأله انجام دهد. از جمله موردهای مهمی که در این مرحله باید درنظر گرفت، یکی معنی دار بودن جواب مسأله با توجه به سؤالهای طرح شده و دیگری تعمیم پذیری مسأله است. همچنین، شخص با بازنگری کلی می‌تواند کاربرد وسیع تر استراتژی های به کار گرفته شده را شناسایی کرده و راه حل های متفاوت حل مسأله را مطالعه کند.

مرحله های حل مسأله باید به نحوی تدوین شوند تا هم حل مسأله برای دیگران مشخص شود و هم اینکه شخص حل کنندهٔ مسأله بتواند از طریق حل مسأله با دیگران ارتباط برقرار کرده و از فرآیند و نتیجه های حل مسألهٔ خود دفاع نماید. در این مرحله، شخص حل کنندهٔ مسأله می تواند سؤالهایی مشابه نمونه های زیر از خود بپرسد و سعی در یافتن جواب برای آنها داشته باشد:

ـ آیا جواب من به اندازهٔ مورد قبول مستدلّ است؟
ـ در جریان حل مسأله چه چیزی یاد گرفتم که قبلاً نمی دانستم؟
ـ چه نکاتی در این مسأله هست که من می توانم در مسایل دیگر نیز آنها را تشخیص دهم؟
ـ آیا می توانم مسأله های مرتبط با این مسألهٔ حل شده را مطرح کرده و حل کنم؟
ـ آیا می توانم حل مسأله را برای دیگران توضیح داده، مستند کرده یا تعمیم دهم؟
ـ آیا تمام راه حل های ممکن را یافته ام؟ آیا مسأله راه حل دیگری دارد؟
ـ آیا به جز استراتژی هایی که در اولین بررسی مرا به حل مسأله راهبر شدند، استراتژی های دیگری را نیز امتحان کرده ام؟

برای آشنایی بیشتر با مدل پیشنهادی پولیا، مسأله زیر را درنظر بگیرید.

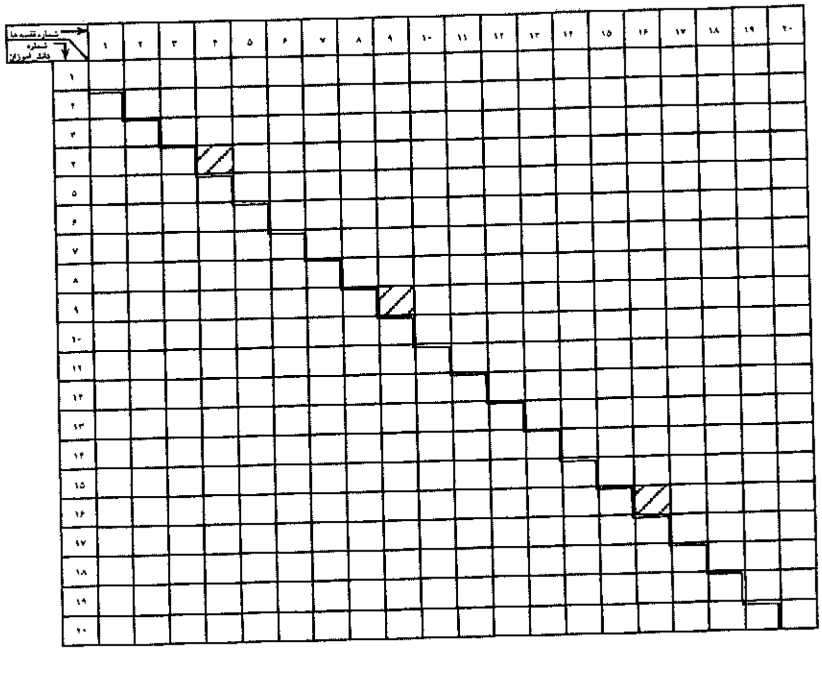
مسأله:

در یک مدرسهٔ شبانه روزی با ۱۰۰۰ دانش آموز، یک راهروی باریک و دراز وجود دارد که در یک سمت آن به تعداد دانش آموزان، قفسه برای نگهداری وسایل آنها قرار داده شده است. در اولین روز مدرسه، به منظور آشنایی دانش آموزان با مسؤلان مدرسه و با یکدیگر، جلسهٔ معارفه ای در سالن ورزش مدرسه برگزار گردید. پس از پایان جلسهٔ مذکور، دانش آموزان به منظور خروج از مدرسه مجبور بودند طول راهرو را طی کنند تا به در خروجی مدرسه برسند. اولین دانش آموزی که از مدرسه خارج شد به ترتیب در تمام قفسه ها را بست. پس از آن، دانش آموز دوم ضمن خروج از مدرسه، یک در میان در قفسه ها را باز کرد. دانش آموز سوم، موقع خارج شدن از مدرسه وضعیت درها را دودرمیان تغییر داد، یعنی دو درمیان درهای باز را بسته و درهای بسته را باز کرد. چهارمین دانش آموز، وضعیت درها را سه درمیان تغییر داد وبه همین ترتیب کار ادامه پیدا کرد تا آن که هزارمین دانش آموز نیز از مدرسه خارج شد. زمانی که مدیر مدرسه می خواست مدرسه را ترک کند متوجه شد که در بعضی از قفسه ها باز و در بعضی دیگر بسته است. تعداد قفسه هایی را که درهای آنها بسته بودند پیدا کنید. همچنین مشخص کنید که کدام یک از قفسه ها (چندمین قفسه ها) درهایشان بسته بودند.

مراحل حل مسأله

مرحلهٔ اول: فهمیدن مسأله

ـ مسأله را به زبان خودتان بازگو کنید.
ـ یک نمودار بکشید.



مرحلهٔ دوم : تهیهٔ طرحی برای حل مسأله

سعی کنید مسأله را با فرض این که تعداد دانش آموزان ۲۰ نفر است حل کنید. سپس تعداد دانش آموزان را به ۱۰۰ نفر تعمیم دهید.

شرایط مشابهی با فرض مسأله به وجود آورید.

یک مدل عینی برای مسأله درست کنید.

مرحلهٔ سوم: به اجرا گذاشتن طرح

از یک الگو برای حل مسأله و به اجرا گذاشتن طرح استفاده کنید. چنین الگویی به شما فرصت می دهد که اوضاع و موقعیت در قفسه ها را بهتر ببینید. ممکن است که الگوی مشخصی بروز کند!

حالت خاص:

با دقت در نمودار، متوجه می شویم که شمارهٔ درهایی که بسته می مانند همگی مربع کامل هستند. آیا همیشه چنین است؟ آیا مشاهدهٔ دیگری می تواند پیشنهاد نتیجه گیری دیگری را بکند؟

مرحلهٔ چهارم: بازنگری

بازنگری فرآیند حل مسأله به دانش آموزان فرصت می دهد تا به تقویت مهارت هایی بپردازند که ممکن است برای حل مسأله های دیگر مفید واقع شوند. به عنوان مثال، فهرستی از راه های مختلف حل مسأله و ضبط اطلاعات به طور نظام وار (سیستماتیک) که فرصت دیدن الگوهای جدید را به دانش آموز بدهد، برای حل مسأله بسیار مفید خواهند بود. انجام سه مرحلهٔ اوّل و بازنگری آن به دانش آموز فرصت می دهد تا درستی راه حلّی را که به وسیلهٔ استدلال استقرائی پیموده، توسط استدلال استنتاجی و در حالت کلی نیز نشان دهد. به همین منظور، دوباره به مرحلهٔ اوّل باز می گردیم. این بار، سعی می کنیم مسأله را در حالت کلی یعنی وقتی n قفسه و n دانش آموز وجود داشته باشند، مورد بررسی قرار دهیم. چگونه می توان طرح مناسبی تهیه کرد که با اجرای آن، مسأله را در حالت کلی حل کنیم و سپس موردهای جزئی را از آن نتیجه بگیریم؟

پس از خوب فهمیدن و درک کردن مسأله، در دور اوّل، به نظر رسید که رابطه ای بین دفعه هایی که در یک قفسه تغییر حالت می دهد و تعداد مقسوم علیه های شمارهٔ ترتیب قفسه وجود دارد. طرح ما در دور دوم بررسی این رابطه است.

