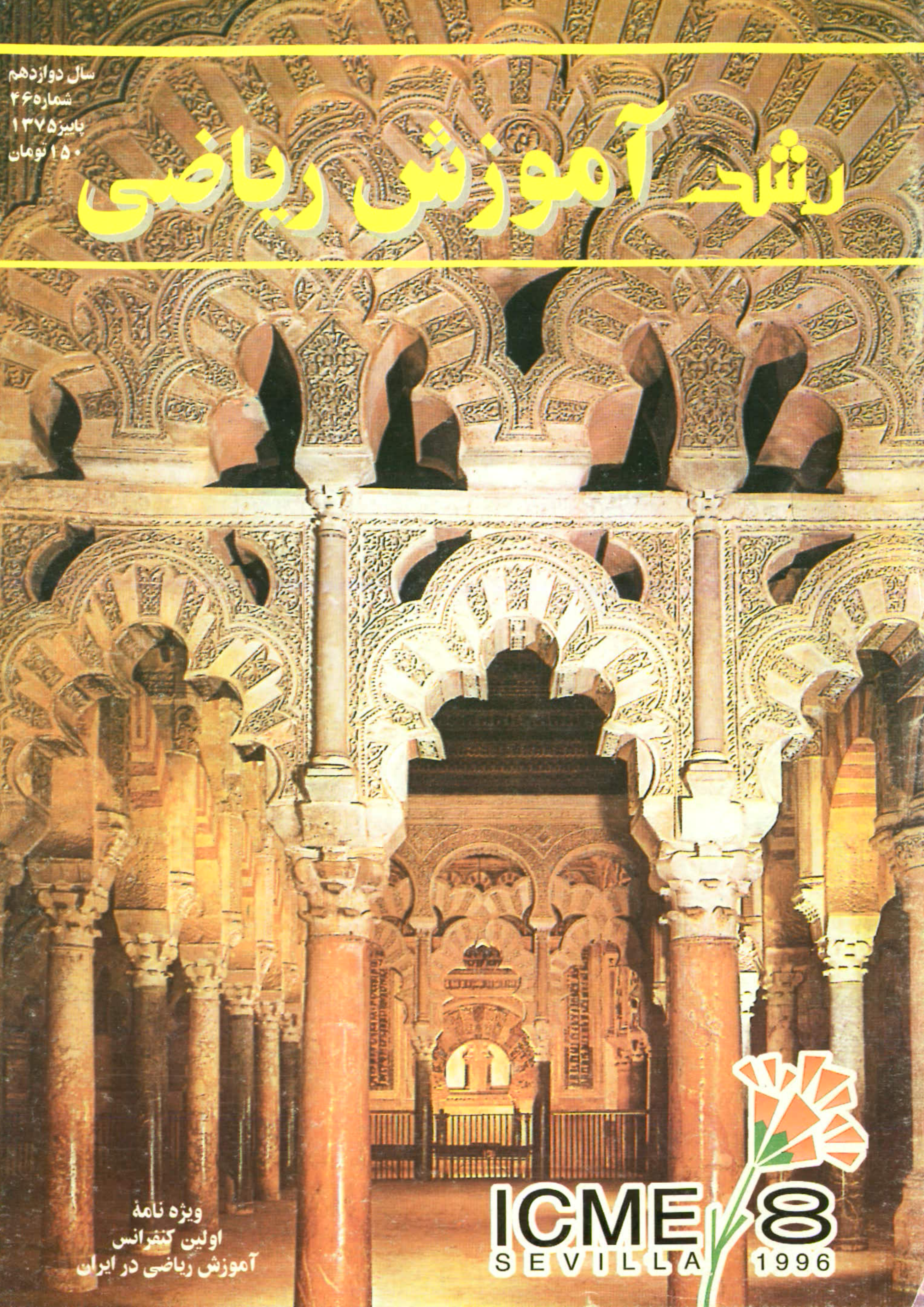
سال دوازدهم
شماره ۴۶
پاییز ۱۳۷۵
۱۵۰ تومان

رشد آموزش ریاضی



ویژه نامهٔ
اولین کنفرانس
آموزش ریاضی در ایران

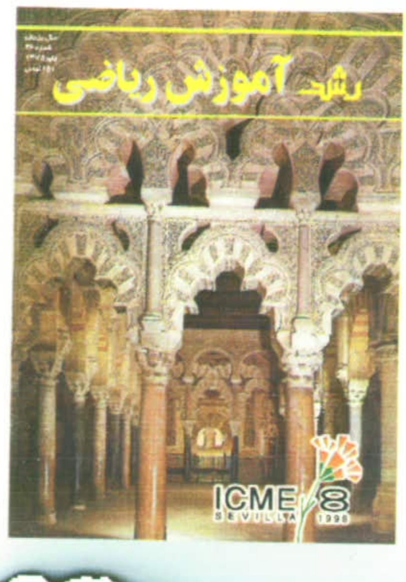
ICME 8
SEVILLA 1996

Roshd
رشد آموزش ریاضی
Mathematics Education Journal

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

سال دوازدهم ــ پاییز ۱۳۷۵ ــ شماره مسلسل ۴۶
نشریه گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی
تلفن ۴ ــ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۳۰۳)

بسم الله الرّحمن الرّحیم



شرح روی جلد:

کُردوبا، بزرگترین مرکز علمی و فرهنگی دنیا و پایتخت حکومت اسلامی در ده قرن پیش بود. ساختن مهمترین بنای این شهر یعنی مسجد کردوبا در دورهٔ نخست وزیری المنصور در اواخر قرن دهم میلادی به پایان رسید.

مسجد کردوبا دارای ۹۰۰ ستون به رنگهای قرمز، سفید و سبز است که در یک فضای وسیع به صورت آرایه ای مربعی شکل و بسیار زیبا قرار گرفته اند. کردوبا بیشترین عامل رشد و گسترش رنسانس در اروپا بود و با بودن بزرگانی چون ابن رشد، ابن هیثم و ابن عربی، تا قرنها این اعتبار فرهنگی را حفظ کرد. برگزاری هشتمین کنگره بین المللی آموزش ریاضی در اندلس اسپانیا، یادآور دوران طلایی علم و فرهنگ اسلامی در دنیا است.

سخنی با خوانندگان :

اولیای دفتر برنامه ریزی و تألیف و هیأت تحریریهٔ مجله رشد آموزش ریاضی بر این باورند که در نظام آموزشی، مهمترین نقش را معلمان و پس از آنها، کتابهای درسی ایفا می کنند. درنتیجه، هرچقدر که در زمینهٔ آموزش معلمان و تألیف کتابهای درسی سرمایه گذاری اقتصادی و علمی شود، طبق سفارش خداوند، چندین برابر ثمر می دهد و باعث اعتلای نظام آموزشی و در واقع، جامعه خواهد شد.

جلسه های اولیهٔ هیأت تحریریه به بحث در مورد نوع مقاله ها و جهت گیری جدید مجلهٔ رشد آموزش ریاضی اختصاص داده شد و با توافق همگی، تصمیمهای زیر اتّخاذ گردید.

۱ـ با توجّه به هدف اساسی مجله، اشاعهٔ فرهنگ آموزش ریاضی مورد تأکید قرار گرفت.

۲ـ اعتلای دانش حرفه ای معلمان ریاضی به عنوان یک ضرورت مورد بررسی قرار گرفت و قرار شد انتخاب مقاله ها و مطالب دیگر در جهت پاسخ به این نیاز باشد.

۳ـ با تأکید بر اهمیّت دانش موضوعی معلّمان یعنی دانش افزایی، تصمیم گرفته شد که به این مهم، از مسیر آموزش ریاضی توجّه شود.

۴ـ با توجّه به این که طبق هدف مشخّص مجله، مخاطبان اصلی آن معلمان ریاضی هستند، مطالب مجله باید در درجهٔ اوّل در خدمت این عزیزان باشد. البته واضح است که دانشجو ـ معلّمان، دانشجویان رشته های دبیری در دانشگاه ها، مراکز تربیت معلم و مراکز عالی آموزشهای ضمن خدمت معلمان، دانش آموزان عزیز دورهٔ متوسطهٔ آموزش عمومی و کارشناسان و برنامه ریزان درسی و آموزشی می توانند متناسب با نیازهایشان، از مجلهٔ رشد آموزش ریاضی بهره بگیرند.

۵ـ انتخاب مسائل با عنایت به ارائهٔ راهبردهای حل مسأله انجام خواهد گرفت و عمدتاً مسائلی انتخاب خواهند شد که به آموزش حل مسأله کمک کنند.

۶ـ بر روش تدریس مفاهیم ریاضی تأکید ویژه شده است و انتخاب مقاله ها به گونه ای خواهد بود که در خدمت بالابردن توانایی های معلمان در این زمینه باشد.

۷ـ به دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه ای برخوردار است. به دلیل کم توجّهی به این موضوع و کافی نبودن برنامه های آموزش عالی در این زمینه، مجله در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان **روایت های معلمان ریاضی** باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. روایتهای معلمان یا به عبارتی تجربه های معلمان[1]، در دنیای آموزشی مورد عنایت خاصّی قرار گرفته است و مطالعات وسیعی در این باره انجام شده یا در حال انجام شدن است. این روایتها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده ای به وجود می آورد تا به تبیین نظریه های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عملِ معلّم می جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه ها به عمل درمی آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می کند. از همکاران گرامی استدعا می کنم که روایتهای خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد. زیرا که **زکات علم نشر آن است**. معلمان عزیز باید به اهمیّت تجربه های خود واقف شوند و با پویایی، به غنی تر کردن آنها بپردازند.

۸ـ یکی از تأکیدهای آموزشی مجله، اشاعهٔ فرهنگ کار گروهی و نشان دادن اهمیت گفت و شنود و مشارکت فکری در یادگیری است. همچنین، هیأت تحریریه همگی بر لزوم توجّه به فرآیند یادگیری ـ نه محصول نهایی، اصرار دارند. به همین دلیل، تصمیم گرفته شده است که بحثهای جلسه های هفتگی هیأت تحریریه را خلاصه کرده و با عنوان میزگرد در معرض قضاوت خوانندگان عزیز قرار دهیم. البتّه ممکن است گاهی بحثها و مذاکرات بیشتر جنبهٔ اجرائی داشته باشند که در آن صورت، لزومی به درج آنها در مجله نخواهد بود.

۹ـ با توجّه به فراگیرشدن نظام جدید آموزش متوسطه، سعی می شود که مقاله ها و مطالب مجله در خدمت برنامه های درسی نظام جدید باشد تا به این ترتیب، معلمان گرامی فرصت بیشتری برای آشنایی با موضوعهای درسی ریاضی موجود، روش تدریس و ارزشیابی آنها پیدا کنند.

۱۰ـ به دلیل نقش ارزندهٔ تکنولوژی در آموزش ریاضی، صفحاتی از مجله به آموزش تکنولوژی کامپیوتر و ماشین حساب، اختصاص داده شده است.

۱۱ـ بخش **نامه های خوانندگان** به قوّت خود باقی است و ما منتظر دریافت نامه های شما عزیزان هستیم.

همچنین، لازم به توضیح است که سیر کار مجله تمرکز بر هدف اوّلیهٔ آن یعنی تأکید بر ارتقا و اعتلای **آموزش ریاضی** در ایران است. مجله همچنان از تواناییهای اعضای سابق هیأت تحریریه بهره گرفته است و از همکاری با آنها خرسند است.

علاوه بر اعضای قبلی، افراد جدیدی به هیأت تحریریه پیوسته اند که به دلیل توانائی علمی، ذوق آموزشی و نقشی که در کتابهای درسی و آموزش معلمان داشته اند به همکاری دعوت گردیده اند.

در خاتمه، تقارن اولین شمارهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی با هیأت تحریریه جدید را با اولین کنفرانس آموزش ریاضی در ایران به فال نیک گرفته، امید است که جامعهٔ آموزشی و جامعهٔ ریاضی به اهمیّت نقش **آموزش ریاضی** در اعتلای کیفیّت آموزشی ایران عزیزمان بیش از گذشته وقوف پیدا کنند.

سردبیر

در باب
برنامهٔ درسی ریاضیات دبیرستان

On the mathematics curriculum of the high school[1]

ترجمهٔ: جواد حاجی بابایی

این بیانیه یکی از سندهای معتبر تاریخی در زمینهٔ آموزش ریاضی است زیرا در واقع، اعلام موجودیّت رسمی این حوزه معرفتی و رشتهٔ تحصیلی بوده است

اشارهٔ سردبیر:

دوران ریاضیات جدید[2] که پس از پرواز قمر مصنوعی شوروی سابق به فضا در سال ۱۹۵۷ آغاز گشت، در شروع بیشترین توجّه ها را به خود جلب نمود و دیری نپایید که به عنوان یک پدیدهٔ نوظهور، جهت گیری برنامه ریزی های درسی ریاضی به سمت آن متمایل گشت. گروههای متعددی شروع به برنامه ریزی برای دورهٔ آموزش عمومی کرده و به دنبال آن، تهیّهٔ کتابهای درسی آغاز گردید که از معروفترین گروههای برنامه ریزی می توان از گروه **مطالعاتی ریاضیات مدرسه ای**[3] و پروژهٔ مدیسون نام برد. بعضی از ریاضیدانها، با علاقمندی به موج جدیدی که توسط مکتبهای فلسفی جدید ریاضی به خصوص صورت گرایی ایجاد شده بود، با پشتکار و وسواس خاصّی، مسؤلیّت تهیهٔ برنامه و کتاب درسی را به عهده گرفتند. با این حال، افراط در اشاعهٔ این نگرش، سایر ریاضیدانهای برجستهٔ آن زمان را دچار تشویش فزاینده ای کرد. آنها احساس می کردند که طرفداران این موج، دایه های دلسوزتر از مادری برای ریاضی شده اند که ممکن است ناآگاهانه، مانع رشد و ثمردهی درخت کهنسال ریاضی گردند. نگرانی آنها بخصوص از این جهت بود که رشد جامعهٔ صنعتی آن زمان و نجات جامعه های بعد از جنگ جهانی دوم به نوعی در گرو عمومی شدن ریاضی و علوم پایه بود، درحالی که از نظر آنها، چنین نگرش متعصّبانه ای به صورت گرایی و تجرید زودرس ریاضی، مانع بزرگی در جهت عمومی کردن ریاضی و به فیض رسیدن جامعه از آن بود. به همین دلیل، بسیاری از ریاضیدانها از این روند برنامهٔ درسی ریاضی اظهار نگرانی شدید کردند و دلایل خود را در بیانیه ای که به امضای ۷۵ نفر از آنها رسید، منتشر کردند. این بیانیه یکی از سندهای معتبر تاریخی در زمینهٔ آموزش ریاضی است زیرا در واقع، اعلام موجودیّت رسمی این حوزه معرفتی و رشتهٔ تحصیلی بوده است.

همچنین، لازم به ذکر است که در هشتمین کنگرهٔ بین المللی آموزش ریاضی در سویل اسپانیا که در ۱۴ تا ۲۱ جولای ۱۹۹۶ برگزار گردید، آناسیرپینسکا، اولّین سخنران عمومی کنگره، باز هم با اشاره به دلایل شکست دوران ریاضی جدید سعی کرد بگوید که «آموزش ریاضی به کجا می رود؟». این اشاره از این جهت است که بررسی دوران ریاضی جدید و تجزیه و تحلیل این بیانیه، می تواند کمک مؤثّری به آشنایی بیشتر و فهم بهتر رشتهٔ آموزش ریاضی در ایران بکند.

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، با توجّه به اهمیّت این بیانیه و تأثیری که در روند برنامهٔ درسی ریاضی دنیا گذاشت، اقدام به ترجمه و نشر آن کرده است. همکار گرامی آقای جواد حاجی بابایی این مهمّ را انجام داده اند که بدین وسیله از ایشان تشکّر می شود.

---

1 - The Mathematics Teacher, March 1962
2 - New Math Era
3 - SMSG

بیانیه

بیانیه زیر توسط چند تن از امضاء کنندگان آن تهیه و تنظیم شد و برای هفتاد و پنج تن از ریاضیدانهای ایالات متحده و کانادا ارسال گردید. اما تلاشی صورت نگرفت تا بوسیله تبلیغات در میان تمام ریاضیدانها، تعداد زیادی امضاء گرد آوری گردد، بلکه هدف این بود که تنها تعدادی از آنهایی که شایستگی، زمینه، دستمایه و تجربه ریاضی کافی را دارا هستند از مناطق گوناگون به لحاظ جغرافیایی انتخاب شوند. بعضی از امضاء کنندگان هنگامی که توسط یکی از همکاران از بیانیه با خبر شدند داوطلبانه اسامی خود را ارسال کردند که ما از حمایت آنها صمیمانه قدردانی می کنیم.

* * *

ریاضیدانهای این کشور جوّ بسیار مساعدی در اختیار دارند تا منافع مقبول ناشی از بهبود و پیشرفت آموزش ریاضیات را توسعه دهند. در واقع چند گروه در کشور هستند که فرصت کنونی را دریافته اند و مجدّانه مشغولند تا در کمال حسن نیّت، آن (فرصت) را به ثمردهی برسانند.

بهرحال، این یک تراژدی بزرگ خواهد بود اگر اصلاح برنامه ها جهت گیری نادرستی پیدا کند و فرصت طلایی از دست برود. در سیمای این جریان، عوامل و نیروهایی وجود دارند که ممکن است ما را به بیراهه و سرگردانی بکشانند. ریاضیدانها، که در برابر سلطه و حکمفرمایی آموزشگران حرفه ای بر آموزش و اینکه روش آموزش بر محتوا مقدّم است، عکس العمل نشان می دهند، حال خود ممکن است بر تقدّم محتوا بر روش آموزشی تاکید کنند، که در هر دو صورت به بی فایدگی منجر شود. ریاضیدانها ممکن است ناخودآگاه فرض کنند که همهٔ جوانان به چیزی که ریاضیدانها دوست دارند، باید علاقه مند باشند یا اینکه تنها دانش آموزانی که شایستگی پرورش را دارند و ممکن است ریاضیدانهای حرفه ای فردا بشوند، مدّنظر داشته باشند. لزوم یادگیری بیشتر ریاضی در این زمان نسبت به گذشته ممکن است موجب شود در جستجوی راههای میان بُری باشیم که شاید ضرر آن بیش از نفعش باشد. نظر به خطرهای احتمالی، شاید بهتر باشد که آنچه را به نظر ما اصول بنیادی و راهبُردهای عملی این کار هستند صورتبندی کنیم.

برای چه کسی؟

برنامهٔ درسی ریاضیات دبیرستان بایستی نیازمندیهای همه دانش آموزان را در نظر بگیرد و زمینهٔ فرهنگی دانش آموزان را در آموزش دخیل بداند و نوعی آمادگی حرفه ای را برای کاربَران فردای ریاضی فراهم سازد که این افراد همانا مهندسان و دانشمندان خواهند بود. برنامه درسی ریاضیات بایستی علوم فیزیکی را که پایهٔ تمدّن تکنولوژیک ماست و نیز علوم اجتماعی را که روز به روز به ریاضیات بیشتری نیازمند است مدّنظر قرار دهد. در عین حال برنامهٔ درسی باید بتواند زمینهٔ لازم برای ارائهٔ موادّ اساسی به دانش آموزان دیگری که ریاضیدانهای آینده خواهند بود، فراهم کند. با این وجود ارائهٔ مطالبی متأثر از عده قلیلی از دانش آموزان که ریاضیدانهای آینده هستند به همهٔ دانش آموزان، عبس و بیهوده است و دست یابی به آن، به بهای چشم پوشیدن از نیازهای اجتماعی و علمی جامعه به عنوان یک هدف مهّم و کلّی خواهد بود.

ریاضیدانها، که در برابر سلطه و حکمفرمایی آموزشگران حرفه ای بر آموزش و اینکه روش آموزش بر محتوا مقدّم است، عکس العمل نشان می دهند، حال خود ممکن است بر تقدّم محتوا بر روش آموزشی تاکید کنند، که در هر دو صورت به بی فایدگی منجر شود.

دانستن یعنی توانایی انجام دادن

در ریاضیات، دانش به هر میزان هرگز به معنی در اختیار داشتن اطلاعات نیست بلکه دانستن رموز و چگونگی به کارگیری اطلاعات، دانش است.

دانستن ریاضیات یعنی توانایی انجام دادن آن، به عبارت دیگر بکارگیری روان ریاضی برای حل مسایل، نقد و موشکافی استدلال ها، پیدا کردن اثبات ها و از همه مهمتر شناخت مفاهیم ریاضی از بطن یک وضعیت محسوس و حقیقی یا استخراج آن مفاهیم از وضعیت مورد نظر است. بنابراین معرفی مفاهیم جدید بدون داشتن زمینه قبلی کافی در خصوص حقیقتهای ملموس، معرفی مفاهیم مجرّد در زمانی که هنوز تجربه ای از تجرید وجود ندارد یا عجله در معرفی مفاهیم بدون کاربردهای ملموسی که می توانند دانش آموزان را به تحرّک فکری و فعالیت وا دارند بدتر از بی حاصل بودن آن است. در واقع، صورت گرایی زودرس ممکن است به عقیم کردن یادگیری ریاضی منجر شود. معرفی زودرس انتزاع، به ویژه با مقاومت ذهن های نقّاد و کنجکاو روبرو می شود، ذهن هایی که قبل از پذیرش انتزاع خیلی دوست دارند بدانند که این تجرید بر چه اساسی استوار است و چگونه می تواند مورد استفاده قرار گیرد.

ریاضیات و علوم

ریاضیات از نظر اهمیّت فرهنگی و تربیتی به اندازهٔ کاربرد عملی

آن با علوم دیگر مرتبط بوده و علوم دیگر نیز با آن مرتبط هستند. ریاضی ابزار اساسی و زبان علوم است. جداکردن ریاضیات از علوم دیگر، موجب فقدان و گُم شدن مهمترین انگیزه ها، زیبایی ها و محرّک های ریاضیات می شود.

رویکرد استقرایی و اثباتهای صوری

تفکّر ریاضی تنها استدلال استنتاجی نیست، همچنین اثبات صوری صرف هم نمی باشد. فرایندهای ذهنی و فکری که اثبات و چگونگیِ اثبات را ارائه می کند همانند خود اثبات که نتیجه تفکّر ریاضی است، بخشی از تفکّر ریاضی محسوب می شود. استخراج مفاهیم درست از وضعیت های محسوس و ملموس، تعمیم از حالات مشهود، استدلال استقرایی، استدلال از طریق تمثیل و زمینه های شهودی که برای آشکارکردن یک حدسیّه بکار می روند، همگی سبک و طریقه ریاضی گونهٔ تفکّر است. درواقع، بدون تجربه های ناشی از این گونه فرایندهای غیررسمی تفکّر، دانش آموزان نمی توانند نقش صحیح نمادها و فرمولها و اثبات های خشک و صوری را همانگونه که این نقش توسط هادامارد به خوبی تشریح شده است درک کنند: «هدف دقّت ریاضی، پذیرش و مشروعیت بخشیدن یافته های حاصل از شهود است و هرگز هدف دیگری برای آن متصور نشده است.»

سطح های مختلفی برای دقت ریاضی وجود دارد. دانش آموز بایستی ریاضی را متناسب با زمینه های قبلی و تجربه های خود درک کند، از آن لذت ببرد و به نقد یافته های خود از آن بپردازد. اجبار و تحمیلِ نا به هنگامِ سطح بسیار صوری و مجرّد ریاضی، ممکن است به دلسردی و تنفر از ریاضی منتهی گردد. به علاوه، درک دقّت ریاضی از طریق مواردی که در آنها اثبات، مشکلات واقعی را حل می کند بهتر از زمانی که به موشکافی و چنگ زنی نافرجام بر بدیهیات می پردازیم میسّر است.

روش تکوینی[1]

همانطورکه جیمز کلارک ـ ماکسول می گوید، «یکی از بزرگترین امتیازها برای دانش آموزان هر رشته یا موضوع، خواندن سرگذشت و تاریخچهٔ آن است. زیرا علم همیشه هنگامی به طورِ کامل درونی و هضم می شود که در نقطه آغازین آن شروع گردد».

از جمله معلمهایی که از این موضوع الهام گرفته اند می توان از ارنست ماخ نام برد که در توضیح و تشریح یک ایده از پیدایش و تکوین آن و روند شکل گیری تاریخی آن ایده شروع می کرد. این روش ممکن است یک اصل کلی را پیش رو نهد و آن این که: بهترین روش هدایت و توسعهٔ ذهنی افراد این است که فرایند رفت و بازگشتی و چرخشی از توسعه ذهنی فراهم کنیم و راهبُردهای مهم این رفت و بازگشت ها را ارائه کنیم البته نه با هزاران خطای جزئی!

این اصل تکوینی ممکن است ما را از یک سردر گُمی و گیجی مشترک حفظ کند. یعنی اگر در یک دستگاه مشخص، A به طور منطقی قبل از B باشد، ممکن است در آموزش و یادگیری هنوز B بر A مقدّم باشد به ویژه اگر B نسبت به A از نظر زمانی و تاریخی تقدّم داشته باشد.

در کل با بیان و ارائهٔ اصل «تکوینی» در برابر رویکرد صوری خالص می توانیم موفقیت بزرگتری را انتظار داشته باشیم.

ریاضیات سنّتی

آموزش ریاضیات در مدارس ابتدایی و متوسطه بسیار بسیار عقب تر از نیازمندی ها و ضرورتهای امروزه است ما همدلانه این اصل پذیرفته شده از سوی همگان را توصیه می کنیم: هنوز هم ادّعاهایی به گوش می رسد که مواد و موضوعهایی که در مدارس متوسطه آموزش داده می شود کهنه و منسوخ شده است. این ادّعا باید به دقت نقد و موشکافی شود و نبایستی بطور سطحی به آن نگریست.

جبر مقدماتی، هندسه مسطّحه و شکلهای (فضایی)، مثلثات، هندسه تحلیلی و حسابان هنوز اساس و پایه آموزش هستند همانگونه که در پنجاه یا صد سال گذشته هم به همین صورت بوده اند. کاربران ریاضیات باید همه این موضوعها را بیاموزند چه بخواهند زمینه ریاضیدان شدن را کسب کنند، چه بخواهند فیزیکدان، متخصص علوم اجتماعی و یا مهندس شوند همهٔ این موضوعها، می توانند ارزش های فرهنگی و تربیتی را به عموم دانش آموزان ارائه کنند.

برنامهٔ درسی ریاضیات سنتی در بردارندهٔ همهٔ این موضوعها به استثنای حسابان آن هم تا حدودی می باشد. حذف هریک از این مواد خطرناک و مصیبت آمیز است.

چیزی که در برنامه درسی کنونی بَد است خیلی به بَدی موضوعهای ارائه شده مربوط نیست، بلکه جدایی ریاضیات از

بنابراین معرفی مفاهیم جدید بدون داشتن زمینه قبلی کافی در خصوص حقیقتهای ملموس، معرفی مفاهیمِ مجرّد در زمانی که هنوز تجربه ای از تجرید وجود ندارد یا عجله در معرفی مفاهیم بدون کاربردهای ملموسی که می توانند دانش آموزان را به تحرّک فکری و فعالیت وا دارند بدتر از بی حاصل بودن آن است.

حیطه های دیگر دانش و تحقیق، به ویژه علوم فیزیکی، و نیز به هم مرتبط نبودن موضوعهای دیگر است. حتی تکنیک ها و قضیه های درون آن موضوع، منفرد بنظر می رسند و درواقع برای دانش آموزان، رموز نامربوط به یکدیگر جلوه می کنند، دانش آموزانی که خود را در ظُلمات ناشی از ندانستن ریشه و اساس و نیز هدف واقعیتهایی که باید از طریق تکرار و حفظ کردن فرا بگیرند، می یابند. متأسفانه اغلب چنین است که مواد ارائه شده بی فایده و خسته کننده بنظر می رسند، مگر برای تعداد بسیار کمی از دانش آموزان که علی رغم ماهیت برنامهٔ درسی، ریاضیدانهای آینده خواهند شد.

در واقع، صورت گرایی زودرس ممکن است به عقیم کردن یادگیری ریاضی منجر شود. معرفی زودرس انتزاع، به ویژه با مقاومت ذهن های نقّاد و کنجکاو روبرو می شود، ذهن هایی که قبل از پذیرش انتزاع خیلی دوست دارند بدانند که این تجرید بر چه اساسی استوار است و چگونه می تواند مورد استفاده قرار گیرد.

ریاضیات مُدرن

نظر به فقدان اتصال و ارتباط بین بخشهای مختلف برنامه کنونی، می توان به گروههای کاری ای که روی برنامه جدید کار می کنند توصیه کرد که در جستجوی معرفی مفاهیم کلی و عمومی به هم مرتبط (دارای وحدت) باشند.

ما فکر می کنیم به کارگیری معقول مجموعه ها، زبان و مفاهیم مجرّد جبر، می تواند پیوستگی و ارتباط بیشتر و وحدت مطالب برنامهٔ درسی ریاضی را به همراه داشته باشد، ولی هنوز هم جوهر و روح ریاضیات جدید را نمی توان به وسیلهٔ تکرار صرف واژه های اختصاصی آن، آموزش داد. در راستا و توافق با اصول ما، بسیار مایلیم پیش از معرفی اصطلاحها و مفاهیم جدید، به وسیلهٔ ملموسات و محسوسات کافی، تمهید مقدمات انجام گرفته باشد و سپس به وسیلهٔ کاربردهای درگیرکننده و واقعی و اصیل و نه به وسیلهٔ مواد کم مایه و بی نکته، ارائه شوند. اگر می خواهیم یک نوجوان با هوش را متقاعد کنیم که حاضر و آمادهٔ هضم و جذب مفاهیم باشد باید او را متقاعد کنیم که آن مفاهیم، نیازمند توجّه هستند.

در اینجا نمی توانیم وارد تجزیه و تحلیل جزئیات برنامهٔ جدید درنظر گرفته شده بشویم. ولی نمی توانیم ناگفته بگذاریم که در قضاوت و کارشناسی پیرامون رهنمودهای تنظیم شده در فوق به نکاتی می رسیم که نمی توانیم بر سر آنها توافق داشته باشیم.

البته همهٔ ریاضیدانها دارای ذوق و سلیقه یکسان نیستند. ریاضیات دارای وجوه گوناگون زیادی است. می تواند بعنوان ابزاری برای درک و فهم دنیای اطراف ما مورد توجه قرار گیرد کمااینکه به احتمال قوی برای ارشمیدس و نیوتن از همین وجه دارای ارزش بوده است، همچنین ریاضیات می تواند به عنوان یک بازی با قوانین از پیش تعیین شده در نظر گرفته شود. که در آن، اصل اساسی احترام به قوانین از پیش تعیین شدهٔ آن است. برخی از این گونه نگرش ها می تواند برای بعضی مسایل اساسی مناسب باشند.

چند سیما و منظر دیگر از ریاضیات وجود دارد و یک ریاضیدان حرفه ای ممکن است عنایت و لطف (طرفدار) بیشتری نسبت به یکی از آنها داشته باشد. امّا زمانی که نوبت آموزش و تدریس می رسد انتخاب هرکدام از این جوانب دیگر مسئله سلیقه ای نیست. می توان انتظار داشت که یک نوجوان با هوش بایستی کشف دنیای اطراف خودش را طلب کند. امّا نمی توان انتظار داشت که او قوانین از پیش تعیین شده را یاد بگیرد که مثلاً «چرا اینها درستند و آنها نادرست؟».

در هر حالتی، ما شدیداً آرزومند موفقیت زیاد برنامه ریزان برنامهٔ جدید هستیم. به ویژه آرزو می کنیم برنامهٔ جدید قابلیت انعطاف بیشتری برای ارتباط بین ریاضی و علوم و توجه دقیق به تشخیص، تفکیک و تفاوت بین موادّی ک به طور منطقی باید از پیش ارائه شوند و موادّی که در آموزش تقدّم و ترجیح دارند داشته باشد. تنها از این طریق می توان امیدوار بود که ارزشهای اساسی و بنیادی، معنای اصلی، هدف ها و سودمندی ریاضیات، قابل دسترس برای همه دانش آموزان باشد و صد البته، برای آنهائی که ریاضیدان آینده خواهند شد.

آرزو می کنیم برنامهٔ جدید قابلیت انعطاف بیشتری برای ارتباط بین ریاضی و علوم و توجه دقیق به تشخیص، تفکیک و تفاوت بین موادّی ک به طور منطقی باید از پیش ارائه شوند و موادّی که در آموزش تقدّم و ترجیح دارند داشته باشد.

این نگرانی شایع در مورد «تاکید بیش از حد بر مفاهیم انتزاعی و مجرّد در تدریس ریاضیّات به مهندسان»، در راستای همین نکات و اظهارات است. [۲] ❊

امضاء کنندگان به ترتیب حروف الفبای انگلیسی[۳]:

Lars V. Ahlfors
Harvard University

Harold M. Bacon
Stanford University

Clifford Bell
University of California (at L. A)

Richard E. Bellman
Rand Corporation

Lipman Bers
New York University

Garrett Birkhoff
Harvard University

R. P. Boas
North western University

Alfred T. Brauer
University of North Carolina

Richard Brauer
Harvard University

Jack R. Britton
University of Colorado

R. Creighton Buck
University of Wisconsin

George F. Carrier
Harvard University

Hirsh Cohen
International Business Machine Corp.

Richard Coutant
New York University

H. S. M. Coxeter
University of Toronto

Dan T. Dawson
Stanford University

Avron Douglis
University of Maryland

Arthur Erdélyi
Californin Institute of Technology

Walrter Freiberger
Brown University

K. O. Friedrichs
New York University

Paul R. Carabedian
New York University

David Gilbarg
Stanford University

Sydney Goldstein
Harvard University

Herman Goldstine
International Business Machine Corp.

Herman Goldstine
International Business Machine Corp.

Jobn D. Hancock
Alameda Stste college

Charles A. Hutchinson
University of Colorado

Mark Kac
Rockefeller Institute

Wilfred Kaplan
University of Michigan

Aubrey J. Kempner
University of Colorado

Lucien B. Kinney
Stanford University

Morris Kline
New York University

Ignace I. Kolodner
University of New Mexico

Rudolph E. Langer
University of Wisconsin

C. M. Larsen
San Jose State College

Peter D. Lax
New York University

Walter Leighton
Western Reserve University

Norman Levinson
Massachusetts Institute of Technology

Hans Lewy
University of Californis, Berkeley

W. Robert Mann
University of North Carolina

M. H. Martin
University of Maryland

Deane Montgomery
Institute for Advanced Study

Marston Morse
Institute for Advanced Study

Zeev Nehari
Carnegie Institute of Technology
Jerzy Neyman
University of Californis, Berkeley

Frederick V. Pohle
Adelphi College

H. O-Pullack
Bell Telephone Labs., Inc.

George Pólya
Stanford University

Hillel Poritsky
General Electric Company

William Prager
Brown University

Murray H. Protter
University of California, Be:

Tibor Rado
Ohio State University

Warwick W. Sawyer
Wesleyan University

Max M. Schiffer
Stanford University

James B. Serrin
University of Minnesota

Lehi T. Smith
Arizona State University

I. S.Sokolnikoff
University of California at L.

1 - Genetic Method

2- First Summer Study Group in Theoretical and Applied Mechanics Curriculs. Boulder, Colorsdo, June, 1961.

۳ـ نام تمامی امضاء کنندگان در اختیار نبود.

شرح حال یک ریاضی دان آموزشگر

هانس فرودنتال در ۱۷ سپتامبر ۱۹۰۵ در آلمان به دنیا آمد و در دانشگاههای برلین و پاریس به تحصیل پرداخت و به دعوت شهودگرای معروف ریاضی بروئر، به آمستردام رفت. او در سال ۱۹۴۶ استاد دانشگاه ایالتی اوترخت[1] شد. کار فرودنتال در دانشگاه ریاضی محض و کاربردی و مبانی بود. کار علمی ـ تحقیقاتی فرودنتال بر هندسه متمرکز بود و خدمات ارزنده ای در زمینهٔ توپولوژی و نظریهٔ گروههای لی[2] انجام داد.

اگرچه فرودنتال از همان ابتدا به آموزش ریاضی علاقمند بود، با این حال، با شرکت در کنگرهٔ بین‌المللی تدریس ریاضی (ICMI) به عنوان نمایندهٔ هلند در سال ۱۹۵۵، به طور جدّی تغییر دیدگاه داد و بالاخره از سال ۱۹۶۶ تا ۱۹۷۰ دبیر کل این کنگره شد. در همین موقع، فرودنتال از سال ۱۹۶۸ مجلهٔ **مطالعات آموزشی در ریاضی**[3] را منتشر کرد که همچنان یکی از معتبرترین نشریات تحقیقاتی در آموزش ریاضی است. تعداد کتاب ها و مقاله های چاپ شدهٔ فرودنتال از حدّ شمارش گذشته است.

علاوه بر ریاضی و آموزش آن، فرودنتال شاعر و نویسنده ای توانا بود و در معروفترین روزنامه های هلند اغلب شعر یا قطعه ای از او دیده می شود. فرودنتال به چندین زبان زندهٔ دنیا تکلّم می کرد و می نوشت. او دارای شش مدرک افتخاری بود. او در سال ۱۹۹۰ بدرورد حیات گفت.

1. Utrecht
2. Lie
3. Educational Studies In Mathematics

روند تغییر محتوای برنامهٔ درسی ریاضیات مدرسه

زهرا گویا
دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

یکی از زیربناهای نظری تغییر برنامهٔ درسی ریاضی در اواخر دههٔ ۵۰ و دههٔ ۶۰ میلادی که به **دوران ریاضی جدید**[1] معروف شد، دیدگاههای جرومُ برونر بود. تأکید برونر بر ساختار دانش، با دیدگاه فلسفیِ ریاضی صورت گرایان[2] همخوانی داشت. در نتیجه، برنامه ریزان درسی ریاضی که عموماً از بارزترین چهره های ریاضی بودند، با تلفیق این دو دیدگاه، به تهیهٔ برنامهٔ درسی جدید ریاضی پرداختند. نظریات برونر در زمینهٔ آموزش و پرورش تأثیر شگرفی بر برنامهٔ درسی ریاضی گذاشت. او در سال ۱۹۶۳ میلادی، در **فرآیند آموزش و پرورش**[3] نوشت:

در شروع، تجربیات آموزشی باید به نتیجهٔ درک بهتر توجه کند نه فقط اجرای بهتر. درک شامل احاطه بر یک ایده یا حقیقت به طریق یک ساختار دانش است، یعنی وقتی ما چیزی را درک می کنیم، در واقع آن را به عنوان تمثیلی از یک اصل یا نظریهٔ وسیعتر درک می کنیم. دانش به تنهایی طوری سازماندهی شده است که احاطه بر ساختار مفهومی آن خود ـ آشکار است و جای شکّی باقی نمی گذارد. دانشِ حاصل شده وقتی برای یادگیرنده بیش از همیشه مفید است که از طریق تلاشهای شناختیِ خودِ یادگیرنده کشف شده باشد، زیرا در آن صورت، به دانسته های قبلی فرد مرتبط می شود و براساس آنها توسعه یافته و مورد استفاده قرار می گیرد. چنین اعمالِ کشفی به طور شگفت انگیزی توسط خود ساختار دانش تهسیل می شوند. یعنی هر چقدر دامنهٔ دانش پیچیده باشد، باز هم می تواند به طریقی که از راههای کمتر پیچیده و فرآیندهای ظریف قابل دسترسی و دستیابی باشد معرفی گشته و نمایش داده شود.

در واقع چنین اعتقادی به ساختار دانش، برونر را به جمعبندی معروف خود رساند که «**هر موضوعی می تواند به طور مؤثّر از بعضی راههای هوشیارانه و صادقانه به هر کودکی در هر پایهٔ تحصیلی آموزش داده شود.**»

دوران ریاضی جدید

دوران ریاضی جدید نقطهٔ عطفی در تاریخ برنامه ریزی درسی ریاضی است. ضرورت شروع این دوران، پس از پرواز قمر مصنوعی شوروی (اسپاتنیک) به فضا در سال ۱۹۷۵ بیشتر احساس شد. در دههٔ ۵۰ میلادی، یکی از تحولات اساسی در علم ریاضی تکیهٔ افراطی بر ساختار ریاضی بود. به همین دلیل و با بهره گیری از نظرات برونر، بیشترین تلاش رفرمهای اساسی تغییر برنامهٔ درسی ریاضی، سازماندهی برنامه بر اساس **ساختار** موضوع به طوری بود که برونر بر آن تأکید کرده بود. برونر معتقد بود که ریاضی به دلیل ساختار خوش تعریف آن، بیش از سایر موضوعها رشد سریع داشته است. با چنین تفکّری، شوراهای متعدد برنامهٔ درسی ریاضی در آمریکا تشکیل گردید و هدف اصلی این برنامه ریزی ها، بالا بردن موفقیت تحصیلی و توانایی علمی در آن جامعه بود. آنها که در مقابل موفقیّت شوروی سابق به شدّت غافلگیر شده بودند، به ریشه یابی عدم موفقیّت خود پرداختند و طی مطالعات وسیعی، نتیجه گیری کردند که ضعف اساسی جامعهٔ آمریکا ناشی از آموزش علوم و ریاضی است. از جمله معروفترین شوراهای برنامه ریزی، **گروه مطالعات ریاضی مدرسه ای (SMSG)** [۴] بود که در سال ۱۹۵۸ به ریاست پروفسور بیگل[۵] استاد ریاضی دانشگاه استانفورد تشکیل گشته و در سال ۱۹۷۲ این شورا تعطیل شد. این گروه به تألیف کتابهای درسی از پایهٔ اول ابتدایی تا سال آخر متوسطه پرداخت، از سال ۱۹۵۲ تا سال ۱۹۶۲، تقاضای شدید اجتماعی برای افزایش موفقیّت تحصیلی، نهضت آموزش و پرورش پیشرو به رهبری جان دیویی، پیشرفتهای قابل ملاحظه در علم ریاضی، توجّه به ایجاد شایستگی ریاضی و بهبود محتوای درسی ریاضی و رواج نظریه های یادگیری، برونر و پیاژه، همگی مؤیّد و مدافع برنامه های درسی SMSG و گروههای مشابه بودند. مطالعهٔ جریان کار SMSG برای ریاضیدانهای ایرانی که در رابطه با آموزش عمومی رسالتی احساس می کنند، از اهمیت و ضرورت ویژه ای برخوردار است زیرا تغییر برنامه های درسی در ایران که از نیمهٔ دوّم دههٔ ۴۰ خورشیدی آغاز شد، به شدّت تحت تأثیر کارهای این گروه بود و در سراسر کتابهای درسی در ایران از دورهٔ ابتدایی تا پایان دورهٔ متوسطه، ردّ این تفکّر به وضوح دیده می شد.