در مرحلهٔ سوم مشاهده می شود که هرگاه قفسهٔ شماره چهارم را در نظر بگیریم، یکبار توسط نفر اول و یکبار توسط نفر دوم و بار دیگر توسط نفر چهارم تغییر حالت می دهد، قفسهٔ شماره شش نیز توسط اولین نفر، دومین نفر، سومین نفر و ششمین نفر تغییر حالت می دهد و بقیهٔ قفسه ها نیز روند مشابهی دارند. اگر از دید دیگری این دو مورد را بررسی کنیم، مشاهده می کنیم که در مورد قفسهٔ شماره ۴، عددهای ۱، ۲ و ۴ مقسوم علیه های عدد چهار هستند و برای عدد ۶ نیز عددهای ۱ و ۲ و ۳ و ۶ همه مقسوم علیه های ۶ می باشند. بنابراین می توانیم حدس بزنیم که در قفسهٔ شمارهٔ n، به تعداد مقسوم علیه هایش تغییر حالت می دهد. (شما درستی این حدس را به عنوان تفریح ثابت کنید!) بنابراین، مسأله به مسأله دیگری تبدیل می شود

تعداد مقسوم علیه های عدد طبیعی و دلخواه n را پیدا کنید اگر n دارای تجزیهٔ $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$ باشد، آنگاه

$$\tau(n)=\prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)$$

تعداد مقسوم علیه ها را مشخص می کند. (این مسأله خود یک مسألهٔ بسیار زیبا و مناسب است که مدل پولیا را برای آن بکار ببریم و ابتدا با استدلال استقرایی و بررسی حالات خاص و ساده فرمول تعداد مقسوم علیه های آن را حدس بزنیم و سپس درصدد اثبات آن برآییم.) این حکم را در ادامه ثابت می کنیم. اگر $\tau(n)$ زوج باشد در قفسه حالت اولیه خود را دارد (چرا؟) و اگر $\tau(n)$ فرد باشد حالت در قفسه تغییر می کند. حل مسأله را خودتان ادامه دهید! توجه کنید وقتی $\tau(n)$ فرد است n مربع کامل است! چرا؟

تعداد مقسوم علیه های عدد طبیعی دلخواه n

با توجه به مدلسازی ریاضی، مسأله در حالت کلی به مسأله زیر تبدیل شد:

تعداد مقسوم علیه های عدد طبیعی و دلخواه n چگونه تعیین می شود؟

حل مسأله را به دو بخش تقسیم می کنیم. ابتدا شرط لازم و کافی برای بخش پذیری یک عدد طبیعی بر عدد طبیعی دیگر را بررسی می کنیم و سپس به کمک آن فرمولی برای محاسبهٔ تعداد مقسوم علیه ها به دست می آوریم.

لم ۱: فرض کنید a و b دو عدد طبیعی با تجزیه های زیر باشند.

$$a = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k} \quad \text{و}$$

$$b = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_k^{\beta_k}$$

آنگاه a بر b بخش پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $1\le i\le k$، $0\le\beta_k\le\alpha_k$

برهان: ابتدا فرض می کنیم برای $1\le i\le k$ ، $0\le\beta_i\le\alpha_i$ ، آنگاه

$$a = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k}$$

را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(p_1^{\alpha_1-\beta_1}\times p_2^{\alpha_2-\beta_2}\times\dots\times p_k^{\alpha_k-\beta_k})\times p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_k^{\beta_k}$$

اگر

$$p_1^{\alpha_1-\beta_1}\times p_2^{\alpha_2-\beta_2}\times\dots\times p_k^{\alpha_k-\beta_k}=c$$

آنگاه

$$a=c\times b$$

که در اینجا $c = p_1^{\alpha_1-\beta_1}\times p_2^{\alpha_2-\beta_2}\times\ldots\times p_k^{\alpha_k-\beta_k}$.

با توجه به اینکه برای $1\le i\le k$ ، $0\le\beta_i\le\alpha_i$ ، پس برای $1\le i\le k$ ، $\alpha_i-\beta_i\ge 0$ ، در نتیجه $c\ge 1$ و $b|a$. به عکس اگر $b|a$ ، آنگاه طبق تعریف عددیٔ طبیعی چون c موجود است که $a=bc$. اکنون فرض می کنیم تجزیه b و c به صورت زیر باشد.

$$b = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k} \quad \text{و} \quad c = p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\ldots p_k^{\gamma_k}$$

در اینجا برای هر $1\le i\le k$ ، $\gamma_i\ge 0$ و $\beta_i\ge 0$ ، از طرفی $a=bc$ ، بنابراین

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k} = (p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k})(p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\ldots p_k^{\gamma_k})$$
$$= p_1^{\beta_1+\gamma_1}\times p_2^{\beta_2+\gamma_2}\times\cdots\times p_k^{\beta_k+\gamma_k}$$

چون تجزیه منحصر بفرد است، پس به ازای $1\le i\le k$ ؛

$$\beta_i+\gamma_i=\alpha_i$$

چون $\gamma_i\ge 0$ ، پس $1\le i\le k$ و $0\le\beta_i\le\beta_i+\gamma_i=\alpha_i$ و در نتیجه حکم ثابت می شود.

لم ۲ : با ارائهٔ شرط لازم و کافی برای بخش پذیری یک عدد طبیعی بر عدد طبیعی دیگر روشی برای تعیین مقسوم علیه های یک عدد طبیعی را مشخص می کند به این صورت که $b|a$ اگر و تنها اگر توانهای ظاهر شده در تجزیهٔ b کمتر یا مساوی توانهای ظاهر شده در تجزیهٔ a باشد. به عنوان مثال، $200 = 2^3\times 5^2$ به صورت $2^{\alpha_1}\times 5^{\alpha_2}$ است و مقسوم علیه های عددهایی به صورت $2^{\beta_1}\times 5^{\beta_2}$ هستند به طوری که $0\le\beta_1\le\alpha_1$ و $0\le\beta_2\le\alpha_2$ که در این صورت انتخابهای زیر برای β_1 و β_2 ممکن است:

$$\beta_1 = 0,1,2,3 \quad \text{و} \quad \beta_2 = 0,1,2$$

و مقسوم علیه های ۲۰۰ به صورت زیر خواهند بود

$$\begin{array}{ccc} 2^0\times 5^0 & 2^0\times 5^1 & 2^0\times 5^2 \\ 2^1\times 5^0 & 2^1\times 5^1 & 2^1\times 5^2 \\ 2^2\times 5^0 & 2^2\times 5^1 & 2^2\times 5^2 \\ 2^3\times 5^0 & 2^3\times 5^1 & 2^3\times 5^2 \end{array}$$

در مثال بالا، مشاهده می شود که تعداد مقسوم علیه های ۲۰۰ مطابق الگوی داده شده ۱۲ تا است. اکنون سؤال این است که آیا ارتباطی بین تعداد مقسوم علیه ها وجود دارد؟ اگر به تعداد انتخابهای β_1 و β_2 نگاه کنیم و با α_1 و α_2 مقایسه کنیم نتیجه می گیریم که

$$\text{تعداد مقسوم علیه های } 200 = 12 = 4\times 3$$
$$= (\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)$$

این رابطه در حالت کلی نیز برقرار است.

قضیه : اگر $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ برای $0\le i\le k$ ، $\alpha_i\ge 0$ ، در این صورت تعداد مقسوم علیه های n ، $\tau(n)$ ، از رابطه زیر به دست می آید.

$$\tau(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1) = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)$$

برهان : حاصلضرب های زیر را درنظر می گیریم.

$$(p_1^0+p_1^1+p_1^2+\ldots+p_1^{\alpha_1})\times(p_2^0+p_2^1+p_2^2+\ldots+p_2^{\alpha_2})\times\ldots$$
$$(p_k^0+p_k^1+p_k^2+\ldots+p_k^{\alpha_k}) \qquad (1)$$

نشان می دهیم هر جمله از این حاصلضرب یک مقسوم علیه n است. هر جمله از حاصلضرب (۱) نمایشی به صورت

$$m = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\ldots p_k^{\beta_k} \qquad (2)$$

دارد که به ازای هر $1\le i\le k$ ، $0\le\beta_i\le\alpha_i$ ، و بنا بر لم قبل، $m|n$ و برعکس، اگر $m|n$ آنگاه m نمایشی به صورت (۲) دارد که جمله ای از حاصلضرب (۱) است. در نتیجه کافی است تعداد جمله های حاصلضرب (۱) را پیدا کنیم. با توجه به حاصلضرب (۱) برای هر $1\le i\le k$ ، β_i دارای انتخابهای ۰ تا α_i است یعنی (α_i+1) انتخاب دارد، چون β_i ها مستقل از هم تغییر می کنند پس تعداد جمله‌های حاصلضرب (۱) که همان تعداد مقسوم‌علیه های عدد n است برابر است با

$$\tau(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1) = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1)$$

با استفاده از مدل پیشنهادی پولیا، مسأله های زیر را در کلاس به بحث بگذارید و نتیجهٔ کار یعنی فرآیندهای ذهنی را که دانش آموزان طی می کنند برای چاپ دررشد آموزش ریاضی ارسال نمایید.

۱ ـ از یک متوازی الاضلاع دو قطر و یک ارتفاع معلوم است، متوازی الاضلاع را رسم کنید.