برنامهٔ ریاضی جدید در عمل

در بحبوحهٔ جریان تألیف کتابهای درسی توسط SMSG، برنامهٔ ریاضی جدید مورد نقّادی بسیاری از ریاضیدانها قرار گرفت. در بیانیهٔ معروفی که به امضای هفتاد و پنج تن از ریاضیدانهای مشهور دنیا در آمریکا و کانادا در سال ۱۹۶۲ صادر شد[۷]، تکیهٔ افراطی بر ساختارگرایی و تفکّر تجریدی مورد انتقاد قرار گرفت. در بخشی از این بیانیه آمده است:

معرفی مفاهیم جدید بدون داشتن زمینهٔ قبلی کافی در خصوص حقیقتهای ملموس، معرّفی مفاهیم مجرد در زمانی که هنوز تجربه ای از تجرید وجود ندارد، یا عجله در معرّفی مفاهیم بدون کاربردهای ملموسی که می توانند دانش آموزان را به تحرک فکری و فعالیّت وادارند، در واقع صورت گرایی ناپخته و بی استفاده ای است که ممکن است به عقیم کردن یادگیری ریاضی منتهی شود. معرّفی خام و زودرس انتزاع، به خصوص با مقاومت ذهنهای نقّاد و کنجکاو روبرو می شود. ذهن هایی که قبل از پذیرش انتزاع آرزو دارند بدانند که این تجرید بر چه اساسی منطبق است و چگونه می تواند مورد استفاده قرار گیرد.

در همین زمینه، ریاضیدان معروف فلیکس کلین[۸] اعتقاد داشت که «در تدریس ریاضی، نه تنها قابل قبول بلکه مطلقاً ضروری است که در شروع کمتر انتزاعی بوده و مرتّب به کاربردها بپردازیم و فقط زمانی به طور تدریجی به پالایش ایده ها و تجرید برسیم که دانش آموز برای درک آنها توانمند شده باشد.»

برنامهٔ درسی **ریاضی جدید**[۹] نتوانست به نیازهای اجتماعی جامعهٔ آمریکا بعد از جنگ جهان دوم پاسخ گوید. جامعه به شدّت نیازمند آموزش شهروندان خود و افزایش کارآیی آموزشی بود. نیاز مبرمی به بهبود وضعیّت اقتصادی در جامعه وجود داشت. نظام آموزشی در پاسخگویی به جامعه دچار ضعف شده بود. موریس کلاین[۱۰] ـ یکی از امضاکنندگان بیانیهٔ ۱۹۶۲ ـ در کتابهای معروف خود با عنوانهای **چرا جانی نمی تواند جمع کند؟**[۱۱] و **چرا پروفسور نمی تواند تدریس کند؟**[۱۲] به شدّت **برنامهٔ درسی ریاضی جدید** را به زیر سؤال برد. تمام این عوامل، باعث افزایش فشار عمومی برای تغییر این برنامه گشته و بالاخره دههٔ ۷۰ میلادی شاهد نهضت **رجعت به اصول**[۱۳] در برنامهٔ درسی ریاضی شد. طرفداران این نهضت با تأکید بر ناتوانی برنامهٔ درسی ریاضی جدید، در پاسخگویی به نیازهای جامعه و در ارتقای آموزش عمومی برای همگان، چارهٔ کار را در تکیه بر قواعد و مهارت آموزی اصول محاسباتی گذاشت و به گفتهٔ شونفیلد[۱۴]، بار دیگر آونگ با ۱۸۰ درجه نوسان به انتهای طیف برگشت. در دههٔ ۷۰ میلادی، انواع برنامه های درسی با چنین تأکیداتی به وجود آمد. با این حال، اوّلین **مطالعهٔ بین المللی ریاضی (FIMS)** [۱۵] و بسیاری از ارزیابیهای ملّی در آمریکا نشان داد که **رجعت به اصول** هم موفّق به ارتقای توانایی های ریاضی دانش آموزان آمریکایی نشده است. مجامع تخصصّی ریاضی و آموزش ریاضی و در رأس آنها، شورای ملّی معلّمان ریاضی در آمریکا و کانادا[۱۶] (NCTM) به فکر چاره افتاد و در دستور کار[۱۷] خویش برای دههٔ هشتاد، **حل مسأله را قلب طپندهٔ آموزش ریاضی** اعلام کرد. اگرچه جرج پولیا، در سال ۱۹۴۵ در کتاب معروف خود **چگونه مسأله را حل کنیم؟**[۱۸] چنین

نگرشی نسبت به حل مسأله را عنوان و ادّعا کرد حل مسأله یاددادنی و یادگرفتنی است، به هر حال، در دههٔ هشتاد میلادی، جامعهٔ آموزش ریاضی با بازنگری به آثار پولیا، تحقیقات جدّی دربارهٔ حل مسألهٔ ریاضی را آغاز کردند. همچنین، در همین دهه، نگرشهای نوین به موضوع یادگیری به وجود آمد. یکی از معروفترین نگرشها که تا به حال به قوّت خود باقی مانده است و کارهای اصولی زیادی در زمینهٔ تحقّق آن در واقعیّت کلاس درس ریاضی و برنامهٔ درسی آن انجام گرفته، جهان بینی ساخت و سازگرایی است. این دیدگاه، انسان را سازندهٔ دانش خویش می شناسد و ریاضی را هم جزیی از این دانش به حساب می آورد.

ادبیات پژوهشی آموزش ریاضی در دههٔ هشتاد میلادی سرشار از تحقیقات متنوّع و متعدّد در زمینهٔ حل مسأله است. با وجود تمام این مطالعات و سعی در به کار بستن یافته های تحقیقاتی برای بهبود آموزش ریاضی، دانش آموزان آمریکای همچنان دچار افت تحصیلی ریاضی بودند و نتایج دومین **مطالعهٔ بین المللی ریاضی**[20] (SIMS) مؤید این نکته بود. مجدداً آموزشگران ریاضی در پی چاره جویی افتادند و به جستجوی سایر عوامل تأثیرگذار بر موفقیّت حل مسأله برآمدند. از جمله عواملی که بسیار مؤثر تشخیص داده شد، نقش فراشناخت[21] در ارتقای توانایی حل مسأله بود. فراشناخت به معنای آگاهی از فرآیند شناختی، خود ـ نظمی[22] و نظام باوری فراگیرندگان است. از طرف دیگر، **نظریهٔ تعامل اجتماعی**[23] ویگوتسکی[24] ه برای اوّلین بار در دههٔ ۳۰ میلادی در شوروی سابق مطرح شده بود، دوباره مورد توجّه و دقّت قرار گرفت. ویگوتسکی معتقد بود که تعامل اجتماعی باعث افزایش توانایی یادگیرنده می شود و می تواند مرحلهٔ رشد ذهنی را جلو بیندازد. در واقع، ویگوتسکی با قبول مراحل رشد ذهنی پیاژه، برخلاف او، این مراحل را وابسته به سن ندانست. نقش عوامل اجتماعی ـ فرهنگی را در افزایش رشد بسیار مؤثّر می دید. این دیدگاه، توجیه نظری کار در **گروههای کوچک**[25] در کلاسهای درس ریاضی شد و در این زمینه تحقیقات زیادی انجام گرفت.

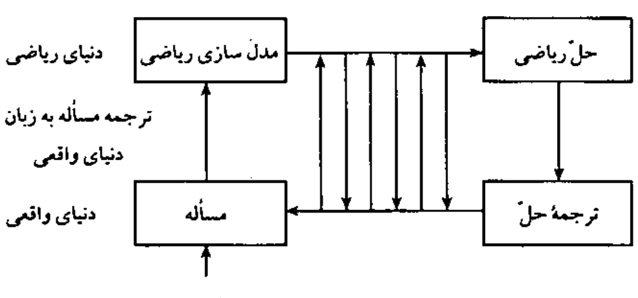
استانداردهای جدید آموزش ریاضی[26]

تمام این بررسیها به تهیّهٔ استانداردهای NCTM برای برنامهٔ درسی و ارزشیابی ریاضی در دههٔ ۹۰ میلادی و آماده سازی جامعه برای ورود به قرن بیست و یکم انجامید. به توصیهٔ NCTM، استانداردهای برنامهٔ درسی ریاضی برای تمام پایه های تحصیلی عبارت از ریاضی به عنوان **حل مسأله**[27]، ریاضی به عنوان **نحوهٔ استدلال**[28]، ریاضی به عنوان **ارتباطات**[29] و ریاضی به عنوان **اتّصال و ارتباط درونی و بیرونی**[30] می باشد که تعبیر و تفسیر هر یک از این استانداردها، موضوع مقاله های دیگری است. تنها توضیح مختصری در مورد استاندارد حل مسأله ارائه می گردد.

ریاضی به عنوان حل مسأله

در تدریس ریاضی از راه حل مسأله؛ دنیای واقعی نقطهٔ شروع است یعنی مسأله از دنیای واقعی گرفته می شود و سپس به زبان دنیای ریاضی ترجمه می گردد که این ترجمه در واقع همان مدل سازی ریاضی سات. گاهی برای ترجمهٔ درست این دو زبان ـ دنیای واقعی و دنیای ریاضی ـ چندین بار رفت و برگشت بین این دو دنیا انجام می گیرد و ابزار مختلفی به کمک گرفته می شوند تا بالاخره ترجمه کامل گشته و **حل ریاضی** برای مسألهٔ دنیای واقعی به دست می آید. متأسفانه در ریاضی مدرسه ای، در بهترین حالت تدریس ریاضی یعنی با تکیه بر دنیای واقعی، محسوس و ملموس فراگیرنده باز هم بیشتر اوقات، به دست آوردن حل ریاضی به منزلهٔ نقطهٔ پایان کار است، در صورتی که در جریان حل مسأله، این حل ریاضی باید دوباره به زبان دنیای واقعی ترجمه گشته و درآن دنیا، تعبیر و تفسیر گردد. البته این فقط یک دوره از کار است و این تعامل بین دو دنیا با پویایی ادامه پیدا می کند و هر بار مسألهٔ جدید باعث اعتلای ریاضی و اضافه شدن بخشهای جدیدی به آن می شود. همچنین، گسترش ریاضی و غنی تر شدن آن، رهگشای حل مسائل عمیق تر، پیچیده تر و مبرم تری از دنیای واقعی می گردد.

ایجاد توانایی مدل سازی در فراگیرندگان، یکی از عوامل مؤثّر



اعتلای ریاضیات است. در حقیقت، فرآیند حل مسأله و مدل سازی مسائل واقعی، ممکن است بیش از پیدا کردن جواب آخر اهمیّت پیدا کند و در طی این مسیر، به ساختنها و کشفهای تازه ای نایل گردیم.

انتظارات صنایع از ریاضی مدرسه و دانشگاه

به واقع، پرورش توانایی های مدل سازی و حل مسأله، می تواند پاسخگوی بخشی از انتظارات صنایع از ریاضی مدرسه باشد. در تحقیق وسیعی که هنری پولاک[31] در همین زمینه انجام داد و گزارش آن در سال ۱۹۸۷ میلادی منتشر شد، مهمترین

انتظارات صنایع از ریاضی مدرسه ای و دانشگاهی را چنین جمعبندی کرد:

صنایع انتظار دارند که فارغ التحصیلانی که وارد بازار کار می‌شوند، توانایی وضع مسائل با عملیات مناسب را داشته و... از دانش تکنیکهای گوناگون برای نزدیک شدن و کار کردن با مسائل بهره مند باشند. از این فارغ التحصیلان انتظار می رود که اصول زیربنایی ریاضیِ مسائل را درک کرده و توانایی کار کردن مشارکتی با بقیه را در حین حل مسائل داشته باشند. از ایده های ریاضی در حل مسائل متداول امّا پیچیده کمک بگیرند و آمادگی لازم را برای موقعیّتهای پیش بینی نشده به دست آورند زیرا بیشتر مسائلی که در دنیای واقعی وجود دارند به خوبی صورت بندی[۳۲] نشده اند. همهٔ این توانایی ها مستلزم اعتقاد این افراد به سودمندی و ارزش ریاضی است.

تغییرات برنامهٔ درسی ریاضی با تأکید بر حل مسأله، ایجاد توانایی های فراشناختی، در نظر گرفتن نقش تعامل اجتماعی و فرهنگ در یادگیری ریاضی و توجّه به استانداردهای حل مسأله، استدلال، ارتباطات و ایجاد ارتباط و اتصال بین مقولات ریاضی و بین ریاضی و دنیای خارج ریاضی می تواند انتظارات صنایع از ریاضی مدرسه را تا حدودی برآورده کند.

نیاز به دیدگاههای نو در عصر فراصنعتی

قرن آینده که عصر فراصنعتی و به تعبیر الوین تافلر[۳۳]، عصر دانایی نامیده می شود، انتظارات جدیدی از ریاضی خواهد داشت که دیدگاههای نو، توان پاسخگویی به آنها را ایجاد خواهد کرد. از جمله صاحبنظرانی که می توانند در این زمینه مؤثر باشند جروم برونر است. همانگونه که برونر در تغییر برنامهٔ درسی در دههٔ ۵۰ میلادی نقشی اساسی ایفا کرد، در آستانهٔ ورود به قرن بیست و یکم نیز ایده هایش می تواند چنان اثری داشته باشد. جمعبندی معروف برونر که **هر موضوعی می تواند به طور مؤثّر از بعضی راههای هوشیارانه و صادقانه به هر کودکی در هر مرحله از رشد ذهنی آموزش داده شود** پس از ۳۳ سال به وسیلهٔ خود او زیر سؤال رفته است. برونر در پیشگفتار تازه ترین اثر خود به نام **فرهنگ آموزش و پرورش**[۳۴] می گوید «من نمی دانم روش صادقانه چه روشی است؟ آیا واقعاً می توانیم ساختار دانش را به این جزمیت در هر پایهٔ تحصیلی به هر کودکی آموزش دهیم؟» او در دنبالهٔ نقد خود از نظرات خویش ادامه می دهد که اصلاح طلبان (از جمله خودش) فرض کرده بودند که به همان اندازه در چیرگی بر مطالب آن برنامهٔ درسی و محتوای انتخاب شده مشتاق هستند. درواقع فرض این اصلاح طلبان [آموزشگران و برنامه ریزان و متخصصّان موضوع] آن بود که دانش آموزان در نوعی قرنطینهٔ آموزشی به سر می برند که هیچ مشکل و معضل فرهنگی آنها را آزار نمی دهد. چنین دیدگاهی، تا مدّتها آموزشگران ریاضی را دچار توهّم کرده بود و شکست هر برنامهٔ درسی و افت تحصیلی را تنها ناشی از عوامل شناختی و تأثیر مراحل رشد ذهنی کودک می دانستند. از دههٔ هشتاد میلادی به بعد، نقش عوامل غیرشناختی و اجتماعی و فرهنگی بیشتر مورد تأکید قرارگرفت و برونر که از تأثیرگذاران معروف بر فرآیند برنامهٔ درسی است، پس از مطالعهٔ همه جانبهٔ آثار ویگوتسکی، به معرّفی نظریهٔ جدید خود که تأکیدش را بر نقش فرهنگ در آموزش و پرورش گذاشته، پرداخته است. همچنین، ریاضی به عنوان یک فعالیّت اجتماعی مورد توجّه بسیاری از آموزشگران قرار گرفته است. توجّه به نقش فرهنگ و جامعه در یادگیری ریاضی، نویدبخش پیدا شدن افقهای جدید آموزش ریاضی در عصر فراصنعتی است. عصر فراصنعتی در سیطرهٔ اطلاعات و خدمات خواهد بود. در چنین عصری، با ذکاوت کارکردن مهمّ‌تر از پرکاری و سخت کاری است. بنا به گزارش شورای ملّی تحقیق در آمریکا NRC[۳۶] که در سال ۱۹۹۰ میلادی به اسم تغییر شکل ریاضی مدرسه[۳۷]: **فلسفه و چارچوبی برای برنامهٔ درسی** منتشر شد تأکید شده است. «مشاغلی که به اقتصاد جامعه کمک می کند، نیازمند شهروندانی است که از نظر ذهنی آماده باشند. شهروندانی که برای جذب ایده های جدید آمادگی دارند. قابلیت تغییر داشته با ابهامات کنار می ایند، الگوها و نظم را درک کرده و مسائل غیرمتعارف را حل می کنند.» در عصر فراصنعتی: پرورش روحیهٔ علمی، تفکّر انتقادی[۳۸] و بازتابی[۳۹] و توانایی تجزیه و تحلیل بیش از بازوهای ستبر و سینه های فراخ اهمیّت دارد. جامعهٔ ما به شهروندانی نیازمند است که بتوانند خوب فکر کرده و تصمیم درست بگیرند. در آستانه ورود به قرن بیست و یکم، عمر مفید بسیاری از مشاغل بیش از ده سال نیست و افراد باید برای تغییر شغل و آموزش خود انعطاف داشته باشند که لازمهٔ ایجاد این انعطاف، دیدگاههای جدید آموزش ریاضی است.

دیدگاههای جدید آموزش ریاضی

دیدگاههای جدید آموزش ریاضی، یادگیری ریاضی را یک فرایند فعّال و سازنده می داند و آموزش و تدریس ریاضی را بر مبنای اوضاع و موقعیّت هایی که مسأله در آنها قرار گرفته و واقع می شود توصیه می کند. از جمله مهمترین هدفهای آموزش ریاضی همچنان که NCTM اعلام کرده، آن است که **تمام دانش آموزان** یاد بگیرند برای ریاضی **ارزش**[۴۰] قایل شوند؛ یعنی به کارآیی و اهمیّت ریاضی در جریان زندگی و در پرورش ذهن و اندیشه واقف گردند؛ **تمام دانش آموزان** بتوانند **ارتباطات** ریاضی وار برقرارکرده و ریاضی وار استدلال کنند و نسبت به ریاضی **قدردانی**[۴۱] داشته باشند تا دانش آموزانی بشوند که به قابلیتها و توانایی های خود در انجام ریاضی **اعتماد**[۴۲] پیدا کرده و در نهایت، توانایی حل مسأله های ریاضی را پیدا کنند[۴۳].

ضرورت تغییر برنامهٔ درسی

همراه با این هدفها و دیدگاهها، تغییرات عمده ای در ابعاد گوناگون به وقوع پیوسته است که همگی دلالت بر ضرورت تغییر برنامهٔ درسی، محتوا، روش تدریس و ارزشیابی ریاضی می کنند. مهمترین تغییرات عبارت از: تغییرات در میزان نیازمندی عمومی به ریاضی، تغییرات در علم ریاضی و چگونگی کاربرد آن، تغییرات در نقش تکنولوژی به خصوص ماشین حساب وکامپیوتر، تغییرات در جامعهٔ ایران، تغییرات در درک بهتر انواع یادگیری دانش آموزان و بالاخره تغییرات در چگونگی رقابتهای بین المللی هستند. درنتیجه، با توجّه به کلّیهٔ نیازها و شرایط و با درنظرگرفتن تغییرات مذکور، باید به تهیّهٔ برنامهٔ درسی ریاضی پرداخت.

پیشنهادهای کاربردی

نظام آموزش متوسطه در ایران از سال ۱۳۷۰ خورشیدی دستخوش تغییر اساسی گردیده است. تغییر نظام آموزشی فرصت مناسبی به وجود آورده است تا یک بازنگری در برنامه درسی و محتوای ریاضی دوره متوسطه به عمل آید. در ایران، به دلیل تمرکز نظام آموزشی و کمبود رسانه های متنوّع آموزشی، کتاب درسی از اهمیّت سرنوشت سازی برخوردار است. درواقع، یکی از قوی ترین ابزار اعتلای آموزش ریاضی در ایران، تهیّه برنامهٔ درسی و ریز مواد مناسب ریاضی و تألیف کتابهای درسی متناسب با توجّه به نیازهای مطرح شده است. در این راستا، توجّه به ویژگی های اجتماعی ـ فرهنگی جامعهٔ ایران یک ضرورت است. همچنین، برنامهٔ درسی در نظر گرفته شده[۲۴] بایستی در جهت برآورده کردن انتظاراتی که از انسان آرمانی داریم باشد. برای مثال، برنامهٔ درسی ریاضی باید به نوبهٔ خود، در تربیت انسانهای خلاق، نقّاد، تصمیم گیرنده، انتخابگر، متعهد و مسؤلیت پذیر سهیم باشد.

در فرآیند تغییربرنامه، استفاده از تجارب آموزشی، پژوهشی و تاریخی سایر جوامع، بدون افتادن در دام تقلید بسیار مفید است. به همین ترتیب، مطالعات نیازسنجی و امکان سنجی به برنامه ریزان این فرصت را می دهد که متناسب با شرایط، نیازها و امکانات موجود، دست به تهیّهٔ برنامهٔ درسی بزنند. یکی دیگر از اهدافی که برنامه ریزان باید به آن توجه داشته باشند، ضرورت همگانی کردن ریاضی جهت آماده سازی جامعه برای ورود به قرن بیست و یکم و عصر فراصنعتی است.

با درنظرگرفتن تمام موارد فوق و با همکاری و مشارکت متخصصان آموزش ریاضی؛ ریاضیدانها، برنامه ریزان درسی، معلّمان ریاضی و روانشناسان آموزشی، می توان امیدوار بود که کتابهای درسی با تکیه بر اصول برنامه ریزی و حفظ اصالت موضوع به گونه ای تألیف شوند تا بتوانند در راه اعتلای ریاضی، اعتلای جامعه، و بالابردن شعور اجتماعی و ایجاد وحدت ملّی، نقش شایستهٔ خود را ایفا کنند.

منابع

1 - Bruner, J. S. (1960). The Process of Education. New York: Random House.

2 - Bruner, J. S. (1960). The culture of Education. Harvard University Press.

3 - Kline, M. (1973). Why Johnny Can't Add: The Failure of The New Math. New York: Vintage Books.

4 - Klin, M. (1977). Why The Professor Can't Teach New York: St. Martin's Press.

5 - National Council of Teachers of Mathematics. (1980). An agenda for action. Recommendations for School mathematics. Reston, VA: Author.

6 - National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: Author.

7 - National Council of Teachers of Mathematics. (1991). Professional Standards for teaching mathematics. Reston, VA: Author.

8 - National Research Council. (1990). Reshaping School mathematics. A philosophy and framework for curriculum. Washington: National Academy Press.

9 - Polya, G. (1973). How to solve it: A new aspect of mathematical method (2 nd Edition). Princeton: Princeton University Press.

10 - Schoenfeld, A. H. (1987). A brief and biased history of Problem solving. In F. R. Curcio (Ed.), Teaching and learning: A probelm - solving focus (PP. pp. 27-46). Reston, VA: Author.

11 - Vygotsky, L. S. (1962). (E. Hanfmonn & G. Vakar, Eds. & Trans.) Thought and language. Cambribge, MA: MIT Press and Wiley.

حلزون و بازگشت

Spiral through Recursion

نوشتهٔ ج . م - چاپین
ترجمهٔ سهیلا غلام آزاد
دبیر منطقهٔ ۱۷ تهران

یافتن ارتباط و اتصال بین مقوله های ریاضی ، چهارمین استاندارد از *استانداردهای برنامه تحصیلی و ارزشیابی ریاضیات* مدرسه (NCTM 1989) است . فعالیتی که در این مقاله تشریح شده است ، به منظور مرور و ایجاد ارتباط بین تعدادی از مباحث جبری و هندسی ، همچنین درگیر کردن دانش آموزان در محاسبات رسمی ، تجسم کردن ، کشف الگوها ، سری ها ، برآورد کردن و بازگشت طرح ریزی شده است . زمینهٔ اصلی این فعالیت حلزون های باراول[1] است که درون چندضلعی های منتظم ایجاد می شوند همانطور که قبلاً توسط نیومن[2] (۱۹۸۹) مورد بحث قرار گرفته بودند .

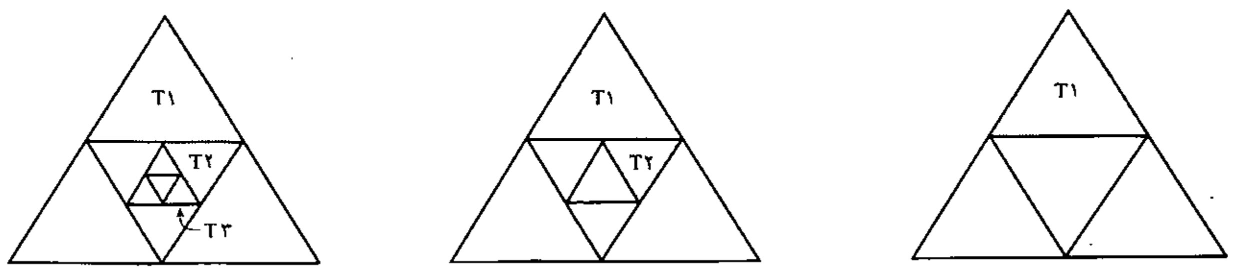
قبل از شروع این فعالیت به همراه دانش آموزان ، سؤالهای مقدماتی زیر را مطرح کنید تا بحثها و نوشته های بعدی دانش آموزان ارتقاء یابد . اول این که ، آیا مجموع یک سری که شامل بینهایت جمله است ، می تواند یک عدد متناهی ، حتی یک عدد کوچکتر از ۱ شود؟ دومین سؤال این است که آیا می توان مساحت و طول حلزونی را که از بینهایت تکه تشکیل شده است به دست آورد؟ سؤال سوم دربارهٔ چگونگی رابطهٔ بین دو سؤال اول است .

نکتهٔ اصلی در این فعالیت ، مفهوم بازگشت است . بازگشت فرآیندی است که خودش را تکرار کرده و تغییراتی را دربرمی گیرد .

در جریان خلق و توصیف حلزونها در این فعالیت ، چندین بار به الگوهای بازگشتی برمی خوریم . دو شکلی که به عنوان نقطهٔ شروع این فرآیند به کار می روند ، مثلث متساوی الاضلاع و مربع هستند .

مثلث متساوی الاضلاع

در مرحلهٔ اول این فعالیت ، دانش آموزان یک مثلث متساوی الاضلاع رسم کرده یا می سازند . وسط ضلع های مثلث را پیدا کرده به هم وصل می کنند . تا کردن کاغذ ، ترسیم و اندازه گیری از جمله تکنیک هایی هستند که دانش آموزان برای پیدا کردن وسط ضلع ها به کار می برند . از به هم وصل کردن وسط ضلع ها ، چهار مثلث همنهشتِ کوچکتر ایجاد می شود . دانش آموزان یکی از مثلثهای گوشه ای را رنگ کرده ، آن را T_1 می نامند . به شکل ۱ نگاه کنید . سپس دانش آموزان تخمین می زنند یا محاسبه می کنند که مساحت T_1 چه کسری از مساحت مثلث اولیه است . در این مرحله تأکید معلم بر این مطلب که چون چهار مثلث همنهشت کوچکتر ، مثلث بزرگتر را تشکیل می دهند پس مساحت هر یک از مثلث های کوچکتر یک چهارم مساحت مثلث بزرگتر است ، بسیار مفید می باشد . این روش یافتن مساحت ، باز هم در ادامهٔ این فعالیت به کار می رود . همچنین با استفاده از تشابه می توان گفت که چون طول ضلع ها ، نصف طول



(الف)
مثلث گوشه ای هاشور خورده و T_1 نامیده می شود .

(ب)
اولین مثلث بعد از T_1 در جهت حرکت عقربه های ساعت هاشور خورده و T_2 نامیده می شود .

(پ)
فرایند بازگشتی ادامه یافته ، T_3 هاشور می خورد .

شکل ۱

ضلع های مثلث اصلی است، پس مساحت آن باید $\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2$ مساحت مثلث اصلی باشد.

فرآیند توصیف شده با وصل کردن نقطه های میانی ضلع های مثلث مرکزی تکرار می شود. این نقطه های میانی را می توان به سادگی با قرار دادن یک سر خط کش روی رأس مثلث اصلی و سر دیگر خط کش روی وسط ضلع مقابل آن پیدا کرد. در این حالت خط کش یکی از ضلع های مثلث درونی را نصف می کند. اگر دانش آموزان از تا کردن کاغذ برای یافتن وسط ضلع های مثلث اصلی استفاده کرده باشند، هر یک از ضلع های مثلث میانی نیز از وسط تاخورده است. مثلث جدیدی که باید هاشور زده شود، اولین مثلث بعد از T_1 در جهت حرکت عقربه های ساعت است. این مثلث T_2 نامیده می شود. مساحت T_2 به عنوان بخشی از مثلث اصلی محاسبه می شود. معلم باید دانش آموزان را متوجه این نکته نماید که این مساحت، یک چهارم از یک چهارم یا یک شانزدهم مساحت مثلث اصلی است. این فرآیند تکرار می شود، مثلث جدید را که در جهت حرکت عقربه های ساعت به T_2 وصل است هاشور می زنیم و آن را T_3 می نامیم. در این مرحله شکل گیری حلزون آغاز می شود. به شکل های ۱ الف، ۱ ب و ۱ پ نگاه کنید.

یافتن مساحت حلزون

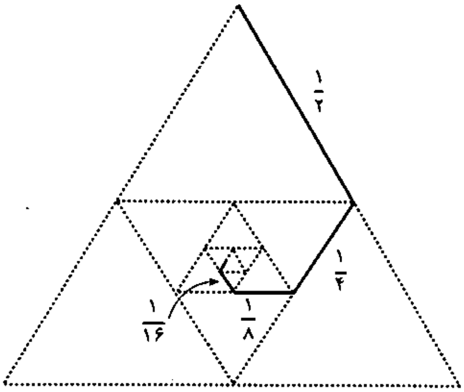
دانش آموزان تخمین می زنند که مساحت حلزون چه کسری از مساحت مثلث اصلی است. برخی با نگاه کردن به شکل حلزون هاشورخورده متوجه می شوند که می توانیم سه حلزون یکسان درون مثلث اصلی تشکیل دهیم، بنابراین مساحت هر یک از آنها، یک سوم مساحت کل است. برای به دست آوردن سری ای که نشان دهندهٔ این مساحت است، دانش آموزان کسرهای مربوط به مساحت مثلث های هاشورخورده را جمع می کنند. بنابراین:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\dots=\frac{1}{3}$$

که برای دانش آموزان مجذوب کننده است. مجموع این سری نه تنها یک عدد متناهی بلکه یک عدد نسبتاً کوچک شد!

محیط خارجی حلزون

سری دیگری را نیز می توان یافت که نتیجهٔ آن به همین اندازه برای دانش آموزان شگفت آور باشد. ابتدا، طول یک ضلع از هریک از مثلثهای هاشورخورده محاسبه شده و اندازهٔ آنها در کنار ضلع خارجی حلزون نوشته می شود. به شکل ۲ نگاه کنید. از جمع کردن طول قطعه هایی که ضلع خارجی حلزون را تشکیل می دهند، سری زیر به دست می آید



قطعه های ضلع خارجی حلزون با یکدیگر جمع می شوند.
شکل۲ :

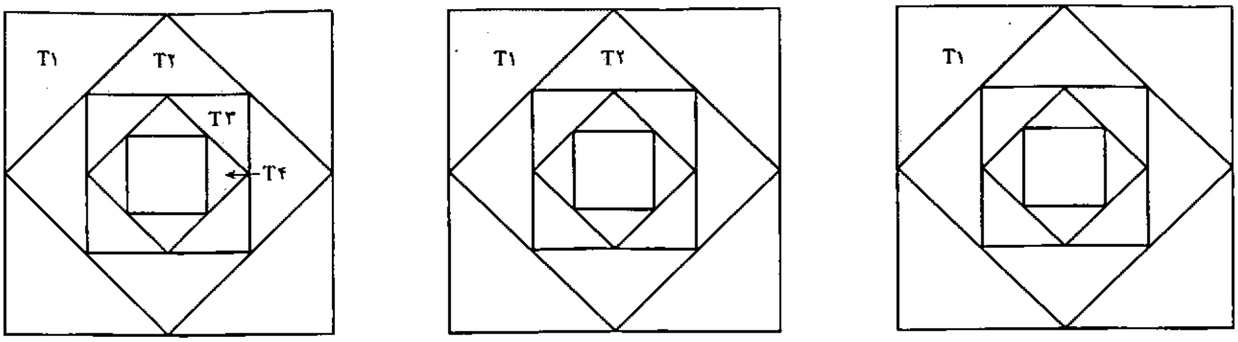
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

این سری دوباره در فعالیت ظاهر می شود و مجموع آن به دست خواهد آمد. به عنوان راهی برای ترغیب دانش آموزان به تخمین این مقدار، از آنها بخواهید حدس بزنند که حلزون بلندتر است یا ضلع مثلث اصلی.

مربع

سپس از دانش آموزان بخواهید مربعی به ضلع ۲ رسم کنند. وسط ضلعهای متوالی را مشخص کرده و به هم وصل کنند. آنها مربع و چهار مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه را مشاهده می کنند. دانش آموزان یکی از مثلثها را هاشورزده و آن را T_1 می نامند. مساحت T_1 را می توان با استفاده از فرمول مساحت یا شمارش تعداد مثلثهای همنهشت با آن، که کل مربع را تشکیل می دهند و تقسیم مساحت مربع برآن عدد به دست آورد. بنابراین مساحت T_1 را می توان با ضرب ۱ در ۱ و تقسیم آن بر ۲ یا تقسیم مساحت مربع یعنی ۴، بر تعداد مثلثهای T_1 که مربع را تشکیل می دهند یعنی ۸، به دست آورد. این فرآیند با وصل کردن وسط ضلع های متوالیِ مربع جدید تکرار می شود. این نقطه های میانی را می توان با قرار دادن یک خط کش در امتداد قطرهای مربع اصلی به دست آورد. مثلث جدیدی که در جهت حرکت عقربه های ساعت به T_1 وصل است هاشور خورده و T_2 نامیده می شود. به شکل های ۳ الف، ۳ ب و ۳ پ نگاه کنید.

استفاده از جدول به حفظ مسیر محاسبات کمک می کند و کشف الگو را تسریع می نماید. اطلاعات زیر در جدول یادداشت شده است. در ستون اول، مثلثهای مشخص شده، در ستون دوم، طول ساق هر کدام از آن مثلثها و در ستون سوم مساحت هر یک از آن مثلثها. در این فعالیت، طول ساقها برای محاسبهٔ مساحت مثلثها



(الف)
مثلثی هاشور خورده و T۱ نامیده می شود.

(ب)
مثلث جدیدی که در جهت حرکت عقربه های ساعت به T۱ وصل است هاشور خورده و T۲ نامیده می شود.

(پ)
این فرایند با هر مجموعه جدید از مثلث ها تکرار می شود.

شکل ۳:

و یافتن طول ضلع خارجی حلزون لازم است. برای کشف الگوهایی بین اعداد هر ستون جدول، اطلاعات بیشتری مورد نیاز است، پس این فرآیند باید تکرار شود. مثلث جدیدی که در جهت حرکت عقربه های ساعت به $T_۲$ متصل است هاشور می خورد. دوباره یک حلزون شکل می گیرد. در ضمنِ پر کردن جدول، دانش آموزان در ستون مساحت ها، کم کم به وجود یک الگوی بازگشتی از مرتبه ۱ـ رابطه ای بین جمله های متوالی یک دنباله ـ پی می برند، که با استفاده از آن می توانند بقیهٔ جدول را پر کنند. در ستون دوم، الگوی پیچیده تری پدیدار می شود که بعداً مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

مثلث	طول ساق	مساحت
$T_۱$	۱	$\frac{۱}{۲}$
$T_۲$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$
$T_۳$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۸}$
$T_۴$	$\frac{\sqrt{۲}}{۴}$	$\frac{۱}{۱۶}$
$T_۵$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۳۲}$
$T_۶$	$\frac{\sqrt{۲}}{۸}$	$\frac{۱}{۶۴}$
$T_۷$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۱۲۸}$
$T_۸$	$\frac{\sqrt{۲}}{۱۶}$	$\frac{۱}{۲۵۶}$
$T_۹$	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۵۱۲}$
$T_{۱۰}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۳۲}$	$\frac{۱}{۱۰۲۴}$

مساحت حلزون

برای آنکه دانش آموزان مساحت یکی از حلزون ها را تقریب بزنند، می توانند مساحت کل را بر تعداد حلزون های یکسانی که در مربع تشکیل می شوند تقسیم کنند که نتیجهٔ آن به صورت زیر است

$$\frac{\text{مساحت کل}\ ۴}{\text{تعداد حلزون ها}\ ۴} = ۱_{\text{مساحت یک حلزون}}$$

به این ترتیب، دانش آموزان با جمع کردن تمام مساحت‌های مثلثهای تشکیل دهندهٔ حلزون و در نظر گرفتن آن به عنوان مساحت حلزون، متوجه می شوند که مجموع جمله های سری $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\ldots$ برابر ۱ است. آنها از این مطلب برای تعیین درستی حدسهای خود در مورد طول ضلع خارجی حلزون در مثلث متساوی الاضلاع استفاده می کنند. در اینجا معلم می تواند در تجسّم این موضوع که یک ضلعِ مثلث اصلی می تواند کاملاً ضلع خارجی حلزون را بپوشاند، به آنها کمک کند.

محیط خارجی حلزون

این محاسبات کمی سخت تر است و در آن دانستن مجموع $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\ldots$ مورد نیاز می باشد. هدف، یافتن طول ضلع خارجی حلزون است. دانش آموزان با استفاده از نتایج جدول شروع به محاسبهٔ مجموع زیر می کنند:

$$۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}+\ldots$$

این الگوی بازگشتی را به دو طریق می توان مورد توجه قرار داد. یک الگوی مرتبه ـ۱، عمل تقسیم بر $\sqrt{۲}$، یک الگوی مرتبهٔ ـ۲ (یک الگوی یکی در میان)، عمل تقسیم بر ۲. برای راحتی، جمله ها را به دو گروه تقسیم می کنیم ـ یک سری از جمله های رادیکالی و یک سری از جمله های بدون رادیکال.

مجموع سری که شامل جمله های غیررادیکالی است را محاسبه می کنیم:

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\ldots$$

یا

$$۱+(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\ldots)=۱+۱=۲$$

مجموع سری که شامل جمله های رادیکالی است را محاسبه می کنیم:

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}+\frac{\sqrt{۲}}{۸}+\ldots$$

یا

$$\sqrt{۲}(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\ldots)=\sqrt{۲}(۱)=\sqrt{۲}$$

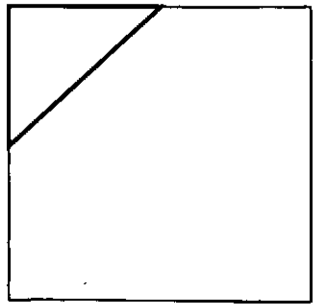
طول کل ضلع خارجی حلزون $۲+\sqrt{۲}$ می شود که برابر محیط مثلث اصلی هاشورزده شده است. دانش آموزان می توانند این محاسبات را با باز کردن محیط مثلث که در رأس قائمه قرار دارد و پیچیدن آن به دور حلزون مجسّم کنند. به شکل ۴ الف، ۴ ب و ۴ پ نگاه کنید.

ملاحظات زیبایی شناختی و توسیع ها

بعد از فعالیت، دانش آموزان مربع دیگری رسم می کنند و فرآیند یافتن و وصل کردن وسط های ده مربع متوالی را آغاز می کنند هر یک از حلزونها را با رنگهای مختلف هاشور می زنند و معلم می تواند کار آنها را روی تابلو نمایش دهد. برای نشان دادن الگوهای متفاوت به دست آمده از فرآیندهای یکسان، از دانش آموزان بخواهید هر مجموعه از چهار مثلث همنهشت را با یک رنگ متفاوت رنگ آمیزی کنند و اینها را نیز نمایش دهید.

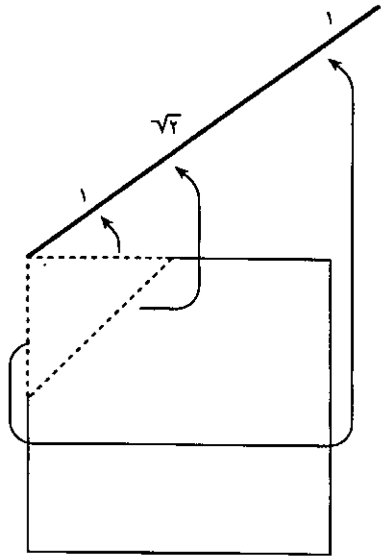
این فعالیت را با افزایش تعداد ضلعهای چندضلعی منتظم اصلی و دنبال کردن همان مراحلی که برای مثلث متساوی الاضلاع و مربع انجام داده شد، توسعه دهید. هر قدر که تعداد ضلع ها افزایش می یابد، انحناء حلزون نیز بیشتر می شود.

با چرخاندن مربع ها درون خودشان، می توان این فعالیت را



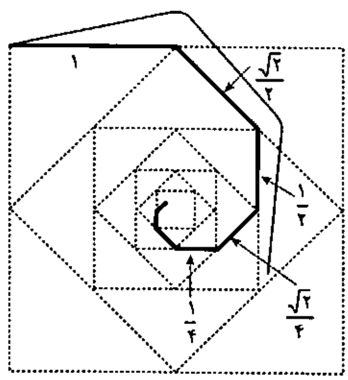
(الف)

محیط یک مثلث از اولین مجموعهٔ مثلث ها



(ب)

محیط این مثلث به صورت یک خط مستقیم باز می شود.

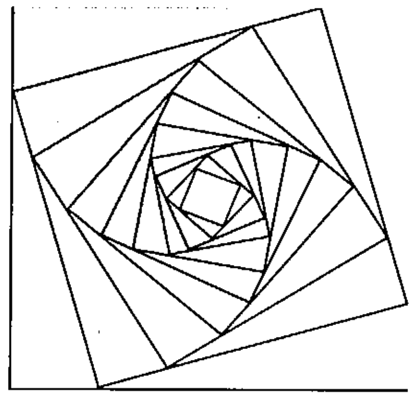


(پ)

آنگاه محیط مثلث به دور ضلع خارجی حلزون پیچیده می شود.

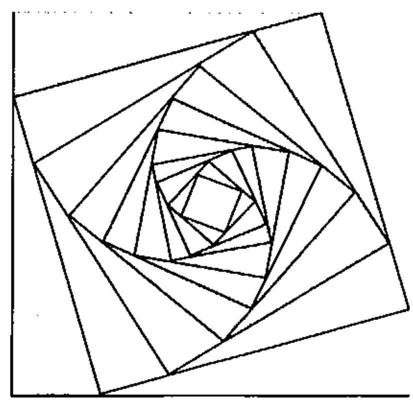
شکل ۴:

به طریق دیگری توسیع داد. در الگوی اصلی، این تبدیل را می توان به عنوان یک انقباض با نسبت $\sqrt{2}$ و دوران ۴۵ درجه توصیف کرد. اگر دوران کمتر از ۴۵ درجه باشد چه اتفاقی می افتد؟ این کار را می توان با مشخص کردن نقطه هایی روی ضلعهای مربع اصلی به نسبت های یکسان، مثلاً یک چهارم، که در جهت حرکت عقربه های ساعت یا در خلاف جهت آن می چرخند و وصل کردن این نقطه ها به یکدیگر انجام داد. این فرآیند را حدود ده بار تکرار کنید. دو حلزون متفاوت می توان تشکیل داد، یکی با وصل کردن وتر به ضلع کوچکتر زاویهٔ قائمه و دیگری با وصل کردن وتر به



(الف)

با وصل کردن وتر هر مثلث به ضلع بزرگتر زاویهٔ قائمهٔ مثلث مجاور آن یک حلزون شکل می گیرد.



(ب)

با وصل کردن وتر هر مثلث به ضلع کوچکتر زاویهٔ قائمهٔ مثلث مجاور آن یک حلزون شکل می گیرد.

شکل ۵:

ضلع بزرگتر آن. به شکل های ۵ الف، ۵ ب[۳] نگاه کنید. توجه کنید که مساحت های این دو حلزون یکی هستند اما محیط یکی از آنها خیلی بیشتر از محیط دیگری است.

سؤالهای بیشتر

با سؤالهای متنوع دیگر می توانید دانش آموزان را به تحقیق و بحث بیشتر ترغیب کنید. اول این که چرا دو الگوی بازگشتی در سومین ستون جدول ظاهر شد و چه دلایلی برای قواعدشان می توان ذکر کرد؟ دومین سؤال این است که آیا این نکته که محیط خارجی حلزون با محیط یا طول بخشهای دیگری از شکل برابر است، معنای خاصی دارد؟ سوم، با میل کردن تعداد ضلع های چندضلعی اولیه به بینهایت، حلزون به چه شکلی درمی آید؟

نتیجه گیری ها

این فعالیت، دانش آموزان را با همگرایی سری های نامتناهی، الگوهای بازگشتی و حلزونها درگیر می کند. همچنین، آنها را وادار می کند که رادیکال ها، مثلثهای قائم الزاویهٔ متساوی الساقین، مساحت مثلثها و محیط مثلثها را مرور کنند. به علاوه توسیع های یاد شده انگیزه ای برای جستجوی الگوهای کلی تر است. این فعالیت با ایجاد ارتباط و اتصال بین چند مقوله و با توسل به دیدن، لمس کردن و منطق، مرزهای مصنوعی بین مقوله های ریاضی و نیز بین ریاضیات و کنجکاوی ذاتی دانش آموزان را درهم می شکند.

مرجع اصلی:

Jeffrey M. Choppin. *Spiral through Recursion.* Mathematics Teacher 87 (October 1994).

سایر مراجع:

- National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: The Council, 1989.
- Newman, Rochelle, "Cover Design: Baravelle Spyrotele," *Mathematics Teacher 82* (October 1989): 493.
- Newman, Rochelle, and Martha Boles. *The Golden Relationship: Art, Math, Nature, Book I: Universal Patterns.* Bradford, Mass. : Pythagorean Press, 1983.

---

1. Baravelle
2. Newman

۳. به صفحهٔ ۲ هندسه (۱) نظام جدید متوسطه، همچنین آرم بیست و هفتمین کنفرانس ریاضی در شیراز توجه کنید.

میز گرد هیأت تحریریهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی

هیأت تحریریهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی با اتّکال به خالق قلم و ستایش کنندهٔ اندیشه و تفکّر، تصمیم گرفته است که خلاصه ای از بحثهای انجام شده در جلسه های هفتگی را در اختیار خوانندگان گرامی قرار دهد. این کار، به خوانندهٔ متفکّر و نقّاد، فرصت آشنایی با تعامل اندیشه ها و روند شکل گیری دیدگاههای آموزش ریاضی در مجله را می دهد. ضرورت این آشنایی ناشی از آن است که هدف اولیهٔ تأسیس مجله، خدمت به رشد توانائیهای آموزشی معلمان ریاضی بوده است. با این حال، با توجّه به شناخت مختصری که جامعهٔ ریاضی ایران از آموزش ریاضی به عنوان یکی از حوزه های معرفتی دارد، به طور قابل پیش بینی و شاید ناخودآگاه، مجله بیشتر در جهت ارتقای دانش موضوعی معلمان و یادگیرندگان ریاضی بوده است. با تأکید بر اهمیّت و ضرورت دانش افزائی ریاضی معلمان، هیأت تحریریه پس از بحثهای طولانی، بیشتر و بیشتر به افزایش دانش حرفه ای معلمان ریاضی به عنوان یک نیاز مبرم باور پیدا کرده است. به همین منظور، مجله بر خود واجب می داند در جهت معرفی **آموزش ریاضی** به جامعهٔ ریاضی و بخصوص معلمان ریاضی، قدم بردارد و این اقدام، در همین راستاست.

میز گرد با طرح سؤالهای مشخصی شروع شده و بحثها دربارهٔ این سؤالها ادامه پیدا کرده است. گفت و شنودها ویرایش ادبی نشده اند تا حالت خودمانی و محاوره ای خود را از دست ندهند. به طور طبیعی، گاهی حرفها تکرار شده اند و گاهی از دقّت لازم برخوردار نیستند و این در واقع، جریان عادی شکل گیری یک فکر است! بحثهای هیأت تحریریه در جهت وادار کردن افراد به **تفکّر بلند**[1] است که این کار تأثیر مثبتی بر جریان یادگیری انسان دارد.

گویا: به عنوان اولین موضوع، شاید لازم باشد که هدفهای برنامهٔ درسی ریاضی نظام جدید در مجله مورد نقد و بررسی قرار گیرد. معلمان و دست اندرکاران نظام جدید آموزش متوسطه نیازمند آشنایی با دلایل انتخاب محتوا که متکّی بر دستاوردهای تحقیقاتی هستند می باشند. نقد برنامهٔ درسی به پالایش و بهبود کیفیّت برنامهٔ ریاضی کمک فراوانی می کند.

مدقالچی: برنامهٔ ریاضی یک روند مشخّصی دارد و از عجین شدن همهٔ آنها با هم به برنامهٔ فعلی رسیده ایم ... آیا بیش از کاری که تا به حال کرده ایم می توانستیم کار دیگری بکنیم؟ ... بخشی از کار به نظر من سیلی است که می آید و مقاومت در مقابل آن فایده ای ندارد.

زنگنه: کاری که ریاضیدان می کند و وظیفه ای که دارد با وظیفهٔ برنامه ریز درسی ریاضی فرق دارد و این مشکلی هست که ما داشته ایم یعنی معمولاً برنامهٔ درسی ما فقط توسط متخصّص آن علم نوشته شده است. ما باید بگوئیم که چرا یک مطلب را در برنامه می گذاریم و یکی دیگر را نمی گذاریم. هر کدام از ما یک کار را بلد است و در مجموع، گروه ما باید برای این سؤالها جواب داشته باشد نه تک تک ما.

مدقالچی: حرفی که می زنید درست است. در تمام دنیا چنین است منتها در کشور ما متمرکز است. من تقریباً از سالهای ۶۱، ۶۲ در شورا بوده ام ... آن موقع می گفتند که **دوران ریاضی جدید** موفق نبوده و بهتر است که کمی به گذشته برگردیم ... برای تغییر نظام خیلی کار شده بود ... برای تدوین کتابهای ریاضی ما چه کار کردیم؟ کتابهای قدیمی، کتابهای خارجی و کتابهای موجود را هم *صفحه* زدیم. از برآیند آنها این کتابهای جدید بیرون آمد که دو چیز دیگر را هم در نظر گرفتیم یکی اینکه **عمومی شود** و دیگر آن که **جنبه های کاربردی** را هم در نظر بگیرد. ما می توانستیم فقط بگوییم که سال ۵۴ کتاب نوشته شده حالا ۷۴ است پس باید کتابها

عوض شود و همین دلیل کافی است و توضیح دیگری نمی خواهد. درصورتی که مسلماً اهدافی وجود داشته اند که به برنامه ریزی های جدید منجر شده اند.

جلیلی: با تغییر محتوای برنامه های ریاضی در غرب و تحولات در مطالب ریاضی، ما نیز ناگزیر به تغییر برنامه های خود در این جهت بوده ایم. چون علم مرزشناس نیست همانطور که وقتی دارویی مثل آسپرین در یکجای دنیا ساخته می شود به همهٔ دنیا صادر می گردد و مورد استفاده قرار می گیرد. مطالب جدید ریاضی نیز به صورت موجی همهٔ دنیا را فراگرفت و به ایران نیز رسید. قبل از تغییر برنامه ها تأسف از آن بود که چرا ما از مطالب جدید که در مدارس غرب تدریس می شود استفاده نمی کنیم. مثلاً در یکی از شماره های یکان جدول ارزش گزاره ها ارائه شده و اظهار نظر شده بود که در مدارس غرب این مطالب به عنوان ریاضی تدریس می شود؟ و خواسته بود بگوید که چرا ما عقب هستیم؟ لذا برنامه های ریاضی ما معمولاً متأثر از تغییر برنامه ها در سطح جهان بوده است.

حاجی بابایی: اجازه بدهید چند صفحه از این کتاب را برایتان بخوانم. [قسمتی از کتاب ریاضیات مدرسه در دههٔ ۱۹۹۰ نوشتهٔ جفری هاوسون قرائت شد که مهمترین نکته های آن چنین هستند] «شاید قدرت استدلال جای خود را به توسعهٔ نقد داده باشد.» ... «باید برنامهٔ درسی متکی برفرآیند تحوّل باشد.» ... «دانش آموز باید سودمندی ریاضی را قبل از لذّت آن ببیند.» ... «عدم استفاده از ماشین حساب باعث هر چه بیشتر بیگانه کردن دانش آموزان با ریاضی مدرسه می شود.» ـ ما حتماً می توانیم برنامهٔ خود را براساس استانداردهای جدید بین المللی توجیه کنیم.

مدقالچی: دو چیز در اینجا اهمیت دارد. یکی فراموش نکردن فرهنگ ملّی است یعنی ببینیم آیا می توانیم یک ریاضی ایرانی ـ اسلامی داشته باشیم؟ دومی توجه به پیشرفتهای دانش ریاضی در جهان است.

مدقالچی: ـ شما حتی استدلال را هم از آنها می آورید، می گویید خوب است چون آنها می گویند خوب است. اینها همه تأثیر و تأثر است، آنها هم از ما تأثیر می پذیرند. بحث من این است که شما به عنوان بخشی از دانش بشری نمی توانید انکار کنید که «دانشجو باید ریاضی را بخواند» حتی قبل از آنکه سودمندی آن را بداند. مثلاً تجربه برنامه لیسانس ریاضی یک روال خاصی در دنیا دارد که به نوعی قانونمند شده است. ... مثلاً برای کتابهای ریاضی ۱ تا ۴ کلی زحمت کشیده شده و هیچ چند صفحه ای نیست

گویا: هدف اوّلیهٔ تأسیس مجله، خدمت به رشد توانائیهای آموزشی معلمان ریاضی بوده است.

که از روی یک کتاب نوشته شده باشد. اگر گروههای تألیف از مشارکت متخصصّان مسایل آموزشی و تربیتی بهره می گرفت، اهداف بهتر تبیین می شد.

بابلیان: ما در تهیهٔ برنامهٔ درسی ریاضی دورهٔ ابتدایی، مطالب را که می خواستیم بنویسیم بحث می کردیم که چه بگوییم، چرا بگوییم و چگونه بگوییم.

مدقالچی: در دورهٔ ابتدایی فلسفهٔ شما چه بود؟ برنامه را با چه محک می زدید؟

بابلیان: بخشی از برنامهٔ سنتی را نگه داشیم.

جلیلی: مؤلفین کتابهای اول ابتدایی با آن زمینه انتخاب شدند که در تماس تنگاتنگ با کتابهای ابتدایی آمریکا و فرانسه بودند و خود در این کار تجربه داشتند و کتاب اول با الهام از تحولات جدید در این کتابها تألیف یافت.

زنگنه: به صحبتهای آقای دکتر مدقالچی برمی گردیم. فرمودید که چهار مؤلفه یعنی **تجربهٔ خودمان، تجربهٔ دیگران، رجعت به گذشته و کاربرد** را در نظر گرفته اید. پس این ها خود، هدف برنامه بوده است ... با وجود برنامه، افراد می توانند برنامه را هم نقد کنند نه فقط کتابها را. با تهیهٔ این اهداف، سندهایی بیرون می آید که برای آیندگان نیز بسیار مفید خواهد بود.

جلیلی: در تنظیم برنامه ها ما هدفهای عمومی را ذکر کرده ایم امّا فرصت تنظیم هدفهای رفتاری را نداشته ایم. همیشه برنامه های ما متأثر از تحولات ریاضی در دنیا بوده است و ریز مواد برنامه های قبلی اشتراک ریز مواد ریاضی در کشورهای پیشرفته بوده است. اما در مورد ریز مواد پیش دانشگاهی، یک مطالعه تطبیقی دقیق نسبت به آنچه در این مقطع تحصیلی در سایر نقاط جهان می گذرد

انجام نگرفته است و مطالب با تقریب انتخاب شده است .

پاشا: من احساس می کنم که دو مسأله دارد مطرح می شود . یکی اینکه چه بگوییم و دیگر اینکه چگونه بگوییم ... اگر آنها روی مسائلی کار می کنند قطعاً به انگیزه ای آن کار را می کنند ... ما واجب است یک سری مطالب عمومی از جمله ریاضی را برای زندگی عادی بدانیم . امّا برای آینده چه بخوانیم ، نمی دانیم . کشورهای دیگر چیزهایی که می خوانند هم از نظر روش و هم از نظر محتوی با ما فرق دارند چون جامعهٔ آنها متفاوت است ... ما اگر همیشه فکر کنیم که آنها چه دارند و بعد فصل مشترک آنها را بگیریم همیشه از آنها ۲۰ سال عقب تر خواهیم بود . ما باید برای خودمان برنامه داشته باشیم و این خلاء را پر کنیم ...

ما باید هدف مشخصی را تعیین کنیم و برای رسیدن به آن تلاش کنیم . ما باید مسأله ای برای حل کردن داشته باشیم تا اگر نتوانیم آن را حل کنیم چوبش را هم بخوریم!

مدقالچی: گذر از مراحلی به چیزهایی نیاز دارد . امّا دو چیز در اینجا اهمیت دارد . یکی فراموش نکردن فرهنگ ملّی است یعنی ببینیم آیا می توانیم یک ریاضی ایرانی ـ اسلامی داشته باشیم؟ دومی توجه به پیشرفتهای دانش ریاضی در جهان است .

زنگنه: ظاهراً همهٔ ما یک حرف را می زنیم و عملاً مقاله ای که قرار بود در مورد آموزش ریاضی بنویسیم نوشته شد !! نکتهٔ بعدی فرهنگ است که نقش عمده ای در برنامه ریزی دارد . در واقع ، ریاضی قومی نقش زیادی در فهمیدن دارد . ما در کتاب نویسی سعی کرده ایم که این کار را بکنیم . چگونگی آن ، پیچیدگی مسأله است ؛ باید در این زمینه کار کنیم .

حاجی بابایی: من به جملهٔ آقای دکتر مدقالچی که فرمودند : « دانشجو باید ریاضی بخواند حتی قبل از آنکه سودمندی آن را بداند » بازمی گردم ، در کتاب ریاضیات مدرسه در دههٔ ۹۰ آمده است : به یک شاگرد مدرسه ای بگویید جنگ جهانی دوم ده سال طول کشیده ، او باور می کند ، اما به او بگویید دو چهارتا می شود ده تا ، یک بحث پیش خواهد آمد . آلبرتو باراجاس می گوید « به یُمن ریاضیات ، انسان قادر است تا از بعضی چیزها مطمئن باشد و بنابراین « ریاضیات برای بشریک آسودگی روانی سنجش ناپذیر فراهم کرده است . ما دیگر از خدایان دیوانه ای که با ما آدمیان بازیهای بیرحمانه می کنند ، می ترسیم . قطعیتی چنین که چیزهایی وجود دارند که ورای هر شکی دُرُستند حق مسلم هرکس است و این دست کم دو رهنمود برای ریاضیات مدرسه دارد . نخست هر دانش آموزی باید بتواند به اندازهٔ کافی در ریاضیات تجربه کند تا متقاعد شود چیزهایی وجود دارند که ورای هر شکی درستند دوم ، سبک آموختن باید چنان باشد که دانش آموزان را تشویق و قادر کند که خود به چنین عقاید استواری برسند .

ـ پذیرش قلبی اجباری و از بیرون نمی شود . باید درونی باشد تا اطمینان خاطر ایجاد کند و اینها بحث های مهمّ آموزش ریاضی است .

با تأکید بر اهمیّت و ضرورت دانش افزائی ریاضی معلمان ، هیأت تحریریه پس از بحثهای طولانی ، بیشتر و بیشتر به افزایش دانش حرفه ای معلمان ریاضی به عنوان یک نیاز مبرم باور پیدا کرده است .

جلیلی: من اعلام آمادگی می کنم که در مورد ریاضی ۱ تا ۴ یک مقاله بنویسم .

زنگنه: اضافه بر اینها ، باید فرهنگ ایرانی ـ اسلامی خودمان را در برنامه ریزیهای درسی در نظر بگیریم . امّا کدام فرهنگ؟ فرهنگ تقلیدی ۵۰ سال گذشته یا فرهنگ اصیل اسلامی ـ ایرانی؟ مثلاً بعضی ها می گویند « هندسهٔ سنتی ما » ، در صورتی که هندسه ای که بعد از دارالفنون در ایران مرسوم شد هندسهٔ فرانسوی بود ... هندسهٔ سنتی ما آغشته به جبر بوده و با نجوم و مسایل روزمره گره خورده بود به نحوی می توان گفت که بنیانگذار هندسهٔ جبری ما بوده ایم ، مثلاً حل مسأله ای که سجزی مطرح کرده بود و اینکه ریاضیدانهای ایرانی دنبال استراتژیهای حل مسأله بوده اند در صورتی که غربیها اصلاً دنبال چنین چیزهائی نبوده اند . صحبت اینست که از آن فرهنگ چگونه عناوین کاربردی استخراج کنیم و سؤال دیگر در مورد دستاوردی است که ما از خارجیها می گیریم ، آیا با مطالعهٔ کتابهای خارجی می توانیم اصول فرهنگ ملی حاکم بر برنامهٔ درسی آنها را استخراج کنیم یا آنکه آنها برنامهٔ درسی و آموزشی اصیل تری بر مبنای فلسفهٔ آموزشی خودشان دارند و برمبنای آن کتاب نوشته اند . باید بالاجبار به اصول فلسفی آنها بازگردیم و ببینیم که چگونه آن دیدگاهها به صورت کتاب درسی متجلی شده اند .

در برنامه ریزیهای کمیته ریاضی ، شوارای عالی انقلاب فرهنگی بحث اساسی ما این بود که انسان آرمانی ما کیست و دارای چه ویژگی هایی است؟ زیرا ما برنامه را برای انسان می ریزیم . بحث ما با رشته های مهندسی این بود که به جای این که بگوییم انسان باید دارای چه مهارتهایی باشد باید بگوییم این انسان باید دارای چه توانائیهایی باشد . ... انسان باید توانایی تجرید داشته باشد

(مبانی ریاضی و جبر مجرد) باید توانایی تجزیه و تحلیل داشته باشد (آنالیز ریاضی) باید توانایی شهود داشته باشد (هندسه) در مورد مدلسازی (معادلات دیفرانسیل) و آشنایی با پدیده های واقعی زندگی روزمره (آمار و احتمالات) ... بنابراین علت اینکه بایستی این دروس را در دورهٔ لیسانس تدریس کنیم این است که هرکدام یکی از توانایی های مورد نیاز را در انسان ایجاد می کند.

ما قبلاً بدون آشنایی با برنامه ریزی آموزشی و درسی این تأکیدات را داشتیم. الآن خواهش من این است که عوامل دیگر را مورد بررسی قرار دهیم.

جلیلی: بحث جلسات قبل روشن کردن این مطلب بود که هدف و منظور از آموزش ریاضی چیست؟ آنچه در این زمینه عرض می کنم حاصل تجربیات من است. معلم ما اعتقادی به روش تدریس و رعایت اصول و قانون و یا به عبارت دیگر «آموزش ریاضی» ندارد و اصولاً برای اینکار احساس نیاز نمی کند. در جوامع دیگر بر اثر احساس نیاز و به مرور و در طول زمان و به صورت تدریجی «آموزش ریاضی» نضج گرفته و تکامل یافته است. براثر عدم علاقهٔ گروهی از دانش آموزان به ریاضی و یاد نگرفتن آن، متخصصان به دنبال آموزش ریاضی رفته اند. در ایران مقدمان ما معتقد بودند که هر کس ریاضی بداند راه آموزش آن را نیز یاد خواهد گرفت و بر این اساس، اعتقادی به «اصول آموزش ریاضی» نداشتند. هر وقت صحبت از اصول «آموزش ریاضی» می شود می گویند با کلاسی پرجمعیت و قوانین امتحانات، ما شرایط پیاده کردن شیوه های آموزش ریاضی را نداریم لذا وضع ما با آنجا فرق می کند.

پاشا: درس خواندن باید برای بچه ها لذّت بخش باشد و ما این را نمی بینیم. همیشه بین معلم و دانش آموز تنش است و هر چه به کلاسهای بالاتر می رسیم، با تنهای خسته تر و روحیه های مضطرب تر مواجه می شویم.

در نتیجه برای جا انداختن آموزش ریاضی در ایران باید قبل از ورود به اصل مطلب صغری و کبری بچینیم و مقدمات تهیه کنیم تا زمینه برای اصل مطلب فراهم گردد. امّا در مورد آموزش هندسهٔ اقلیدسی در ایران، این ریشه در تاریخ ما دارد؛ بیشتر ریاضی دانها به دنبال پیدا کردن راه حل تربیع دایره یا تثلیث زاویه یا ... موفق شده اند یک کتاب مطلب در هندسه بنویسند.

اگر بخواهیم برنامه های ما اهداف ما را تأمین نماید باید از الگوهای متناظر در خارج استفاده کنیم. در یک کنفرانس ریاضی در هلند مسؤل کمیتهٔ برنامه ریزی ریاضی انگلستان «سِرکاگرافت» می گفت برای تنظیم برنامه ها، ۸ کمیته تشکیل دادیم؛ هر کمیته مشغول تحقیق در یک قسمت شد: یک کمیته به دانشگاه رفت، یک کمیته به بازار رفت، یک کمیته به کارخانه رفت و ... و نیاز جامعه جمع آوری و بر مبنای آن برنامه تهیه گردید. یعنی آنها دنبال نیاز جامعه و کاربرد آنچه آموزش می دهند هستند در اینجا وضع متفاوت است در اینجا دانش آموز، ریاضی می خواند که دیپلم بگیرد و دیپلم می گیرد تا وارد دانشگاه شود و به دانشگاه می رود تا از مزایای اجتماعی و حقوقی مدرک دانشگاهی استفاده کند.

در زمینهٔ برنامه ریزی درسی آقای پروفسور بلوم برنامه ریز معروف جهانی که به ایران هم سفر کرده است می گوید «در یک برنامه ریزی برنامه ریز فقط باید به دنبال تأمین اهداف برود» و اضافه می کرد که برنامه ریز «شاید تعصب رشته تحصیلی خود را داشته باشد». او در سال ۱۳۵۲ می گفت حالا بنشینید و برای ۱۳۶۰ برمبنای نیاز جامعه و آنچه در دنیا می گذرد برنامه ریزی کنید.

برنامهٔ ریاضی ما تا قبل از برنامه فعلی بیشتر متأثر از کتابهای ریاضی فرانسه بود ولی در برنامه ریزی سال ۱۳۵۰، به برنامه های ریاضی دنیا توجه شد.

بهتر است بیشترین تأکید را بر کار مجله بگذاریم و از طریق درج مقالاتی در مجله، فرهنگ آموزش ریاضی را جا بیندازیم و بعد بررسی بکنیم که با شرایط موجود چه شیوه آموزشی را باید ارائه دهیم؟ ... ما یادگیری ریاضی از راه حل مسأله را در ایران عملاً اجرا کرده ایم زیرا برنامه را از فرانسه اقتباس کرده بودیم. حل مسایل حساب استدلالی، هندسه اقلیدسی، مثلثات، آنالیز و قسمتهای دیگر در ایران به شدت پی گیری شده و می شود و دانش آموز، مثل شاگرد آمریکایی که اصلاً مسأله حل نمی کند نیست می خواهم بگویم فرهنگ مسأله حل کردن در ایران بسیار قوی است و خیلی هم تخصّصی شده است. اما شیوه های جدید آموزش ریاضی را از کجا شروع کنیم؟ بیشتر معلمهای ما می گویند معلمی در خون ما بوده و ظاهراً نیازی به طرح اصول آموزش ریاضی نمی بینیم و روی اینکه چگونه می شود با این طرز تفکر مبارزه کرد باید بیاندیشیم.

مدقالچی: ما باید بدانیم که اصلاً آموزش ریاضی چیست؟ آدمهای بزرگ دنیا در این راه قدم گذاشته اند و با مشکل مواجه شده اند. بعضی ها می گویند بعضی از دانش آموزان کند هستند و بعضی ها تیزهوش و اصلاً نقشی به خودمان به عنوان معلم نمی دهیم. پس یک مقداری در شرح حال بزرگان مانند پولیاوکولموگروف برویم و ببینیم که چه کرده اند. همیشه علوم پایه مورد بحث بوده است ... همیشه دانش آموزان خود را با فواید

ریاضی آشنا کرده ایم امّا تجربهٔ عملی در این زمینه نداشته ایم و ممکن است معلم ما بگوید که این توانایی ها خدادادی است.

... شاید یکی از نقاط عطف، همان بیانیهٔ ۱۹۶۲ بوده است. از این طرف هم نگرانی آن است که مرتب بگوییم آموزش ریاضی و به آن هم توجه نکنیم در نتیجه به این نرسیم و ریاضی سنّتی خود را هم از دست بدهیم. باید در تاریخ ۵۰۰ سالهٔ خودمان سیر کنیم و ببینیم که شیوهٔ تولید ریاضی ما، تدریس مستقیم و ... چگونه بوده است.

اگر کتاب لایحهٔ تغییر نظام را بیاوریم و آن را معیار قرار دهیم، شاید به ما در تعیین نوع ریاضی و مقدار آن کمک کند.

در کلاسهای بازآموزی باید تدریس ریاضی را با شیوهٔ آموزش آن توأم کنید.

زنگنه: در سطح جامعهٔ ایران یک بدفهمی در مورد آموزش ریاضی هست که آن را با درس روش تدریس یکی می گیرند. اتفاقاً بحث برنامه ریزی مواد درسی یکی از مولفه های اساسی آموزش ریاضی است. اگر خوب برنامه نریزیم چه را می خواهیم تدریس کنیم؟ شاید بسیاری از بد فهمی ها از خود برنامه ناشی شود.

زنگنه: آیا با مطالعهٔ کتابهای خارجی می توانیم اصول فرهنگ ملی حاکم بر برنامهٔ درسی آنها را استخراج کنیم یا آنکه آنها برنامهٔ درسی و آموزشی اصیل تری بر مبنای فلسفهٔ آموزشی خودشان دارند و برمبنای آن کتاب نوشته اند.

ـ معمولاً سؤالهایی که ما در سطح برنامه ریزی درسی داشتیم همگی از بحثهای اساسی و اصیل آموزش ریاضی هستند ... چگونگی یادگیری دانش آموزان به روانشناسی آموزش ریاضی برمی گردد. ما می توانیم به موهبت این که این بحثها در مجله می آید این بحثها را به طور جدی مدوّن کنیم ... و بعد از مدتی از برکت این میزگرد، کم کم یک واژگان و فرهنگ مشترک پیدا کنیم و از آن به بعد وارد بحثهای جدّی تر شویم. مسلماً همانطور که آقای جلیلی فرمودند، در نظر گرفتن نیاز های فردای جامعه یکی از مولفه های برنامهٔ درسی است. نیازهای ما با سایر جوامع الزاماً یکی نیست ولی اصل در نظر گرفتن نیازهای آینده حائز اهمیت است. باز هم اینها بالاجبار به آموزش ریاضی و تحقیقات در آن زمینه برمی گردد.

اگر ما بتوانیم این حرفهای مختلف را بزنیم و مسایل آموزش ریاضی را تبیین کنیم خودبه خود فرهنگ آموزش ریاضی در جامعه ایجاد و باعث آگاهی می شود ... البته بهتر است که این صحبتها منسجم تر باشند. پیشنهاد من این است که در مورد برنامه ریزی درسی که همگی به طور تجربی و غیرسیستماتیک کار کرده ایم بیشتر کار کنیم.

در مورد شکوفایی ریاضی در دوران اسلامی می خواهم بگوییم که فضای ریاضی اسلامی ما چه بوده است و گرنه ریزه کاریهای دو زمان با هم متفاوت هستند. در استانداردهای NCTM[1] از ارتباطات ریاضی صحبت می کنند که ریاضی را یک کل منسجم می داند. وقتی که این را با ریاضی ایرانی ـ اسلامی مقایسه می کنیم می بینیم که چنین بوده و بین موضوعات مختلف دیواری نبوده است. شاید این به دلیل دیدگاه موحدانه ایرانی ها بوده ... در صورتی که در یونان چنین نبوده یا در بابل و مصر وضع فرق داشته است ... بهرحال می توانیم از آن درس بگیریم.

غلام‌آزاد: هفتهٔ پیش جزوه ای در مورد آموزش ریاضی در ژاپن به من دادند که خیلی جالب بود. . . ، در این جزوه، هدفهای هر درس را نوشته بود، معلمان ما به چنین هدف نویسیهایی نیاز دارند چون در برنامهٔ نظام جدید عموماً فقط قدم بعدی را دیده اند آشنایی با اهداف کلی و جزئی و شیوهٔ ارزشیابی برنامه خیلی مفید و مهم است. حال یا در مجله این کار را بکنیم یا در جای دیگر.

پاشا: ما فقط در ریاضی سرآمد نبودیم بلکه در تمام زمینه ها موفق بودیم. این بررسی باید هماهنگ در تمام زمینه ها انجام گیرد.

مدقالچی: از کجا شروع کنیم؟ همیشه این سؤال مطرح بوده است ...

پاشا: جهت گیریها باید مشخص تر و بر اثر شرایط جامعه و نیازها باشند. مثلاً آیا می خواهیم فقط ریاضی مجرد ما در دنیا اول شود و المپیادها را تقویت کنیم؟ آیا می خواهیم صنعت خود را ترقّی دهیم و از صورت مونتاژ آن را خارج کنیم؟ ... اهداف کلّی باید تعیین شوند.

ـ درس خواندن باید برای بچه ها لذّت بخش باشد و ما این را نمی بینیم. همیشه بین معلم و دانش آموز تنش است و هر چه به کلاسهای بالاتر می رسیم، با تنهای خسته تر و روحیه های مضطرب تر مواجه می شویم.

ـ برنامه ریزی طبلی است که صدای آن ۱۵ سال بعد در می آید.

ـ ما شاید به گذشته ها دسترسی نداشته باشیم امّا هر وقت پای صحبت معلّمهای خودم می نشینم، مثلاً همگی می گویند خدابیامرزد غلامحسین رهنما را. پس باید آقای رهنما و معلّمهای نظیر او را بشناسیم و ببینیم ویژگی های مثبت آنها چه بوده است که چنین تأثیری بر شاگردانشان داشته اند.

حاجی بابایی: هر چه به گذشته برمی گردیم، ارزش معلمی و احترام شاگرد به استاد خیلی بیشتر بوده است.

ـ به صحبتهای اول جلسه برمی گردم که آقای جلیلی گفتند اول دنبال نیازهای جامعهٔ خودمان بگردیم و برنامهٔ درسی را براساس آنها تهیّه کنیم. من فکر می کنم که باید از حصار خودمان بیرون بزنیم. دهکدهٔ جهانی را در نظر بگیریم، در بیانیهٔ ریودوژانیرو، ریاضی را راه توسعه اعلام کرده اند و به دنبال آن ارتقای آموزش عمومی را مطرح کرده اند. ما ناخواسته متأثر از فرهنگ جهانی هم هستیم. کما اینکه در گزارش دیوید هم نقش ریاضی در صورت بندی نظم عالم بررسی شده بود ... به هرحال باید طوری با میانگین جهانی همسو شویم و فقط خود را در نظر نگیریم.

گویا: با توجه به جهتی که دکتر مدقالچی اشاره کردند نقطهٔ شروع خوبی است که ببینیم وجود آموزش ریاضی چه ضرورتی دارد و کمبود آن چه ضرری ایجاد می کند.

نکتهٔ دیگر این است که چه زمانی پولیا به آموزش ریاضی پرداخت ... او می گوید همیشه فکر می کردم که هر اثباتی چه توانایی هایی دارد و ... (مقدمهٔ کتاب چگونه مسأله را حل کنیم؟). پولیا می گوید من مدعی دانستن روانشناسی نیستم امّا ۵۰ سال تجربه دارم. آموزشِ حل مسأله با حل مسایل مختلف فرق دارد. این حرف را پولیا در ۱۹۴۵ گفت (نقش حل مسأله در آموزش ریاضی) امّا در دهه ۸۰ به آن توجّه بیشتری شده است. الآن دیگر زمان آن نیست که فقط با تکرار یاد بگیریم بلکه دانش آموز باید به روند تفکر خودش آگاهی داشته باشد و نظام مند فکر کند. حل مسأله فقط حل مسأله نیست!

جلیلی: من در شروع گفتم که ما باید از کتابهای خارجی استفاده کنیم زیرا کار آنها سازمان یافته است امّا باید نیازهای خود را نیز در نظر بگیریم.

ـ آیا آموزش ریاضی مستقل از معلم، مدیریّت آموزشی و فضای آموزشی است؟ وقتی بحث از آموزش فعّال می کنیم اینها به نحوی با آموزش ریاضی ارتباط پیدا می کند.

کتابهای فرانسوی هم روشهای حل مسأله داشت و از آسان به مشکل حرکت کرده بود ... در مقاله ای که از شونفیلد ترجمه کرده ام نوشته است که اینها فقط تجربه های کاری من است و ممکن است شما هم تجربه کنید و نتیجه بدهد.

آموزش ریاضی هم مانند آمار در ایران مهجور مانده است. بنابراین باید زمینه ای فراهم کنیم که این احساس نیاز در معلم ایجاد شود که به آموزش ریاضی محتاج است. مثلاً ما در ابتدایی قبل از آنکه اعداد ۴ رقمی را تدریس کنیم جمع ۷۷۵ با ۲۲۵ را گفته ایم و بچه می بیند که موجود تازه ای متولّد شده است. با این کار ایجاد انگیزه کرده ایم و بعد عدد ۴ رقمی را معرفی کرده ایم انشاءالله در مجله این کار را بکنیم و انگیزه را به وجود بیاوریم.

مدقالچی: در آموزش ریاضی، تجربهٔ شخصی و بومی حائز اهمیت فراوان است. وقتی که از آموزش ریاضی صحبت می کنید باید به ساختارهای اجتماعی ـ فرهنگی هم توجه بکنید و این دیگر با خود ریاضی فرق می کند ...

ـ ما دائماً بگوییم پولیا خیلی عالی است فایده ندارد. باید ریاضیدانهای خودمان را هم بشناسیم و بشناسانیم ... . آیا این روشهای حل مسأله را به هر کسی تدریس کنیم، مسأله حل کن می شود؟

ما باید بگوییم که کدام تحقیقات اولویت دارند و باعث رشد و اعتلای جامعه می شوند. ما باید بررسی کنیم که برای رشد این کشور چه کارهایی را باید بکنیم. مثلاً کشورهای بلوک شرق سابق همیشه در ریاضی پیشتاز بوده اند امّا آیا در صنعت هم اوّل هستند؟ در آمریکا برعکس است. چه بکنیم؟ صنعت از ما ریاضی مورد نیازش را می خواهد. **ریاضیات راه توسعه** را باید در بحث بگذاریم.

گویا: با توجه به جهتی که دکتر مدقالچی اشاره کردند نقطهٔ شروع خوبی است که وجود آموزش ریاضی چه ضرورتی دارد و کمبود آن چه ضرری ایجاد می کند.

صحبتها از چند جنبه مفید بود: برای آموزش ریاضی به چه مؤلفه های دیگری نیاز داریم؟ آموزش ریاضی به دلیل بین رشته ای بودنش باید قانونمندی کمّی و کیفی را بداند. چطور تحقیقات آموزش ریاضی به وجود می آید و چه میزان در جریان آموزش ریاضی می تواند مفید باشد؟ در اینجا به نوعی بافرا ریاضی[3] کار می کنیم که زمان می برد و باید فرهنگش ایجاد شود.

مدقالچی: من پیشنهاد می کنم که همین حرفها را به صورت میز گرد ریاضی در مجله چاپ کنیم.

---

۱. Think aloud

۲. National Council of Teachers of Mathematics

۳. Meta Math

روایت های معلمان ریاضی

به دلیل اهمیّت نقش معلّم، برنامه های آموزش معلّمان از اهمیّت ویژه ای برخوردار است. مجله در نظر دارد که این مهم را به عنوان یکی از وظایف اصلی خویش بداند. به همین منظور، ستونی در مجله با عنوان روایت های معلمان ریاضی باز شده است تا از طریق آن، بتوانیم رابطهٔ نزدیکتری با معلمان ریاضی برقرار کنیم. این روایتها برای محققان و معلمان محقق فرصت ارزنده ای به وجود می آورد تا به تبیین نظریه های آموزشی و تدریس که از دل کلاس درس و عمل معلّم می جوشد، بپردازند. آنگاه نظریه ها به عمل در می آیند و مجدداً عمل به نظریه کشانده می شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می کند.

از همکاران گرامی انتظار می رود که روایتهای خود را برای ما بفرستند. علم زمانی ارزشمند است که در اختیار عموم قرار گیرد، زیرا که زکات علم نشر آن است. معلمان عزیز باید به اهمیّت تجربه های خود واقف شوند و با پویایی به غنی تر کردن آنها بپردازند.

یک تجربه

مریم گویا
دبیر ریاضی منطقه ۲ تهران

تعطیلات نوروز به پایان رسیده بود. گرچه مدارس باز شده بودند، امّا دانش آموزان هنوز حال و هوای عید را داشتند و درس و کلاس را جدی نمی گرفتند. در چنین اوضاعی، رئیس دبیرستان از من خواست به کلاس یکی از دبیران که نمی توانست به مدرسه بیاید بروم و «هرطور شده» در فرصت باقی مانده تا پایان سال درس را به پایان برسانم. در حقیقت از پذیرفتن چنین پیشنهادی اکراه داشتم، زیرا از یک طرف سال تحصیلی رو به اتمام بود و از طرف دیگر به دلیل درگیری بین بچه ها و دبیر قبلی درس عقب بود و نفس وجود سابقه این درگیری نیز کمی مرا نگران می کرد.