۲ ـ در قطاع AOB از دایرهٔ مفروض $C(O,R)$ ، مربعی محاط کنید که دو رأس آن روی کمان AB و رأسهای دیگر روی شعاعهای OA و OB واقع باشند. (با استفاده از معلومات بخش تبدیلات کتاب هندسه ۲ جدید)

۳ ـ مجموع سری زیر را تعیین کنید.

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

۴ ـ مجموع زیر را پیدا کنید.

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}$$

* این مقاله، برگرفته شده از منابع زیر است:

۱ ـ پولیا، جورج. **چگونه مساله را حل کنیم**. (ترجمه: احمد آرام). انتشارات کیهان، تهران، چاپ دوم: ۱۳۶۹.

۲ ـ ظهوری زنگنه، بیژن؛ گویا، زهرا. **دوره های کوتاه مدّت عملی یا کارگاهی آموزش ریاضی**. ادارهٔ کلّ آموزشهای ضمن خدمت، تهران، ۱۳۷۲.

37th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD 1996
अन्तरराष्ट्रीय गणित स्पर्धा
MUMBAI, INDIA

حل دو مسأله از مسائل سی و هفتمین المپیاد بین المللی ریاضی

(بمبئی ـ هندوستان، تیر ۱۳۷۵)

در شمارهٔ قبل صورت مسائل سی وهفتمین المپیاد بین المللی ریاضی را ذکر کردیم، در این شماره حل ۲ مسألهٔ هندسهٔ المپیاد مذکور را می آوریم و در شماره های بعد حل سایر مسائل نیز عرضه خواهند شد.

نخست حل مسألهٔ ۲ را می آوریم. دانش آموزان ایرانی به طور اصولی در هندسه قوی هستند و اعضاء تیم شش نفره ما، این مسأله را از ۶ راه حل مختلف حل کردند. در زیر صورت مسأله را ذکر می کنیم سپس سه راه حل از بین راه حلهای آنان را ذکر خواهیم کرد.

۲. فرض کنیم P یک نقطه درون مثلث ABC باشد به گونه ای که

$$A\hat{P}B - A\hat{C}B = A\hat{P}C - A\hat{B}C$$

فرض کنیم D و E به ترتیب مراکز دوایر محاطی مثلث های APB و APC باشد. نشان دهید خطوط AP و BD و CE در یک نقطه همرسند.

راه حل اول (روح الله ابراهیمیان)

فرض می کنیم $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$

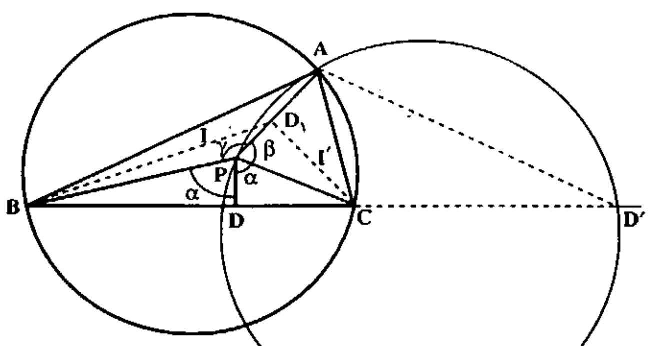
نقطهٔ P' را طوری در نظر می گیریم که $\angle AP'C = \angle APC$ و P' روی دایرهٔ آپولونیوس ΔABC نسبت به ضلع CB قرار داشته باشد ثابت می کنیم $P = P'$ برای این کار کافی است ثابت کنیم: $A\hat{P}B = A\hat{P}'B$

P' روی دایره آپولونیوس $\Rightarrow B\hat{P}'C = ۲D\hat{P}'C$

$B\hat{A}C = \hat{A} \qquad A\hat{B}C = \hat{B}, \quad A\hat{C}B = \hat{C}$

$\beta + \alpha = A\hat{P}'D = ۱۸۰ - A\hat{D}'D$

$= A\hat{B}C + B\hat{A}D' = A\hat{B}C + B\hat{A}C + C\hat{A}D'$



$= A\hat{B}C + B\hat{A}C + \frac{۱۸۰ - B\hat{A}C}{۲}$

$= \hat{B} + \hat{A} + ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲}$

پس

$$\alpha = ۱۸۰ - \hat{C} + ۹۰ - \frac{\hat{A}}{۲} - \beta$$

$$۲\alpha = ۳۶۰ + ۱۸۰ - ۲\hat{C} - \hat{A} - ۲\beta$$

$$۲\alpha + \beta = ۳۶۰ - \gamma = ۳۶۰ + ۱۸۰ - ۲\hat{C} - \hat{A} - \beta$$

$$\Rightarrow -\gamma = \hat{B} - \hat{C} - \beta$$

$$\Rightarrow \hat{B} - \beta = \hat{C} - \gamma$$

درنتیجه

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} - A\hat{P}C = \hat{C} - A\hat{P}'B \\ \hat{B} - A\hat{P}C = \hat{C} - A\hat{P}B \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{P}B = A\hat{P}'B$$

$$P' = P \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{PC}{PB} \qquad (۱)$$

$D_۱$ پای نیمساز وارد از B در مثلث ABP برضلع AP .
$D_۲$ پای نیمساز وارد از C در مثلث ACP برضلع AP

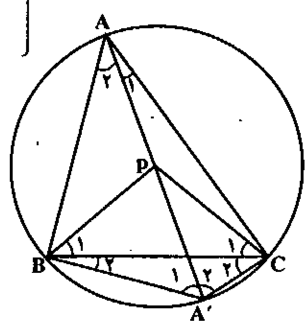
$$\Rightarrow \frac{AD_۱}{D_۱P} = \frac{AB}{BP} \overset{(۱)}{=} \Rightarrow \frac{AC}{PC} = \frac{AD_۲}{D_۲P} \Rightarrow \boxed{D_۱ = D_۲}$$

بنابراین اگر I مرکز دایره محاطی مثلث ABP و اگر I' مرکز دایره محاطی مثلث APC باشد، می‌توان نتیجه گرفت که AP، CI' و BI همرأسند.

راه حل دوم (علیرضا صالحی گلسفیدی)

$$\left.\begin{array}{l} C\hat{P}A - C\hat{B}A = \hat{A}_۲ + \hat{C}_۱ \text{(چرا؟)} \\ B\hat{P}A - B\hat{C}A = \hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ \\ C\hat{P}A - C\hat{B}A = B\hat{P}A - B\hat{C}A \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_۲ + \hat{C}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ \\ \hat{A}_۲ = \frac{\overset{\frown}{BA'}}{۲} = \hat{C}_۲ \\ \hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{CA'}}{۲} = \hat{B}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} P\hat{B}A' = \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ \\ = \hat{C}_۲ + \hat{C}_۱ = P\hat{C}A' \quad (I) \end{array}\right.$$



$$\text{طبق قضیهٔ Sinها در } \Delta BPA' : \frac{BP}{\sin A'_۱} = \frac{A'P}{\sin(A'\hat{B}P)}$$

$$\text{طبق قضیهٔ Sinها در } \Delta CPA' : \frac{CP}{\sin A'_۲} = \frac{A'P}{\sin(A'\hat{C}P)}$$

طرفین تناسبهای فوق را بر هم تقسیم می‌کنیم، با توجه به (I) خواهیم داشت

$$\frac{BP/\sin A'_۱}{CP/\sin A'_۲} = ۱ \qquad (II)$$

چون $\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = \hat{A}'_۲$ و $\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \hat{A}'_۱$ ، از (II) نتیجه می‌شود

$$\frac{CP}{BP} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

همچنین

$$\text{طبق قضیهٔ Sinها در } A\overset{\Delta}{B}C : \frac{AC}{AB} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

بنابراین

$$\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}$$

اگر نیمساز $A\hat{B}P$ ، AP را در D قطع کند و نیمساز $A\hat{C}P$ ، AP را در D' قطع کند. طبق قضیهٔ نیمسازها:

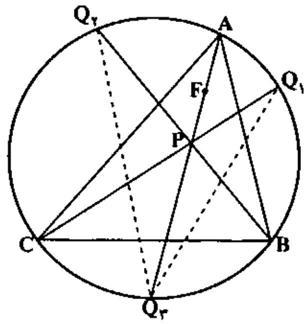
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \frac{AC}{PC} = \frac{AD'}{PD'} \\ \frac{AB}{PB} = \frac{AD}{PD} \\ \frac{AB}{PB} = \frac{AC}{PC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AD'}{PD'} = \frac{AD}{PD} \\ \text{D بین A و P است} \end{array}\right\} \Rightarrow D \equiv D'$$

پس دو نیمساز و AP همرأسند.