به هر تقدیر، بناگزیر پیشنهاد مدیر را پذیرفتم و راهی کلاس شدم. بعد از سلام و احوالپرسی و معرفی خود و پرسیدن اسامی بچّه ها، از آنها خواستم گروههای کوچکی را تشکیل دهند، تا بدین وسیله بتوانند مسائلی را که در کلاس مطرح می شوند با همفکری و کمک یکدیگر حل کنند. بچه ها که اولین بار بود با چنین شیوه ای مواجه می شدند، راجع به لزوم این کار از من توضیح می خواستند و هر پاسخ من مقدمه ای بود بر طرح ابهام جدیدی از سوی آنها. سعی کردم برایشان روشن کنم، منظورم از کار در گروههای کوچک چیست و اینکه آنها مجازند با هر چند نفری که مایلند گروه تشکیل دهند، مشروط بر آنکه بتوانند به هم کمک کنند. به هر صورت سرانجام موج سوالات فروکش کرد، درحالی که تغییر مکان بچه ها از جاهای خود و دور هم نشستن افراد گروهها و تازگی کار، جنب و جوشی را در کلاس پدید آورده بود، قبل از اینکه به طرح مسأله بپردازم، دانش آموزان مؤکّداً به طرح اشکالات درسی خود پرداختند و مباحث مختلفی را پیش کشیدند. در این میان، بخش لگاریتم و تصاعد هندسی بیشتر از سایر قسمتهای درس مورد اشکال بود. به آنها گفتم که اشکالات را دسته بندی می کنیم و سپس می کوشیم تا به کمک یکدیگر آنها را بررسی کنیم. شنیدن عبارت «به کمک یکدیگر» برای دانش آموزان خوشایند نبود. آنها گفتند: ما اگر چیزی می دانستیم که از شما نمی پرسیدیم! پاسخ دادم، من هم قبول دارم که اشکال دارید، امّا شما مطالبی می دانید که اگر آنها را به یاد آورید و مورد استفاده قرار دهید، ممکن است اشکالاتتان برطرف شود. دانش آموزان، در پاسخ، تنها ناباورانه نگاهم کردند.

بالاخره مساله ای در مورد تصاعد هندسی[1] نوشتم و به دانش آموزان فرصت دادم تا آن را حل کنند. واکنش آنی آنها این

بود که مسأله مشکل است ما تا به حال از این مسأله ها ندیده ایم و . . . از این قبیل. آنها را قانع کردم که بیشتر تلاش کنند زیرا مهم نفسِ فکر کردن آنهاست و نه جواب مسأله. پس از اندکی مقاومت،

> **شنیدن عبارت «به کمک یکدیگر» برای دانش‌آموزان خوشایند نبود. آنها گفتند: ما اگر چیزی می‌دانستیم که از شما نمی‌پرسیدیم!**

سرانجام دانش‌آموزان، درگیر حل مسأله شدند. هرکدام نظری می‌دادند و بحثهای جالبی با هم داشتند. در تمام مدت به گروهها سرمی‌زدم و اگر نیازی بود راهنماییشان می‌کردم و چنانچه به مورد جالبی اشاره می‌کردند به تشویقشان می‌پرداختم. در نهایت پس از مدتی بعضی از گروهها توانستند به جواب برسند. البته فرصت را از بقیه سلب نکردم. ابتدا تمام جوابها را از گروهها گرفتم و روی تخته سیاه نوشتم، و سپس از آنها خواستم که از هر گروه یک نفر درباره حل مسأله توضیح دهد. البته جواب صحیح را نیز مشخص نکردم، چون می‌خواستم همه با اعتماد به نفس از راه حل خود دفاع کنند. دانش‌آموزان خود در حین توضیح به اشتباهاتشان پی می‌بردند و در طی این روند به تدریج همگی درمی‌یافتند که جواب درست کدام است. وقتی همهٔ آنها قانع شدند و جواب صحیح را ـ که خود یافته بودند ـ پذیرفتند، به یادداشت مطالب پرداختند.

> **جلسهٔ بعد که وارد کلاس شدم، روی تخته سیاه با خط درشت زیبایی نوشته شده بود: «درس شیر ین ریاضی»... به بچه‌ها نگاه کردم. دوستانه لبخند می‌زدند. من هم خندیدم ... چقدر زیبا بود!**

طبیعی بود که آنان در فهم مطالب اشکال داشتند و نه در به خاطرسپاری مفاهیم. دانش‌آموزان فرمولها و قوانین را بلد بودند، امّا چون نمی‌دانستند چرا، چگونه و به چه منظور این روابط به وجود آمده‌اند، از کاربرد آنها در حل مسأله عاجز بودند. پس از پایان یادداشت برداری، چند نفری که ظاهراً هنوز با کلاس و درس سرسخت بودند، راجع به لگاریتم و اینکه به چه درد می‌خورد از من توضیح خواستند. در جواب آنها، به ذکر نمونه هایی از رشد توابع نمایی در طبیعت پرداختم و آنها را با رابطهٔ این توابع و برخی پدیده های طبیعی ـ مثل شدت زلزله ـ آشنا کردم. توجّه بچّه ها جلب شده بود. چهره هایشان لجاجت اولیه را نداشت و اشتیاق به دانستن را در چشمهایشان می دیدم . . .

جلسهٔ بعد که وارد کلاس شدم، روی تخته سیاه با خط درشت زیبایی نوشته شده بود: «درس شیر ین ریاضی» . . . به بچه‌ها نگاه کردم. دوستانه لبخند می زدند. من هم خندیدم . . . چقدر زیبا بود!

۱) ابتدا مطلبی را به این صورت مطرح نمودم:

امروز در تاکسی خبری شنیدم باین مضمون که دانش آموزانی

> **دانش‌آموزان فرمولها و قوانین را بلد بودند، امّا چون نمی‌دانستند چرا، چگونه و به چه منظور این روابط به‌وجود آمده‌اند، از کاربرد آنها در حل مسأله عاجز بودند.**

که در سال ۷۶ فارغ التحصیل می شوند بدون کنکور به دانشگاه می‌روند و ملاک پذیرش، معدل کتبی آنهاست. این خبر عکس‌العمل شدیدی ایجاد کرد. دانش‌آموزان خوشحال شدند و خواستار منبع خبر بودند. به آنها گفتم این یک شایعه است! اگر پس از پایان کلاس هرکدام از شما به دو نفر دیگر این خبر را بدهید، چه مدت طول می کشد تا ۱۰۰۰ نفر خبر را بشنوند؟ یا اگر هریک از شما خبر را به اطلاع دو نفر دیگر برسانید و از هرکدام بخواهید تا یک ساعت دیگر خبر را به دو نفر دیگر برسانند و آنها نیز به همین ترتیب عمل کنند، در مدت ۱۰ ساعت چند نفر خبر را شنیده اند؟ مسألهٔ دیگر این بود که اگر شما بخواهید پس از پایان تحصیلات در مؤسسه ای استخدام شوید و شرایط پرداخت دستمزد به این ترتیب باشد که روز اول ۱ ریال به شما بدهند و هر روز دستمز شما را دوبرابر کنند، ایا به استخدام چنین مؤسسه ای درمی آیید یا خیر؟

عده ای از دانش‌آموزان بلافاصله جواب منفی دادند! چند نفری گفتند قبول می کنیم، از آنها دلیل خواستم و خواهش کردم با هم بنشینند و دستمزد ماهانه را حدس بزنند و بالاخره قاطعانه و با دلیل جواب مثبت بدهند!

این دو مورد به صورت دو فعالیت در کتاب ریاضی پایه رشتهٔ علوم انسانی دورهٔ پیش دانشگاهی مطرح شده است.

حسابان در قرن هفدهم

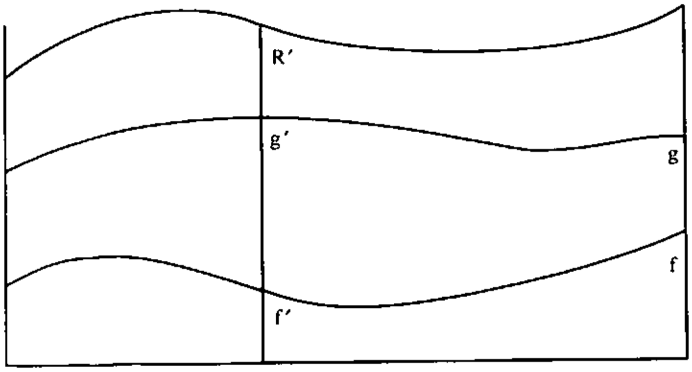
نوشتهٔ: ساندهایمر و راجرسن
ترجمهٔ: علیرضا مدقالچی

بعد از ارشمیدس[1] ۱۹۰۰ سال طول کشید تا پیشرفت قابل ملاحظه ای در حسابان ظاهر شود، ولی از آن به بعد اتفاقات سریع بود. صد سالهٔ قرن هفدهم، «عصر شجاعانه ای» بود که در طول آن حسابان بینهایت کوچکها از سرآغاز مقدماتی شروع و به دیسیپلین ریاضی کاملاً توسعه یافته رشد کرد. معمولاً کشف حسابان به نیوتن[2] و لایبنیز[3] استناد می شود، و منسوب به دورهٔ ۱۶۷۵ـ۱۶۶۵ است. هیچ بحثی در این استناد وجود ندارد ولی این تصور که این دو نفر حسابان را در خارج از «فضای آن زمان» ابداع کرده اند نادرست است. بعکس، روشهای بینهایت کوچکهادر فضای آن زمان وجود داشت، و واقعاً بسیاری از ریاضیدانان نامی قرن هفدهم دراین گسترش سهیم اند. در این دوره بسیار بی معنی است که بگوییم چه کسی چه چیزی را ابداع کرد و یک نتیجه منتسب به یک نویسندهٔ خاص است. تمام آنچه را که با اطمینان می توان بیان کرد آن است که آن نویسنده به این مسأله برخورد کرده بود.

چرا در قرن هفدهم چنین پیشرفت عظیمی بعد از چنان دورهٔ طولانی رکود حاصل شد؟ بدون شک قسمتی مختص به روح جدیدی بود که به وسیلهٔ رنسانس[4] در علوم و فنون دمیده شده بود. نسخه هایی از آثار ارشمیدس و سایر ریاضیدانان یونانی درقرن شانزدهم منتشر گردید. از این رو، روش های یونانی برای محاسبه سطح، حجم و مرکز ثقل پیش روی دانشمندان قرار گرفت. انگیزش قوی برای توسعهٔ مکانیک نظری، و ازاین رو روشهای ماهرانهٔ محاسبات و کاربرد بینهایت کوچکها برای مطالعهٔ حرکت و تغییر، از منابعی نظیر به کار بردن بیشتر مکانیک در کارخانه های اولیه، مثلاً پمپها و آسانسورها در معادن؛ «نجوم جدید» منسوب به کپرنیک، تیکو براهه و کپلر این امید را می داد که علم مکانیک اهمیتی برای پدیده های آسمانی و زمینی داشته باشد. تکمیل ساعتها منجر به اندازه گیری دقیق زمان و اثبات وجود نظم و قانون در وقایع طبیعی گردید.

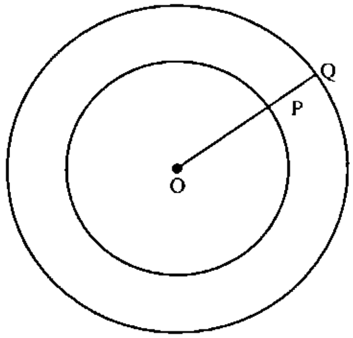
مشخصهٔ همهٔ کارهای جدید در مورد حسابان ترک استانداردهای مشکل ارشمیدس بود. مردم می خواستند نتایجی را به دست آورند، و احساس می کردند که روشهای در دست مطالعه می تواند کمک قدرتمندی برای اکتشافات جدید باشد. در نتیجه آنان بدون نگرانی از کمبود منطق در بحثها به پیش تاختند. گرچه معمولاً به خوبی درمی یافتند که این بحثها فاقد بنیان محکم است. هر نویسنده به استانداردهای خود تکیه داشت. این وضع در طی قرنهای هفده و هجده پابرجا بود و تنها بعد از ۱۸۰۰ سال بود که استانداردهای یونان دوباره معرفی می شدند تا کل موضوع بر یک پایهٔ منطقی معتبر استوار گردد، «حسابان» را به «آنالیز» برگرداند.

ما فقط به اندکی از کمک خیلی مهمی که به حسابان در دورهٔ قبل از نیوتن و لایبنیز شده است، می پردازیم. کاوالیری[5] مرید گالیله و استاد بلونگا درسال ۱۶۳۵ کتاب تحت عنوان Geometric Indivisibilibus Continvorum خود را منتشر ساخت که گزارش سیستماتیک از روشهای بینهایت کوچکها بود که انگیزش زیادی از چنین مسائل را در برداشت. حسابان کاوالیری با روشهای ارشمیدس ارتباط داشت. گرچه احتمالاً کاوالیری با آنها ناآشنا بود. او مساحت یک سطح مسطح را مرکب از خطوط («تقسیم ناپذیر[6]») و حجم جامد را مرکب از سطوح می دانست اجزاء شبیه اتمهای خیلی ریز ولی متناهی یونانیان نبود، ولی بر اساس فلسفه اسکولاستیک قرون وسطی پیوستار را بینهایت بار تقسیم پذیر می دانست. نمونه ای از نتایجی که توسط کاوالیری به دست آمد به صورت زیر است: سطحهای F و G را

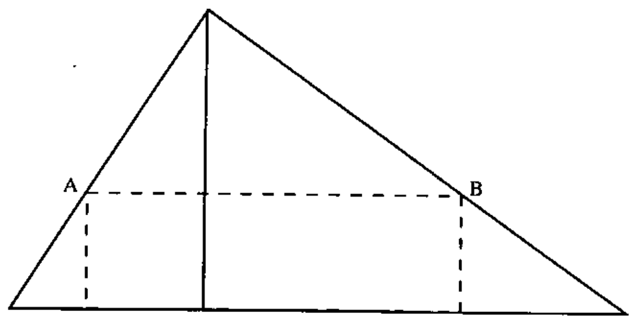


(شکل ۱)

در نظربگیرید که با خمهـای f و g (شکل ۱) محدود شده است : حجم h را طوری رسم کنید که h' یعنی عرض هر نقطه مجموع عرضهای نقاط متناظر از f و g باشد : $h' = f' + g'$. روش اجزاء نتیجه می دهد که مجموع همه عرضهای f' (یعنی سطح F) بعلاوهٔ مجموع همه عرضهـای g' برابر است با همـهٔ عرضهـای h' ؛ بنابراین سطـح H محدود به h برابر است با $F + G$. این نتیجـه درست است ، ولی به زودی مشخص گردید که این نوع بـحـث می تواند به نتایجی هم منجرشود که نادرست هستند : با بـه کـار بردن این روش در مورد دو دایره با در نظر گرفتن مجموع هـمـهٔ شعاعها می توان نتیجه گرفت کـه (شـکـل ۲) اگر $OQ = 2OP$



(شکل ۲)



(شکل ۳)

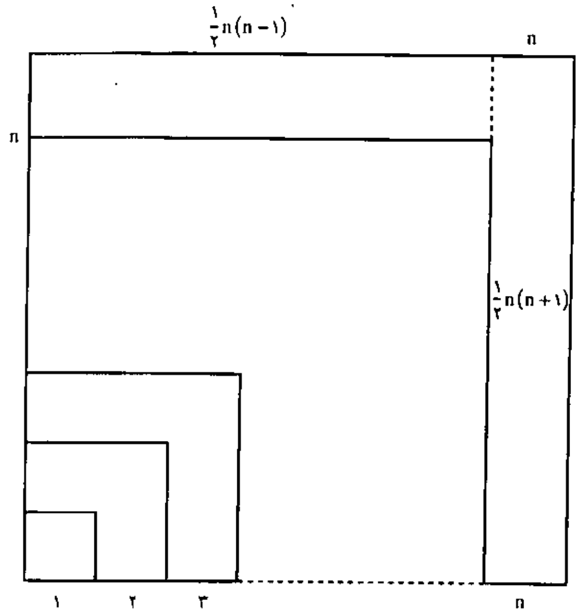
مساحت دایرهٔ بزرگتر باید دو برابر دایرهٔ کوچکتر باشد ، که البته نادرست است . دوباره ، فرض کنید مثلثی را به دو قسمت A و B مطابق شکل ۳ تقسیم کرده ایم . به هر خط تشکیل دهندهٔ قسمت A خط دیگری از B نسبت می دهیم و بعکس ؛ از این رو سطـح A باید برابر سطح B باشد (به این اشکال توسط توریچلی[۷] مرید دیگر گالیـلـه[۸] اشاره شده است) . از این رو ، آشـکـار شـد کـه روش تقسیم ناپذیری ، به فرم کاوالیری ، نمی تـوانـد تـعـریـف کـلّی رضایتبخش از سطوح و احجام ارائه دهد .

سهم ماندگار کاوالیری تعمیم او از تربیع سهمی است .

او سطح زیر منحنی معادلـهٔ درجه سوم $y = x^3$ بین $x = 0$ و $x = 1$ در نظر گرفت ، و با جمع کردن مساحت مستطیلها به طریق دومین روش ارشمیدس فرمول زیر را به دست آورد :

$$T_n = \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3)$$

از این رو نیاز داشت که قادر به محاسبه جمع مکعبهای n عدد صحیح باشد . فرمول محاسبهٔ این مجموع از زمانهای قدیم شناخته شده بود . اعراب (منظور دانشمندان اسلامی است . م) ساختـار زیبای زیر را ارائه داده اند : مربع "n+...+۲+۱" را در نظربگیرید و به روش شکل ۴ تقسیم کنید . چون :



$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مساحت مربع برابـر است بـا $\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$. می تـوانـیـم مساحت مجموع را به صورت مساحتهای تکـه هـای L ، شکلی محاسبه کنیم : سطح تکـه nم از دو مستطیل تشکیل شده اسـت و برابر است با :

$$n\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right] + n\left[\frac{1}{2}(n-1)n\right]$$

$$= n\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\right) = n^3$$

بنابراین

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$$

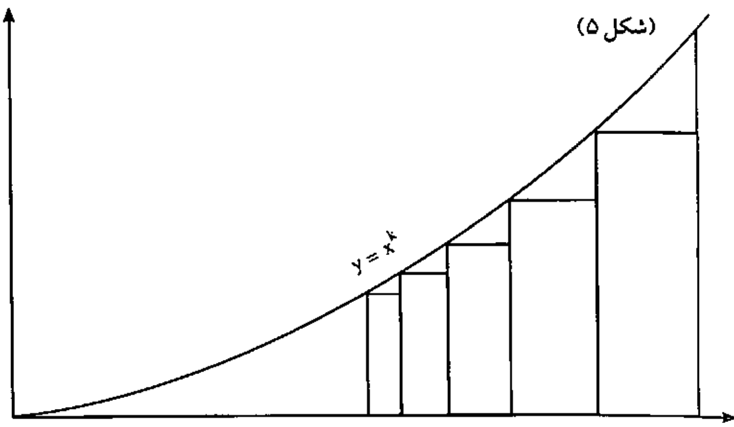
و از این رو :

$$T_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$

یعنی در حالت سهمی نتیجه یک عدد گویا است، بنابراین سطح مورد بحث هم مقیاس با یک مستطیل است. کاوالیری در مورد سطحهای متناظر $y = x^4$ (نتیجه $\frac{1}{5}$)، $y = x^5$ (نتیجه $\frac{1}{6}$)، و غیره ادامه داد. هر حالت باید به طور جداگانه مورد بررسی قرار می گرفت، و هر مرحله به مرحله بعدی ادامه پیدا می کرد!

کاوالیری موقعی که به $y = x^9$ (نتیجهٔ $\frac{1}{10}$) رسید مراحل را ترک کرد و نتوانست نشان دهد که چگونه می توان حالت کلی $y = x^k$ را به ازای عدد طبیعی دلخواه k تعمیم داد. این مشکل در سال ۱۶۵۰ توسط فرما[۹] مرتفع گردید. او تشخیص داد که برای تقریب سطح با مستطیلها لازم نیست که بازهٔ (۱ ، ۰) را به روش دومین استدلال ارشمیدس به قسمتهای مساوی تقسیم کرد و تقسیم بندی هوشمندانه می تواند به جمعبندی ساده تر بینجامد. این یک ایدهٔ برجسته بود و برای توسعهٔ بیشتر حساب انتگرال اساسی بود؛ آن حقیقتاً مشکل جدیدی از اولین برهان ارشمیدس در مورد سهمی بود. افراز فرما در شکل ۵ نشان داده شده است؛ l عددی بین ۰ و ۱ است. مساحت کل مستطیلهای زیر خم مجموع نامتناهی زیر است:

(شکل ۵)



$$s_l = (1-l)l^k + (l-l^2)(l^2)^k + (l^2-l^3)(l^3)^k + \dots$$
$$= (1-l)l^k + (1-l)l^{2k+1} + (1-l)l^{3k+2} + \dots$$
$$= (1-l)l^k\left[1 + l^{k+1} + l^{2k+2} + \dots\right]$$

با جمعبندی سری نامتناهی هندسی داریم:

$$s_l = \frac{(1-l)l^k}{1-l^{k+1}}$$

و، چون

$$1 - l^{k+1} = (1-l)(1+l+l^2+\dots+l^k)$$

$$s_l = \frac{l^k}{1+l+l^2+\dots+l^k}$$

در این مرحله l را به ۱ میل می دهیم؛ در این صورت عرض هر مستطیل به صفر می گراید، و سطح کل به سطح R زیرخم میل می کند. از این رو $R = s_{l=1} = \frac{1}{k+1}$. این نتیجهٔ نهایی است که به وسیلهٔ محاسبات کاوالیری پیشنهاد شده است. فرما توجه کرد که این بحث به سادگی به خمهایی که در آنها k یک کسر است قابل توسعه است مثلاً $h = p/q$ که p و q اعداد صحیح مثبت هستند. فقط در مراحل نهایی که در کسر $1 - l^{k+1}$ عدد k را عدد صحیح فرض کرده بودیم، فرمول جایگزین زیر را به دست می آوریم ($t^q = l$)

$$s_l = \frac{(1-l)l^{p/q}}{1-l^{(p+q)/q}} = \frac{(1-t^q)t^p}{1-t^{p+q}}$$
$$= \frac{t^p(1-t)(1+t+t^2+\dots+t^{q-1})}{(1-t)(1+t+t^2+\dots+t^{p+q-1})}$$

اگر l و t به ۱ میل کنند، این کسر به $\frac{p}{p+q} = \frac{1}{\frac{p}{q}+1} = \frac{1}{k+1}$ میل می کند. اعداد منفی k نیز می توانند وارد بحث شوند، و از این رو فرما قادر بود که از x^k به ازای همهٔ اعداد گویای k به جزء $k = -1$ انتگرالگیری کند. به ازای این مقدار خاص روش فوق سری هندسی به دست نمی دهد. این حالت خاص مسأله سطح زیر هذلولی $y = \frac{1}{x}$ است.

به نظر می آید روش افراز برای پیدا کردن سطح این خم، نخست در سال ۱۶۴۷ توسط دانشمند بلژیکی سن ونسان[۱۰] انجام شد. این نتیجه در پایان کار بسیار زیاد و در عین حال بی فایده او در مورد تربیع دایره به دست آمد و نویسنده آن را اعتبار کمی بخشید؛ احتمالاً او از اهمیت کشف خویش با خبر نبود. ایدهٔ گریگوری این بود که سطح زیرخم $y = \frac{1}{x}$ را بین مثلاً $x = 1$ و $x' = 2$ با تعداد مشخصی از مستطیلها پر می کرد (شکل ۶)؛ در این صورت سطح بین ۲ و ۴ را با همان تعداد مستطیل پر می کرد (از این رو دارای عرض دو برابر بود)؛ دوباره بین ۴ و ۸ با همان تعداد مستطیلها پر می شد (دوباره عرض دو برابر می شد)؛ و به همین ترتیب الی آخر. چون $y = \frac{1}{x}$ است دو برابر کردن مقدار x به معنی

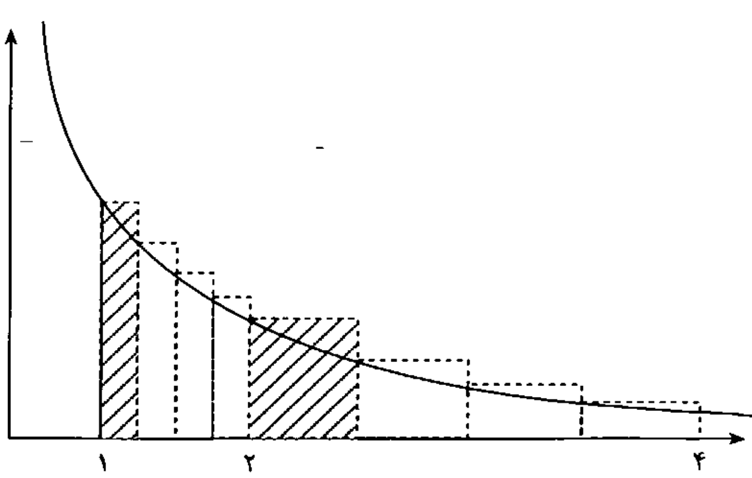
نصف کردن y است؛ بنابراین مساحت طول دو برابر شده دارای نصف بلندی است، از این رو سطح آن تغییر نمی کند. از این رو سطح کل مستطیلهای بین $x = 1$ و $x = 2$ برابر است با سطح کل مساحت مستطیل بین $x = 2$ و $x = 4$ و الی آخر. این نتیجه غیر قابل تغییر باقی می ماند اگر تعداد مستطیلهای هر قسمت را افزایش دهیم و از این رو با افزایش تعداد مستطیلها بینهایت بار نتیجه می شود که خاصیت مستطیلها در مورد سطح J_{ab} تحت خم مذکور بین a و b برقرار است.

$J_{1,2} = J_{2,4} = J_{4,8} = J_{3,6} = \dots$. نتیجه کلّی این است که $J_{a,b} = J_{Ka,kb}$ که در آن k یک عدد صحیح مثبت است، و بسادگی می توان به حالتی که k یک کسر مثبت است تعمیم داد (کوشش کنید که خود این را نشان دهید) نتیجه می شود که سطح زیر خم بین ۱ و xy برابر است با: $= J_{1,x} + J_{1,y}$ (چون سطحها جمع می شوند) $J_{1,xy} = J_{1,x} + J_{x,xy}$ این نشان می دهد که *تابع سطح* $J_{1,x}$ دارای *خاصیت اساسی لگاریتم*، $\log xy = \log x + \log y$ است.

آیا این بدان معنی است که گریگوری فرمول $\int \frac{dx}{x} = \log x$ را کشف کرده است که ما امروزه در جدول انتگرالها می یابیم؟ قبلاً گفتیم که سؤالاتی از این نوع را به سختی می توان پاسخ داد؛ کاشف منحصر به فرد وجود ندارد. ما واقفیم که فرمولی به شکل امروزی توسط لایبنیز ارائه شده است. باید مواظب باشیم که روش مدرن تفکر خویش را بر مردمانی که کورمال کورمال راه خود را به سوی حسابان قرن هفده باز می کردند تحمیل نکنیم. امروزه تعریف انتگرال در آنالیز به صورت حدّ یک مجموع مشخص است، و مفاهیم شهودی هندسی هیچ نقشی ندارند. از این رو می توانیم سطح محدود به خم $y = \frac{1}{x}$ را به صورت یک انتگرال نامعین تعریف کنیم. از سوی دیگر گریگوری با مسألهٔ هندسی سطوح در ارتباط بود؛ سایرین در این زمان با لگاریتم *اعداد* به عنوان ابزار محاسبه آشنا بودند. این دو مفهوم کاملاً متمایزند، و لگاریتم هنوز به عنوان *تابعی* که ارزش مطالعه به مفهوم ریاضی آن داشته باشد نداشت. آنچه گریگوری نشان داد ــ که قدم اساسی بود ــ این بود که سطح زیر هذلولی بین یک نقطهٔ ثابت و نقطه‌ای با طول متغیر مثل *لگاریتم* رفتار می کند، یعنی با افزایش حسابی طول به طور هندسی افزایش پیدا می کند.

از این رو در حدود ۱۶۵۰ پیشرفت نسبتاً خوبی در برخورد با مسأله قدیمی *تربیع* برای محاسبه سطح زیر خمها به عمل آمد. همچنین مسلّم گردید که مسائل متناظر هندسی نظیر راستیدن[11] خمهای مختلف (یعنی پیدا کردن خط راست با همان *طول*)، و مشخص کردن مساحت سطح حاصل از دوران را می توان به تربیعات کاهش داد. در مرحلهٔ اول مسائل مطابق با وضعیت هندسی اولیه (مکانیکی) رده بندی شدند، ولی به تدریج مشخص شد که مسائل مختلف با سرچشمه های متفاوت ولی از نظر ریاضی معادل به یک مسألهٔ تربیع منجر می شوند؛ به این صورت حساب انتگرال به عنوان یک دیسیپلین جداگانه ریاضی مطرح شد.

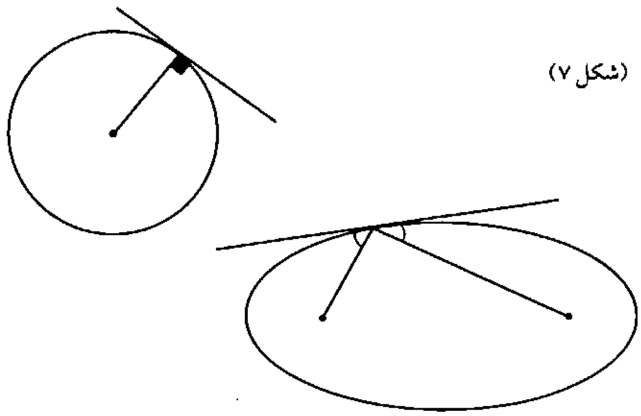
در مورد مفهوم دیگر حسابان، مشتق چه؟ آیا به طور ضمنی به رده های مختلف مسائلی که در عهد عتیق وجود داشته است برمی گردد: مسائلی نظیر مسألهٔ هندسی پیدا کردن مماس بر یک خم؛ مسأله *ماکسیمم* و مینیمم پیدا کردن بیشترین و کمترین مقدار متغیرها؛ مسألهٔ انرژی جنبشی حاصل از سرعت حرکت یک جسم، یعنی نسبتی که مکان آن با زمان تغییر می کند. پیشرفت در حلّ این مسائل مدیون آفرینش حساب دیفرانسیل در قرن هفدهم است. یونانیان هیچ روش مشتقگیری مشابه روش افنا برای محاسبهٔ سطوح نداشتند. آنان مماس بر منحنیهای ساده را با ساختار هندسی مشخص می کردند: برای دایره خط عمود بر شعاع، و برای بیضی خطی که زوایای مساوی با خطوط واصل با کانونها می سازد (شکل ۷) (توجه کنید که یونانیان برای هر دو منجنی *مسأله محاسبه سطح* را غیرقابل حلّ می دانستند!). در واقع خواص مماس و قایم به مقاطع مخروطی در کتاب مشهور *مخروطات* آپولونیوس[12] به دقت مورد مطالعه قرار گرفته بود. ولی یونانیان تعریف کلّی رضایتبخشی از مماس بر یک خم *دلخواه* را نداشتند؛ آنان مفهوم ضعیفی از آن را می دانستند بدین معنی که خطی است که هیچ خط دیگری نمی توان از نقطه تقاطع «بین» خط مماس و منحنی رسم کرد. تنها ایدهٔ حساب دیفرانسیل از مشاهدهٔ ارشمیدس به دست آمد که او راستای مماس به مارپیچ $r = k\theta$ با تصور جهت آنی حرکت یک نقطه متحرک مشخص کرد که این حرکت برآیند حرکت شعاعی



(شکل ۶)

یکنواخت که ازمرکز دور می‌شود و حرکت دایره‌ای حول مبدأ است. گرچه این یک نتیجه منحصر به فرد بود.

به نظر می‌آید که در حوالی ۱۶۳۰ فرما می‌دانست که چگونه از توابع ساده می‌توان مشتق گرفت. (پیردو فرما (۶۵ـ۱۶۰۱) حقوقدانی بود که ریاضیات را به عنوان کار ذوقی انجام می‌داد و در دوران زندگی مقدار اندکی از آنها را به چاپ رساند. در نتیجه تاریخ دقیق ابداعات بکر و عمیق او نامشخص است و او در دوران حیات خود اعتباری را که استحقاقش را داشت کسب نکرد. سهم اساسی او در نظریه اعداد در فصل دومّ این کتاب آمده است. او هندسهٔ تحلیلی را مستقل از دکارت[۱۳] گسترش داد که معمولاً دکارت را پایه گذار می‌دانند، همچنین فرما به کمک بلز پاسکال[۱۴] بنیانگذار نظریهٔ احتمال بود. معرفی روشهای توانای جبر در هندسه یکی از پیشرفتهایی بود که برای توسعهٔ کامل حسابان مورد نیاز بود.)

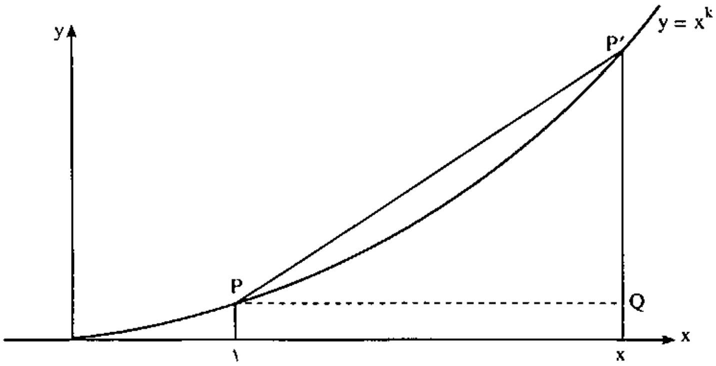


(شکل ۷)

فرما برای پیدا کردن مماس بر منحنی $y = x^k$ مثلاً در نقطهٔ $x = ۱$ استدلالی را به کار برد که معادل مشتقگیری بود (شکل ۸) او مماس در p را وضعیت حدی وتر pp' در نظر می‌گرفت که p' به p نزدیک می‌شود، به طوری که شیب مماس مقدار حدی $\frac{P'Q}{PQ}$، یعنی $\lim_{x\to ۱}\frac{x^k - ۱}{x - ۱}$ است به طوری که فرما می‌توانست آن را بر حسب k محاسبه کند. ما در می‌یابیم که در تعیین این حدّ فرما اساساً با همان مسألهٔ ریاضی مواجه بود که در محاسبه سطح همان منحنی. آیا فرما از رابطهٔ بین مشتقگیری و انتگرالگیری آگاه بود؟ او ذکری از آن به میان نمی‌آورد. در آغاز روشهای مشتقگیری کاملاً جدا از روشهای انتگرالگیری گسترش یافت ـ بالاخره، آنها از مسائلی سرچشمه گرفتند که به نظر می‌آمد هیچ رابطه‌ای با یکدیگر ندارند.

در همان مرحله در قرن هفدهم مشخص گردید (ما نمی‌توانیم مبدع منحصر به فردی را نام ببریم) که مشتقگیری و انتگرالگیری فرآیندهای وارون هم هستند؛ این تشخیص سهم اساسی در گسترش اساسی حسابان به عنوان یک دیسیپلین سیستماتیک داشت. این رابطهٔ وارون ایدهٔ انتگرال نامعین را در برمی‌گیرد: اگر $f(x)$ تابع مفروض باشد و $F(x)$ تابعی باشد به طوری که مشتق آن یعنی $F'(x)$ مساوی $f(x)$ باشد، $F(x)$ را انتگرال نامعین (یا پادمشتق) $f(x)$ می‌نامیم و با $\int f(x)dx$ می‌نویسیم $F(x)$ منحصر به فرد نیست: اگر $F(x)$ انتگرال نامعین $f(x)$ باشد $F(x) + C$ نیز چنین است، که در آن C ثابت است).

نماد فرما برای سطوح زیرمنحنی چه بود؟ لازم است نشان دهیم که اگر $f(x)$ دارای انتگرال نامعین $F(x)$ باشد، سطح زیر منحنی $y = f(x)$ بین $x = a$ و $x = b$ برابر است با $F(b) - F(a)$ (با



(شکل ۸)

قید مشخص در نظر گرفتن علامت البته این روش استاندارد برای محاسبهٔ «انتگرالهای معین» $\int_a^b f(x)dx$ بر حسب انتگرال نامعین است). نیوتن چنین استدلالی را برای خم $y = ax^{m/n}$ به کار برد، ولی بدون شک چند نفر از اسلاف او از این ایده آگاه بودند. (تمام این برهانها متکی به «سطح» به عنوان ایدهٔ قابل درک هندسی بود که نیاز به تعریف بیشتری نداشت). اگر «حدّ بالا» یعنی b را به عنوان متغیر در نظر بگیریم، رابطهٔ وارون بین مشتقگیری و انتگرالگیری را می‌توان با دو معادله زیر بیان کرد:

$F(b) = \int_a^b f(x)dx +$ ثابت و $F'(b) = f(b)$

دسترسی به تربیع از طریق انتگرال نامعین، که توسط نیوتن و لایبنیز و جانشینان او انتخاب شده بود، مشتقگیری را مفهوم مقدماتی و *انتگرالگیری* را مفهوم بالاتر از آن در نظر می‌گیرد. چون محاسبهٔ مشتقات بسیار ساده‌تر از محاسبات مستقیم سطوح است (این مسلماً در روزگاران قبل از رایانه‌ها حقیقت داشت!) این فرمولبندی روش خیلی سریع و مناسب برای محاسبهٔ انتگرالهای نامعین بسیاری از توابع ساده ـ توابعی که مشتق توابع دیگر بودند ـ ارائه می‌داد. و از این رو به سرعت حسابان را از یک

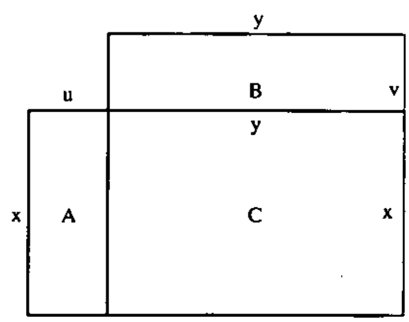
دیسیپلین سخت و محدود به یک ابزار ریاضی مفید و قابل دسترس تبدیل کرد. ولی روش پاد ـ مشتق روش سیستماتیک برای تربیع ارائه نداد؛ توابع کاملاً ساده‌ای نظیر e^{-x^2} را نمی‌توان به صورت مشتقات توابع سادهٔ دیگر نوشت.

در حدود ۲۰۰ سال بعد بود که ریمان[15] و دیگران به تعریف مستقیم انتگرال $\int_a^b f(x)dx$، به طریق یونانی، به عنوان حدّ مجموع و بدون ارجاع به مشتقگیری برگشتند. رابطهٔ

$$\frac{d}{db}\int_a^b f(x)dx = f(b)$$

قضیهٔ پایه‌ای در آنالیز شد؛ هنوز هم به عنوان «قضیهٔ اساسی حسابان» مطرح است. مفهوم توانای انتگرال در قرن نوزدهم به عنوان «مجموع» به جای پادمشتق رهیافت قدیمی را به عنوان حالت خاص در برمی‌گیرد و در این زمانه رایانه‌ها باید راه طبیعی تفکر در مورد انتگرالها از نظر عملی و نظری باشد. متأسفانه آموزش حسابان مقدماتی در مدارس ما، حتی حالا هم، هنوز با تفکرات قرن هفدهم محصور شده است.

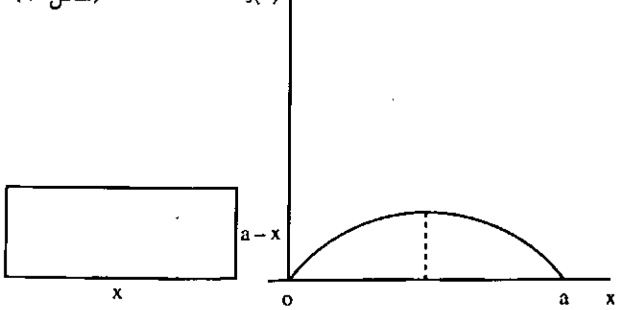
به فرما و مفاهیم اولیه مشتقگیری برمی‌گردیم. تعیین ماکسیمم و مینیمم، نظیر مسألهٔ مماس روشهایی را پیشنهاد می‌کند که معادل تعیین مشتق است. مسأله کلاسیک هندسی را در نظر بگیرید که



(شکل ۹)

در میان همهٔ مستطیلهای با محیط مفروض مربع دارای بزرگترین سطح است. برهان کاملاً هندسی زیر توسط اقلیدس ارائه شده است (شکل ۹): فرض کنید $A+C$ یک مستطیل و $B+C$ مربعی با همان محیط باشد. چون محیطها برابرند، $x+u+y = x+v+y$، در نتیجه، $u = v$. چون $B+C$ یک مربع است، $y = v+x$، در نتیجه، $y > x$، بنابراین سطح $B(yv)$ بزرگتر از سطح $A(xu = xv)$ است، و از این رو سطح $B+C$ بزرگتر از مستطیل $A+C$ است. فرما در عوض روش تحلیلی (جدید) ارائه می‌دهد: او توجه می‌کند که این مسأله به

(شکل ۱۰)



مسألهٔ تعیین مقدار x منجر می‌شود که تابع سطح $J(x) = (a-x)x$ دارای بیشترین مقدار است (شکل ۱۰). برای انجام این کار فرما از این ایده ـ گرچه نو نبود ـ که در حوالی نقطهٔ ماکسیمم تابع به آرامی تغییر می‌کند الهام می‌گیرد؛ از این رو $J(x)$ با تغییر کوچک x خیلی کم تغییر می‌کند، به طوری که مقدار سکون تابع f را به دست می‌آوریم. در نتیجه با جایگزینی $x-e$ به جای x به ازای مقدار کوچک e، داریم:

$$J(x-e) = [a-(x-e)](x-e)$$

با مساوی قرار دادن مقدار فوق و $J(x)$ داریم:

$$(a-x)x = (a-x+e)(x-e)$$

این تساوی وقتی به واقعیت نزدیکتر است که e به صفر نزدیکتر باشد، با ساده کردن داریم

$$(a-x)x = (a-x)x - e(a-x) + ex - e^2$$

یا:

$$2ex - ea - e^2 = 0$$

یا (با تقسیم بر e)

$$2x - a - e = 0$$

با قرار دادن $e = 0$ داریم $x = a/2$ و بنابراین $a - x = a/2$؛ از این رو مستطیل با سطح ماکسیمم مربع است. البته این روش کاملاً با روش جدید معادل است که اولین مشتق یعنی $\frac{dJ(x)}{d(x)}$ را مساوی صفر قرار دهیم.