راه حل سوم (مرتضی فتوحی فیروزآبادی)

F را محل تلاقی نیمساز $A\hat{C}P$ با AP می‌گیریم. برای اینکه نیمساز $P\hat{B}A$ و نیمساز $A\hat{C}P$ و AP همرأس باشند، باید نیمساز $P\hat{B}A$ نیز از D بگذرد. پس کافی است ثابت کنیم محل تلاقی نیمساز $P\hat{B}A$ با AP ، نقطهٔ F است یعنی $\frac{PF}{FA} = \frac{PB}{BA}$ و

چون نیمساز $A\hat{C}P$ از F می‌گذرد داریم: $\frac{PF}{FA}=\frac{PC}{CA}$. پس کافی است ثابت کنیم $\frac{PB}{BA}=\frac{PC}{CA}$.



$$A\hat{P}B - A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AQ_1B}+\overset{\frown}{Q_2CQ_3}}{2} - \frac{\overset{\frown}{AQ_1B}}{2} = \frac{\overset{\frown}{Q_2CQ_3}}{2}$$

$$A\hat{P}C - A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AQ_2C}+\overset{\frown}{Q_1BQ_3}}{2} - \frac{\overset{\frown}{AQ_2C}}{2} = \frac{\overset{\frown}{Q_1BQ_3}}{2}$$

طبق فرض مسأله داریم: $\overset{\frown}{Q_2CQ_3} = \overset{\frown}{Q_1BQ_3}$ در نتیجه $Q_2Q_3 = Q_1Q_3$. تصویر به مرکز P از دایره به دایره را در نظر می‌گیریم، داریم،

$$Q_2Q_3 = \frac{k.AB}{PA.PB} \text{ و } Q_1Q_3 = \frac{k.AC}{PA.PC}$$

که k قوت P نسبت به دایره است. بنابراین $\frac{AB}{PB}=\frac{AC}{PC}$

مسألهٔ بعدی مسألهٔ پنجم است که از بین جمع بیش از ۴۰۰ نفر مسابقه دهنده در بمبئی فقط ۳ ، ۴ نفر حل صحیحی ارائه کردند، به قولی این مسأله بیشترین «صفرها» را در تاریخ المپیاد بـه خـود اختصاص داده است. در اینجا صورت مسأله را ذکر کرده و راه حل طراح را می‌آوریم. این مسأله توسط کشور ارمنستان پیشنهاد شده بود.

۵. فرض کنیم $ABCDEF$ یک شش ضلعی محدب باشد به طوری که AB موازی ED ، BC موازی FE و CD موازی AF باشد. فرض کنیم R_A ، R_C و R_E شعاع دوایر محیطی مثلث های FAB ، BCD ، و DEF بوده و محیط شش ضلعی p باشد. ثابت کنید

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{1}{2} p$$

حل: فرض کنید a، b، c ، d ، e و f ، به ترتیب طول ضلعهای AB ، BC ، CD ، DE ، EF و FA باشند. توجه کنید که در این شش ضلعی زاویه های مقابل مساوینـد ($\hat{A}=\hat{D}$ ، $\hat{B}=\hat{E}$ و $\hat{C}=\hat{F}$). خطوط عمودی به صورت زیر رسم می کنیم

$AP\perp BC$ و $AS\perp EF$

$DQ\perp BC$ و $DR\perp EF$

آنگاه PQRS یک مستطیل است و $BF \geq PS = QR$. بنابراین، $2BF \geq PS + QR$ ، و در نتیجه

$$2BF \geq (a\sin B + f\sin C) + (c\sin C + d\sin B).$$

مشابهاً

$$2DB \geq (c\mathrm{Sin}A + b\mathrm{Sin}B) + (e\mathrm{Sin}B + f\mathrm{Sin}A),$$
$$2FD \geq (e\mathrm{Sin}C + d\mathrm{Sin}A) + (a\mathrm{Sin}A + b\mathrm{Sin}C) ،$$

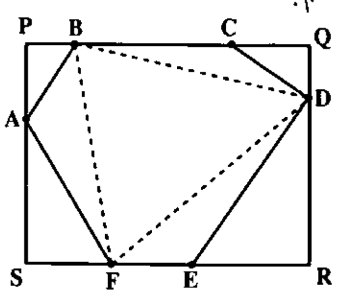
سپس، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث های FAB ، BCD و DEF به صورت زیر به BF ، DB و FD وابسته است:

$$R_A = \frac{BF}{2\mathrm{Sin}A} \text{ و } R_C = \frac{DB}{2\mathrm{Sin}C} \text{ و } R_E = \frac{FD}{2\mathrm{Sin}B}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$4(R_A + R_C + R_E) \geq a\left(\frac{\mathrm{Sin}B}{\mathrm{Sin}A}+\frac{\mathrm{Sin}A}{\mathrm{Sin}B}\right) + b\left(\frac{\mathrm{Sin}B}{\mathrm{Sin}C}+\frac{\mathrm{Sin}C}{\mathrm{Sin}B}\right)+\cdots$$
$$\geq 2(a+b+\cdots) = 2P,$$

و در نتیجه $R_A + R_E + R_C \geq \frac{P}{2}$. تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}$ و $BF\perp BC$ ، ... یعنی اگر و فقط اگـر شش ضلعی منتظم باشد.



اخبار

در این ستون، سعی داریم تازه ترین خبرهای مربوط به جامعهٔ ریاضی و آموزش ریاضی را به اطلاع خوانندگان عزیز برسانیم. در همین جا از خوانندگان عزیز تقاضا می شود اگر خبر جدیدی به دست آوردند، هرچه سریعتر آن را در اختیار مجلهٔ رشد آموزش ریاضی قرار دهند تا در این ستون به چاپ برسد. قبلاً از همکاری شما کمال تشکر را داریم.

تشکیل انجمن دبیران ریاضی استان کرمان (ادراک)

اولین مجمع عمومی انجمن دبیران ریاضی استان کرمان (ادراک) در تاریخ ۷۵/۳/۳۱ در محل پژوهشکدهٔ تعلیم و تربیت برگزار شد. در این جلسه نسبت به انتخاب اعضای اصلی و علی البدل و نیز انتخاب یک نفر بازرس انجمن رای گیری به عمل آمده و شش عضو اصلی و ۴ عضو علی البدل و همچنین بازرس انجمن انتخاب شدند. اساسنامهٔ انجمن مشتمل بر شش فصل و بیست ودو ماده است. بر طبق این اساسنامه انجمن دارای ۴ نوع عضو: پیوسته، وابسته، حقوقی و افتخاری می باشد. کسانی که مایل به تماس با انجمن هستند می توانند با آقای احمد شادروان، دبیر انجمن دبیران ریاضی استان کرمان، با آدرس: **کرمان - خیابان شهید قرنی - مقابل چاپخانهٔ گلبهار - پژوهشکدهٔ تعلیم و تربیت - انجمن دبیران ریاضی،** مکاتبه کنند.

برپایی جشنوارهٔ ریاضیات دانشگاه تهران

بهزاد منوچهریان

دبیر جشنوارهٔ ریاضیات دانشگاه تهران

تالار علامه امینی دانشگاه تهران در روزهای ۱۵ تا ۱۷ اردیبهشت ۱۳۷۵ شاهد اولین جشنواره ریاضیات بود. این جشنواره که به همت کمیته اعتلای ریاضیات دانشگاه تهران به منظور بزرگداشت ریاضیات و ترویج آن در بین عموم برپا شد، طلیعه استقبال گسترده ریاضیات را به علاقمندان این علم نشان داد.

روز اول جشنواره تحت عنوان «ریاضیات و دانشگاه تهران» به عزم دانشگاه تهران در اعتلای علوم پایه و بالاخص ریاضیات اشاره داشت و نقشی که این دانشگاه به عنوان دانشگاه مادر در سطح ملی در این زمینه می تواند داشته باشد.

روز دوم عنوان «ریاضیات و پژوهش» را داشت و در این روز مخاطبان اصلی دانشجویان دوره تحصیلات تکمیلی و استادان ریاضی بودند.

روز سوم هم «ریاضیات و آموزش دبیرستانی» نام گرفته بود که با شکوه ترین و شادترین روز این جشنوارهٔ سه روزه بود. در این روز که جمع کثیری از دانش آموزان همراه دبیران خود در گروههای ۲۰، ۳۰ نفری به جشنواره آمده بودند آقای دکتر محمدعلی نجفی وزیر محترم آموزش و پرورش نیز حضور یافت و در مورد جایگاه ریاضیات در آموزش و پرورش سخن گفت. در این جلسه همچنین از یک عمر خدمت آموزشی و علمی و فرهنگی استاد احمد بیرشک قدردانی شد و ایشان طی سخنانی بر لزوم رعایت دقت در ریاضیات و توجه به تاریخ ریاضیات ایران تأکید نمودند.

آخرین برنامهٔ صبح روز سوم مقاله ای بود که در مورد **ضرورت تغییر محتوای کتابهای درسی ریاضی** ارائه شد. بعد از ظهر هم

پس از آن که کارتون «سرزمین ریاضیات» (از محصولات والت دیسنی) به نمایش درآمد چند تن از استادان ریاضی به معرفی گوشه هایی از شاخه های هندسه، آنالیز، جبر، احتمال و ترکیبات پرداختند.

حرکتی که در این روز انجام گرفت به عنوان نقطه عطفی در پیوند ریاضی ورزان دانشگاهی و دبیرستانی محسوب می شود و امید آن داریم که با همکاری متقابل این دو قشر جدانا شدنی، ریاضیات در مملکتمان بیش از اینها اعتلا یابد.

درگذشت وان درواردن

محمّد باقری

بنیاد دائرة المعارف اسلامی

بارتل لیندروان درواردن[۱] (۱۹۰۳ آمستردام ـ ۱۹۹۶ زوریخ) ریاضیدان هلندی تباری که در زوریخ می زیست، در زمستان ۱۳۷۴ درگذشت. او استاد ریاضی دانشگاه زوریخ و عضو فرهنگستانهای آمستردام ـ لایپزیگ، بروکسل و هایدلبرگ بود. وان درواردن علاوه بر تدریس و تحقیق و تألیف در مباحث ریاضی، به تاریخ ریاضی و نجوم نیز می پرداخت و عضو فرهنگستان بین المللی تاریخ علوم بود.

در سال ۱۹۶۱ میلادی کتابی با عنوان **بیداری علم**[۲] از او منتشر شد که تاریخچه ای خواندنی از ریاضیات عهد باستان است. در سال ۱۹۷۴ میلادی هم کتابی به نام **پیدایش دانش نجوم**[۳] به انتشار رساند که حاوی مطالب ارزنده ای از جمله دربارهٔ نجوم ایران باستان است. این کتاب به ترجمهٔ آقای همایون صنعتی زاده در ایران منتشر شده است (مؤسسهٔ مطالعات و تحقیقات فرهنگی، ۱۳۷۲). کتاب دیگر وی، **تاریخچهٔ جبر: از خوارزمی تا امی نوتر**[۴] نام دارد که فصل اول آن خلاصه ای از زندگی و آثار سه ریاضیدان دورهٔ اسلامی؛ یعنی خوارزمی، ثابت بن قره و عمر خیام است. وان درواردن مقاله ای نیز دربارهٔ روشها و پارامترهای نجوم ایران پیش از اسلام دارد، که در نشریه سنتاوروس[۵] به چاپ رسیده است. آنچه در کارهای تاریخی وان درواردن برای ما قابل توجه است، اهتمام وی در اثبات اصالت بسیاری از یافته های ریاضی و نجوم ایرانیان است که قبلاً گفته می شد ایرانیان از اقوام دیگر گرفته اند. یادداشت زیر خاطرهٔ ملاقات نگارنده با وان درواردن است:

در آذرماه سال ۱۳۷۰ که به عنوان بازرس فنی تجهیزات برق مجتمع فولاد اهواز به سوئیس رفته بودم، برای تهیه اطلاعاتی دربارهٔ یاکوف تراختنبرگ (۱۸۸۸ ـ ۱۹۵۱) به دیدار دکتر برودمن استاد ریاضی دانشگاه زوریخ رفتم[۶]. ضمن گفتگو، صحبت از تاریخ ریاضی به میان آمد و پرسید آیا مایلم به دیدار وان درواردن بروم؟ با شوق فراوان پذیرفتم. چند ساعت بعد باید برای خروج از سوییس خود را به فرودگاه می رساندم و مجال اندک بود. دکتر برودمن قرار تلفنی با وان درواردن گذاشت و دیدار میسّر شد. وان درواردن دیگر کار نمی کرد و کارهای روزانه اش را به کمک همسر خود انجام می داد. یک ساعت گفتگو کردیم و صحبتمان عمدتاً در زمینهٔ تاریخ ریاضیات و نجوم ایران بود. چند نمونه از آثارش را به من بخشید و توصیه اش انتشار متن آثار ریاضی و نجوم دورهٔ اسلامی بود.

در تابستان ۱۳۷۵ دکتر برودمن برای شرکت در سمینار جبر جابه جایی به تهران آمد و برای دیدارش با قرار قبلی به محل اقامتش درمرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضی رفتم. خبر انتشار ترجمهٔ فارسی کتاب «پیدایش دانش نجوم» را به او دادم و گفتم که قصد دارم نسخه ای از آن را برای خود وان درواردن بفرستم. با شنیدن خبر درگذشت وان درواردن، مبهوت و متأثر شدم. از دکتر برودمن خواستم مقاله ای حاوی زندگینامه و فهرست آثار وان درواردن را بفرستد تا ترتیب ترجمه و چاپ آن را در مطبوعات علمی ایران بدهیم. وقتی به خاطر می آورم که در آن فرصت کوتاه، در دیدار با مردی که زندگی خود را وقف علم کرد، چه آرامش و سادگی و صمیمیتی در خانه اش دیدم، گمان می کنم او را باید از مصادیق «خوشبخت زیست و خوشبخت مرد» دانست. آری، زین خواب چشم هیچ کسی را گریز نیست. ... اما این افسوس همچنان به جاست که چرا زودتر از این خبر درگذشت وان درواردن و ذکر خیری از او را در مطبوعات علمی مان منتشر نکردیم. روانش شاد باد!

برگزاری گردهمایی شکوفه های ریاضی در دانشگاه شهید بهشتی

روز دوشنبه ۵ آذر ۱۳۷۵ مصادف با ۱۳ رجب سالروز ولادت مولای متقیان علی (ع)، به همّت دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه شهیدبهشتی، اولین گردهمایی شکوفه های ریاضی با حضور بیش از ۸۵۰ دانش آموز و دبیر ریاضی برگزار گردید. سخنرانی های صبح عمومی و سخنرانیهای تخصصی بعد ازظهر در سه گروه موازی انجام گرفت. در حاشیهٔ گردهمایی، دانش آموزان فرصت بازدید از نمایشگاه کتاب و نرم افزارهای کامپیوتری در محل کتابخانهٔ مرکزی و مرکز اسناد دانشگاه شهیدبهشتی را پیدا کردند. هدف این گردهمایی آشنایی بیشتر دانش آموزان با دانشگاه و پیوند عمیق تر بین آموزش و پرورش و آموزش عالی بود. جناب آقای دکتر محمدعلی نجفی وزیر محترم آموزش و پرورش پیامی به همین مناسبت دادند که متن آن در زیر می آید.

«بسم الله الرحمن الرحیم»

پیش از هر سخنی، میلاد مسعود مولود کعبه حضرت علی(ع) را به شما حضار محترم، فرهنگیان و دانشگاهیان، تبریک می گویم و امیدوارم خداوند توفیق دوستی و پیروی از آن حضرت را به همه ما عنایت فرماید و به برکت و معنویت چنین روزی این گردهمایی قرین موفقیت گردد.

ابتکار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی در برگزاری این گردهمایی از چند نظر قابل توجه است. نخست آنکه چنین محفلی به گسترش علم ریاضی و ایجاد علاقه در جوانان با استعداد می انجامد و آنان را به ادامه تحصیل در این رشته تشویق و ترغیب می کند. خوشبختانه در سالهای اخیر به دلیل حرکتهای عمیق و اصولی که در این راه انجام شده است و از جمله برگزاری المپیاد ریاضی، استقبال جوانان با استعداد از رشته ریاضی، هم در آموزش و پرورش و هم در دانشگاه نسبت به گذشته بیشتر شده است و می توان امید داشت با ادامه چنین روندی نسل جدید علمی کشور تربیت یافته و دانشمندان برجسته ای تولد یابند و بتوانند سهم مناسبی در پیشرفت جهانی این علم به دست آورند.

دستاورد دیگر این گردهمایی، همکاری نزدیک دانشگاه و مدرسه است که از این طریق توان علمی دانشگاهیان در جهت ارتقای دانش فرهنگیان به کار گرفته می شود. این همکاری نیز که از سالها پیش میان این دو نظام آموزشی به وجود آمده است مستمراً رو به گسترش بوده و آینده بهتری را برای جامعه علمی کشور نوید می دهد. وزارت آموزش و پرورش برای این رابطه سازنده ارزش زیادی قائل است و از هرگونه کمکی که در این راه میسر باشد، دریغ نخواهد داشت و متقابلاً از دانشگاهیان ارجمند نیز انتظار دارد که بخشی از توان و تخصص خود را در این راه صرف کنند.

برگزاری این گردهمایی، این پیام را نیز دارد که برای تقویت دانشگاه باید به دانش آموزان که در آینده وارد دانشگاه می شوند، توجه داشت و از بروز هرگونه کاستی و نارسایی علمی در مدرسه جلوگیری نمود.