مقالهٔ فوق ترجمهٔ فصل ۹ از کتاب زیر است:

E. Sondheimer and A. Rogerson, Numbers and infinity, A historical account of mathematical concepts, Cambridge, 1981.

1. Archimedes	2. Newton	3. Leibniz
4. Renaissance	5. Cavalieri	6. Indivisibles
7. Torricelli	8. Galileo	9. Fermat
10. Saint-Vincent	11. rectification	12. Apollonius
13. Descartes	14. Blaise Pascal	15. Riemann

گزارشی از

هشتمین کنگرهٔ بین المللی آموزش ریاضی

در سویل

زهرا گویا
دانشگاه شهید بهشتی

ICME 8
SEVILLA 1996

کنگره بین المللی آموزشی ریاضی (ICME) برای اولین بار به پیشنهاد کنگرهٔ بین المللی تدریس ریاضی (ICMI) که بخشی از کنگره بین المللی ریاضی (ICM) است، در سال ۱۹۶۹ با شرکت ۶۰۰ آموزشگر و معلم ریاضی از سراسر دنیا، در شهر لیون فرانسه تشکیل شد. هدف اصلی این کنگره، به رسمیّت شناختن آموزش ریاضی به عنوان یک حوزهٔ معرفتی مستقل بود. سه سال بعد انگلستان در سال ۱۹۷۲ میزبان این کنگره شد و پس از آن، هر چهار سال یکبار کنگره به ترتیب در آلمان (۱۹۷۶)، آمریکا (۱۹۸۰)، استرالیا (۱۹۸۴)، مجارستان (۱۹۸۸) و کبک (۱۹۹۲) تشکیل گردیده است. امسال شهر سویل اسپانیا افتخار برگزاری هشتمین ICME را داشت. شهر سویل و منطقهٔ اندلُس در جنوب اسپانیا یادگار دورانهای پرعظمت تمدّن اسلامی هستند. دیدن کاخ الحمرا در گراناداو مسجد زیبای کُردوبا، ارزش دستاوردهای کنگره را چندین برابر کرد.

استاندار سویل در مراسم افتتاحیهٔ کنگره گفت: «اسپانیا، اندلُس و سویل افتخار دارند که در توسعهٔ فرهنگ انسانی به گونه ای بسیار کارآمد از طریق ریاضی مشارکت داشته باشند. در قرنهای گذشته، اندلس یا الاندلُس پل اصلی برای انتقال دانش علمی بین تمدنهای شرق و غرب بود. امروز اندلس یکبار دیگر افتخار دارد که مرکز انتقال میراث بزرگ ریاضی فرهنگ خودمان ـ قطعاً یکی از عمیق ترین و پرمایه ترین آنها باشد». کنگرهٔ امسال از ویژگی خاصّی برخوردار بود و همانطور که استاندار سویل به آن اشاره کرد، «برای اولیّن بار، با اختصاص دادن ۱۰ درصد از حقّ ثبت نام شرکت کنندگان، کنگره توانست تعداد زیادی از افرادی را حمایت مالی کند که در غیر این صورت، شرکت آنها در اینجا امکان نداشت. به عقیدهٔ من، بیشتر این همبستگی ها در آینده باید متکی به مردم باشد نه مؤسسات.»

هشتمین کنگرهٔ بین المللی آموزش ریاضی با شرکت بیش از چهار هزار نفر در ۱۵ جولای افتتاح شد و تا ۲۱ جولای به طول انجامید. نکتهٔ قابل توجّه در این کنگره، حضور فعّال معلمّان ریاضی سراسر دنیا بود. موضوع های مورد بحث بسیار متنّوع و متضّاد بودند و از نظر من، زیباترین قسمت کنگره همزیستی مسالمت آمیز انواع تضّادها بود! برای مثال، در حالی که در یکی از سخنرانی ها، پُل ارنست دربارهٔ «ساخت و سازگرائی اجتماعی[1] در آموزش ریاضی» صحبت می کرد و مطلق بودن تمامی اندیشه های ریاضی را از زیر سؤال می برد، سخنران دیگری به بحث و بررسی چگونگی و نقش یادگیری الگوریتمی در آموزش ریاضی می پرداخت. یکی در مورد نقش یافته های تحقیقاتی در برنامه ریزی های درسی صحبت می کرد و دیگری تمام مطلب را به زیر سؤال می برد که اصلاً تحقیقات آموزش ریاضی و مسؤلیت محقّق در قبال تعهدهای اجتماعی یعنی چه؟ چنین جلوه های زیبائی از برخوردهای اندیشه و فکر برای جامعهٔ علمی، علوم تربیتی و آموزشی ما که گاهی بی رقیب و بدون چالش به تولید محدود خود می پردازد، می تواند بسیار آموزنده باشد. گذر از مرحلهٔ انحصارطلبی و تک

محصولی علمی به مرحلهٔ آزاد اندیشی و چندین محصولی علمی کاری بس دشوار امّا ضروری و اجتناب ناپذیر است.

قبل از آن که به دیگر ویژگیهای این کنگره بپردازم، آشنایی مختصری با کنگره های قبلی ضروری به نظر می رسد:

دومین کنگره بین المللی آموزش ریاضی که در سال ۱۹۷۲ در شهر اکستر انگلستان و با شرکت ۱۵۰۰ نفر برگزار شد، مصادف با شروع انتقادهای جدّی نسبت به برنامهٔ **ریاضی جدید** بود و یکی از معروفترین مخالفان این برنامه، رنه تام[۲] سؤال کرد: «آیا اصلاً چنین ریاضیاتی وجود دارد؟»

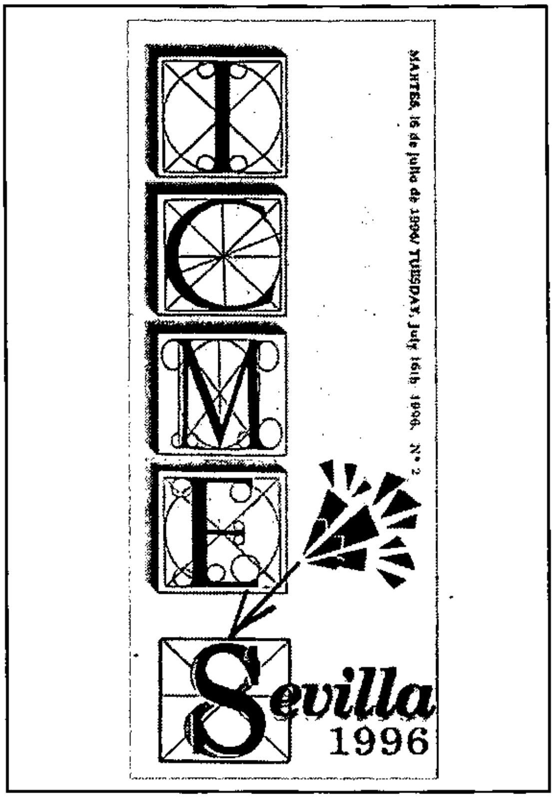
سومین کنگرهٔ بین المللی آموزش ریاضی در سال ۱۹۷۶ در کارلزروهه آلمان با حضور ۲۰۰۰ نفر آغاز به کار کرد. در این کنگره، نهضت جهانی آموزش ریاضی یکبار و برای همیشه با **ریاضی جدید** وداع کرد و جامعهٔ آموزش ریاضی به تدریج ارایهٔ توصیه های خود را در مورد استفاده از ماشین حساب و کامپیوتر آغاز کرد. پروفسور مایکل عطیّه بحث تدریس هندسه در دورهٔ متوسطه و دانشگاه را پیش کشید، در حالی که پروفسور ژان کندی و پروفسور نانسی شلی از استرالیا، توجّه همگان را به تبعیض بر علیه زنان در سخنرانی ها جلب کردند.

برای اولین بار در سال ۱۹۸۰ کنگره، اروپا را ترک گفت و در دانشگاه برکلی در کالیفرنیا برگزار شد. در این کنگره، زبانهای رسمی انگلیسی، فرانسوی و اسپانیائی بودند. **حل مسأله**[۳] به عنوان یک متدولوژی برای تدریس و یادگیری ریاضی مطرح گردید و این موضوع، راهنمای اصلی کار برای تمام دههٔ هشتاد شد.

شهر آدلایت استرالیا میزبان پنجمین کنگرهٔ بین المللی آموزش ریاضی در سال ۱۹۸۴ بود. در این کنگره، حل مسأله ستارهٔ درخشان بحثها بود. پرفسور **اوبیراتان دِامبروسیو**[۴] از برزیل، ایده های اصلی **ریاضیات قومی**[۵] را برای اولین بار در دنیای جدید مطرح کرد.

در سال ۱۹۸۸، اروپا مجدداً میزبان این کنگره شد و ششمین کنگرهٔ بین المللی آموزش ریاضی در بوداپست مجارستان برگزار شد. در آستانهٔ ورود به دههٔ ۹۰ میلادی، استفاده از تکنولوژی در فرآیند یاددهی ـ یادگیری به صورت یک واقعیّت درآمده بود و یکی از محورهای کنگره، پرداختن به این مهّم بود. همچنین، بر آموزشهای مستمّر ضمن خدمت معلمّان به عنوان یک نیاز مبرم تأکید گردید. در این کنگره، آموزش ریاضی خود را به عنوان یک شاخهٔ مستقل علمی به تثبیت رساند.

تعداد شرکت کنندگان از سال ۱۹۷۲ تا سال ۱۹۸۸، تقریباً ثابت بوده و حداکثر به ۲۰۰۰ نفر می رسید. خوشبختانه، در سال ۱۹۹۲ در استان کبک در کشور کانادا، تعداد شرکت کنندگان به ۳۰۰۰ نفر رسید. برای اولین بار، یک اسپانیائی به نام پروفسور میگوئل دگازمن[۶]، رئیس این کنگره شد. او در مراسم اختتامیهٔ هفتمین ICME اعلام کرد که کنگرهٔ بعدی، **کنگرهٔ همبستگی** خواهد بود زیرا هدف آن است که هر معلمّی که علاقمند به ارائهٔ کار خود در هشتمین ICME باشد، حتماً بتواند مشکلات مالی را [با کمک کنگره] حل کرده و در کنگره شرکت کند. در هشتمین ICME، اختصاص دادن ۱۰ درصد از حق ثبت نامها به معلمّانی که دارای مشکل مالی بودند در جهت تحقّق این هدف بود. البتّه، تعداد شرکت کنندگان اروپائی بیش از سایر نقاط دنیا بود (۱۸۴۴ شرکت کننده) که اسپانیا به تنهائی ۹۰۵ شرکت کننده داشت.



حضور در گردهمائی‌های بین‌المللی با تنوع بسیاری که دارند می‌توانند تحوّل عظیمی در شرکت‌کنندگان و در نهادهای علمی که آنها را در برمی‌گیرد ایجاد کنند.

اولّین سخنران عمومی هشتمین ICME، آنا سیرپنیسکا[۷] معاون کنگره بین المللی تدریس ریاضی (ICMI) از کانادا بود. موضوع اصلی صحبت او چنین بود که «آموزش ریاضی به کجا می رود؟» سیر پنیسکا بر سه مرحله در برنامه های عمل و توسعهٔ ریاضی، یعنی ایدئولوژی؛ نظریه و عملهای تدریس تأکید ورزید. به عقیدهٔ سیرپنیسکا، برای بهبود آموزش ریاضی، باید طراحی و توجیه چنین اعمالی در هر سه مرحله مورد توجّه قرار گیرد.

دومین سخنران افتتاحیّه، میگوئیل دگازمن، رئیس ICMI بود، گازمن در مورد نقش ریاضیدانها در تدریس ریاضی صحبت کرده و بر وظیفهٔ خطیری که ریاضیدانها در توسعهٔ فرهنگ انسانی دارند تأکید ویژه داشت او ریاضیدانها را تشویق به جستجو برای **زیبائی اندیشه** در کارهای ریاضی کرد. از طرف دیگر، او بر اهمیّت و ضرورت یک نگرش وسیعتر و عمیقتر نسبت به پیشرفت ریاضی اصرار ورزید.

در بخش اختتامیه، دیویدتال دربارهٔ «**تکنولوژی اطلاعات و آموزش ریاضی: اشتیاقها، امکانات و واقعیتها**» صحبت کرد. او به تبیین یک دیدگاه نظری جدید برای آموزش ریاضی در عصر تکنولوژی اطلاعاتی پرداخت. آخرین سخنران عمومی، ژان دلانژ[8] از مؤسسهٔ فرودنتال هلند بود. او راجع به **مسائل واقعی با ریاضی دنیای واقعی** و ضرورت یافتن قالبهای مناسب برای مسایل واقعی ریاضی پرداخت. لازم به ذکر است که چهار سخنرانی عمومی برای بیش از ۴۰۰۰ نفر به طور همزمان ترجمه می شد (توسط گوشی). در ضمن، چندین سخنرانی دیگر نیز به این ترتیب ترجمه گردیدند.

هشتمین ICME از تنوّع جالبی برخوردار بود. چندین نمایشگاه کتاب، تکنولوژی، عکس، پوستر، تمبر، اسناد تاریخی، کتابهای قدیمی و فیلم در مورد ریاضی وجود داشت که همگی در کارآمدتر کردن کنگره تأثیر قابل توجّهی داشتند. **گروههای کاری و گروههای موضوعی**، از ماهها قبل با اعضای خود در ارتباط بودند و هر کدام توانستند یک کار سنجیده و خوب فکر شده را ارایه دهند. به جز روزهای افتتاحیه و اختتامیه در روزهای دیگر، ۸ سخنرانی موازی در دو نوبت (مجموعاً ۱۶ سخنرانی) ارائه می گردید. روز چهارم کنگره، به بازدید اختصاص یافته بود تا شرکت کنندگان فرصت آشنائی بیشتر با تاریخ اسپانیا را پیدا کنند.

با وجود شرکت بیش از چهار هزار نفر در این کنگره، تنها ۶۹ نفر از آفریقا و فقط ۵ نفر از ایران در کنگره حضور داشتند.

گروه مطالعات کنگره که در عصر هر روز تشکیل می شد، هر یک به اعلام نتایج تحقیقاتی خود پرداختند. این گروهها عبارت بودند از:

۱ ـ گروه بین المللی روانشناسی آموزش ریاضی
۲ ـ گروه بین المللی مطالعهٔ رابطه بین تاریخ و روشهای تدریس ریاضی
۳ ـ سازمان بین المللی زنان و آموزش ریاضی
۴ ـ فدراسیون بین المللی مسابقات ملّی ریاضی
۵ ـ جنسیت و آموزش ریاضی
۶ ـ دورنمای تدریس هندسه در قرن بیست ویکم
۷ ـ تحقیق در آموزش ریاضی چیست و نتایج یافته های آن کدام است؟

در این کنگره، مجارستان و استرالیا در ارایه ملی[9] به معرّفی جامعهٔ آموزش ریاضی در کشورهای خود پرداختند. این سنتّی است که در کنگره های قبل هم وجود داشته و در هر دوره، یکی دو کشور فرصت ارائهٔ تحقیقات ملّی خود را پیدا می کنند. همچنین مجلس یادبودی به مناسبت درگذشت ریچارداسکمپ یکی از پایه گزاران روانشناسی آموزش ریاضی ـ به ابتکار دیوید تال برگزار شد.

کنگره های بین المللی آموزش ریاضی می توانند ـ و به حق توانسته اند ـ تأثیرات عظیمی در روند برنامه ریزی درسی، تألیف کتابهای درسی، تحوّل در روشهای تدریس، آموزشهای معلمان، ارزشیابی و از همه مهمتر تحقیقات آموزش ریاضی بگذارند. حضور فعّال معلمان ریاضی در تمام قسمتها، کنگره را از غنای خاصّی برخوردار می کرد. متأسفانه تا به حال، هیچ معلم ایرانی فرصت شرکت در چنین گردهمائی های بین المللی را نداشته است. نُه نفر از ایران ثبت نام کرده بودند که تنها ۵ نفر موفق به شرکت در هشتمین کنگرهٔ بین المللی آموزش ریاضی شدند. حضور در گردهمائی های بین المللی با تنوع بسیاری که دارند می توانند تحوّل عظیمی در شرکت کنندگان و در نهادهای علمی که آنها را در برمی گیرد ایجاد کنند و از طرفی دیگر، اگر افراد شرکت کننده از روحیهٔ جستجوگری و تنوّع برخوردار نباشند، طبیعی است که از این دریای خروشان، تنها به نظارهٔ یک موج کوتاه در کنارهٔ ساحل بنشینند و آن مشاهدهٔ محدود را به عنوان دستاورد این تنوع عظیم به خودشان معرّفی کنند! به هر حال، واقعیّت این است که تا در زمین خدا گردش نکنیم و به مطالعهٔ عمیق آن نپردازیم، در انزوای خودمان دست و پا خواهیم زد و چنین تک زیستی هائی در عصر اطلاعات امکان ندارد. امید است که در نهمین کنگرهٔ بین المللی آموزش ریاضی که در سال ۲۰۰۰ در ژاپن برگزار می شود، تعداد شرکت کنندگان ایرانی ـ بخصوص معلمّان ریاضی ـ قابل توجّه باشد. مطمئناً حضور فعّال این عزیزان می تواند منشاء تحولات آموزشی گردد و اینها همه به شرطی است که دستاوردهای کنگره ها به صورت مدوّن و منسجم نشر پیدا کرده و در اختیار قضاوت عمومی قرار گیرد.

---

1. Social Constructivism
2. René Thom
3. Problem Solving
4. Ubiratán DAmbrosio
5. Ethnomathematies
6. Miguel de Guzman
7. Anna Sierpinska
8. Jande Lange
9. National Presentation

فیلتری کردن

بیژن ظهوری زنگنه
دانشگاه صنعتی شریف

شاید بعد از برنامه ریزی خطی، فیلتری کردن و بخصوص نوع پیشرفته آن یعنی روش فیلتر کالمن ـ بیوسی (Kalman - Bucy filter)، رایجترین نوع ریاضیات است که در عمل به کار می رود. برخاستن و نشستن هواپیماها و دنبال کردن مسیر آنها در آسمان، بازسازی سیگنال (singnal) رادیو، نمونه هایی از کاربردهای فراوان این نوع از ریاضیات هستند.

فیلتری کردن، برای نخستین بار با کارهای مستقل «وینر» در آمریکا و کلمر گُرُف در شوروی سابق در زمان جنگ جهانی دوم مطرح شد. در سال ۱۹۶۰ به وسیله کالمن و در سال ۱۹۶۱ به وسیله کالمن و بیوسی شکل نهایی فیلتری کردن برای معادلات دیفرانسیل تصادفی ثابت شد و مورد استقبال زیاد ریاضی دانان محض و کاربردی و مهندسان قرار گرفت. به قول اکساندل[1]، فیلتری کردن کالمن ـ بیوسی مثالی نقض برای ادعاهایی از این قبیل بود که «ریاضی کابردی، ریاضی بَد است» و «تنها ریاضی واقعاً مفید، ریاضی مقدماتی است» بواقع در فیلتر کالمن ـ بیوسی ریاضیات پیشرفته، به شیوه ای جالب، زیبا و ناب، و با قدرت تمام به کار می رود.

علی رغم پیچیدگی نهفته در روش فیلتری کردن، با استفاده از معلومات دبیرستانی و بخصوص مباحث هندسه تحلیلی و جبر خطی می توان ایده هایی که پشت این نظریه پیشرفته و مفید ریاضی قرار دارند، بیان کرد.

دستگاه معادلات ناسازگار زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 &= 8 \qquad (1) \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

چون از معادله های اول و دوم داریم $x_1 = 4$ و از معادله های اول و سوم به دست می آوریم $x_2 = 1$، پس این دستگاه ناسازگار است، زیرا با قرار دادن این مقادیر در معادله دوم به $2 \times 4 + 1 = 9 = 8$ دست می یابیم که غیرممکن است و در نتیجه معادله مورد بحث از نظر دیدگاه نظری دارای جواب نیست. امّا آیا گفتن اینکه این دستگاه جواب ندارد کافی است؟ مسلماً خیر، زیرا از دیدگاه عملی ممکن است در اعداد طرف راست دستگاه خطایی موجود باشد. مثلاً در اندازه گیری بعضی از کمیتها. به عنوان نمونه در زمین شناسی می واهند متغیرهای مختلفی را محاسبه کنند برای این کار در مناطق مختلف به وسیله مشاهدات زمین شناسی معادلات گوناگونی بر حسب این متغیرها به دست می آورند در این مورد خاص تعداد معادلات ۳۶ و تعداد مجهول ها ۷ بود و مسلماً این معالات ناسازگار بودند.

یکی از مسائل مهمی که بنیان روش جالب فیلتری کردن است، از بین بردن خطا با (noise) در دستگاههای معادلاتی ازاین نوع است، فرآیندی که به واسطه ان به دنبال یافتن بهترین جواب معادله هستیم.

دستگاه معادلات بالا را می توان به صورت برداری

$$x_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\8\\5\end{pmatrix}$$

نوشت. در واقع، جواب داشتن دستگاه بالا معادل این است که بتوانیم بردار $b = \begin{pmatrix}4\\8\\5\end{pmatrix}$ را به صورت ترکیب خطی دو بردار

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \text{و} \quad a_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

بنویسیم. به عبارت دیگر، دستگاه بالا دارای جواب است اگر و فقط اگر بردار b بتواند در صفحه تولید شده توسط دو بردار a_1 و a_2 قرار بگیرد. این در حالی است که همان طور که در بالا نشان دادیم دستگاه مذکور دارای جواب نیست، پس بردار b در صفحه تولید شده توسط بردارهای a_1 و a_2 قرار ندارد.

برای یافتن بهترین جواب معادله، تصویر عمودی بردار b را روی صفحه V که به وسیله بردارهای a_1 و a_2 تولید شده است به دست می آوریم و آن را بردار p می نامیم. چون بردار p در صفحه V قرار دارد، معادلهٔ

$$\bar{x}_1 \ a_1 + \bar{x}_2 \ a_2 = p$$

دارای جواب است . این جواب به واقع بهترین جواب دستگاه (۱) است .

به طور شهودی ، اگر خطایی صورت نمی گرفت و نوفه وجود نمی داشت ، b می بایست در صفحه V قرار می گرفت .

اگر بخواهیم به بازسازی و صافی کردن خطا بپردازیم ، بایستی نزدیکترین بردار به b را که در صفحه V قرار دارد پیدا کنیم . از این ایدهٔ ساده ، شهودی و بسیار مهم هندسه کمک می گیریم که تصویر عمودی هر بردار ، بهترین تقریب آن بردار در صفحه است . این مطلب در هر فضای هیلبرت[1] نیز برقرار می باشد ، و این ایده اصلی فیلتر کالمن ـ بیوسی است .

حال بردار p را پیدا می کنیم .

ابتدا بردار عمود بر بردارهای a_1 و a_2 را از طریق ضرب برداری به دست می آوریم .

$$N = a_1 \times a_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3i - j - k$$

سپس ، تصویر بردار b بر بردار N را می یابیم . چون $|N| = 11$ و

$$N.b = 12 - 8 - 5 = -1$$

پس

$$\text{تصویر } b \text{ بر } N = P_N(b) = \frac{N.b}{|N|^2} N$$

$$= -\frac{1}{11}(3i - j - k)$$

در این مرحله ، p را مکمل تصویر بردار b روی بردار N می گیریم ، یعنی همان تصویر بردار b بر روی صفحه V .

$$p = b - P_N(b)$$
$$= 4i + 8j + 5k$$
$$+\frac{1}{11}(3i - j - k)$$
$$= \frac{47}{11} i + \frac{87}{11} j + \frac{54}{11} k$$

با یافتن ضرایب ترکیب خطی p بر حسب بردارهای a_1 و a_2 داریم :

$$\bar{x}_1 \;\; a_1 + \bar{x}_2 \;\; a_2 = p$$

و یا

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \frac{47}{11}$$

$$2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \frac{87}{11}$$

$$\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = \frac{54}{11}$$

و در نتیجه $\bar{x}_1 = \frac{40}{11}$ و $\bar{x}_2 = \frac{7}{11}$ و مربع خطا در تقریب بردارهای p با بردار b عبارت است از

$$|\bar{p} - \bar{b}|^2 = |\bar{P}_N(b)|^2 = \frac{1}{11}$$

بایستی توجه کرد که تمام مراحل بالا را می توان برای دستگاههای با تعدادمعادلات بیشتر نیز تعمیم داد ، البته در فضاهای با بعد بیشتر از سه نمی توانیم از ضرب خارجی استفاده کنیم . بنابراین مسأله را به صورت زیر حل می کنیم .

در حالت کلی ، فرض می کنیم A یک ماتریس $m \times n$ بوده و دستگاه

$$(2) \quad AX = b$$

که $b \in \mathbb{R}^m$ ناسازگار باشد ، یعنی

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

به علاوه ، V را زیر فضای تولید شده توسط بردارهای a_1 و a_2 و . . . و a_n در نظر می گیریم . گیریم بردار p تصویر بردار b بر زیر فضای V باشد . یعنی فرض می کنیم مسأله حل شده باشد و بردار p بدست آمده است . دستگاه $A\bar{X} = p$ را حل می کنیم (چون بردار p در زیر فضای V می باشد معادله $A\bar{X} = p$ دارای جواب است) تا نزدیکترین جواب را بیابیم . در ضمن خطای $|b - p|$ را هم محاسبه می کنیم . بایستی این خطا می نیمم گردد .

حال برای محاسبه بردار p چنین عمل می کنیم :

به ازای هر $y \in \mathbb{R}^n$ ، Ay در V است ، زیرا اگر $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ آنگاه

$$Ay = y_1 \;\; a_1 + y_2 \;\; a_2 + y_3 \;\; a_3 + \ldots + y_n \;\; a_n$$

بردار b را به دو مؤلفه یکی دو زیر فضای V و دیگری عمود بر V تجزیه می کنیم . پس می توانیم بنویسیم :

$$b = p + q$$

که $p \in V$ و q عمود بر فضای V است .

چون q بر زیرفضای V عمود است ، یعنی بر هر بردار موجود در آن فضا و از جمله Ay (به ازای هر $y \in \mathbb{R}^n$) نیز عمود است . بنابراین ، داریم

$$q \cdot (A\bar{y}) = 0$$

که نماد « . » معرف ضرب داخلی در $\mathbb{R}^n$ به صورت

$(a_1, a_2, \ldots, \ldots a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

است، یا

$$(Ay)^T q = 0$$

یعنی برای هر $y \in \mathbb{R}^n$ ، ضرب داخلی y و A^Tq مساوی صفر است، و به عبارت دیگر، A^Tq بر هر بردار y عمود می باشد بنابراین، $A^Tq = 0$ (چرا؟). با جایگذاری دو رابطه $q = b - p$ و $p = A\bar{X}$ ، داریم

$$A^T(b - A\bar{X}) = 0$$

یا

$$(۳) \quad A^Tb = A^TA\bar{X}$$

دستگاه (۳) را دستگاه نرمال وابسته به دستگاه (۲) می نامیم. اگر A^T را از سمت چپ در دستگاه (۲) ضرب کنیم، دستگاه نرمال (۳) به دست می آید. می توان نشان داد که اگر ماتریس A دارای رتبه n $(n < m)$ (یعنی تعداد بردارهای ستونی مستقل خطی A مساوی n باشد) آنگاه ماتریس $n \times n$ A^TA معکوس پذیر است[1]

بنابراین دستگاه نرمال (۳) دارای جواب یگانه

$$(۴) \quad \bar{X} = (A^TA)^{-1}A^Tb$$

است. وقتی $\bar{X}$ بدست آمد، تصویر عمودی بردار p از بردار b روی فضای V با توجه به معادله $p = A\bar{X}$ و معادله (۴) بدست می آید.

$$(۵) \quad p = A(A^TA)^{-1}A^Tb$$

لازم نیست فرمول معادلات (۴) و (۵) را حفظ کرد. بهترین راه، حل مستقیم دستگاه نرمال $A^TA\bar{X} = A^Tb$ است. برای دستگاههای بزرگ روش گوس از روش محاسبه ماتریس معکوس $(A^TA)^{-1}$ کاراتر است. $\bar{X}$ را حل کمترین مربعات[1] دستگاه $AX = b$ می نامیم. چون مربع خطاها را می نیمم کردیم.

مثال (۱): دستگاه ناسازگار (۱) را با استفاده از این روش حل می کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \quad و \quad b = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۸ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

آنگاه دستگاه نرمال وابسته به (۱) به صورت زیر درمی آید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_۱ \\ \bar{X}_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۸ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

یعنی به صورت

$$\begin{bmatrix} ۶ & ۵ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_۱ \\ \bar{X}_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۵ \\ ۲۲ \end{bmatrix}$$

درمی آید، در نتیجه

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_۱ \\ \bar{X}_۲ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۱} \begin{bmatrix} ۴۰ \\ ۷ \end{bmatrix}$$

با استفاده از $\bar{X}$ ، می توان بردار p را به دست آورد

$$p = A\bar{X} = \frac{۱}{۱۱} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴۰ \\ ۷ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۱} \begin{bmatrix} ۴۷ \\ ۸۷ \\ ۵۴ \end{bmatrix}$$

همان طور که ملاحظه می کنیم، این جواب همان جواب قبلی است.

مثال (۲): فرض کنیم که V خط گذراند از مبداء مختصات و در امتداد بردار غیرصفر a است.

حل معادله ناسازگار

$$(۶) \quad a \cdot x = b$$

که در اینجا $A = a$ و $n = 1$ می باشد، دستگاه نرمال وابسته به (۶) معادله اسکار

$$a^Ta\bar{x} = a^Tb$$

است. چون بردار a مخالف صفر است، $a^Ta = |a|^2 \neq 0$ بنابراین $\bar{x} = \dfrac{a^Tb}{a^Ta}$ در نتیجه تصویر عمودی بردار b بر بردار a مساوی است با

$$p = a\bar{x} = \frac{a^Tb}{a^Ta}a = \frac{a.b}{a.a}a$$

بنابراین از این روش می توان برای محاسبه تصویر یک بردار بر یک زیر فضا هم استفاده نمود.

مثال (۳): مطلوبست محاسبه جواب کمترین مربعات دستگاه خطی زیر

$$(۷) \quad \begin{aligned} ۲x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ &= ۶ \\ x_۱ - x_۳ &= ۳ \\ x_۱ + x_۲ &= ۹ \\ x_۱ + x_۲ - x_۳ &= ۶ \end{aligned}$$

حل: ماتریس A در (۷) دارای رتبه ۳ می باشد. ابتدا

$$A^TA = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ -۲ & -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۷ & ۴ & -۶ \\ ۴ & ۳ & -۳ \\ -۶ & -۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

و

$$A^Tb=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ -۲ & -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \\ ۹ \\ ۶ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳۰ \\ ۲۱ \\ -۲۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین دستگاه نرمال $A^TA\overline{X}=A^Tb$ به صورت

$$\begin{bmatrix} ۷ & ۴ & -۶ \\ ۴ & ۳ & -۳ \\ -۶ & -۳ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x}_۱ \\ \overline{x}_۲ \\ \overline{x}_۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳۰ \\ ۲۱ \\ -۲۱ \end{bmatrix}$$

می باشد با استفاده از روش حذفی گاوس معادله بالا به صورت

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x}_۱ \\ \overline{x}_۲ \\ \overline{x}_۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۹ \\ ۱۵ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

نوشته می شود و جوابهای آن $\overline{x}_۳=۴$ و $\overline{x}_۲=۳$ و $\overline{x}_۱=۶$ است . بنابراین جواب کمترین مربعات دستگاه (۷) بردار

$$\overline{x}=\begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

است و همین طور

$$p=A\overline{X}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۶ \\ ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۷ \\ ۲ \\ ۹ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین تصویر عمودی $b=(۶,۳,۹,۶)$ بر فضای V یعنی فضای بردارهای ستونی A برابر است با

$$p=(۷,۲,۹,۵)$$

تمرینات

۱ ـ در تمرین زیر حل کمترین مربعات $\overline{X}$ را برای دستگاه $AX=b$ همین طور تصویر p از b را بر فضای بردارهای ستونی A محاسبه کنید.

(الف)

$$x_۱+۲x_۲=۴$$
$$x_۱-x_۲=۰$$
$$x_۱+x_۲=۴$$
$$۳x_۱+۲x_۲=۸$$

(ب)

$$x_۱-x_۲=۵$$
$$x_۲-۲x_۳=-۵$$
$$x_۱+۲x_۲-x_۳=۰$$
$$x_۱-۲x_۳=۰$$

۲ ـ نشان دهید که جواب کمترین مربعات دستگاه خطی

$$x=b_۱,\ x=b_۲,\dots,\ x=b_m$$

میانگین

$$\overline{x}=\frac{۱}{m}(b_۱+b_۲+\dots+b_m)$$

می باشد .

۳ ـ فرض کنید که n بردار ستونی $a_۱$ ، $a_۲$ و . . . و a_n از ماتریس A ، $m\times n$ دوبه دو بر هم عمود هستند . بردار b در R^m داده شده است ، نشان دهید که تصویر عمودی b بر فضای تولید شدهٔ به وسیله بردارهای $a_۱$ ، $a_۲$ و . . . و a_n مساوی

$$p=\frac{\overline{a}_۱.\overline{b}}{\overline{a}_۱.\overline{a}}\overline{a}_۱+\frac{\overline{a}_۲.\overline{b}}{\overline{a}_۲.\overline{a}}\overline{a}_۲+\dots+\frac{\overline{a}_n.\overline{b}}{\overline{a}_n.\overline{a}}\overline{a}_n$$

مراجع

۱ ـ تابش ، یحیی ؛ نیوشا ، جعفر ، جبر خطی و هندسه تحلیلی دفتر برنامه ریزی و تألیف کتب درسی ، ۱۳۷۴ .

۲ ـ گراسمان ، ای جی جبر خطی مقدماتی ، ترجمه علی اکبر عالم زاده ، انتشارات پژوهش ۱۳۷۲

۳ ـ هافمن ، ک ؛ کنزی ، ر ؛ جبر خطی . ترجمه جمشید فرشیدی ، مرکز نشر دانشگاهی ۱۳۶۵

۴ ـ بیژن ظهوری زنگنه ، روح الله جهانی پور ، جبر خطی ، جزوات درسی دانشگاه صنعتی شریف ، تابستان ۱۳۷۳

5 - Oksendal, Bernt
Stochastic Differential Equations An Introduction with Applications, Third Edition, Universitex, springer - verlag 1992.

6 - Edwards, C.H. , Penney D.E. Elementary Liinear Algebra prentice Hall 1988.

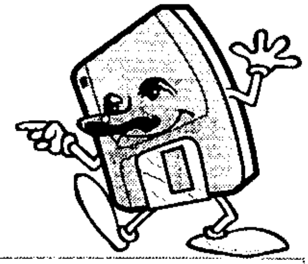
1. Bernt Oksendal

۱ . به کتابهای جبر خطی مراجعه شود .

1. Least Squer Soluteon

۱ . این فرمول در صفحه ۱۴ کتاب هندسه تحلیلی و جبر خطی دوره پیش دانشگاهی است .

استفاده از لوگو[1] در کلاس درس



نوشتهٔ: آنتونی نایلند[2]
ترجمهٔ: اسماعیل بابلیان
دانشگاه تربیت معلم

سؤالهای مورد بحث

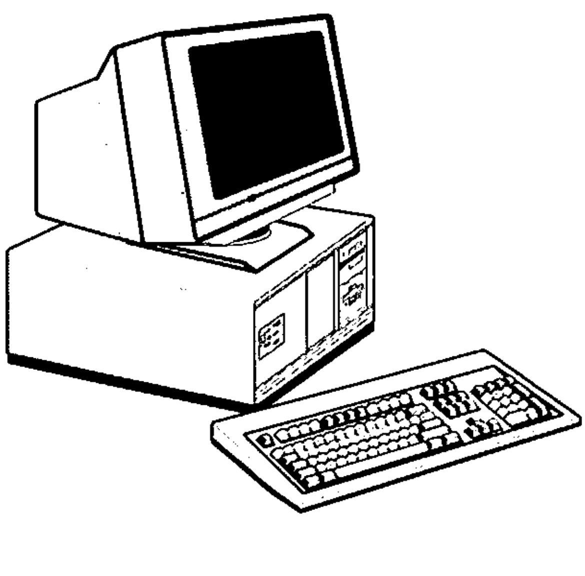
- **چگونه می توان از کامپیوتر برای ارتقای آموزش ریاضیات استفاده کرد؟**
- **دانش آموزان از چه نوع نرم افزارهایی بیشترین بهره را خواهند برد؟**
- **کامپیوترها و ماشین حسابها چگونه آموزش ریاضیات را در خلال پنج سال گذشته تغییر داده اند؟**

مقدمه

بیش از ده سال است که برنامهٔ لوگو در اختیار است و در این مدت، عکس العملهای متفاوتی از طرف معلمان نسبت به آن ابراز شده است. من عمیقاً از آموزش ریاضیات با استفاده از لوگو لذت برده ام و امیدوارم که شما هم چنین باشید. در این مقاله می خواهم توصیف مختصری از لوگو ارائه کنم و به بعضی از دلایلی که چرا لوگو می تواند نقشی مؤثر در کلاس درس داشته باشد اشاره کنم. من مثالهایی از فعالیتهایی که می توان با لوگو به کار برد ارائه خواهم کرد. سپس از محتوای ریاضی و فرایندهایی که می توانند با لوگو پوشش داده شوند بحث کرده، آنگاه دربارهٔ نقش معلم در فرایند یادگیری صحبت می کنم.

توصیف مختصری از لوگو

لوگو یک برنامهٔ کامپیوتری است که یک لاک پشت[3] را (به عنوان مکان نما[4]) روی صفحهٔ نمایش[5] نشان می دهد. توسط دنباله ای از فرمانهای ساده می توان به این لاک پشت دستور داد که در صفحهٔ نمایش حرکت کند. لاک پشت همچنانکه حرکت



می کند می تواند اثری از خود باقی گذارد و با استفاده از این اثر می توان شکلهایی ساخت . صفحهٔ نمایش ابتدا چنین دیده می شود .

دستور FORWARD 100 لاک پشت را ۱۰۰ گام **به جلو** حرکت می دهد .

این دستور را می توان چنین خلاصه کرد FD 100 .

دستور RIGHT 90 (یا RT 90) لاک پشت را ۹۰°، در جهت حرکت عقربه های ساعت، می چرخاند .

حال FD 30 لاک پشت را ۳۰ گام به جلو حرکت می دهد .

با استفاده از این دستور و دستورهای دیگر ایجاد شکلها و نمودارهای متنوع زیادی امکانپذیر است .

فرمانهای بیشتری در زیر ارائه می شود . آنها را به کار برید . ممکن است برنامه نویسی ساده تر از آن باشد که فکر می کنید!

HOME لاک پشت را به مرکز صفحهٔ نمایش می برد .

CS صفحه نمایش را پاک می کند و لاک پشت را به مرکز صفحهٔ نمایش می برد .

ST لاک پشت را نشان می دهد (لاک پشت را قابمی کند).

HT لاک پشت را پنهان می کند (مکان نما قابل رؤیت نیست).

FD_n لاک پشت را n گام به جلو حرکت می دهد .

BK_n لاک پشت را n گام به عقب حرکت می دهد .

RT_n لاک پشت را n درجه در جهت حرکت عقربه های ساعت می چرخاند .

LT_n لاک پشت را n درجه در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت می چرخاند .

PU قلم بالا (اثرگذاری لاک پشت را متوقف می کند).

PD قلم پایین (سبب اثرگذاری لاک پشت می شود).

PE قلم پاک کن (اثر لاک پشت را پاک می کند).

REPEAT یک فرمان را تکرار می کند (مثلاً، REPEAT 4[FD 100 RT 90] فرمان داخل کروشه ها را ۴ بار تکرار می کند).

QUIT به فهرست انتخاب اصلی برمی گرداند .

می توان فرمانها را در دنباله ای بهم آمیخت تا روند[6]ها را تشکیل دهند . دنباله ای از جهت های داده شده به لاک پشت یک روند است . مثلاً، روند SQUARE را می توان به صورت زیر ساخت :

```
TO SQUARE
REPEAT 4[FD 100 RT 90]
END
```

اکنون SQUARE را وارد کنید تا این روند اجرا شود .