اینجانب ضمن ابراز خوشوقتی از این اقدام ارزشمند دانشگاه شهید بهشتی، از ریاست محترم دانشگاه و همه دست اندرکاران این گردهمایی سپاسگزارم و یکبار دیگر موفقیت کامل آن را از درگاه خداوند متعال آرزو می کنم.

محمدعلی نجفی

وزیر آموزش و پرورش

پنجم آذر ماه ۱۳۷۵ مطابق با

سیزدهم ماه رجب ۱۴۱۷ هجری قمری

کنفرانس PME21 در فنلاند

بیست و یکمین کنفرانس بین المللی روانشناسی آموزش ریاضی (PME21) از ۱۴ تا ۱۹ جولای در فنلاند برگزار می گردد. علاقمندان برای دریافت فرم ثبت نام می توانند با دفتر مجله تماس بگیرند.

درگذشت پل اردوش

اردوش بزرگترین ریاضیدان معاصر درگذشت. به همین مناسبت یادداشتی در تاریخ ۲۶ سپتامبر ۱۹۹۶ در واشنگتن پست توسط گروه نویسندگان نوشته شده بود که آقای دکتر سعید قهرمانی محبت کرده و برای درج در مجله ارسال نمودند که به این وسیله از ایشان تشکر می شود.

یکی از خارق العاده ترین مغزهای زمان ما رفته است. رفته واژه ای است که اردوش، نابغه ای با استعدادخداداد و ریاضیدانی مولّد برای مرگ به کار می برد. اردوش واژهٔ مردن را برای مشخص کردن حالت باز ایستادن از انجام ریاضی به کار می برد. اردوش هیچوقت نمرد. او به انجام دادن ریاضی، تا آخرین روز مرگش در جمعه ۲۰ سپتامبر ادامه داد، رشته ای که مشهور است به این که مخصوص انسانهای جوان است، اردوش در زمان مرگ ۸۳ ساله بود.

نه تنها اردوش در انتخاب واژه ها غیرمتعارف بود بلکه تمام زندگی او آنچنان غیرمحتمل ـ غیرمتعارف می نمود که هیچ نوآوری قادر به خلق او نبود (اگرچه در نوامبر ۱۹۸۷ در ماهنامهٔ آتلانتیک، پُل هافمن او را به طور زیبائی توصیف کرده بود).

اردوش خانه ای نداشت، خانواده ای نداشت، مال و اموالی نداشت و آدرسی هم نداشت! او از یک کنفرانس ریاضی به کنفرانس ریاضی دیگری و از یک دانشگاه به دانشگاه دیگری می رفت و بر خانهٔ ریاضیدانها در سراسر دنیا در می کوفت و اعلام می کرد که «ذهن من باز است» و وارد می شد. همکاران او مفتخر از همکاری و تشریک مساعی چند روزه با اردوش ـ که وسعت دید ریاضی او به اندازهٔ عمق دانش ریاضی اش توجه ها را برمی انگیخت ـ از او استقبال می کردند.

اردوش با دو چمدان نیمه پُر مسافرت می کرد که در یکی چند دست لباس و وسایل شخصی و در دیگری مقاله های ریاضی بود. اردوش مالک هیچ چیز دیگری نبود. واقعاً هیچ چیز! دوستان اردوش کارهای روزانهٔ او از جمله پرداختهای مالیاتی، امور مالی و تهیهٔ غذا را برایش انجام می دادند. او به اعداد می پرداخت.

به نظر می رسید او از زمان تولد محکوم به حبس ابد تنهائی بود، از همان روزی که دو خواهر ۳ و ۵ سالهٔ او به سبب مخملک از بین رفتند و او را به عنوان تنها فرزند با یک مادر همیشه نگران در خانه تنها گذاشتند. هیتلر تقریباً تمام خانوادهٔ یهودی مجارستانی او را از بین برد و اردوش هیچگاه ازدواج نکرد. آگهی تسلیت او در روزنامهٔ واشنگتن پست با این جملهٔ ناگهانی و در واقع دردناک

تمام می شود «او هیچ ورثه ای از خود به جای نگذاشت».

اما در حقیقت او از خود ورثه های زیادی باقی گذاشت که شامل صدها همکار علمی و ۱۵۰۰ مقالهٔ ریاضی بود که به وسیلهٔ او تولید شد. میراث اعجاب آور در رشته ای که تولید ۵۰ مقاله در طول زندگی یک ریاضیدان کاملاً غیرعادی و بی نظیر است.

تصورّ عمومی دربارهٔ ریاضیدانها این است که زود شکوفا می شوند و زود می میرند. نابغهٔ بزرگ هندی راما نوجان در سن ۳۲ سالگی مرد. ریاضیدان بزرگ فرانسوی، اوارست گالوا در سن ۲۱ سالگی از دنیا رفت (می گویند گالوا در شب قبل از مرگش در یک دوئل، تمام شب را بیدار بود و هر چه را که می دانست، می نوشت. آیا به او الهام شده بود؟) و آنهائی که از نظر سنی جوان نمی میرند امّا به تعبیر اردوش، در ۳۰ سالگی عملاً مرده اند.

اردوش چنین نبود. او کار خود را ازسنین جوانی آغاز کرد. اردوش در سن ۲۰ سالگی اثباتی برای یک قضیهٔ کلاسیک نظریهٔ اعداد کشف کرد (که بین هر عدد و دوبرابرش، باید یک عدد اول باشد، یعنی عددی که بخش پذیر بر عدد دیگری به جز یک و خودش نباشد). او تا زمان مرگش بارور باقی ماند. همچنین، دوستان او و یاور مالی اش دکتر (البته دکترای ریاضی) ران گراهام، تخمین می زنند که شاید هنوز ۵۰ کار جدید اردوش شامل مقاله، کارهای بازتابی و عمیق و کارهای مشترکی که تا زمان مرگش در حال انجام دادن آنها بود، بعدها چاپ شود.

اردوش از یک جنبهٔ دیگر نیز غیرمعمول بود. واژهٔ همیشه در سفر، نابغهٔ غیرمتعارف و کاملاً جذب شده در دنیای افکار خویش، کلیشه ای است که تقریباً همیشه به یک آدم «غیراجتماعی» اطلاق می شود. از بابی فیشر تا هواردهافز، به نظر می رسد که غیراجتماعی بودن و تعصّب فکری با هم خویشی و نسبت دارند.

اما این موضوع در مورد اردوش صادق نبود. او ملایم و باز بود و با دیگران سخاوتمندانه برخورد می کرد. او معتقد بود که باید ریاضی را یک فعالیّت اجتماعی کرد. همچنین، او پرکارترین و بارورترین ریاضیدان تاریخ بود که روحیهٔ مشارکت بالائی داشت و با دیگران کار می کرد. صدها نفر از همکارانی که با اردوش یا تحت نظارت او کار مشترک چاپ کرده اند، می توانند بعد ازظهری را تصور کنند که ذهنهایشان بر اثر همکاری با اردوش باز شد و به پیروزی ها یا نگرشهای تازه ای دست یافتند.

خاصیت اجتماعی بودن اردوش او را از سایر نابغه های ریاضی متمایز می کند. برای مثال، آندرو وایلز، اخیراً برای حل قضیهٔ مقدّس ریاضی یعنی قضیهٔ آخر فرما ـ بعد از هفت سال کار کردن بر روی آن در اتاق زیرشیروانی خانه اش به شهرت رسید. وایلز پس از آنهمه تلاش، اثبات خود را به عنوان یک غیرمترقبه در دنیا انتشار داد.

اردوش نه تنها نبوغش را در اختیار دنیا گذاشت، بلکه پولش را هم تقسیم کرد. البتّه این حرف به نظر یک فکاهی می رسد زیرا او مقدار بسیار ناچیزی پول داشت. امّا در حقیقت، همین مسألهٔ خیلی احساس برانگیز بود. او چیزی نداشت زیرا هر چه که به دست می آورد به دیگران می بخشید. او برای انجام هر کار خیریه یا حل مشکل بخت برگشته ای که سر راهش قرار می گرفت، احساس رقیقی داشت. اردوش پولی را که از ایراد چند سخنرانی در هند نصیبش شده بود به بیوهٔ تهیدست رامانوجان بخشید. (اردوش درکنفرانس ریاضی ایران در شیراز شرکت کرد و آن ایام مصادف با زلزلهٔ لار شد. اردوش مبلغی به زلزله زدگان اهدا کرد.)