نوشتن روندها اجازه می دهد که فرمانها برای استفاده بعدی ذخیره شوند، در روندهای دیگر به کار روند، یا بعداً تغییر یابند .

فرمان EDIT عبارت است از :

```
EDIT " SQUARE
```

این فرمان سبب می شود که روند SQUARE روی صفحه‌ نمایش ظاهر شود و شما قادر باشید آن را تغییر دهید .

آنچه در بالا نشان داده ام شیوه ای از به کار بردن کامپیوترهاست که نیاز دارد کاربر (استفاده کننده) فعال، فکور و خلاق باشد . سایمور پاپرت[7]، یکی از مخترعین لوگو، این را به عنوان موتوری برای کمک به دانش آموزان جهت آموختن فرایندهای فکرکردن خودشان درنظر می گیرد .

بچه ها کامپیوتر را برنامه ریزی می کنند و در تعلیم دادن به کامپیوتر که چگونه فکر کند، به کاوش دربارهٔ اینکه خودشان چگونه فکر می کنند دست می زنند.

(پاپرت، ۱۹۹۰)

این بسیار فراتر از یک نرم افزار *تمرین و ممارست* ریاضیات است که در آن کاربر صرفاً به سؤالهای عادی (روتین) مطرح شده توسط ماشین پاسخ می دهد .

مزایای لوگو در کلاس درس

ارنست[8] (۱۹۸۹) ادعا می کند که لوگو، در مدارس ابتدایی و راهنمایی و متوسطه، به سه طریق یادگیری را ارتقاء خواهد داد . لوگو به دانش آموز کمک خواهد کرد که محتوای ریاضیات (مفاهیم و مهارتها) را بیاموزد . به آنها کمک خواهد کرد که فرایندهای[9] ریاضی را یاد بگیرند و آنها را تشویق خواهد کرد که شیوه ها را، که شامل کار گروهی، بحث و تحقیق است، یاد بگیرند .

لوگو سبب بالابردن سطح تمرکز و خودانگیزشی می شود . دانش آموزان از طریق بحث معلم ـ شاگرد، شاگرد ـ شاگرد، که بخش مهمی از فرایند استفاده از لوگوست، زبان و به ویژه زبان ریاضی را می پرورانند . دانش آموزان درک ریاضی عدد، شکل و تخمین را از طریق کارکردن با لاک پشت در صفحهٔ نمایش به دست می آورند . لوگو ایده های هندسی مانند زاویه، جهت، تخمین فاصله، شکل، تبدیل متقارن و بزرگ کردن را تقویت و توسعه می دهد . دانش آموزان می آموزند که از طریق دنباله ای از گامها و به کار بردن روندهای تکراری به طور منطقی فکر کنند . دانش آموزان به اهمیت استفاده از روندهای تودرتو به عنوان ساختار اصلی پی می برند و می توانند مفهوم متغیر را در ذهن خود توسعه دهند . لوگو دانش اموزان را تشویق می کند که آنچه اتفاق خواهد افتاد پیشگویی کنند و آنها را قادر می سازد که بلافاصله ببینند چه اتفاق می افتد . این بازخورد[10] فوری می تواند باعث شود که یادگیرندگان از تقریبهای متوالی استفاده کنند و بیاموزند که مجبور نیستند برای اولین بار جواب

درست بدهند. آنها در حقیقت درمی یابند که به ندرت با اولین تلاش می توان به جواب درست رسید و اینکه *پاسخهای غلط* بخش مهمی از مسأله حل کردن هستند.

لوگو و بچه ها

تقریباً در هر سنی می توان لوگو را به کودکان معرفی کرد. هیوث[11] (۱۹۸۹)، در کتابش، *کودکان و عدد*، از کارکردن کودکان چهار ساله با یک صفحه کلید تغییر یافته صحبت می کند. یک لاک پشت زمینی، یک *روبات*[12] چرخدار کوچک با یک قلم در دمش که آن طور که هدایت می شود این طرف و آن طرف کف اطاق می رود، طریقه ای عالی (گرچه پرخرج) برای معرفی کردن لوگو به کودکان است. بعضی از معلمین لوگو را توسط خلق یک *ریزدنیا*[13] برای دانش آموزان، و بعد وادارکردن آنها به حل مسأله در آن، معرفی می کنند. با نوشتن مجموعه ای از روندها که دانش آموزان را قادر می سازد تا لاک پشت را با فشار یک کلید حرکت دهند یک ریزدنیا ساخته می شود. دانش آموزان برای خود کشف می کنند که فشار کدام کلیدها کار می کنند و چه کاری می کند. آنها در این مجموعه محدود از فرمانها قرار می گیرند تا مسأله حل کنند. آنها به طور مؤثر لوگو را به کار می برند بدون اینکه چیزی دربارهٔ این زبان[14] بدانند.

متغیر

متغیر مفهومی مهم و ابزاری توانا در ریاضیات است، و چیزی است که بسیاری از دانش آموزان با آن مشکل دارند. لوگو زمینه ای قابل دسترس و با معنی مهیا می کند که در آن این مفهوم می تواند معرفی شود. مثلاً، مریلین متس[15] (۱۹۸۸) کلاسی از نوجوانان را توصیف می کند که با لاک پشت زمینی کار می کنند و شرح می دهد که چگونه، تحت راهنمایی او، شروع به نوشتن اولین روند شامل یک متغیر ورودی یعنی ساختن صندلی هایی با اندازه های مختلف در داستان« کلیدهای طلایی و سه خرس » کردند. مثال زیر روشن می کند که چگونه می توان با استفاده از یک متغیر، روند SQUARE را طوری تغییر داد تا روندی که مربعهای با اندازه های مختلف رسم کند به دست آید.

```
TO SQUARE: SIDE
REPEAT 4[FD: SIDE RT 90]
END
```

بنابراین، با دادن مقدار ۱۰۰ به SIDE (یعنی، SQUARE:100)، کامپیوتر مربع صفحهٔ اول مقاله را می کشد. با دادن مقدار ۵۰ (یعنی، SQUARE:50) کامپیوتر مربعی با نصف اندازهٔ ضلع آن مربع می کشد.

فعالیتهای کلاسی

فهرست زیر مجموعه ای از فعالیت هایی است که برای ارائه در کلاس درس مفید است.

۱ـ یک معرفی مفید از حل مسأله با لوگو. « لاک پشت بازی » است. در اینجا دانش آموزان کارهای لاک پشت را به طور فیزیکی انجام می دهند.

۲ـ یک ریزدنیا، مثلاً با نوشتن روند زیر، ایجاد کنید:

```
TO G
FD 10
END
```

بعد از اینکه این روند در جایش قرار گیرد، فشار G باعث می شود که لاک پشت ۱۰ گام به جلو حرکت کند. می توان به کلیدهای دیگر کارهای دیگر نظیر چرخیدن به اندازهٔ ۹۰ یا ۱۸۰ درجه محول کرد. سپس دانش آموزان می توانند درگیر کشف کار کلیدها شوند و بعد آنها را برای کشیدن نمودارها به کار برند.

۳. **زمین گلف با ۹ سوراخ**. یک زمین گلف روی نمک با چسب روی صفحهٔ نمایش چسبانده می شود و بچه ها لاک پشت را از محل زدن به طرف سوراخها می رانند (این یک فعالیت مقدماتی لذت بخش و مفید برای دانش آموزان است تا خود را با فاصله و زاویه آشنا کنند).

۴. روندی بنویسید که شکلهای زیر را رسم کند:

- یک صورت،
- چند ضلعیهای منتظم،
- یک دایره،
- یک چرخ دوچرخه،
- یک جعبه سه بعدی،
- یک پلکان مارپیچی،
- یک بطری شیر،
- یک حرف از حروف الفبا ـ حالا اندازهٔ آن را تغییر دهید،
- مارپیچها.

۵. از RANDOM برای شبیه سازی پرتاب یک سکه استفاده کنید.

۶. از توابع *اوضاع* و *مکان* برای دنبال کردن محل مکان نما، همچنانکه حرکت می کند، استفاده کنید.

۷. لوگو می تواند به عنوان ابزاری در رابطه با کشف مفاهیم ریاضی نظیر نیوتن رَفسن (فاکس[17], ۱۹۸۶ را ببینید)، فرکتالها[18] (ایکن هد[19] و ویلیامز[20] را ملاحظه کنید)، و بهم آمیختن منحنیها (موسکَت[21], ۱۹۹۲ را ببینید) مفید باشد.

با استفاده از بعضی توسیعهای اخیر لوگو می توان فعالیتهای بیشتری پیدا کرد. LEGO LOGO برنامه نویسی حرکات رباتها را به آنچه خود دانش آموزان طراحی و ساخته اند توسعه می دهد. فرمانهای اساسی لوگو در The Crystal Rainforest که یک برنامه (بازی) تعاملی است، جا داده شده اند.[22]

نقش معلم

اصولاً نقش معلم ایجاد یک محیط یادگیری غنی است. این محیطی است که در آن

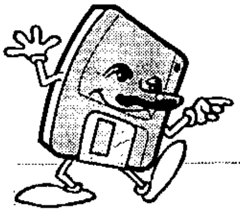
- دانش آموزان تشویق می شوند با همدیگر و کامپیوتر ارتباط برقرار کنند (تعامل داشته باشند)،
- دانش آموزان احساس مالکیتی بر کار خودشان دارند و می توانند جهت و مشی کاوشهایشان را کنترل کنند.
- دانش آموزان به فکرکردن تشویق می شوند.

من ترجیح می دهم دانش آموزان دونفری کار کنند، تا درنتیجه فرصتهای بحث و تعامل با کامپیوتر را به حداکثر برسانند. در مراحل اولیه، سعی می کنم تیمهای دو نفره را از دانش آموزان نسبتاً مستقل تشکیل دهم که هر وقت مشکل کوچکی بروز می کند متکی به «*نجات*» توسط معلم نباشند. به همین ترتیب، در مراحل اولّیه کاوش یا مسأله حل کردن با کامپیوتر، دخالت خود را به حداقل می رسانم. سعی می کنم کنترل صفحه کلید را در حین کار با دانش آموزان در اختیار نگیرم. توصیه های من معمولاً بجای جهت گیری به سمت هدف، فرایندی هستند و اظهار نظرها و سؤالهای من مسئولیت را متوجه دانش آموزان می کند (تا حالا چی به دست آورده ای؟ چه کوششی کرده ای؟ فکر می کنی قدم بعدی چه باشد؟ چه اتفاقی افتاد وقتی که . . . ؟ می توانی توضیح بدهی که چرا آن کوشش مفید واقع نشد؟ و سوالهایی از این قبیل).

اشتباه است که از دانش آموزان بخواهیم تعداد زیادی فرمان را یاد بگیرند قبل از اینکه به آن ها اجازه دهیم مسأله حل کردن و کاوش و کشف کردن را انجام دهند. دانش آموزان به سرعت از یادگیری دنباله ای طویل از فرمانها سرخورده می شوند. تجربهٔ من این است که دانش آموزان به تعداد بسیارکمی فرمان نیاز دارند تا راه بیفتند و می توانند فعالیتهای بسیاری با این فرمانها انجام دهند. فرمانهای بیشتر و پیشرفته تر را می توان در صورت نیاز به آنها، یاد داد.

یک معلم با لوگو باید چهار عمل انجام دهد:

- *مدیر و تسهیل کننده* - به دانش آموزان اطمینان دهد که دسترسی مناسب به کامپیوتر خواهند داشت؛
- *یادگیرنده* - او باید قادر باشد که خود را یک شریک یادگیری با دانش آموزان بداند (به این ترتیب محیطی بازو پویا به وجود می آورد که در آن پرسش و پاسخ که لازمهٔ کاوش و کشف است امری طبیعی است.)؛
- *راهنمای مجرب* - قادر به اظهارنظرکردن، تشویق نمودن، عکس العمل نشان دادن در مورد مسائل و پیشنهاد سازنده دادن باشد؛
- *مربی* - قادر به ارائه مواد مربوط به کاری که دانش آموزان انجام می دهند، باشد.



خلاصه: دانش آموزان می توانند از طریق لوگو بیاموزند که به طور مؤثر از کامپیوتر استفاده کنند و از طریق یادگیری استفاده از کامپیوتر به این شیوه، می توانند نحوهٔ یادگیری هر چیز دیگری را تغییر دهند. لوگو روشی برای معرفی کردن ریاضی به کودکان به گونه ای است که با معنی و انگیزه بخش باشد. زمانی که کودکان در حال ارتباط برقرارکردن با کامپیوتر هستند ریاضیات تبدیل به یک زبان زنده می شود. کارهایی که با لوگو انجام می شود اغلب نیازمند آن است که معلم و دانش آموز با هم مسأله حل کنند به ویژه اگر این کارها از دانش آموز نشأت گرفته باشد. طبیعت فعال و خود- راهنمای لوگو بخوبی با *ریاضیات در برنامه درسی نیوزیلند*[۲۳] و تأکید بر شکل گرفتن دانش یادگیرنده به طور فعال، مطابقت دارد. امیدوارم که این معرفی کوتاه لوگو اعتماد بنفسی به شما بدهد که سعی کنید آن را در کلاس درس به کار برید، آنگاه درمی یابید که لاک پشت لوگو رفیقی همراه است.

1. Logo
2. Anthony Neyland
3. turtle
4. cursor
5. screen
6. procedure
7. Seymour papert
8. Ernest
9. process
10. feedback
11. Hughes
12. robot
13. microworld

۱۴. منظور از زبان در این جمله زبان انگلیسی است. پاپرت معتقد است که کار با لوگو سبب می شود تا بچه هایی که به مدرسه نرفته اند دیکته کلمات را یاد بگیرند و بتوانند کلمات را بخوانند و به عبارت دیگر خواندن و نوشتن آنها زودتر صورت گیرد. (مترجم)

15. Marilyn metz
16. Newton - Raphson
17. Fox
18. fractals
19. Aikenhead
20. Williams
21. Muscat

۲۲. یک برنامه / بازی محاوره ای.

23. New Zealand

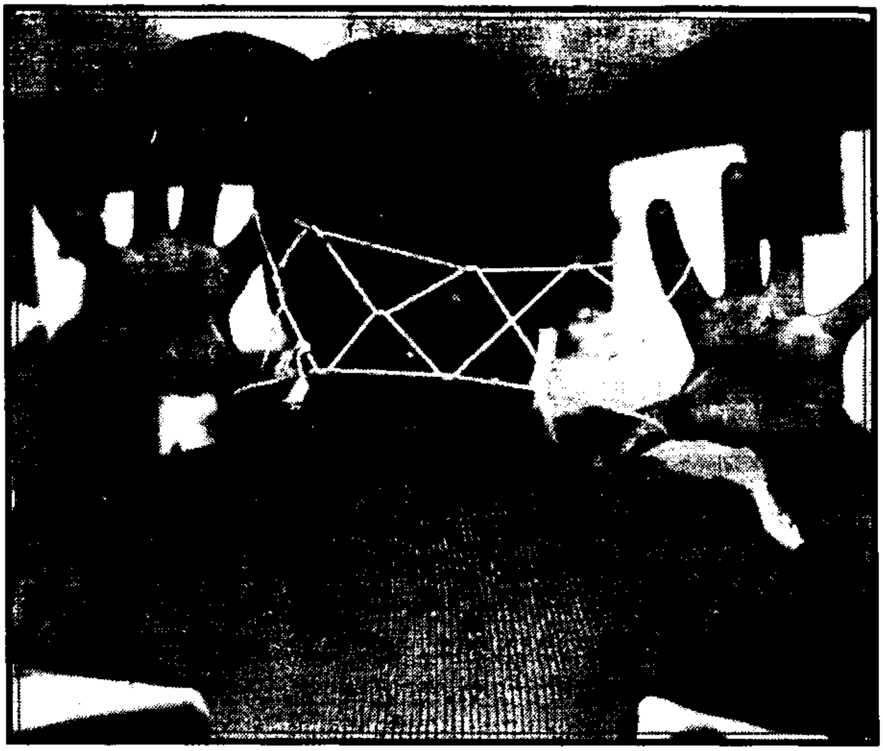
مرجع اصلی:

این نوشته ترجمهٔ مقالهٔ زیر است:

Neyland, A.(1994). Using LOGO in the Classroom. In Mathematics Education: A hand book for teachers, (Vol.1), by J. Neyland (Ed.). PP 65-72. The Wellington College of Education: NCTM

قندیلها

ما که کورانه عصاها می زنیم
لاجرم قندیلها را بشکنیم
مولوی



عین الله پاشا
دانشگاه تربیت معلم

در زندگی روزمرّه، هر فرد به میزان زیادی از دانش ریاضی استفاده می کند. اعداد، به ویژه اعداد طبیعی و گویا در سطح وسیعی استفاده می شود. همهٔ افراد اعم از آنهائی که تحصیلات رسمی داشته اند یا آنهایی که به طور تجربی و غیر مستقیم مطالبی یادگرفته اند از چهار عمل اصلی استفاده می کنند. شاید برخی معادلات سادهٔ درجهٔ اول هم به طور ذهنی در بین مردم رایج باشد. از هندسه نیز استفاده می کنیم. خیابانها، میدانها، ساختمانها، و وسایل مورد استفاده همه یا از اشکال هندسی اند و یا ترکیبی از آنها هستند. مفاهیم هندسی از قبیل طول، مساحت و حجم در حد وسیع مورد استفاده است. از این بخش از ریاضی که بگذریم، سایر مطالب جنبه های تخصصی داشته و افراد متخصص در ارتباط با شغل خودشان از آن استفاده می کنند. فشار، رابطهٔ آن با گرما، سرعت و مفاهیم عمیقتر فیزیکی ایجاب می کند که افرادی که با آنها سر و کاردارند مطالبی دربارهٔ تابع، مشتق، انتگرال، و سایر ویژگیهای توابع ولو به صورت مقدماتی بدانند. هر چقدر شغل فرد تخصصی تر می شود میزان ریاضیاتی که لازم دارد بیشتر می شود. یک مهندس الکترونیک از آنالیز تابعی و فرایندهای تصادفی استفاده می کند. یک برنامه ریز پروژه های اقتصادی مطالب پیشرفته ای از آمار مانند سریهای زمانی را به عنوان ابزار کار نیاز دارد. از این رو می بینیم تمام مردم به نوعی مصرف کنندهٔ ریاضیات هستند. با پیشرفت تکنولوژی شرایطی به وجود آمده است که مصرف کنندگان ریاضی، راحتتر و سریعتر می توانند از مطالب آن استفاده کنند. نرم افزارهای کامپیوتری می توانند بسیار سریع مطالعات مربوط به سری زمانی داده های اقتصادی را انجام دهند و یا نمودار توابع را رسم و مشتق و انتگرال آن ها را حساب کنند. در این شرایط آنچه که مصرف کنندهٔ ریاضیات باید بداند اصطلاحات و مفاهیم ریاضی مورد نیاز است. در سایهٔ این حد از دانش ریاضی مصرف کنندهٔ ریاضیات می تواند مدل و روش محاسباتی مناسب را اختیار کند. بعد از این انتخاب، کار را می تواند به ماشین بسپارد.

انسانها در رابطه با ریاضیات، مانند سایر محصولات بشری از دو دسته اند. یک دستهٔ وسیع که مصرف کنندگان اند (که خود تولید کننده ای از علم درسایر زمینه ها هستند) و دیگر دسته ای کوچک که تولید کنندهٔ ریاضیات اند. همانطور که در مقدمه گذشت ما ناگزیر از استفادهٔ از ریاضیات هستیم و برای این منظور لازم است آموزشهای مناسب را ببینیم. امّا این تمام کار آموزش ریاضی نیست. آموزش ریاضی تنها انتقال بخشی از دانش ریاضی به دانش آموزان نیست، بلکه یک هدف مهم و اصلی در آموزش ریاضی تربیت کسانی است که در آینده قادر باشند ریاضیات مورد نیاز را تولید کنند.

ما وقتی دستور العمل سادهٔ:

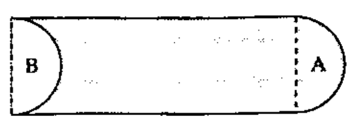
$$\begin{array}{r} 14\times \\ 12 \\ \hline 28 \\ \hline 140 \\ \hline 168 \end{array}$$

را به کار می بریم، بندرت ممکن است به فکر کسانی بیفتیم که برای اولین بار این روش را ارائه کردند. همین طور است دربارهٔ دستورهای مربوط به تقسیم، جذر و هزاران دستور و قضیهٔ ریز و درشتی که در ریاضیات رایج است. مسلماً این روشها و قضایا تولید کنندگانی داشته اند. وقتی که دستور بسط $(a+b)^n$، پس از مراحل تکمیلی، به اثبات رسید بخشی از دانش ریاضی تولید شد و بلافاصله در اختیار صف طولانی مصرف کنندگان آن قرار گرفت. کسانی که ریاضیات را تولید می کنند قندیلهایی هستند که در آسمان بلند علم افراد را به سوی خود می خوانند. ما باید برای تربیت و پی ریزی دانش این قندیلها هم برنامه ریزی کنیم. این برنامه ریزی و عمل به آن بسیار سخت و حساس است. اگر در این باره کورانه عمل کنیم، لاجرم قندیلها را خواهیم شکست.

مثال بارزی از تولید یک روش ریاضی در حل مسأله، داستان گاوس خردسال است. معلم از دانش آموزان می خواهد اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را با هم جمع کنند. شاگردان آموختهٔ کلاس با بهره گیری از دانش ریاضی خود دربارهٔ جمع و خواص اعداد اقدام به محاسبهٔ مجموع این اعداد کردند. ولی در این بین گاوس تشخیص داد که مجموع هر دو عدد قرینه از دو طرف عبارت ۱۰۰ + . . . + ۲ + ۱ برابر مقدار ثابت ۱۰۱ است (۱۰۰ + ۱ = ۹۹ + ۲ = ۹۸ + ۳ = . . .) و چون ۵۰ تا از این مجموعها داریم پس حاصل جمع فوق برابر ۵۰۵۰ = ۱۰۱×۵۰ است. آنچه که گاوس خردسال در حل این مسأله ارائه کرد یک فکر ناب ریاضی و تولید یک روش مؤثر در محاسبات است. پس از این اگر کسی این روش را دیده باشد و در حل مسائل به کاربرد جزء مصرف کنندگان ریاضی است. ولی اگر این روش را نداند و در حل مسأله ای آن را از نو ابداع کند امید آن می رود که گاوس دیگری در صحنهٔ ریاضیات ظهور کند. بنابراین مهم است که در مسائل ریاضی به دانش آموز فرصت و اجازه داده شود تا خود به راه حل مسأله دست یابد. ارائه طریق برای حل مسائل و تمرین و تکرار فقط یک مصرف کنندهٔ خوب می سازد و چشمه فیاض تولید کنندگان ریاضی را به خشکی می کشاند. در کتابهای درسی تمرینهایی هست که در همان سطح مقدماتی می تواند جدا کننده مصرف کننده از تولید کنندهٔ ریاضی باشد. ولی متأسفانه دیده شده است که برخی از همکاران با عصای استدلالیان این قندیلها را شکسته اند. دو نمونه به عنوان مثال ذکر می شود.

نمونه اول:

در کلاس پنجم دبستان از دانش آموز خواسته شده است تا مساحت سطح ها شوردار زیر را محاسبه کند.



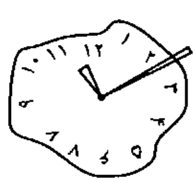
آنچه که در این مسأله حائز اهمیت است و در واقع در اهداف این

ما باید برای تربیت و پی‌ریزی دانش این قندیلها هم برنامه‌ریزی کنیم. این برنامه‌ریزی و عمل به آن بسیار سخت و حساس است. اگر در این باره کورانه عمل کنیم، لاجرم قندیلها را خواهیم شکست.

تمرین خوب نهفته است آن است که دانش آموز دریابد که اگر نیم دایرهٔ A را در محل B قرار دهد، مساحت مورد نظر تبدیل به مساحت مستطیل خواهد شد که از اینجا فوراً می تواند مساحت مورد سؤال را بیابد. امّا دیده شده است که برخی از همکاران، حتی اگر دانش آموز به این ایده دست یافته باشد او را از این تفکر بازداشته و به کار گل وا داشته است. یعنی این که مساحت مستطیل را حساب می کنیم. مساحت نیم دایرهٔ B را از آن کم می کنیم. مساحت نیم دایره A را حساب می کنیم (و حتی اجازهٔ این ابتکار را به دانش آموز نمی دهد که بگوید مساحت A همان مساحت B است که قبلاً حساب کرده ایم، باید این را هم جداگانه حساب کند). حال مساحت A را به آنچه که قبلاً حساب کرده ایم اضافه می کنیم.

نمونه دوم:

شاهد بوده ام که از دانش آموزان کلاس دوم دبستان خواسته شده بود که یک ساعت در منزل درست کنند. دانش آموزی مقوایی را با دست پاره کرد و به خیال خودش صفحه ای مدوّر ساخت و سپس آن را از ۱ تا ۱۲ به صورت زیر شماره گذاری کرد و دو قطعه مقوا هم با دست کند و به عنوان عقربه وسط آن سنجاق کرد. وقتی که ساعت را درست کرد و پیروزمندانه به آن نگاه می کرد بی اختیار یاد آیه شریفهٔ «و تبارک الله احسن الخالقین» افتادم. وقتی که صبح می خواست برود مدرسه همکلاسش را دید که ساعتی بسیار زیبا و رنگ و نقاشی شده با نوار و یراق و از همه مهمتر با کادر بندی دقیق همراه دارد و احساس کرد که ساعت او آن چیزی که باید باشد نیست و لذا ساعت را به معلم نشان نداد. و این همکار محترم حتی از او بازخواست نکرد که چرا تکلیف را انجام نداده ای که در این صورت با مشاهدهٔ کاردستی به ظاهر بی قوارهٔ او که اصالت داشت می توانست او را در متکی بودن به خود تشویق کند و حس اعتماد را در او تقویت نماید. برای ما چقدر مشکل بود تا به او بفهمانیم که ساعت بی قوارهٔ او چقدر زیباتر و با ارزش تر از ساعتهای شیک عاریه ای دیگران است.



به راستی اگر ما اهداف آموزشی را به درستی بدانیم و آنها را رعایت کنیم به جای قندیلهای بندزده چهلچراغهایی از قدرت ابتکار، خلاقیت و حس اعتماد خواهیم داشت.

احتمال هندسی

یک منبع از کاربردهای مهم و لذت بخش ریاضیات دبیرستان

GEOMETRICAL PROBABILITY

A SOURCE OF INTERESTING & SINGNIFICENT APPLICATIONS
OF HIGH SCHOOL MATHEMATICS

نوشتهٔ: دالک و فاکلر
ترجمهٔ: جواد حاجی بابایی

با توجه به تحولات آموزش ریاضی در نیمه دوم قرن بیستم و اهمیت و نقش منحصر بفرد ریاضیات در زندگی هر شهروند برای ورود به قرن بیست و یکم، تغییرات برنامه های درسی و تغییرات اولویت های مواد درسی و استانداردهای آموزشی بلامنازع است. استانداردهای آموزش ریاضی در حال حاضر ارتباط و پیوند بین ریاضیات و دنیای واقعی، درک شهودی و پرهیز از تجرید زودهنگام، ارتباط و پیوند بین موضوعات درون ریاضی و بارز کردن وحدت ریاضیات، تأکید بر ریاضی گونه کردن پدیده ها و مدلسازی ریاضی، سودمندی و لذت بخش بودن ریاضیات، ارائه زیبایی ریاضیات، ارائه کاربردهای زیبا برای درک کارایی ریاضیات و شوق برانگیز کردن ریاضیات و ... است. تغییرات برنامه درسی ریاضی در نظام جدید آموزش متوسطه در همین راستاست. احتمال هندسی یکی از موادی است که همراه با نظام جدید در کتاب جبر و احتمال وارد برنامه ریاضی دبیرستان شده است. در این مقاله نویسنده دلایل زیادی ارائه کرده است که چرا باید احتمال هندسی در دبیرستان تدریس شود و با ارائه شواهدی (مثال ها) ملموس علت وجود این موضوع در برنامه دبیرستان را خاطرنشان کرده است. علاوه بر این گنجینه زیبایی از مسأله های چالش برانگیز و واقعی ارائه شده تا معلمین گرامی بتوانند برای تدریس این موضوع در دبیرستانها در صورت نیاز از آن استفاده کنند.

«هیأت تحریریه»

احتمال هندسی چیست؟ چرا مطالعه آن سودمند و لذت آور است؟ در پاسخ سؤال اول باید گفت که احتمال هندسی با احتمال روی فضاهای نمونه ای نامتناهی سر و کار دارد، آنجایی که هر برآمد آزمایش موردنظر به طور هم شانس اتفاق می افتد. پیشامد احتمال هندسی، محاسبه احتمال رُخداد یک پیشامد تصادفی در یکبار انجام یک آزمایش است. به این صورت، که فضای نمونه ای را با یک ناحیه هندسی R و پیشامد را با یک زیرناحیه r از R، یکسان می گیریم و آنگاه می توانیم برای محاسبه احتمالهای موردنظر از هندسه استفاده کنیم.

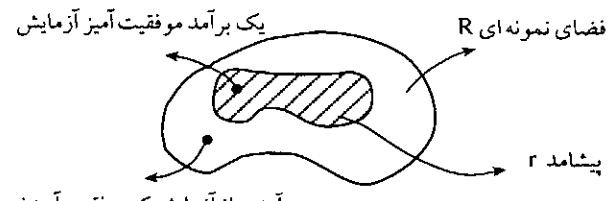
با مخاطب قرار دادن خودمان در برابر دومین سؤال خاطرنشان می کنیم که احتمال هندسی سرشار از مسأله های زیبا و جالب است که در همهٔ سطوح دبیرستان بکار گرفته می شوند، از جبر مقدماتی گرفته تا مثلثات (و حتی حسابان، اگرچه در اینجا این نوع مسأله ها را در نظر نمی گیریم). حل مسأله ها در احتمال هندسی نیازمند مفاهیمی نظیر پیدا کردن مساحت یک ذوزنقه، رسم نامساوی ها، یا بکار بردن قانون کسینوسها است. بنابراین، موضوع و مواد احتمال هندسی به خوبی می توانند برای تکمیل تقریباً هر رشته ای از ریاضیات دبیرستان بکار برده شود. به ویژه، یکی از خاصیت های خوب احتمال هندسی این است که تعریف های آن بسیار شهودی هستند و این تعریفها را می توان در زمانی کوتاه، معرفی و ارائه کرد. بنابراین، دانش آموزان می توانند بی درنگ با مسأله های مهم شروع به کار بکنند.

احتمال هندسی می تواند در خدمت توسعه مهارتهای دانش آموزان در حل مسأله باشد یعنی همان جایی (حیطه ای) که بیشتر دانش آموزان ضعیف هستند. در هر مسأله کاربردی، لازم است وضعیت و شرایط را به یک مُدل ریاضی ترجمه و برگردان کنیم. بوجود آوردن این گونه برگردانها و انتقال ها، دقیقاً پایه و اساس حل مسأله است و دانش آموزان هر چه بیشتر در معرض این گونه طرز تفکر قرار گیرند حقیقتاً ارزشمند خواهد بود.

قبل از پیش بردن بحث، به تعریف بعضی از مفاهیم اساسی احتمال که موارد استفاده قرار می گیرند نیاز داریم. مجموعه همهٔ **برآمدهای ممکن یک آزمایش، فضای نمونه ای آن آزمایش نامیده می شود. یک پیشامد یک زیرمجموعهٔ از فضای نمونه ای است.** یک پیشامد مفروض را به طور ذهنی در نظر بگیرید. اگر یک برآمد

متعلق به پیشامد باشد آن را یک موفقیت گفته و اگر یک برآمد متعلق به پیشامد نباشد آن را یک شکست می گوییم .

با یک آزمایش دنیای واقعی که برآمدهای آن بطور تصادفی رُخ می دهند و یک پیشامد شروع می کنیم . می خواهیم احتمال یک پیشامد را براساس یکبار انجام یک آزمایش محاسبه کنیم . اولین گام به سمت هدف ، متناظر کردن هر برآمد آزمایش با یک نقطه در یک ناحیه هندسی است . برای ما ، یک ناحیه هندسی یا یک قطعه منحنی (در حالتی که ناحیه هندسی یک بعدی است) و یا یک ناحیه مسطح (وقتی ناحیه هندسی دو بعدی است) خواهد بود . پس از این کار به سادگی دیده می شود که یک برآمد از یک آزمایش دنیای واقعی که بطور تصادفی رُخ می دهد ، با انتخاب تصادفی یک نقطه از یک ناحیه هندسی ، که این ناحیه هندسی نمایش دهندهٔ فضای نمونه ای آزمایش است ، متناظر می شود . این آزمایش ریاضی یعنی انتخاب تصادفی یک نقطه از یک ناحیـهٔ هندسی ، مُدل ریاضی آزمایش دنیای واقعی است و ما می خواهیم از این مُدل ریاضی برای محاسبهٔ احتمالهای مورد نظر استفاده کنیم . نماد R را برای ناحیه هندسی که فضای نمونه ای آزمایش را نمایش می دهد ، بکار می بریم . یک پیشامد نیز به وسیله یک زیرناحیه r از R نمایش داده می شود . این مفاهیم در شکل (۱) خلاصه شده اند .



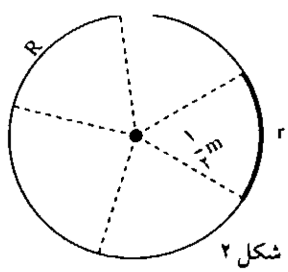
شکل ۱ .

آزمایش : انتخاب تصادفی یک نقطه از R .

برآمد موفقیت آمیز : نقطه به r تعلق داشته باشد .

برآمد غیرموفقیت آمیز : نقطه به r تعلق نداشته باشد .

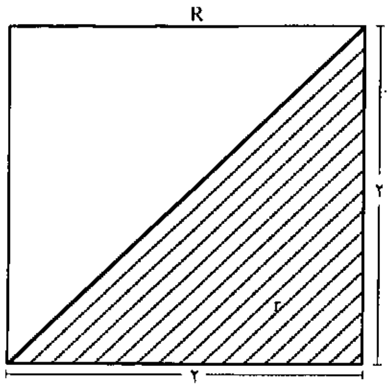
مثال ۱ : یک چرخ گَردان[1] به قطر یک متر به پنج بخش مساوی تقسیم شده است که با رنگهای قرمز ، سفید ، آبی ، قرمز و سفید (شکل ۲) مشخص هستند . اگر توپ بازیکن روی بخش آبی قرار گیرد جایزه را می بَرد . پیشامدی را در نظر بگیرید که بازیکن برنده می شود . می توانیم فضای نمونه ای آزمایش را بوسیله دایره ای به قطر یک متر نمایش دهیم . در این صورت ، زیرناحیه r از R که ناحیه موفقیت را نمایش می دهد کمان آبی رنگ دایره



شکل ۲

است که طول این کمان $\frac{۱}{۵}$ محیط دایره است .

مثال ۲ : یک صفحه هدف[2] مربعی شکل به ضلع ۲ فوت با رسم قطر به دو بخش تقسیم شده است . یک بخش آن سیاه رنگ و بخش دیگر آن سفید رنگ شده است . به طور تصادفی یک پیکان به سمت صفحه هدف پرتاب کرده فرض می کنیم که حتماً به صفحهٔ هدف برخورد می کند . ما به پیشامد برخورد پیکان به بخش سیاه رنگ علاقه مندیم . فضای نمونه ای این آزمایش را می توان با ناحیه مربع شکل به ضلع ۲ واحد نمایش داد . ناحیه R و زیر ناحیه r متناظر با پیشامد مفروض در شکل ۳ نمایش داده شده اند .



شکل ۳

بالاخره ، متوجه شدیم که احتمال رُخ دادن پیشامد مورد نظر در این آزمایش برابر با احتمال آن است که یک نقطهٔ به تصادف انتخاب شدهٔ از مربع R ، به زیر ناحیه r تعلق داشته باشد . امّا چگونه می توانیم این احتمال را تعیین کنیم؟ در مثال ۱ ، این فرض معقول به نظر می رسد که احتمال این که نقطهٔ انتخابی تصادفی ، از ناحیه R در r واقع باشد برابر است با :

$$P(r)=\frac{\text{طول } r}{\text{طول } R}=\frac{\pi/۵}{\pi}=\frac{۱}{۵}$$

و در مثال ۲

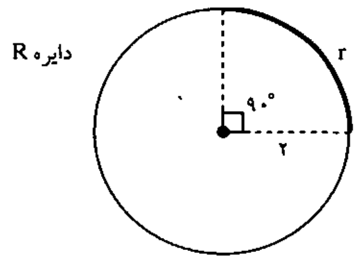
$$P(r)=\frac{\text{مساحت } r}{\text{مساحت } R}=\frac{(\frac{۱}{۲})(۲^۲)}{۲^۲}=۲$$

بنابراین می توانیم به طور کلی بگوییم احتمال این که یک نقطهٔ به طور تصادفی انتخاب شده از R در زیر ناحیه r واقع باشد برابر است با :

$$P(r)=\frac{\text{اندازه } r}{\text{اندازه } R}$$

اگر R یک بعدی باشد ، اندازه به معنای طول و اگر R دوبعدی باشد ، اندازه به معنای مساحت است .

مثال ۳ : برای فضای نمونه ای R و پیشامد r که در شکل های ۴ و ۵ نمایش داده شده است ، احتمال آنکه یک نقطهٔ به طور تصادفی انتخاب شده از ناحیه R در زیرناحیه r واقع باشد را محاسبه می کنیم . در شکل ۴ راه حل به صورت زیر است :



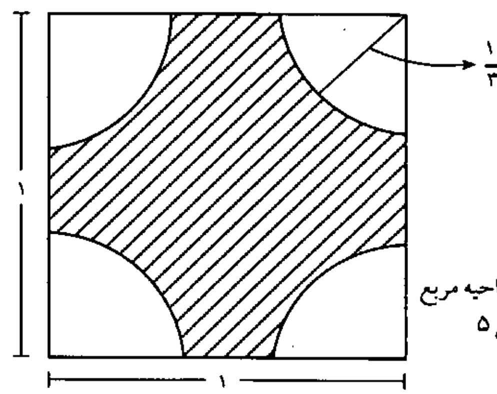
شکل ۴

$$P(r)=\frac{\text{طول } r}{\text{طول } R}=\frac{\pi}{۴\pi}=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$$

و برای شکل ۵ راه حل به این صورت است :

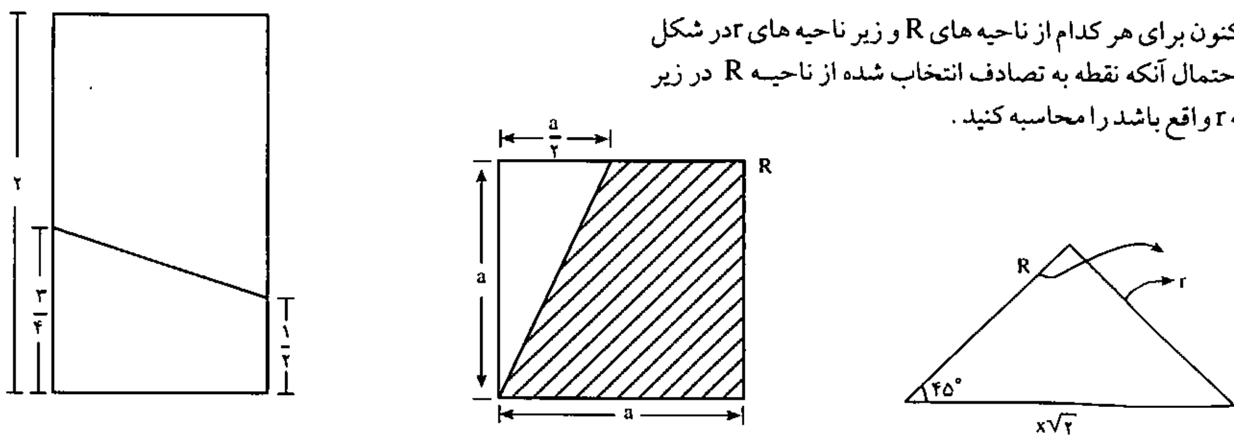
$$P(r)=\frac{\text{مساحت } r}{\text{مساحت } R}=\frac{\text{مساحت مربع} - \text{مساحت چهار ربع دایره}}{\text{مساحت مربع}}$$

$$=\frac{۱-(\pi(\frac{۱}{۳})^{۲})}{۱}=۱-\frac{\pi}{۹}=۰/۶۵$$



R : ناحیه مربع
شکل ۵

اکنون برای هر کدام از ناحیه های R و زیر ناحیه های r در شکل ۶ ، احتمال آنکه نقطه به تصادف انتخاب شده از ناحیه R در زیر ناحیه r واقع باشد را محاسبه کنید .



R : ناحیه مستطیل
(جواب = $\frac{۵}{۱۶}$)

R : ناحیه مربع
(جواب = $\frac{۳}{۴}$)

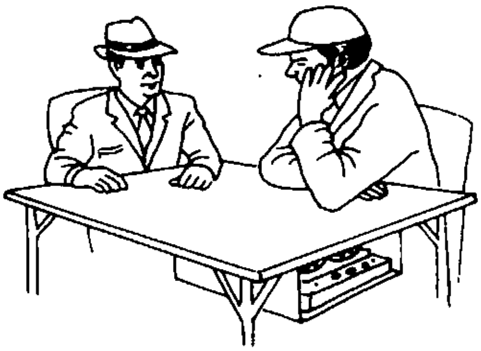
R : مثلث
(جواب = $\frac{۲}{۲+\sqrt{۲}}$)

شکل ۶

مسأله های اساسی در احتمال هندسی

اکنون بعضی از کاربردهای مستقیم احتمال هندسی را در نظر می گیریم .