گراهام نقل می کند که اردوش مطلع شد که یک ریاضیدان بالقوه توانای جوان می خواست به دانشگاه هاروارد برود امّا پول مورد نیاز را نداشت. اردوش ترتیب دیدار او را داد و به او ۱۰۰۰ دلار قرض داد. (تمام پولی که اردوش با خود حمل می کرد حدود ۳۰ دلار بود.) اردوش به مرد جوان گفت که هر وقت که توانست می تواند پول را به او پس بدهد. اخیراً، آن مرد جوان به گراهام تلفن کرد تا بگوید او هاروارد را به پایان رسانده و هم اکنون مشغول تدریس در میشیگان است و بالاخره می تواند پول را پس بدهد. چکار بکند؟

گراهام با اردوش مشورت کرد. اردوش گفت: «به او بگو همان کاری را با ۱۰۰۰ دلار بکند که من کردم.»

اردوش البته هیچ ورثه ای از خود به جای نگذاشت.

گروه نویسندگان واشنگتن پست، ۲۶ سپتامبر ۱۹۹۶

پانوشتها

(1) Bartel leender vander Waerden

(2) Science Awakening

(3) The birth of astronomy

(4) A history of Algebra: from al - khwārizmmī to Emmy Noether

(5) Centaurus

۶ـ شرح این جستجو و دیدارهای مربوط به آن در مقدمهٔ کتاب زیر آمده است: آن کاتلر و رودلف مک شین، روش سریع تراختنبرگ در حساب، ترجمهٔ محمد باقری، انتشارات مجلهٔ دانشمند ـ چاپ سوم، تهران، ۱۳۷۳

پاسخ به نامه ها

آقای حسین حیدری ورزقان، بنیانگذار انجمن صرع ایران - تبریز

نامهٔ محبت آمیز شما رسید. ضمناً مطالبی که ارسال نموده اید درست است و با توجه به میزان تحصیلات شما قابل تقدیر است. اینکه به ازای هر عدد طبیعی x و n داریم $x^{4n-1} - x = 6k$ درست است زیرا سمت چپ عامل $(x-1)x(x+1)$ دارد که همواره بر ۶ بخش پذیر است. ضمناً $x^{4n+1} - x = 30k$ زیرا، سمت چپ عامل $x(x^4 - 1)$ دارد که همواره بر ۲ ، ۳ و ۵ بخش پذیر است.

خانم توکتم خطیبی، دانش آموز - شاهرود - دبیرستان کوثر

حل مسایل کامپیوتر مربوط به صفحهٔ ۳۵ رشد آموزش ریاضی شماره ۴۳ رسید. ضمن تشکر از زحمات شما، به علت طولانی بودن جوابها از چاپ آن معذوریم.

آقای نظام اکبری - تهران

شما می توانید یافته های خود را جهت اظهارنظر به دفتر مجلهٔ رشد آموزش ریاضی ارسال نمائید.

آقای امیر دلشادی - اراک

توجه و کنجکاوی شما در زمینهٔ خواص اعداد قابل تقدیر است. مطالب ارسالی شمادر صفحهٔ ۱۰ کتاب ریاضیات پایهٔ پیش دانشگاهی رشتهٔ علوم انسانی وجود دارد، لذا از چاپ آن معذوریم.

آقای محمد اصل فلاح - دبیر - کرج

از اینکه به جرگهٔ دبیران ریاضی پیوستید خوشحالیم و آرزو می کنیم که آیندهٔ خوبی در پیش رو داشته باشید. ضمناً شما می توانید از طریق ارسال برگ اشتراک که در همین شمارهٔ مجله چاپ شده، مشترک مجله شوید.

آقای محمدمهدی امینی - دانشجو - ورامین

از ابراز لطف شما نسبت به مجله متشکریم. در پاسخ پرسش شما، توصیه می کنیم سرمقاله شماره ۴۶ را مطالعه کنید.

آقای محمدعلیمی - دبیر - بوکان

از توجه شما نسبت به مجله متشکریم و سعی می کنیم خواست شما را حتی المقدور برآورده کنیم.

آقای علی اکبر جاویدمهر - دبیر - قم

از مسایل و تصاویر زیبایی که ارسال نمودید بسیار متشکریم. حتماً در مواقع مقتضی از آنها استفاده خواهد شد.

آقای مهدی فیضی - دانش آموز - مشهد - دبیرستان شهید هاشمی نژاد

کنجکاوی و علاقه شما به ریاضی نویدبخش موفقیت های آینده شماست. مطالب ارسالی شما با اهداف مجلهٔ رشد آموزش ریاضی فاصله دارد. با توجه به اینکه مطالب شما جالب بود جهت استفاده به مجله برهان ارسال گردید.

اسامی خوانندگانی که حل مسایل شماره ۴۵ را فرستاده اند

آقای رضا محمدخانی - دانشجو - کامیاران

۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۹ - ۱۰

آقای محمدمهدی امینی - دانشجو - ورامین

۱ - ۲ - ۳ - ۶ - ۷ - ۹ - ۱۰

آقای علی اکبر جاوید مهر - دبیر - قم

۱ - ۲ - ۳ - ۶ - ۷ - ۱۰

آقای کورش محمدخانی - دانش آموز - کامیاران

۱ - ۳

آقای محمداصل فلاح - دانشجو - کرج

۱

باسمه تعالی

آگهی شماره ۲

فراخوان مقاله و برگهٔ درخواست شرکت در

دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران

اول تا سوم شهریور ۱۳۷۶
کرمانشاه

دبیرخانهٔ کنفرانس: کرمانشاه
صندوق پستی: ۱۱۱-۶۷۱۷۵
تلفن: ۲۰۰۸۶(۰۸۳۱)
فاکس: ۲۴۶۷۴(۰۸۳۱)

اداره کل آموزش و پرورش استان کرمانشاه افتخار دارد با همیاری دانشگاه رازی برگزارکننده دومین کنفرانس آموزش ریاضی ایران باشد.

کمیتهٔ علمی و اجرائی کنفرانس از همهٔ علاقه‌مندان دعوت می کند به‌منظور اعتلای آموزش ریاضی در کشور به‌طور فعال در این کنفرانس شرکت فرمایند. امید است که این کنفرانس تبلوری از مشارکت سازندهٔ دست‌اندرکاران آموزش ریاضی باشد و موضوعهای بنیادی ــ پژوهشی مورد بحث و بررسی قرار گیرند.

محورهای اصلی کنفرانس عبارتند از:

۱ــ ضرورت تدوین استانداردهای ملّی برنامهٔ درسی ریاضی
۲ــ نقش آموزش ریاضی در اعتلای ریاضیات
۳ــ ضرورت تحول در آموزش مستمر جهت اعتلای دانش حرفه‌ای معلمان ریاضی
۴ــ شیوه‌های تدریس مفاهیم ریاضی با تأکید بر حسابان

برنامه‌های کنفرانس شامل موارد زیر است:

۱ــ سخنرانیهای عمومی
۲ــ ارائه مقاله‌های پژوهشی
۳ــ میزگردها
۴ــ گردهمائی گروههای کاری
۵ ــ برپایی نمایشگاههای جنبی

نحوه تنظیم مقاله‌ها:

علاقه‌مندان می‌توانند مقاله‌های خود را در زمینهٔ آموزش ریاضی تا تاریخ ۷۶/۳/۲۰ به نشانی دبیرخانهٔ کنفرانس ارسال نمایند.

چکیدهٔ مقاله‌ها باید تایپ شده یا با خط خوانا و حداکثر در یک صفحهٔ A_4 حاوی عنوان مقاله، نام نویسنده (نویسندگان) و مؤسسهٔ مربوطه باشد. زیر نام ارائه‌دهندهٔ مقاله باید خط کشیده شود.

مقاله‌هایی که پس از داوری پذیرفته شوند، به‌صورت سخنرانی یا پوستر ارائه خواهند شد.

تاریخهای مهّم:

آخرین مهلت ارسال برگهٔ درخواست ثبت‌نام ۲۰ خرداد ۱۳۷۶

آخرین مهلت ارسال چکیدهٔ مقاله ۲۰ خرداد ۱۳۷۶

آخرین مهلت ارسال مقالهٔ کامل ۱۰ تیر ۱۳۷۶

هزینه‌ها:

۱ــ ثبت‌نام عادی ۲۰,۰۰۰ ریال
اعضای انجمن های علمی و دانشجویان در صورت ارائه رونوشت کارت عضویت یا دانشجویی ۱۵,۰۰۰ ریال
۲ــ هزینهٔ غذا برای سه روز
فقط ناهار ۲۰,۰۰۰ ریال
صبحانه ــ ناهار ــ شام ۴۵,۰۰۰ ریال
۳ــ خوابگاه (۴ شب) ۲۰,۰۰۰ ریال

از درخواست کنندگان تقاضا می‌شود مبلغ تعیین شده را به حساب ۱۳۱۳ نزد بانک ملی ایران شعبهٔ مرکزی کرمانشاه واریز نموده و رسید آن را همراه برگهٔ درخواست ثبت‌نام حداکثر تا تاریخ ۷۶/۳/۲۰ به آدرس دبیرخانهٔ کنفرانس ارسال فرمایند.

تذکر:

به علت محدود بودن امکانات، کمیتهٔ پذیرش، از پذیرایی همراهان در غذاخوری‌ها و خوابگاهها معذور است.

همراهان می‌توانند مبلغ ۱۰۰,۰۰۰ ریال برای رزرو هتل به‌حساب ۱۳۱۳ بانک ملی ایران شعبهٔ مرکزی کرمانشاه واریز نمایند.

درخواست ثبت نام

نام .... نام خانوادگی .... محل اشتغال: ....
آخرین مدرک تحصیلی .... دانشگاه یا مؤسسهٔ محل تحصیل ....
تاریخ دریافت آخرین مدرک ....
سالهای خدمت آموزشی در: دبستان ..... راهنمایی ..... دبیرستان ..... مرکز تربیت معلم ..... دانشگاه ....
عضویت در: انجمن ریاضی .... انجمن معلمان ریاضی ....
آدرس کامل: ....

اعضاء کمیتهٔ علمی

اسماعیل بابلیان	دانشگاه تربیت معلم تهران (نمایندهٔ شورای ریاضی دفتر برنامه ریزی و تألیف کتابهای درسی)
یحیی تابش	دانشگاه صنعتی شریف (نمایندهٔ وزارت آموزش و پرورش)
جواد حاجی بابایی	سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش
سیدمرتضی حسنی نسب	وزارت آموزش و پرورش (نمایندهٔ دبیران ریاضی استان کرمانشاه)
مهدی رجبعلی پور	دانشگاه شهید باهنر کرمان
عبدالرضا سیاره	دانشگاه رازی کرمانشاه
مهرناز شهرآرا	دانشگاه تربیت معلم تهران
بیژن ظهوری زنگنه	دانشگاه صنعتی شریف (نمایندهٔ شورای ریاضی دفتر برنامه ریزی و تألیف کتابهای درسی)
سهیلا غلام آزاد	دبیر ریاضی
زهرا گویا	دانشگاه شهید بهشتی (دبیر کمیتهٔ علمی کنفرانس)
اسداله نیکنام	دانشگاه فردوسی مشهد (نمایندهٔ انجمن ریاضی ایران)

رشد

قابل توجه دبیران محترم و علاقه‌مندان به اشتراک مجلات رشد تخصصی

دبیران محترم و سایر علاقه مندان می توانند برای اشتراک هرکدام از مجلات:

رشد آموزش ریاضی	رشد آموزش شیمی	رشد آموزش جغرافیا
رشد آموزش زیست‌شناسی	رشد آموزش ادب فارسی	رشد آموزش معارف اسلامی
رشد آموزش راهنمایی تحصیلی	رشد آموزش زبان	رشد آموزش فیزیک

که از سوی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش انتشار می‌یابد. فرم زیر را تکمیل نموده و به آدرس تهران ــ جاده آبعلی ــ خیابان سازمان آب خیابان خورشید ــ مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی کد پستی ۱۶۵۸۹ــ تلفن : ۷۳۳۵۱۱۰ ارسال دارند.

اینجانب با ارسال اصل رسید بانکی شماره به مبلغ ۴۵۰۰ ریال
که به حساب شماره ۲۵۰۰ بانک صادرات شعبه ۳۰۵۷ جاده دماوند به نام شرکت افست واریز نموده‌ام، متقاضی اشتراک
سه شماره از مجله رشد آموزش مربوط به سال تحصیلی ۷۶ــ۷۵ می‌باشم.
لطفاً مجله را به آدرس شهرستان خیابان کوچه
پلاک کدپستی ارسال فرمایید.

لطفاً برای هر مجله تقاضای جداگانه ارسال دارید.

مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی

به‌علت ناقص بودن نشانی پاره‌ای ازمشترک‌ها،تعدادی ازمجلات ارسالی ازپست به مرکز توزیع برگشت داده شده است. مشترک‌هایی که تاکنون مجلات شماره پاییز و زمستان ۷۵ ــ بجز زیست‌شناسی ــ را دریافت نکرده‌اند،نشانی دقیق خود را به نشانی تهران، صندوق پستی ۱۶۵۹۵/۱۱۱ ارسال کنند و یا باتلفن ۷۳۳۵۱۱۰ تماس بگیرند.

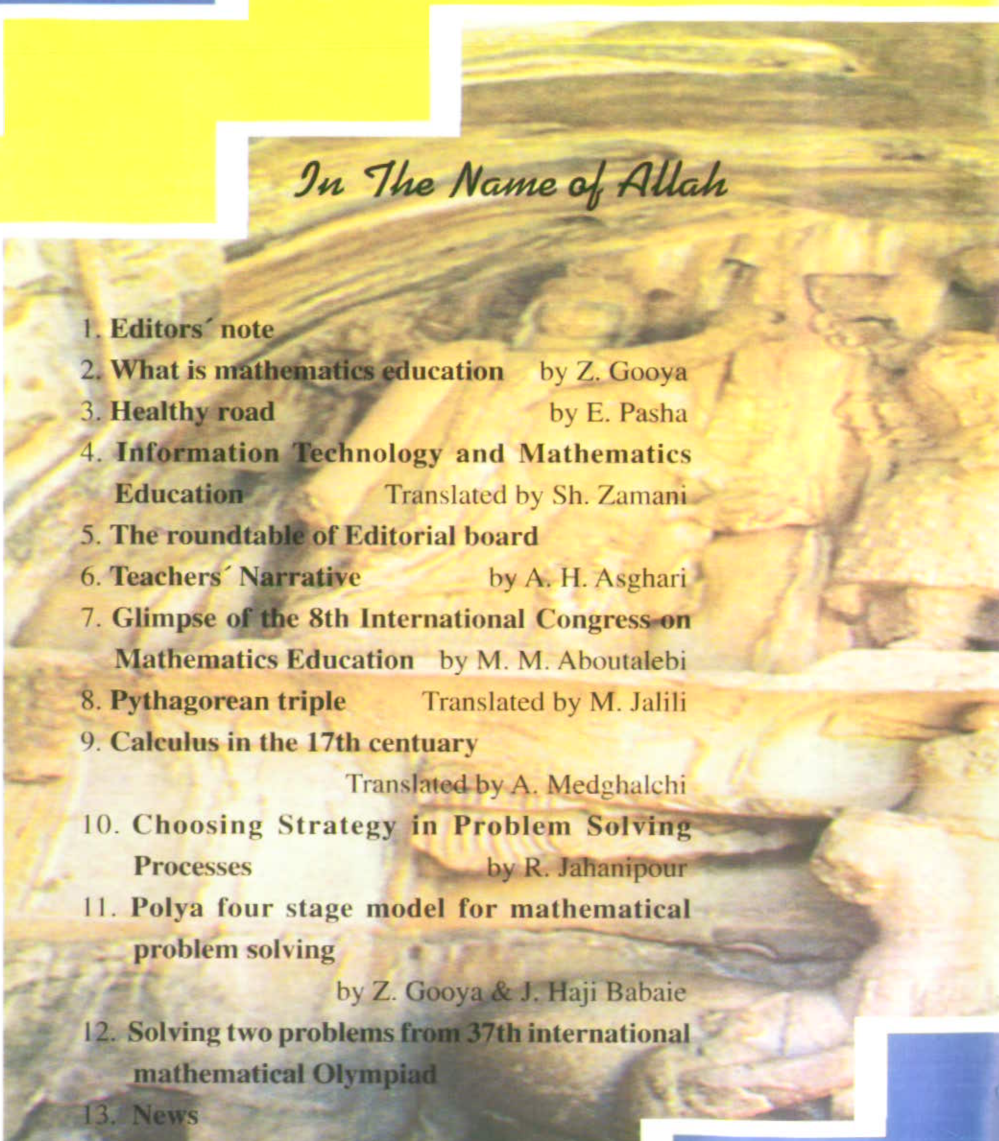
مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
تعلیم و تعلم عبادت است

Roshd رشد آموزش ریاضی
Mathematics Education Journal

Vol. 11- No. 46 - 1997
Editor- in - chief: Gooya Z.

P.O.Box 1587, Mathematic Department
Iranshahr Shomali,
Building No.4



In The Name of Allah


رشد
زمستان ۷۵
رشد آموزش شیمی
رشد آموزش راهنمایی تحصیلی
رشد آموزش زبان
The Foreign Language Teaching Journal
رشد آموزش ریاضی
رشد آموزش فیزیک
رشد ادب فارسی
رشد آموزش شیمی
رشد آموزش فیزیک
رشد آموزش معارف اسلامی
رشد آموزش زبان
The
Foreign
Language
Teaching
Journal