مسأله ضبط صوت

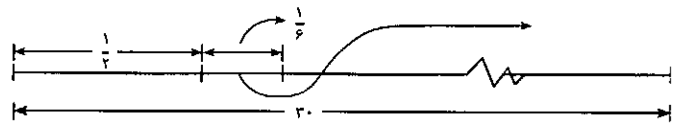


جُو و مُو گفتگویی نیم ساعته دربارهٔ فعالیت های غیرقانونی شب گذشته خودشان داشتند . بدون آنکه آنها بدانند گفتگویشان روی نوار ضبط می شد . پلیس فدرال (FBI)[۳] به نوار دسترسی پیدا کرده و کشف کرد که یک بازهٔ ۱۰ ثانیه ای از نوار شامل اطلاعاتی است که مجرمیت جُو و مُو را نشان می دهد . بعداً مشخص شد که بخشی از این بازهٔ ۱۰ ثانیه ای توسط یکی از مأمورین پلیس فدرال پاک شده است . این مأمور گفت که سهواً یک دگمه اشتباهی را فشار داده و از آنجا به بعد همه نوار پاک شده است . اگر بازهٔ ۱۰ ثانیه ای بعد از نیم دقیقه روی نوار شروع شده باشد ، احتمال اینکه بخشی از گفتگوی متهم کننده به طور تصادفی پاک شده باشد چقدر است؟

حل : نوار ۳۰ دقیقه ای را به صورت یک پاره خط (R) به طول

۳۰ نمایش می دهیم در شکل ۷، پاره خط R و پاره خط متناظر با بازهٔ ۱۰ ثانیه ای ($\frac{1}{6}$ دقیقه ای) که حاوی مدرک جرم می باشد نمایش داده شده است.

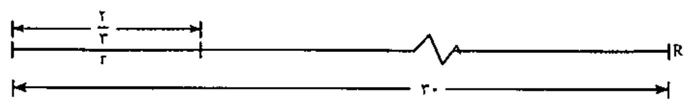
حال اگر نقطه ای که پاک شدگی از آن شروع می شود در داخل



شکل ۷

یا سمت چپ بازهٔ حاوی مدرک جرم واقع باشد، موفقیت و در غیر این صورت شکست خواهیم داشت. پس ناحیه موفقیت r، پاره خطی به طول $\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$ است که از نقطه انتهایی سمت چپ پاره خط R شروع می شود. پاره خط R، فضای نمونه ای این آزمایش و ناحیه موفقیت r در شکل ۸ نمایش داده شده اند.

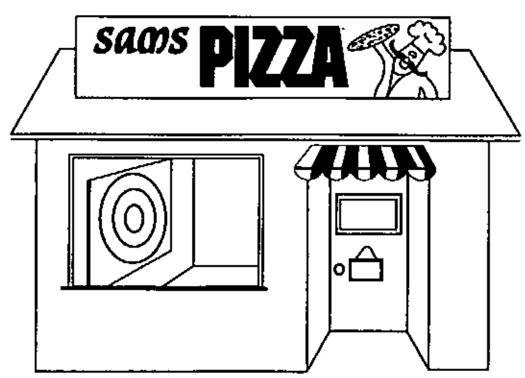
در نتیجه:



شکل ۸

$$P(r)=\frac{r}{R}=\frac{\frac{2}{3}}{30}=\frac{2}{90}=0/02$$

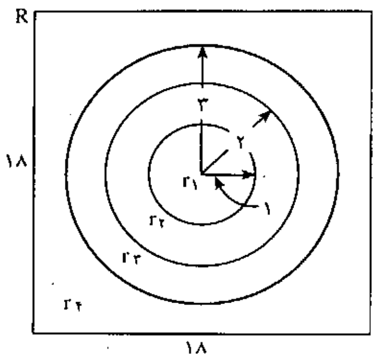
مسألهٔ پیتزا



سالن پذیرایی پیتزافروشی سام دارای یک صفحه هدف ۱۸ سانتیمتری آویخته به دیوار نزدیک درب ورودی جلویی سالن است. با پرداخت یک ۲۵ سنتی مشتری این شانس را دارد که با پرتاب پیکان به صفحهٔ هدف یکی از سه نوع پیتزا را به عنوان جایزه ببرد. صفحهٔ هدف شامل سه دایرهٔ هم مرکز به طوری است که بر مرکز صفحه هدف منطبق است. جایزه چسبیدن پیکان به ناحیهٔ دایره ای به شعاع ۱ سانتیمتر (مرکز هدف)، یک پیتزای بزرگ است. اگر پیکان به ناحیه بین دایره ای به شعاع ۱ سانتیمتر و دایره ای به شعاع ۲ سانتیمتر برخورد کند، جایزه یک پیتزای متوسط و اگر پیکان به ناحیه بین دایره ای به شعاع ۲ سانتیمتر و دایره ای به شعاع ۳ سانتیمتر برخورد کند جایزه یک پیتزای کوچک است. اگر پیکان به ناحیه بیرون دایره ای به شعاع ۳ سانتیمتر برخورد کند مشتری کاملاً بازنده است. ما فرض می کنیم پرتاب پیکان به طور کاملاً تصادفی انجام شده و پیکان حتماً با صفحه برخورد می کند، کمانهای دایره ها دارای ضخامت نبوده و پیکان به کمانهای دایره ها نمی چسبد. در این صورت احتمال پیشامد های زیر را بیابید.

الف) مشتری یک پیتزای بزرگ برنده شود. ب) مشتری یک پیتزای متوسط جایزه بگیرد. پ) یک پیتزای کوچک برنده شود. ت) مشتری کاملاً بازنده شود.

حل: می توانیم فضای نمونه ای آزمایش را بوسیله یک ناحیه مربعی به ضلع ۱۸ نمایش دهیم. شکل ۹ ناحیه R و زیرناحیه های r_1 و r_2 و r_3 و r_4 که به ترتیب نشان دهندهٔ بردن یک پیتزای بزرگ، متوسط، کوچک و یا بازنده شدن هستند را نشان می دهد.



شکل ۹

الف)
$$P(r_1)=\frac{r_1}{R}=\frac{\pi(1^2)}{18^2}=\frac{\pi}{324}=0/01$$

ب)
$$P(r_2)=\frac{r_2}{R}=\frac{\pi(2^2)-\pi(1^2)}{324}=\frac{3\pi}{324}=0/03$$

پ)
$$P(r_3)=\frac{r_3}{R}=\frac{\pi(3^2)-\pi(2^2)}{324}=\frac{5\pi}{324}=0/05$$

ت)
$$P(r_4)=\frac{r_4}{R}=\frac{324-\pi(3^2)}{324}=\frac{324-9\pi}{324}=0/91$$

در اینجا مسأله های مشابهی آورده شده اند تا با استفاده از روش حل دو مسألهٔ قبل به حل آنها بپردازید.

۱ ـ در مسأله پیتزا، شعاع بزرگترین دایره چقدر باید باشد تا احتمال بازنده شدن کامل، ۰/۲۱۵ شود؟ (جواب: ۹ سانتیمتر)

۲ ـ در مسأله ضبط صوت، بازهٔ ۱۰ ثانیه ای در کجای نوار قرار گیرد تا الف) احتمال مطلوب ۰٫۷۵ شود. ب) بزرگترین احتمال ممکن به دست آید. پ) این احتمال چقدر است؟ (جواب: الف ـ بایستی بعد از ۲۲/۳۳ دقیقه روی نوار شروع شود. ب ـ ۱۰ ثانیه آخر نوار، ۱)

۳ ـ گفته شده است که در هنگام طوفان، هواپیمایی در فاصله زمانی ۱۲ ظهر تا ۱۲:۳۰ بعد از ظهر سقوط کرده است. احتمال این که در فاصلهٔ زمانی نیم ساعته، زمان سقوط از: الف) ۲۰ دقیقه، ب) ۱۵ دقیقه، پ) ۱۰ دقیقه، ت) ۲۵ دقیقه، ث) ۳۰ دقیقه، فراتر نرفته باشد چقدر است؟ احتمال این که زمان بعد از سقوط از محدوده زمانهای فوق بیشتر نشود چقدر است؟ (راهنمایی: فضای نمونه ای را رسم کنید و مجموعه برآمدهای موفقیت یعنی پیشامد موفقیت برای هر قسمت را مشخص کنید و توجه کنید که پیشامد موفقیت اشتراک دو پیشامد است). (جواب: $\frac{۱}{۳}$، ۰، ۰، $\frac{۲}{۳}$، ۱).

۴ ـ ایستگاه تلویزیونی WGPR برنامه هایش را برای پخش هشدار دربارهٔ گردباد فوری قطع می کند و به محض دریافت خبر دیده شدن گردباد، آن را اعلام می کند. فرض کنید خبر هشداردهندهٔ گردباد در زمانی که یک مسابقه فوتبال از تلویزیون پخش می شود اعلام گردد. مطلوب است احتمال این که در زمان اعلام خبر طوفان، بخشی از بازی که انجام شده یا بخشی از بازی که باید انجام شود دست کم دو برابر بزرگتر از بخش دیگر مسابقه باشد مشروط بر اینکه الف) زمان استراحت بین دو نیمه بازی نباشد ب) یک نیمه بازی تمام شده باشد و وقت استراحت یک ربع باشد.

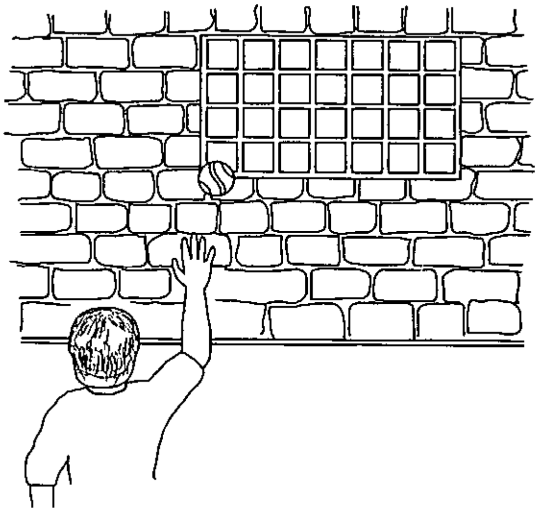
(جواب: $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۸}{۱۵}$).

کاربردهای کمتر سرراست

مسأله های دنیای فیزیکی که بعد از این در نظر می گیریم، نیازمند نبوغ و هوش بیشتری برای مرتبط کردن برآمدهای دنیای واقعی یک آزمایش با همتای ریاضی آنها در مُدل ریاضی متناظر که همان انتخاب یک نقطه تصادفی در یک ناحیه هندسی است می باشد.

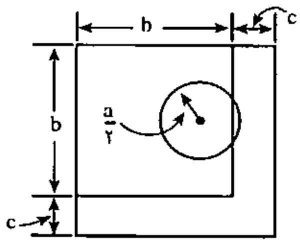
مسأله زندان

یک عضو گروه گانگستری (هفت تیرکشان) شیرینی به نام «شیرین دندان» به جرم دستبرد زدن به یک کارخانه شکلات سازی و ایجاد بدعت شکلات خوری زندانی است! و باید دوران محکومیت را بدون شکلات سپری کند! به عبارت دیگر، او اجازهٔ خوردن شکلات ندارد! اعضای این گروه نقشه ای طرح می کنند تا به وسیله جاسازی شکلات در یک توپ توخالی و پرتاب توپ از راه سوراخ پنجره زندان، به او شکلات برسانند. فرض کنید



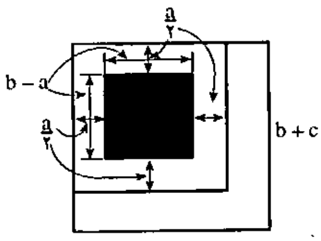
قطر توپ a سانتیمتر باشد و به طور تصادفی به سمت پنجرهٔ زندان پرتاب شده و حتماً به پنجره برخورد کند. پنجرهٔ زندان به وسیله میله های فلزی (عمودی ـ افقی) مشبک شده است. ضخامت نرده ها c سانتیمتر و فضای باز بین نرده ها به شکل مربعهایی به طول ضلع b سانتیمتر $(a < b)$ هستند. احتمال اینکه توپ از پنجره عبور کند چقدر است؟

حل: هر برآمد این آزمایش را به عنوان وضعیت مرکز توپ وقتی توپ به پنجره برخورد می کند، در نظر می گیریم. ما می توانیم توجه خود را به یکی از دریچه های دلخواه و دو تا از میله های پایین و سمت راست [مطابق شکل] متمرکز کنیم. (توجه: در نتیجه پرتاب هر توپ، یا توپ از آن دریچه مشخص عبور می کند و یا با میله های سمت راست و پایین دریچه برخورد می کند که در این صورت توپ وارد سلول زندان نمی شود. برای وقوع یک موفقیت [یعنی عبور توپ از پنجره] باید مرکز توپ حداقل در فاصله ای به اندازهٔ شعاع آن یعنی $\frac{a}{۲}$ واحد از هر میله قرار گیرد. فضای نمونه ای (R) این آزمایش می تواند به وسیلهٔ مربعی به طول ضلع b+c، همانگونه که در شکل ۱۰



شکل۱۰

مشاهده می کنید، نمایش داده شود. ناحیه موفقیت r به صورت ناحیه مربعی شکل به ضلع $b-a$ در شکل ۱۱ نشان داده شده است. مساحت این ناحیه $(b-a)^2$ و مساحت مربع بزرگتر که معرّف تمام فضای نمونه‌ای است برابر $(b+c)^2$ می باشد. بنابراین،

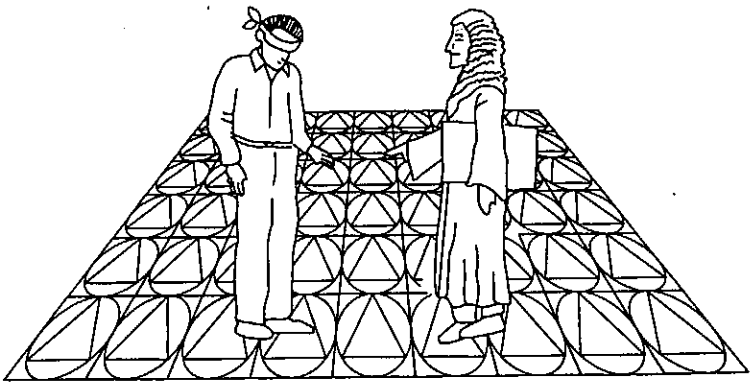


شکل ۱۱

$$P(r)=\frac{(b-a)^{2}}{(b+c)^{2}}$$

مسأله ایجاد حریق عمدی

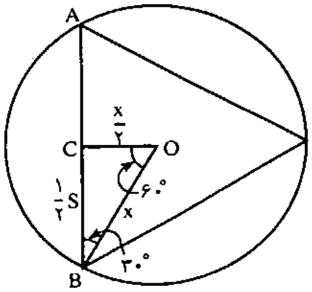
در دادگاهِ قاضی تاک. ای. شانس (Tak. A. chance) کف سالن دادگاه با کاشی های مربعی مفروش است. و طرح روی هر کاشی یک دایره است که یک مثلث متساوی الاضلاع در آن محاط شده است. در این دادگاه نوع محکومیت مجرم (کسی که حریق عمدی ایجاد کرده) به وسیله شانس تعیین می گردد! بسته به شانس متهم، مجازات چنین جرمی از ۱۰ سال تا ۲۰ سال زندان است. متهم اجازه دارد که با چشم بسته یک میله فلزی [کوتاه] خیلی



باریک را روی دایرهٔ یکی از کاشی ها بیندازد. اگر فاصلهٔ نقطه های تلاقی میله با دایره بزرگتر از ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاط شده باشد، مدت محکومیت ۱۰ سال و در غیر این صورت ۲۰ سال خواهد بود. احتمال این که مدت محکومیت مجرم ۱۰ سال باشد را تعیین کنید. (Gnedenko 1967)

حل: چون هر دو نقطهٔ دایره یک وتر را مشخص می کنند، این آزمایش را انتخاب تصادفی یکی از وترهای دایره تصوّر می کنیم و در جستجوی احتمال موقعیتی هستیم که در آن طول وتر بیشتر از طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاطی گردد. اکنون با استفاده از احتمال هندسی، هر وتر را با نقطه وسط آن یکی گرفته هر برآمد این آزمایش، نقطه وسط وتر انتخاب شده خواهد بود.

(توجه: هر نقطه داخل دایره نقطه وسط یک و تنها یک وتر از آن دایره است) ما نیازمند پیدا کردن نقطه هایی از دایره هستیم که یک موفقیت را تشکیل می دهند. شکل ۱۲ دایره‌ای به شعاع x، یک مثلث متساوی الاضلاع محاط شده در آن دایره به ضلع S و یک پاره خط OC که از O (مرکز دایره) بر ضلع AB عمود است را نشان می دهد. چون مثلث متساوی الاضلاع است پس:



شکل ۱۲

$$A\hat{O}B=۱۲۰^{\circ}$$

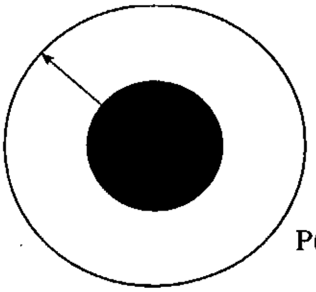
خاصیت های دیگر دایره به ما اندازه های زیر را می دهد:

$$C\hat{O}B=۶۰\ ,\quad AC=CB=\frac{S}{۲}$$

چون $O\hat{B}C=۳۰^{\circ}$، پس داریم

$$OC=\frac{OB}{۲}=\frac{x}{۲}$$

از هندسه مسطحه می دانیم که «هر چه فاصله وتر از مرکز دایره بیشتر شود طول وتر کوچکتر خواهد شد. پس وترهایی که طولشان بزرگتر از S است، بایستی فاصله نقطه های وسط آنها تا مرکز دایره کمتر از $\frac{x}{۲}$ باشد. ناحیه موفقیت r و فضای نمونه ای در شکل ۱۳ نشان داده شده اند. احتمالی که به دنبال آن هستیم برابر مساحت دایره ای به شعاع $\frac{x}{۲}$ بخش بر مساحت دایره ای به شعاع x است. در نتیجه


شکل ۱۳

$$P(r)=\frac{\pi(\frac{x}{۲})^{2}}{\pi x^{2}}=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$$

وقت آن است که بار دیگر روی چند مسأله کار کنید.

۱ـ یک قرص (دیسک) به قطر a روی یک میز که با خطوط موازی به فاصله b از یکدیگر تقسیم بندی شده پرتاب می کنیم. در اینجا $a<b$ است. احتمال اینکه قرص با یکی از خطها تلاقی داشته باشد را محاسبه کنید. (جواب: $\frac{a}{b}$).

۲ـ مسأله شلیک به بوقلمون. یک دهکده، مسابقه سالانه شکار بوقلمون دارد به این صورت که یک صفحه هدف دایره ای به قطر ۱ اینچ به دیواری چسبانده شده است. هر مسابقه دهنده ای یک ۲۵ سنتی برای هر شلیک می پردازد و اگر حفرهٔ ایجاد شده توسط گلوله کاملاً داخل صفحه هدف واقع شود یک بوقلمون جایزه می گیرد. یک مسابقه دهنده به طور تصادفی به سمت هدف آتش می کند و

حفره ای به قطر $\frac{۱}{۴}$ اینچ روی دیوار ایجاد می کند. اگر شلیک او به هدف برخورد کند احتمال بُردن یک بوقلمون چقدر است؟

(جواب: $\frac{۹}{۲۵}$)

۳ـ در مسأله ایجاد حریق عمدی تغییر زیر را ایجاد کرده و سپس احتمال مورد نظر را محاسبه کنید:

اگر فاصله نقطه های تقاطع میله با دایره بیشتر از (الف) شعاع، (ب) ضلع یک مربع محاطی، (پ) b که طول مستطیل محاطی است، (ت) طول ضلع روبرو به زاویه ۳۰° وقتی مثلث محاطی دارای زاویه های ۹۰°، ۶۰° و ۳۰° است، باشد. آنگاه مدت محکومیت فقط ۱۰ سال است.

(جواب: $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{a^۲}{a^۲+b^۲}$، $\frac{۳}{۴}$).

۴ـ مسأله زندان را با فرض این که دریچه های پنجره ها به شکل مثلث متساوی الاضلاع به ضلع s و پهنای میله ها c و قطر توپ a به طوری که $۰ < a < \frac{s\sqrt{۳}}{۳}$ حل کنید.

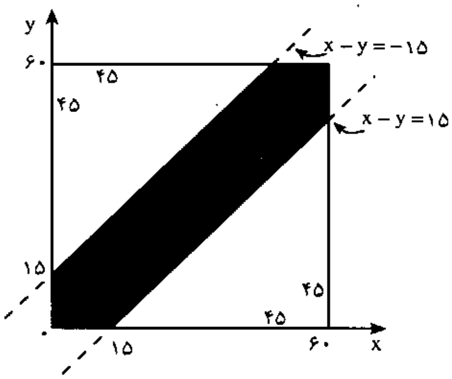
کاربردهای درگیر با دستگاه مختصات

برای مسأله های بعدی، نیازمند استفاده از دستگاه مختصات (یک یا دوبعدی) جهت ساختن نمایشی برای فضای نمونه ای و پیشامد موفقیت آمیز هستیم.

مسأله روبرو شدن زن و شوهر

زن و شوهری قرار می گذارند که هنگام خرید از بازار همدیگر را بین ساعت ۴ تا ۵ بعد از ظهر در قسمت مشخصی از خیابان ببینند. قرار آنها به این صورت بود که هر کدام که اول رسیدند ۱۵ دقیقه منتظر دیگری بمانند و بعد از پانزده دقیقه به خرید خودش ادامه دهد. با فرض اینکه زمان ورود هر کدام به طور تصادفی در طول یک ساعت رُخ دهد، احتمال اینکه این زوج یکدیگر را ملاقات کنند چقدر است؟

حل: فرض می کنیم x و y به ترتیب، تعداد دقیقه های بعد از ساعت ۴ بعد از ظهر باشد که شوهر و زن به محل قرار می رسند. زمانهای ورود مربوط به زن و شوهر را می توانیم به وسیله زوجهای مرتب (x,y) به طوری که $۰ < x < ۶۰$، $۰ < y < ۶۰$ نمایش دهیم. عضوهای فضای نمونه، نقاط داخل مربعی به ضلع ۶۰ خواهند بود (شکل ۱۴). برای این که بتوانند همدیگر را ملاقات کنند، باید زمانهای ورودشان در فاصله زمانی ۱۵ دقیقه از یکدیگر



شکل ۱۴

رُخ دهد. این مشاهده به صورت نمادین به وسیلهٔ نامساوی قدرمطلقی $|x-y| < ۱۵$ نشان داده می شود. (برای مثال اگر زن ۱۴ دقیقه بعد از شوهرش برسد، همدیگر را ملاقات می کنند. برای دیدن این مطلب، توجه می کنیم که $x - y = -۱۴$، در نتیجه $|x-y| = ۱۴$ و لذا نامساوی برقرار است.)

نمودار $|x-y| < ۱۵$ محصور در داخل فضای نمونه ای، ناحیه موفقیت را تشکیل می دهد. ناحیهٔ هاشورخورده موفقیت r و فضای نمونه ای R در شکل ۱۴ نمایش داده شده است. بنابراین،

$$P(r) = \frac{۶۰^۲ - \left[\frac{۱}{۲}(۴۵^۲) + \frac{۱}{۲}(۴۵)^۲\right]}{۶۰^۲}$$

$$= \frac{۳۶۰۰ - ۲۰۲۵}{۳۶۰۰}$$

$$= \frac{۱۵۷۵}{۳۶۰۰}$$

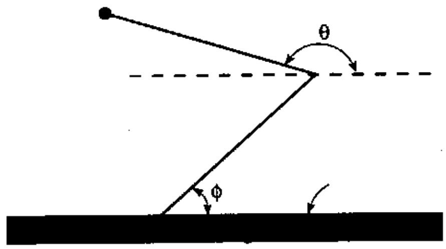
$$\cong ۰/۴۴$$

مسأله شنا کردن

یک شناگر در هوای مه آلود از کنار ساحل شنا کردن را آغاز می کند و در یک جهت تصادفی به طور

مستقیم ۵۰۰ یارد را طی می کند. او پس از قرار گرفتن در مسیر تصادفی، چند بار شنا کردن را متوقف می کند و به اطراف می چرخد ولی باز هم نمی تواند زمین (خشکی) را ببیند. با فرض این که خط ساحلی مستقیم و جزر و مدّی نباشد، احتمال این که این شناگر قبل از پیمودن ۵۰۰ یارد دیگر به ساحل برسد، چقدر است؟

حل: موقعیت نهایی شناگر به وسیلهٔ انتخاب زاویه های $\varnothing$ و θ به طوری که $2\pi > \theta > 0$ و $\pi > \varnothing > 0$، همانگونه که در شکل ۱۵ می بینید تعیین می شود.



شکل ۱۵

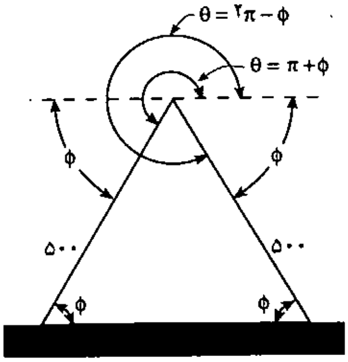
در شکل های ۱۶ و ۱۷ مشاهده می شود که اگر

$$0 < \varnothing < \frac{\pi}{2}\ ,\ \pi + \varnothing < \theta < 2\pi - \varnothing$$

یا

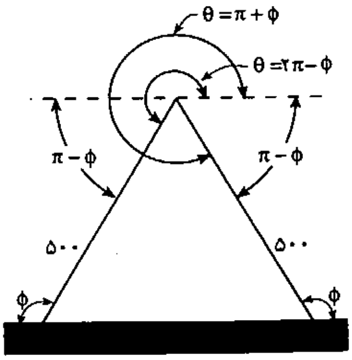
$$\frac{\pi}{2} < \varnothing < \pi\ ,\ 2\pi - \varnothing < \theta < \pi + \varnothing\ ،$$

شناگر به ساحل می رسد.



$0 < \phi < \frac{\pi}{2}$

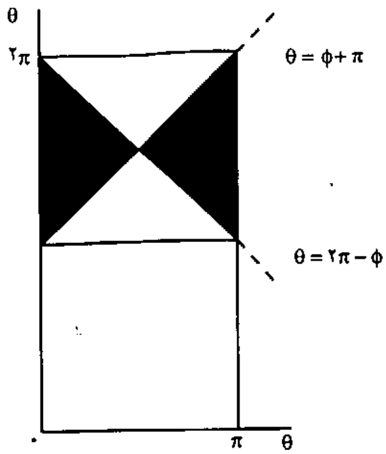
شکل ۱۶



$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$

شکل ۱۷

می توان فضای نمونه ای R آزمایش را به وسیلهٔ ناحیه مستطیل شکل $\{(\varnothing,\theta):\ 0 < \varnothing < \pi,\ 0 < \theta < 2\pi\}$ نمایش داد. این ناحیه و ناحیه هاشورخورده موفقیت r در شکل ۱۸ نشان داده شده اند. مساحت ناحیه مستطیل شکل که تمام فضای نمونه ای را نشان می دهد برابر با $2\pi^2 = \pi \times (2\pi)$ و مساحت ناحیه موفقیت $\frac{\pi^2}{2}$ است. بنابراین



شکل ۱۸

$$P(r) = \frac{r \text{ مساحت}}{R \text{ مساحت}} = \frac{\pi^2/2}{2\pi^2} = \frac{1}{4}$$

در پایان، شما را به تلاش جدّی در حل مسأله هایی از این نوع دعوت می کنیم.

۱ ـ شناگری از کنار ساحل در مسیری که با خط ساحلی زاویه 75° می سازد شروع به شنا کرده و ۴۰ متر شنا می کند و سپس در یک جهت تصادفی به شنا کردن ادامه می دهد. احتمال اینکه شناگر قبل از ۴۰ متر شنا کردن، ۵۰ متر شنا کردن، ۳۹ متر شنا کردن و ۳۸ متر شنا کردن به ساحل برسد چقدر است؟ (راهنمایی: از قانون سینوسها استفاده کنید)، (جواب: $\frac{1}{12}$، ۰/۲۲، ۰/۰۴، ۰)

۲ ـ دوباره مسأله روبرو شدن زن و شوهر را بخوانید. احتمال اینکه زمان رسیدن شوهر به زمان رسیدن زن، نزدیکتر از ساعت ۴ بعدازظهر باشد چقدر است؟

۳ ـ برای معادلهٔ $ax + b = 0$، ضریب a به طور تصادفی از اعداد فاصله [۲ , ۱] و ثابت b نیز به طور تصادفی از اعداد فاصله [۱ , ۱-] انتخاب شده است. احتمال این که جواب معادله بزرگتر از ۰/۲۵ باشد چقدر است؟ (جواب $\frac{5}{16}$)

۴ ـ یک پلیس ایالتی، بزرگراه شمارهٔ ۸ رااز قرارگاه پلیس ایالتی تا شهری واقع در شرق گشت می زند. پلیس دیگری بزرگراه شمارهٔ ۸ رااز قرارگاه پلیس تا شهری واقع در غرب گشت می زند. قرارگاه پلیس در وسط راه بین دو شهر واقع شده است و فاصله این دو شهر ۸۰ کیلومتر است. با فرض این که اتومبیل های گشت در هر جای حوزهٔ استحفاظی خود در هر زمان داده شده بتوانندحاضر باشند، احتمال اینکه ماشین گشت دست کم ۲۰ کیلومتر از یکدیگر فاصله داشته باشند چقدر است؟ (جواب $\frac{7}{8}$)

۵ ـ یک تاجر منتظر دو تلفن است که به او زده شود. به همان

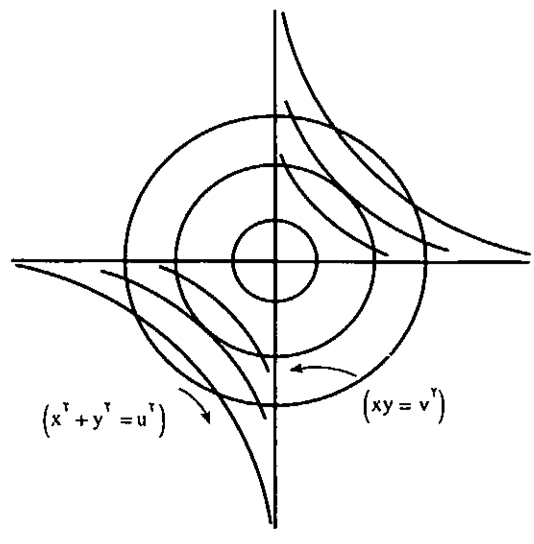
اندازه که احتمال دارد براون در فاصله زمانی بین ۲ تا ۴ بعد از ظهر تلفن بزند، به همان اندازه هم احتمال دارد که جونز در فاصله زمانی بین ساعت ۲:۳۰ تا ۳:۳۰ بعد از ظهر تلفن بزند. احتمال در حالت های زیر چقدر است؟

الف) براون قبل از جونز تلفن بزند.

ب) فاصله تلفن ها کمتر از ۱۰ دقیقه باشد.

پ) براون اول تلفن بزند، فاصله تلفنها کمتر از ۱۰ دقیقه باشد و هر دو تلفن قبل از ساعت ۳ بعد از ظهر باشد. (جواب $\frac{۷}{۱۶}$ ، $\frac{۱}{۶}$ ، $\frac{۱}{۱۸}$)

۶ـ مسأله اشتراک دو منحنی. فرض کنید u را به طور تصادفی از [۰ ، ۲] و v را نیز به طور تصادفی از [۱ ، ۲] انتخاب کنیم. احتمال اینکه دایره $x^2 + y^2 = u^2$ هذلولی $xy = v^2$ را قطع کند (شکل ۱۹) چقدر است؟ (راهنمایی: همزمان دو معادله را برحسب x حل کنید و یک نامساوی برای u و v بدست آورید و سپس تفاوتها را شناسایی کرده تحلیل نمایید. (جواب: $\frac{۳\sqrt{۲} - ۴}{۴}$)



شکل ۱۹

یک گردایه از مسائل احتمال هندسی که از نظر درجهٔ سختی مشابه این مسائل می باشند در کتاب دالکه و فاکلر موجود است (۱۹۸۱).

1. Roulette wheel
2. Dart board
3. Federal Beuroue of Investingation

REFEREBCES

Gnedenko, Boris V. *The Theory of Probability*. NewYork: Chelsea Publishing Co., 1967.

Mosteller, F. R. *Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions*. Reading, Mass.: Addison Wesley, 1965.

Dahlke, Richard, and Robert Fakler."Geometrical Probability.: In *Teaching Statistics and Probability*, 1981 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 143-153. Reston, Va.: The Council, 1981.

BIBLIOGRAPHY

Dahlke. Richard. and Robert Fakler. "Applications of High School Mathematics in Geometrical Probability." *UMAP Module 660*, 34 pp. Arlington, Mass: Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP). (Note: This article is also reprinted in COMAP's *Journal of Undergraduate Mathematics and Its Applications* 6 (No. 1, 1985): 57-94; and in *UMAP Modules: Tools for Teaching 1985*, pp. 247-84.)

Woodward. Ernest, and Larry Hoehn. "Probability in High School Geometry." In *Learning and Teaching Geometry*. K-12, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. pp. 175-83. Reston. Va.: The Council. 1987.

37TH INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
5-17 July 1996: Mumbai, India.

روایت بمبئی

سی و هفتمین المپیاد بین المللی ریاضی
بمبئی ـ هندوستان
تیر ماه ۱۳۷۵

«طاووسی بر بالای طاقچه ای به ارتفاع ۹ نشسته بود، زیر پای او سوراخی قرار داشت، ماری در فاصله ای از سوراخ قرار داشت که به اندازهٔ سه برابر ارتفاع طاقچه بود. مار به سمت سوراخ خزید، طاووس ناگهان روی یک خط مورب به سمت مار فرود آمد. آه، لیلاواتی، خیلی سریع به من بگو، در چه فاصله ای از سوراخ، این دو که با سرعت یکسانی حرکت می کنند به یکدیگر می رسند؟»

نقل از کتاب لیلاواتی اثر بهاراسکاریا ریاضیدان هندی قرن دوازدهم میلادی، در شأن انتخاب نشانهٔ سی و هفتمین المپیاد.

به بمبئی که رسیدیم گرما و رطوبت به استقبالمان آمده بود ولی بیش از آن گرمای محبت و مسئولیت پذیری صمیمانهٔ مهمانداران هندی بود که کارها را هموار می کرد. در مهمانسرای مرکز تحقیقات انرژی اتمی باباکه برای برگزاری المپیاد مهیا شده بود، مستقر شدیم. این مرکز به احترام پروفسور جهانگیر باباکه اواخر دههٔ ۴۰ میلادی و در زمان نهرو نخست وزیر فقید هند، این مرکز و استفاده از انرژی اتمی را در هند پایه گذاری کرده بود، نامگذاری شده است. مرکز تقریباً در شمال شرق بمبئی قرار دارد و با ۷۰۰۰ دانش پژوه که در آن شاغل هستند به نظر می رسد که فعالیتی جدی را دنبال می کند.

یکی دو روز اول به آشنایی با محیط و تمهید برخی مقدمات اولیه گذشت تا تیمهای ۷۵ کشور همه رسیدند و کار المپیاد آغاز شد. از بدو ورود، وجود گرما و رطوبت بسیار زیاد، بروز توانائیها را با نگرانی روبه رو می کرد. مراسم افتتاحیه عصر روز نوزدهم تیر ماه در یک تالار اجتماعات در مرکز شهر برگزار شد، در سخنرانیهایی که توسط رئیس کمیته برنامه ریزی آموزش ریاضی هندوستان و معاون وزیر آموزش و پرورش هندوستان انجام شد، بر اهمیت المپیاد و نقشی که می تواند در ترغیب جوانها به فراگیری ریاضیات و بعد ادامهٔ تحصیل در این رشته ایجاد کند، بسیار سخن گفته شد.

روز بیستم تیر ماه اولین جلسهٔ امتحان برگزار شد. بچه ها با بیم و امید راهی امتحان شدند و عصر که خسته و کوفته از امتحان بازگشتند تقریباً از کارشان راضی بودند. عصر به مختصر استراحتی گذشت و صبح روز بیست و یکم تیر ماه در زیر باران شدید بچه ها راهی جلسهٔ دوم امتحان شدند و نگرانی از گرما و رطوبت، بیش از پیش شده بود.

از عصر روز بیست و یکم راهی امور تصحیح و امتیازدهی اوراق بچه ها شدیم. اول، فرصتی بود که برگه های بچه ها را بخوانیم و آمادهٔ کار دشوار دفاع از عملکرد بچه ها شویم، روزهای بیست و دوم تا بیست و چهارم تیر ماه بچه ها برنامه های تفریحی و بازدید از مراکز مختلف داشتند و ما سرگرم پی گیری کار تصحیح شده بودیم. کار تصحیح طبق جدول زمانبندی با ارائهٔ هر مسأله به یک گروه ویژه جلو می رفت. اصولاً تصحیح کنندگان همه از کشورهای میزبان انتخاب می شوند و امسال کار هندیها به خصوص در امر ارزیابی و تصحیح بسیار منظم و با دقت ویژه ای همراه بود. اولین مسأله ای را که برای تصحیح بردیم هر ۶ نفر

اعضای تیم ما نمرهٔ کامل گرفتند که حُسن شروع خوبی بود ولی به مرور که کار جلو می رفت نمره ها بالا و پایین می شد و ما هم البته نمی توانستیم کاملاً بی دلهره باشیم. بالاخره وقتی که جدول اعلام نمرات کلیهٔ کشورها کامل شد، دیدیم در رتبهٔ نهم جای گرفته ایم، این که توانسته ایم جایگاه خود را بین ده تیم اول حفظ کنیم بسیار خوشحال کننده بود و برخورد همهٔ تیمها با ما بسیار تقدیرآمیز بود و جایگاه ویژه ای برای ما در المپیاد قائل بودند.

امسال نمرات کلیهٔ تیمها اصولاً پایینتر از حدّ انتظار و معمول بود و این امر بیشتر ناشی از دشواری یا به عبارت بهتر نامناسب بودن بعضی ازسؤالات انتخاب شده و به ویژه دومین سؤال هندسه بود. برای تیم ما هم که معمولاً مسائل هندسه از مسائل امتیازآور است، از دست دادن امتیاز این مسأله و تن در دادن به فقط ۸ امتیاز جزئی از ۴۲ امتیاز ممکن قدری ناگوار بود. از بین کلیهٔ ۴۲۴ شرکت کنندهٔ در المپیاد، فقط ۶ حل کامل و نمرهٔ کامل وجود داشت و به قولی در تاریخ المپیاد بیشترین تعداد «صفر» از یک مسأله را این نصیب خود کرده است.

در جلسهٔ نهایی ژوری که نمرات به تأیید نهایی رسید، توانستیم رتبه بندی غیررسمی کشورها را به ترتیب زیر داشته باشیم. البته همانطور که می دانیم، رتبه بندی کشورها به هیچ وجه به طور رسمی اعلام نمی شود، چون در واقع المپیاد رقابتی بین «افراد و نه ملتها» محسوب می شود. ولی رتبه بندی غیررسمی بر اساس مجموع امتیازات تیمهای شرکت کننده سنّت المپیادها شده است و در گزارشهای خبری و غیررسمی نیز منعکس می گردد. به هر تقدیر رتبه بندی ۱۵ تیم برتر از ۷۵ تیم شرکت کننده درسی و هفتمین المپیاد بین المللی ریاضی به قرار زیر است.

۱ ـ رومانی	۱۸۷ امتیاز
۲ ـ ایالات متحده	۱۸۵ امتیاز
۳ ـ مجارستان	۱۶۷ امتیاز
۴ ـ روسیه	۱۶۲ امتیاز
۵ ـ بریتانیا	۱۶۱ امتیاز
۶ ـ چین	۱۶۰ امتیاز
۷ ـ ویتنام	۱۵۵ امتیاز
۸ ـ کره جنوبی	۱۵۱ امتیاز
۹ ـ ایران	۱۴۳ امتیاز
۱۰ ـ آلمان	۱۳۷ امتیاز
۱۱ ـ ژاپن	۱۳۶ امتیاز
۱۲ ـ بلغارستان	۱۳۶ امتیاز
۱۳ ـ لهستان	۱۲۲ امتیاز
۱۴ ـ هند	۱۱۸ امتیاز
۱۵ ـ اسرائیل	۱۱۴ امتیاز

در بررسی رده بندی فوق با نکات جالب توجهی مواجه می شویم: چین که سالها علمدار رتبهٔ اول و یا حداکثر دوم بود، رتبهٔ ششم را حائز شده است و این بیش از همه به خاطر مسألهٔ هندسهٔ دشوار فوق الذکر بود که تیم چین هیچ امتیازی از آن کسب نکرد و از دست دادن ۴۲ امتیاز آن مسأله، موجب نزول تیم به رتبهٔ ششم شد. جهش انگلستان به ردهٔ ده تیم اول و خروج بلغارستان از این مجموعه نیز قابل تعمق است. ما هم برای حفظ مقام و رتبهٔ خود و جهش بیشتر باید نکات متعددی را ملحوظ کنیم، آلمان، ژاپن، بلغارستان، و هند رقیبهای سرسختی برای ما هستند، که فعلاً بعد از ما جای دارند ولی موقعیت آنها برای ما هشداردهنده است. ما برای حفظ مقام خود در ردهٔ ده تیم اول و صعود به ردهٔ پنج تیم اول باید به فکر تدوین استراتژیهای ویژه و برقراری ارتباط بین بخشهای مختلف المپیاد باشیم. در واقع سیاستگزاری مناسب در این رابطه ضرورتی است که در کنار اشاعهٔ موفق المپیاد در داخل از آن غافل مانده ایم و باید در فرصت مناسب به آن بپردازیم.

در آخرین جلسهٔ ژوری نحوهٔ تقسیم مدالها نیز تصویب شد تا مدالها زیبندهٔ قامتهای افراشته باشد. در این رابطه نکتهٔ جالب توجه توزیع نمرات شرکت کنندگان در المپیاد بود که فقط یک دانش آموز رومانیایی نمره کامل را به خود اختصاص داده بود، حال آنکه معمولاً هشت، ده تایی نمرهٔ کامل وجود داشت و سایر نمرات نیز نسبت به سالهای قبل به مراتب سطح پایینتری داشت. اعضای تیم ما، هر کدام یک مدال برای تیم به ارمغان آوردند. **هادی سلماسیان** دانش آموز سال سوم دبیرستان شهید اژه ای اصفهان مدال برنز گرفت. سلماسیان را از وقتی که سال دوم دبیرستان بود به عنوان یک استعداد بسیار خوب شناخته بودیم، هادی در حل چند مسأله نقطه شروع خوبی داشت ولی کار را به سرانجام نرسانده بود که باعث شد نمره های زیادی از دست بدهد ولی مطمئن هستم که او با استعداد و دقت خوب خود در آینده موفقیتهای خیلی بیشتری کسب خواهد کرد. **روح اله ابراهیمیان** از دبیرستان شاهد اصفهان و **مرتضی فتوحی** از دبیرستان شهید صدوقی یزد مدال نقره گرفتند. روح اله و مرتضی در دورهٔ آمادگی درخشش بسیار زیادی داشتند که نویدبخش آیندهٔ درخشانی برای آنها است. **سیدرضا مقدسی** دانش آموز سال سوم دبیرستان علامهٔ حلی تهران دیگر مدال نقره را به چنگ آورد، سید با همهٔ وسواس و حساسیتش که بعضی وقتها سرعت عمل را از او می گرفت در دو تا از مسأله هایش راه حلهایی یکتا و بدیع ارائه کرده بود که هر چند راه حل کاملی نبودند ولی حاکی از قدرت ذهنی او است که در آینده می شود بیشتر از او انتظار داشت. **علیرضا صالحی گلسفیدی** دانش آموز سال چهارم دبیرستان شهید سلطانی کرج هم مدال نقره گرفت. علیرضا ذهن ریاضی فعالی دارد که با پختگی خیلی خوبی همراه است. حل چند تا از مسأله هایش با پختگی یک ریاضیدان حرفه ای بود ولی علیرضا مدال طلا را فقط برای یکی دو نمره از دست داد، حتماً شاهد بیش از اینها از او خواهیم بود. **ایمان افتخاری** دانش آموز سال دوم دبیرستان علامه حلی تهران به مدال طلا دست یافت.

ایمان چهار مسأله را خیلی بدیع، زیبا، و جالب حل کامل کرده بود. جهش ذهنی فوق العادهٔ او حالی از یک شور متین در ذهن او است، شوری که به همهٔ ما نیز وجد و نیرو می دهد.

❊ ❊ ❊

در حاشیهٔ المپیاد، دیدار با سرپرستان تیمهای مختلف هم مغتنم بود. با سرپرستان مالزی و مراکش گفتگو از راه اندازی یک المپیاد منطقه ای برای کشورهای اسلامی داشتیم که باید آن را پی گیری کنیم. هم ما می توانیم به آنها بهره برسانیم هم پهنهٔ جدیدی برای بچه های خودمان باز می شود. با دبیر کمیتهٔ اجرایی المپیاد بین المللی ریاضی نیز در مورد اینکه کشور ما میزبان المپیاد بین المللی ریاضی باشد نیز مذاکره شد که خیلی استقبال کرد و ما باید این موارد را به طور جدی مورد بررسی قرار دهیم.

❊ ❊ ❊

بمبئی سابقاً مومبئی نامیده می شده است که از ریشهٔ «دوستی» است. بال دیگر المپیاد هم دوستی است، دوستی ریشه دار، مثل المپیاد که در کشور ما ریشه دار شده است.

یحیی تابش
عضو هیأت سرپرستی تیم اعزامی به
سی و هفتمین المپیاد بین المللی ریاضی

37TH INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

5-17 July 1996: Mumbai, India.

روز اول (۲۰ تیر ماه ۱۳۷۵) مدت: $۴\frac{۱}{۲}$

۱. فرض کنیم ABCD یک صفحه متسطیل شکل به ابعاد $AB = ۲۰$ و $BC = ۱۲$ باشد. این مستطیل بـه ۱۲×۲۰ مربع به مساحت واحد تقسیم شده است. فرض می کنیم r یک عدد صحیح مثبت در دست باشد. یک مهره را از یک مربع به مربع دیگر می توان حرکت داد اگر و فقط اگر فاصله بین دو مرکز دو مربع برابر $\sqrt{r}$ باشد. کار ما پیدا کردن دنباله ای از حرکات مجاز است که مهره را از مربع به رأس A به مربع به رأس B ببرد.

الف) نشان دهید اگر r بر ۲ یا ۳ بخشپذیر باشد این کار شدنی نیست.

ب) ثابت کنید اگر $r = ۷۳$ این کار شدنی است.

ج) آیا این کار وقتی $r = ۹۷$ شدنی است؟

۲. فرض کنیم P یک نقطه درون مثلث ABC باشد به گونه ای که

$$A\hat{P}B - A\hat{C}B = A\hat{P}C - A\hat{B}C$$

فرض کنیم D و E به ترتیب مراکز دوایر محاطی مثلث هـای APB و APC باشد. نشان دهید خطـوط AP و BD و CE در یک نقطه همرسند.

۳. فرض کنیم $S = \{۰,۱,۲,۳,...\}$ مجموعـهٔ اعداد صحیـح نامنفی باشد. همهٔ توابعی مانند f را پیدا کنید که روی S تعریف شده و مقادیرش را به روی S بگیرد و برای همه $m, n \in S$ داشته باشیم

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

روز دوم (۲۱ تیر ماه ۱۳۷۵) مدت: $۴\frac{۱}{۲}$

۴. اعداد صحیح و مثبت a و b طوری هستند که اعداد $۱۵a + ۱۶b$ و $۱۶a - ۱۵b$ هر دو مجذور اعدادی صحیح و مثبت می باشند. کمترین مقدار ممکن که این دو مجذور اختیار می کنند را پیدا کنید.

۵. فرض کنیم ABCDEF یک شش ضلعی محدب باشد به طوری که AB موازی ED، BC موازی FE و CD موازی AF باشد. فرض کـنیم R_A، R_C و R_D شعاع دوایر محـیطـی مثلث هـای FAB، BCD، DEF بوده و p محیط شش ضلعـی باشد. ثابت کنید.

$$R_A + R_C + R_D \geq \frac{۱}{۲} p$$

۶. فرض کنیم p، n و q اعداد صحیح و مثبت باشـنـد و $n > p + q$. فرض کنیم $x_۰$، $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n اعداد صحیح باشند که در شرایط زیر صدق می کنند.

الف) $x_۰ = x_n = ۰$

ب) بـه ازای هـر i کـه $۱ \leq i \leq n$، $x_i - x_{i-۱} = p$ یـا $x_i - x_{i-۱} = q$.

نشان دهید یـک زوج مـرتـب (i, j) وجود دارد کـه $i < j$ و $(i, j) \neq (۰, n)$ به طوری که $x_i = x_j$.

(بارم هر مسأله ۷ نمره)

انتخاب استراتژی در فرآیند حل مسأله

روح الله جهانی پور
دانشگاه صنعتی شریف

این مقاله، پروژهٔ پایان ترم نگارنده در درس «مباحثی در آموزش ریاضی» است. این درس توسط خانم دکتر زهرا گویا در نیمسال اول تحصیلی ۷۴ــ۷۳ برای دانشجویان کارشناسی ارشد ریاضی دانشگاه صنعتی شریف ارائه شده بود.

۱: مقدمه

ریاضیات واقعاً از چه چیزهایی تشکیل یافته است؟ اصول موضوع مثل اصل موضوع توازی؟ قضیه ها مثل قضیهٔ اساسی جبر؟ اثباتها مثل اثبات تصمیم ناپذیری گودل؟ مفاهیم مثل مجموعه ها و رده ها؟ تعریفها مثل تعریف بعد در توپولوژی؟ نظریه ها مثل نظریهٔ رشته ها؟ فرمول ها مثل فرمول انتگرال کوشی؟ روشها مثل روش تقریبات متوالی؟ یقیناً ریاضیات بدون اینها وجود ندارد و همگی مؤلفه های اساسی تشکیل دهندهٔ ریاضیات اند. لکن یک دیدگاه قابل دفاع این است که هیچ کدام از این مؤلفه ها در قلب موضوع جای ندارند. دلیل اصلی یک ریاضیدان برای پرداختن به کار ریاضی، حل مسأله است و بنابراین ریاضیات واقعاً از مسائل و حل آنها تشکیل یافته است.

در فرهنگ اغلب ریاضیدانان، «قضیه» لغت محترمی است ولی «مسأله» همیشه این طور نیست. «مسائل» به معنایی که حرفه ای ها به کار می برند، تمرینهای سطح پایینی هستند که به دانش آموزانی که قرار است خود بعداً اثبات کنندهٔ قضیه شوند، داده می شود. به هر حال، این نظر کاملی درباره مسأله نیست. جابجایی عمل جمع اعداد طبیعی و حل پذیری معادلات چند جمله ای روی میدان اعداد مختلط، هر دو قضیه اند ولی یکی از آنها را بدیهی می گیریم (تقریباً جزو تمرینها است و درک و اثبات آن سهل است) و دیگری را عمیق (گزارهٔ ساده ای نیست و اثبات آن از مفاهیم عمیقی سود می جوید و نتایج جالبی هم دارد). یافتن محل صفرهای تابع زتای ریمان نیز مسأله ای عمیق است که هنوز کسی موفق به حل آن نشده است. بنابراین، قضایا می توانند عمیق باشند ولذا آنهایی که معتقدند مسأله قلب ریاضیات است، در اشتباه نیستند.

یکی از سخت ترین بخشهای حل مسأله، پرسیدن سؤالهای مناسب است و بهترین راه آموختن این کار نیز تمرین در انجام آن است. راه ساده ای وجود ندارد که به کسی بیاموزیم چگونه سؤالهای مناسب بپرسد، همان طور که راه ساده ای برای آموزش شنا وجود ندارد جز اینکه شخص داخل آب برود. شما نمی توانید برای کس دیگری شنا کنید تا او شنا کردن را یاد بگیرد! امّا می توانید او را تشویق و تقویت کنید تا داخل آب شود. شما می توانید ابزاری که سؤال خوب را از سؤال بد جدا می سازد در اختیار شخص قرار دهید ولی چیزی نمی تواند جایگزین تکرار و تمرین برای یادگیری «خوب سؤال کردن» شود [۷].

بدین ترتیب، هدف اساسی در آموزش ریاضیات که به تعبیری آموزش حل مسأله است، این است که چگونه می توان درست سؤال کردن را آموزش داد. بهترین راه آموختن، «عمل» است [۶]، ولی از کجا باید شروع کرد؟ چه مسیری را باید در پیش گرفت؟ و از چه ابزارها و امکاناتی باید سود جست؟

مضمون واقعی ریاضیات حل مسائل واقعی و غیر مجرد است. هیلبرت یک بار گفته بود که بهترین راه برای فهم یک نظریه، دریافت و مطالعهٔ یک مثال واقعی و نمونه از آن نظریه است، مثالی ریشه ای که هر چیزی را که ممکن است اتفاق بیفتد، به نمایش می گذارد. یکی از مشکلات عمدهٔ دانشجویان ـ حتی دانشجویان خوب ـ این است که هرچند ممکن است بتوانند به درستی قضایا را بیان کنند و اثباتهای درست را به خاطر بسپارند، اما نمی توانند مثالهای نمونه ارائه کنند، مثالهای نقص بیاورند و بالاخره مسائل خاص را حل کنند. به عنوان مثال، هستند بعضی از دانشجویانی که می توانند دربارهٔ قضیهٔ طیفی عملگرهای هرمیتی در فضای هیلبرت چیزهایی بیان کنند ولی نمی توانند یک ماتریس متقارن حقیقی ۳×۳ را قطری کنند و این شیوهٔ جالبی برای یادگیری نیست. طیف عظیمی از جامعهٔ علمی و فرهنگی محتاج حل مسائل و به ویژه مسائل ریاضی اند و از این رو، باید بخشی از کار ریاضیدان به یاد دادن چگونگی حل مسأله اختصاص یابد [۶]، امّا چگونه می توان مسأله حل کردن را آموخت و آموزش داد؟ پاسخ به این پرسش منجر به طرح مطالب متعدد و نسبتاً حجیمی دربارهٔ دیدگاههای آموزش ریاضی و حل مسأله در آن می گردد.

شاید بهترین پیشنهاد این باشد که ببینیم ریاضیدانان خبره چگونه

مسأله حل می کنند. آیا تحقق این امر امکان پذیر است؟ چگونه می توان از آنچه در دنیای ذهن یک ریاضیدان می گذرد آگاه شد؟ مطالب کتاب «چگونه مسأله را حل کنیم» [۱۲]، شاید برای یک ریاضیدان خبره بدیهی باشد، ولی آیا برای یک دانش آموز سال اول دبیرستان نیز همین طور است؟ و آیا این دانش آموز با خواندن این کتاب که محتوای آن مرکب از همان چیزهایی است که در دنیای یک ریاضیدان خبره در حال وقوع است، می تواند به هدف فوق، یعنی یادگیری حل مسأله دست یابد؟

ریاضیدان، کاشف متهور ناشناخته ها است [۱۰]، و این ناشناخته ها عناصر تشکیل دهندهٔ وادی مسأله را تشکیل می دهند. ریاضیدان با عشقی وافر پا در این وادی می گذارد و با تلاشی تحسین برانگیز به کمک ابزارهایی که در اختیار دارد، تاریکیهای راه را روشن می سازد و سرانجام با موفقیت همراه با شادی غرورانگیز، آن وادی را طی می کند. پس نخستین کار این است که جرأت قدم گذاری در این وادیهای ناشناخته را در دانش آموز ایجاد کنیم و آنگاه به او بیاموزیم که ابزار طیّ این وادی کدامند و چگونه باید از آنها استفاده نمود؟ این ابزارها همان استراتژیهای راهیابانه[1] هستند که بررّسی آنها هدف این مقاله است. پیش از شروع سخن اصلی لازم به ذکر است که در این مقاله، هدف ارائهٔ الگوهایی برای انتخاب استراتژی در مسائل مختلف نبوده است، بلکه سعی بر این است که اوّل مفهوم استراتژی، روشن و سپس مطابق مطلبی که در بالا عنوان شد، به بررسی چگونگی انتخاب استراتژی برای حل مسائلی که ریاضیدانان خبره درگیر حل آنها هستند پرداخته شود. همچنین در این مسیر، رابطهٔ انتخاب استراتژی با مؤلفه های دیگر دخیل در ایجاد توانایی برای حل مسأله از قبیل ذخایر دانشی و باورها، بطور اجمالی مورد بررسی قرار می گیرند. بعضی از استراتژیهای پولیا را نیز بیان کرده، با ارائه مثالهایی، مشکلات استفاده از آنها را مطرح می سازیم.

۲: استراتژی چیست؟

استراتژی عبارت از فراهم آوردن ابزارها و امکانات لازم برای حل یک مسأله است. با این تعریف، در واقع استراتژی متفاوت از تکنیک خواهد شد زیرا تکنیک خود آن ابزار است نه تمهید آنها. با این حال چون غالباً این دو به یک معنی به کار می روند، این مقاله نیز آنها را مترادف هم در نظر می گیرد. همان طورکه گفته شد، مهمترین و مشکلترین بخش حل یک مسأله، پرسیدن سؤالهای مناسب است. سؤال مناسب و خوب، سؤالی است که جنبه های مختلف مسألهٔ پیش رو را روشن سازد و راه حل آن را ـ که البته باید از ویژگی موقتی و موجه نما بودن برخوردار باشدـ معین کند. بین سؤال خوب و استراتژی نوعی هماهنگی وجود دارد. انتخاب نوع استراتژی می تواند ناشی از طرح یک سؤال مناسب باشد و سؤال مناسب نیز می تواند ناشی از ورود اندیشه ای (استراتژی) راهیابانه در مغز حل کنندهٔ مسأله باشد. نحوهٔ انتخاب و نوع استراتژیی که برای حل مسأله انتخاب می شود به عوامل متعددی بستگی دارد. میزان و درجهٔ مسأله بودن یک مسأله نیز در انتخاب استراتژی مؤثر است. ریاضیدان خبره ای که مثلاً در زمینهٔ معادلات جبری کار می کند، ممکن است انتخاب استراتژی برای حل یک معادلهٔ درجهٔ دوم یک مجهولی را بی معنی بداند، ولی حل همان معادله برای یک دانش آموز اول دبیرستان که فقط با معادلات درجهٔ اول آشنایی دارد، یک مسأله است و برای حل آن محتاج انتخاب استراتژی است. این خود نشان می دهد که علاوه بر درجهٔ مسأله بودن، میزان آگاهی ها و ذخایر دانشی شخص نیز در چگونگی انتخاب و نوع استراتژی انتخابی اثر دارد. هراندازه که درجهٔ مسأله بودن برای مسأله حل کن افزایش یابد، احتیاج او نیز به انتخاب استراتژی افزایش پیدا می کند. از طرف دیگر نوع باورها و درک از ریاضیات می تواند حتی بر اعتقاد به لزوم به کارگیری استراتژی برای حل مسأله و مستدل ساختن آن اثر بگذارد. رامانوجان از نخبگان ریاضی قرن حاضر، فردی خود آموخته بود ولی دقت در ریاضی را به معنای جدید آن نمی شناخت و به یک معنی او نمی دانست که اثبات چیست. هاردی، ریاضیدان بزرگ انگلیسی که او را کاشف رامانوجان می دانند، مجبور شده بود قدری ریاضیات رسمی به او یاد بدهد و شاید هدف اساسی هاردی، آموختن نحوهٔ استدلال کردن به رامانوجان بوده است. هاردی می گوید این کار عجیبترین تجربهٔ زندگیش بوده است زیرا شگفتی در این بود که ریاضیات مدوّن در نظر کسی که عمیقترین بصیرتها را داشت امّا از قسمت اعظم این ریاضیات و ابزارهای متعارف آن چیزی نشنیده بود، چه جلوه ای داشت؟ [۱۴]. نگاهی گذرا به فرمولها و روابطی که رامانوجان به دست آورده است، نشان می دهد که این فرمولها به هیچ وجه بدیهی نیستند و از همانهایی هستند که فقط اثبات می تواند صحت آنها را محرز کند ولی با کمال تعجب رامانوجان تصوری از دقت و استدلال نداشت! کسی که چنین موقعیتی در ریاضیات دارد، چه تصوری از استراتژی و انتخاب استراتژی برای حل مسأله می تواند داشته باشد؟ بنابراین گویی مفهوم «دقت» نیز در انتخاب استراتژی اثر می گذارد. اما آیا ریاضیات نادقیق، یا ریاضیات صوری ارتباطی با انتخاب استراتژی ندارد؟ اینها بخشی از مطالبی است که دربارهٔ رابطهٔ انتخاب استراتژی با آنها سخن خواهیم گفت.

۳: یک استراتژی تاریخی

زمانی که دربارهٔ استراتژییابی برای حل مسأله سخن می گوییم، شایسته است که ذکری از بعضی از استراتژیهای جالب و زیبای تاریخی که خود منشأ ایجاد یک نظریه در ریاضیات شده اند، به میان آوریم. مطابق معمول، در بیان شواهد تاریخی ریاضی، به یونانیان

باستان بازمی گردیم . مردم از دیرباز با محاسبهٔ مساحتهای شکلهای ساده ای چون مربع، مستطیل، مثلث و . . . آشنایی داشتند . مساحت چند ضلعیها را نیز می توانستند حساب کنند، آنها را به وسیلهٔ رسم قطرها به مثلثهایی تقسیم می کردند و سپس مساحتهای آن مثلثها را جمع می کردند . با این حال نمی توانستند مساحت شکلهایی را که دارای مرز منحنی ناشناخته بودند (مثلاً دایره نبودند) به دست آورند . بنابراین محاسبهٔ مساحت این شکلها یا لااقل یافتن راهی برای به دست آوردن مساحت این شکلها، مسأله ای بود در پیش روی دانشمندان و می بایست برای حل آن استراتژیی می یافتند . آنها طبیعی ترین کار را انجام دادند . این قبیل شکلها را با شکلهای شناخته شده پوشاندند . مساحت مستطیل معلوم است، پس ناحیه ای را که می خواهیم سطح آن را حساب کنیم با مستطیلها می پوشانیم، آنگاه مساحت این مستطیلها را جمع می کنیم . با این کار مساحت دقیق شکل مورد نظر به دست نمی آید بلکه تقریبی از مساحت را می یابیم . خوب! مستطیلها را ظریفتر می کنیم و بر تعداد آنها می افزاییم . این بار عدد دقیقتری می یابیم . به این ترتیب، اگر تعداد مستطیلها را به بی نهایت میل دهیم، امید داریم که عدد حاصل از جمع کردن مساحتهای آن مستطیلها، مساحت شکل مورد نظر شود .

این استراتژی که همان روش «افنا»ی ارشمیدس است، منشأ پیدایش نظریهٔ اندازه و همچنین انتگرال ریمان و لبگ شد .

با این حال، سادگی ایده، استفاده از ذخایر دانشی، داهیانه بودن و مفید بودن آن به روشنی مشهود است . مشخصهٔ دیگر آن، عبور از تقریب به دقت است که به رابطهٔ این دو با انتخاب استراتژی اشاره خواهیم کرد .

۴ : ذخایر دانشی و انتخاب استراتژی

ذخایر دانشی پایه هایی اند که ساختمان حل مسأله بر روی آنها ساخته شده است . شناخت این پایه ها که مرکب است از آنچه حل کنندهٔ مسأله می داند و طریقی یا طرقی که آنها را برای حل مسأله صدا می زند و به کار می گیرد، برای درک وقایعی که حین حل مسأله رخ می دهد، امری اساسی است . از میان آگاهی ها و ذخایر دانشی که به عملیات حل مسأله مربوط می شوند می توان به این موارد اشاره کرد:

۱ . آگاهی غیرصوری و شهودی دربارهٔ موضوع؛
۲ . واقعیتها، تعریفها و امثالهم؛
۳ . فرآیندهای الگوریتمی؛
۴ . فرآیندهای سرراست و همانندها؛
۵ . آگاهی از قوانین غور در آن موضوع، [۹] .

میزان این ذخایر دانشی در افراد مختلف و با سطوح علمی متفاوت در ریاضیات، متفاوت است و به تبع آن میزان مسأله بودن یک مسأله و همچنین انتخاب استراتژی برای حل مسأله برای افراد مختلف، متفاوت است . مثلاً سؤال: «بابک ۵ سیب دارد، ۲ تای آن را به دوستش می دهد، چند سیب برای او باقی می ماند؟» برای یک دانش آموز سال اول دبستان واقعاً یک مسأله است، به ویژه به این صورت، زیرا او با مفهوم تفریق آشنایی ندارد . اما استراتژی یابی برای حل این مسأله برای دانش آموز مذکور به شکلی که ما می دانیم معنی ندارد، زیرا او هیچ آگاهی و ذخیرهٔ دانشی غیر شهودی از مطالب ریاضی ندارد . در واقع، می خواهیم با طرح این قبیل مسائل او را با مفهوم تفریق آشنا سازیم و البته بهترین راه آموزش در این سطح استفاده از همان دانش شهودی کودک است : ۵ سیب به کلاس بیاورید و به او بدهید . بگویید ۲ تا از سیبها را به دوستش بدهد و سپس از او بخواهید، سیبهای باقیمانده را بشمرد . هر چه سطح معلومات او بالا می رود، ذخایر دانشی او نیز افزوده می گردد و لذا امکانات و ابزار بیشتری برای انتخاب استراتژی در حل یک مسأله برای او فراهم می گردد . یک ریاضیدان خبره از همهٔ انواع این ذخایر دانشی برخوردار است و می تواند در مواقع مناسب از یک نوع یا چند نوع از آنها به طورهمزمان برای انتخاب استراتژی بهره جوید .

در بندهای بعد رابطهٔ ذخایر دانشی را با انتخاب استراتژی به طور دقیقتر و با جزئیات بیشتر بررسی می کنیم . در این قسمت می خواهیم به تأثیر زمینهٔ ذخایر دانشی حل کنندهٔ مسأله بر انتخاب استراتژی اشاره کنیم . فرض کنیم دانش آموزی با حل معادلات درجهٔ اول یک مجهولی و دستگاه دو معادلهٔ درجهٔ اول با دو مجهول آشنا است . این آشنایی را صرفاً جبری فرض می کنیم، یعنی هیچ شهود هندسی از معادله یا دستگاه معادلات درجهٔ اول ندارد و تنها روشهای جبری حل و تعبیر آنها را می داند . حال فرض کنید می خواهیم او را با حل معادلات درجهٔ دوم یک مجهولی آشنا کنیم . معادله ای مثل:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

را در اختیار او قرار می دهیم و از او می خواهیم عددی را بیابد که در این معادله صدق می کند . فرض بر این است که هیچ آگاهی قبلی از اتحادها نیز ندارد . استراتژیی که برای حل این مسأله (معادله) برخواهد گزید، دید جبری دارد . یعنی اگر بخواهد از آنچه می داند استفاده کند باید این معادله را به نوعی به معادلهٔ درجهٔ اول تبدیل کند و این استراتژی ممکن است به کسرهای مسلسل منتهی شود بی آنکه خود دانش آموز متوجه شود که در حال پایه ریزی یک مبحث جالب ریاضی است .

حال فرض کنید این دانش آموز از مساحت مربع و مستطیل آگاه است و قدری تجربهٔ هندسی در حل مسائل ریاضی دارد و می تواند ازمعادله یا دستگاه معادلات درجهٔ اول تعبیر هندسی ارائه دهد . اگر از او بخواهیم معادلهٔ درجهٔ دوم

$x^2 - 10x - 39 = 0$ را حل کند هیچ بعید نیست که استراتـژیـی هندسی برای حل آن برگزینند. در شکل زیر مساحت شش ضلعی ABCDEF برابر ۳۹ است.

می خواهیم ضلع مربع سایه زده یعنی x را پیدا کنیم. مساحت کل مربع از یک طرف برابر است با:

$$39 + 25 = 64$$

و از یک طرف برابر است با $(x+5)^2$، بنابراین:

$$x + 5 = 8$$

یا $x = 3$. هرچند این بحث جنبهٔ تئوری دارد و هنوز به محک آزمایش گذاشته نشده است، لکن واقعیت دور از ذهنی نیسـت و بعید نیست که اگر شرایط به طور مناسب فراهم گـردد، چـنـیـن وضعی رخ دهد.

نگرشی به یک مسأله از دیدگاههای مختلف و با زمینـه هـای گوناگون منجر به خلق راه حل های (اثباتهای) متعددی برای یک مسأله یکسان در ریاضیات عالی شده است. معروفـتـریـن ایـن مسأله ها، قضیهٔ اساسی جبر است: اینکه هر معادلهٔ چند جمله ای در میدان اعداد مختلط دارای لااقل یک ریشه است و در واقع به طور کامل به عوامل خطی تجزیه می گردد. این قضیه اثباتهای متعدد در شاخه های گوناگون ریاضی دارد. حتی در خود آنالیز مختلط که به ظاهر زمینهٔ اصلی طرح این گونه مسائل است، چندین اثبـات مختلف برای آن وجود دارد. در اینجا بد نیست به سه نوع نگرش متفاوت به یک موجود واحد ریاضی اشاره کنیم.

تابع $f(z) = z^2$ را در نظر بگیرید. z یک عدد مختلط است. یک دید نسبت به این موجود این است که مشابه تابـع حـقـیـقـی $x \to x^2$، یک تابع داریم که متغیر مستقل آن مختلط است. این تابع هر عدد مختلط را می گیرد و به تـوان ۲ می رساند. از طرف دیگر می توان دید هندسی را برگزید: هر عدد مختلط متناظـر بـا یک زوج مرتب (x, y) است و هر زوج مرتب متناظر با یک نقطه یا بردار در صفحه است. بنابراین اگر عدد مختـلـط z را با زوج مرتب (y و x) یکی بگیریم، این تابع هر (x, y) را به زوج مرتب:

$$(x^2 - y^2, 2xy)$$

تبدیل می کند. درواقع، گویی در هر نقطهٔ (x, y) در صفحه، یک بردار با مختصات $(x^2 - y^2, 2xy)$ که مبدأ آن نقطهٔ (x, y) است رسم می کنیم. بدین ترتیب یک میدان برداری در صفحه حاصـل می شود. پس می توان این موجود را به جای تابع صـرف، یـک میدان برداری تلقی کرد. مـثـلاً تابع $g(z) = \frac{z}{|z|}$ که برای $z \neq 0$ تعریف شده است معرف یک میدان برداری است که در شکل زیر نشان داده شده است. این تابع، کل صفحهٔ مختلط جز نقطهٔ ۰ را به روی دایرهٔ واحد می نگارد: در واقع همین تعبیر است که مبنای توپولوژیک اثبات قضیهٔ اساسی جبر را تشکیل می دهد. یک تعبیر دیگر این است که تابع فوق را صرفاً نقطه ای از یک فضا بدانیم: فضای تابعهای مختلط روی میدان اعداد مختلط. به این ترتـیـب می توان برای آن مثلاً نرم تعریف کرد. تعبیر دیگری که جنبهٔ هندسی دارد این است که عدد مختلط z را به صورت قطبی نشان دهیم، مثلاً

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

در این صورت این تابع هر بردار به مرکز مبدأ را مـی گـیـرد، به اندازهٔ زاویهٔ θ آن را دوران می دهد و طول آن را نیز به تـوان ۲ می رساند و بردار دیگری به مرکز مبدأ به دست می دهد.

از این گذشته داشتن دیدگاههای متفاوت حتی در یک شاخه و بحث خاص ریاضی نیز می تواند مفید باشـد. امـروزه یـکـی از استانداردهای آموزش هندسه این است که در حل مسائل هندسـه بتوان از انواع ابزارهای هندسی استفاده کرد، مثلاً بتوان در حل مسائل هندسهٔ ترکیبی (اصل موضوعی) از هندسهٔ تحلیلی و تبدیلی استفاده نمود. تصور می رود که برای یک دانش آموز دبیرستان که خود مشغول مطالـعـهٔ لااقل دو نوع هنـدسـهٔ متفاوت اسـت، به کارگیری ابزارهای یکی برای حل مسائل دیـگـری، اجـازه ای مشروع است. یادم است که در سال چهارم دبیرستان یکی از مسائل هندسهٔ المپیاد ریاضی را که طراح، راه حل ترکیبی بـرای آن داده بود و واقعاً راه حل دور از ذهنی بود، از طریق هندسـهٔ تحلیلـی به صورتی کوتاه و بسیار ساده حل کردم. از خود می پرسیدم چرا نباید از ابزار به این قوت استفاده کرد، و چرا به جای ایجاد وحدت و آموزش تصور وحدت موضوعی در دانش آموزان، به افتراق آنها دامن زده و با این کار تواناییهای حل مسائل را از دانـش آمـوزان سلب می شود؟ امروزه تولید انبوه و روزافزون مطالب ریاضی این سؤال را برای کسی که از بیرون به ریاضیات می نگرد یا حتی برای اشخاصی که ریاضی می خوانند به طور طبیعی پیش می آورد که آیا قلمرو ریاضیات در حال تبدیل به یک «برج بابل» نیست که در آن نظامهای خود مختار بیشتر و بیشتر از یکدیگر جدا می شوند و این جدایی نه تنها در اهدافشان بلکه درروشها و حتی در زبانشان رخ می دهد [۳]؟ به این ترتیب آموزش دانش آموزان برای حل مسأله ای واحد از راههای گوناگون و با زمینه های مختلف، و ایجاد این توانایی در آنان که به یک مسأله از دیدگاههای مختلف بنگرند، می تواند سرآغازی برای محو اندیشهٔ افتراق ایده ها در ریاضیات باشد.

۵: انتخاب استراتژی با ذخایر دانشی

در بند قبل، میزان اثرگذاری ذخایر و زمیـنـهٔ دانشی را روی انتخاب استراتژی برای حل یک مسأله مورد بررسی قرار دادیم. در این بند هدف این است که نشان دهیم بعضـی از ایـن بـه ظـاهـر استراتژیها، در حقیقت جزو ذخایر دانشی هستند. ریـاضـیـات امروزی، پس از تعدادی اصول موضوع در هر مبحـث خـاص،

انبوهی است از تعریفها و قضیه هایی که براساس اصول منطقی و در محدودهٔ بنایی که روی اصول موضوع ساخته شده است، اثبات می گردند. بسیاری از قضیه ها و مسائل دربارهٔ یک یا چند مفهوم خاص هستند و لذا برای اثبات یا حل آنها درک آن مفاهیم لازم است. اما مفهوم از طریق «تعریف» معرفی می شود و بنابراین فهمیدن بخش مهمی از آن قضیه ها و مسأله ها به فهمیدن تعریف برمی گردد، و واقعاً شاید اثبات قضیه یا حل مسأله گاهی به دانستن چیزی بیش از یک یا چند تعریف نیازمند نباشد. مثلاً شما تعریف مشتق یک تابع را می دهید و مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را می خواهید.

اگر هیچ قاعدهٔ مشتق گیری را معرفی نکرده باشید، به دست آوردن مشتق این تابع چیزی نیست جز به کارگیری تعریف. این مسأله یک مسأله یافتنی است، حتی برای حل بعضی از مسائل ثابت کردنی نیز به چیزی بیش تعریف (ها) نیازمند نیستیم. مثلاً تعریف فضای توپولوژیک را می دهید و می خواهید ثابت کنید R همراه با مجموعه های باز ناشی از طول معمولی (قدرمطلق)، یک فضای توپولوژیک است. برای اثبات کافی است بدانیم فضای توپولوژیک چیست و مجموعهٔ باز با طول معمولی چه قیافه ای (تعریفی) دارد. بنابراین به کاربردن (صدا زدن) تعریف برای حل یک مسأله را نمی توان انتخاب استراتژی تلقی کرد بلکه جزء ذخایر دانشی شخص به حساب می آید.

در مورد فرآیندهای الگوریتمی و سرراست نیز وضع به همین ترتیب است. استفاده از مشتق در حل مسائل ماکزیمم ـ می نیمم یک فرآیند سر راست است. هرچند ممکن است بتوان مسأله ای را که صورت ظاهری ماکزیمم یا می نیمم دارد، از راههای دیگری غیر از مشتق گیری حل کرد، لکن فکر استفاده از مشتق، برای حل این قبیل مسائل در وهلهٔ اول یا در مراحل بعدی به اندیشهٔ هر کسی که ذخیرهٔ دانشی این موضوع را داشته باشد می تواند خطور کند. نمونهٔ خوب آن مسأله ای است که شونفیلد در نشستهای حل مسأله با دانش آموزان به آنها داده است: مثلثی محاط در دایره که مساحت آن ماکزیمم باشد چیست؟ البته فرآیندها یا روشهای سرراست می توانند کاملاً پیچیده و غیرالگوریتمی باشند. حل یک معادلهٔ درجهٔ دوم یا مثلاً دستگاه معادلات خطی از طریق حذف گاوس راه حل های کاملاً الگوریتمی هستند ولی در یک مسأله ماکزیمم ـ می نیمم، نمایش مناسب مسأله در این قالب، انتخاب متغیر مستقل، به دست آوردن فرمولی که متغیر وابسته را بر حسب مستقل بیان کند، و غیره کارهای واقعاً نابدیهی هستند [۹]. در هر حال اینها مهارتهای تاکتیکی اند نه استراتژی.

تفاوت تصمیم گیری تاکتیکی با استراتژی در این است که، تصمیم گیری ناشی از استراتژی، کاری است که حین حل مسأله صورت می گیرد از قبیل اینکه چه نقشه ای باید ریخت، چه کارهایی را باید دنبال کرد و کدامیک را باید رها ساخت و غیره. در فرآیندهای سرراست این مشکلات پیش نمی آیند. حل کنندهٔ مسأله مطمئن است که راه او صحیح است و مشکل او این است که آیا راه را درست طی کرده است یا نه [۹]. هرچند به کارگیری روشهای الگوریتمی و سرراست تا اندازه ای شایستگی ریاضی می خواهد لکن نمی توان آنها را نیز جزئی از مقولهٔ انتخاب استراتژی دانست، آنها نیز به دست ذخایر دانشی سپرده می شوند.

حتی در مورد بعضی از استراتژیهایی که به حوزهٔ خاصی مربوط می شوند و البته روشهای الگوریتمی یا سر راست هم نیستند ممکن است وضعیت مشابهی رخ دهد. در کلاسهای درس هندسه به دانش آموزان می آموزند که رسم کردن خطوط اضافی به نحو مناسب در حل بعضی مسائل هندسی یا آنهایی که در قالب یک مسأله هندسه درآمده اندمفید است. در این مورد، انجام این کار توسط دانش آموز، ناشی از آموزشی است که در این موضوع دیده است و منعکس کنندهٔ آن آموزش است و یک استراتژی کلی برای حل مسأله به شمار نمی آید. وقتی یک تکنیک خیلی به حوزه خاصی مربوط می شود و به عنوان یک روش استاندارد صدا زده می شود و به کار می رود، انجام این کار واقعیتی است مربوط به ذخایر دانشی نه انتخاب استراتژی [۹].

واقعیت این است که بسیاری از مثالهای نقض و ارائه آنها حین بحث در یک موضوع خاص یا حل یک مسألهٔ مثال نقض در یک موضوع خاص وضعیتی مشابه فوق دارند. البته یافتن مثال نقض در موضوعهایی که تازه شکل گرفته اند و هنوز آگاهی اندکی دربارهٔ محتوای آنها موجود است، ممکن است خیلی مشکل باشد ولی بعضی مثالهای نقض را می توان در جاهای مختلف و برای مقاصد گوناگون به کار برد. مثلاً در بحث همگرایی یکنواخت و ارتباط آن با انتگرال گیری و مشتق گیری مثالهای نقض جالبی وجود دارد که خاصیتهای متعددی پیدا می کنند طوری که یک مثال می تواند در چندین مورد به کار رود.

۶: استراتژی، شهود، دقت، ریاضیات صوری[۲]

آیا بین دقت و انتخاب استراتژی، رابطه ای وجود دارد؟ پاسخ دادن به این سؤال مستلزم این است که معنی دقت را بدانیم. دقت یعنی برای هر کاری که انجام می دهیم دلیل بیاوریم. دلیل آوردن یعنی به طور منطقی نشان دهیم که آن کار ما درست است و این محتاج به کارگیری ابزارها و استراتژیهای منطقی است. پس به منطق، یعنی زبان ریاضیات، رسیدیم. با این تعریف هر کار غیرمنطقی، خالی از دقت می شود ولی اگر عملی دقیق نبود به این معنی نیست که آن کار منطقی نیست. گویی نخستین کار در جهت انجام کار دقیق ریاضی آشنایی با منطق و استراتژیهای منطقی است. ولی آیا بدون فراگیری دقت نمی توان هیچ پیشرفتی در کار ریاضی داشت؟ این دقت در واقع معنای امروزی دارد. ریاضیدانان قرون هفدهم و هیجدهم با دقتی که ما می شناسیم، آشنایی نداشتند و

درکی که ما امروزه از اثبات داریم در اندیشهٔ آنها وجود نداشت . نگاهی به کارهای ریاضیدانان بزرگ آن عصر مؤیّد این مطلب است . در میان آنها کارهای اویلر از همه نمایان تر و شایان توجه و بررسی است . برای آنکه تصوری از کوشش ریاضی در قرن هیجدهم به دست آوریم ، ابتدا به استنتاج تابناکی که امروزه کاملاً مشهور است نگاهی می افکنیم و شیوهٔ اویلر را در معرفی سری نامتناهی کسینوس یک زاویه بررسی می کنیم . او از اتحاد :

$$(\cos z + i\sin z)^n = \cos nz + i\sin nz$$

شروع کرد . سپس سمت چپ آن را از فرمول دو جمله ای بسط داد و قسمت حقیقی آن بسط را برابر $\cos nz$ قرار داد . نتیجهٔ حاصل عبارت بود از :

$$\cos nz = (\cos z)^n - \frac{n(n-1)}{2!}(\cos z)^{n-2}(\sin z)^2$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}(\cos z)^{n-4}(\sin z)^4 - \dots$$

حال فرض کنیم z کمانی بی نهایت کوچک و n بی نهایت بزرگ باشد ، در این صورت :

$$\cos z = 1, \sin z = z, n(n-1) = n^2, \dots$$

و فرمول :

$$\cos nz = 1 - \frac{n^2z^2}{2!} + \frac{n^4z^4}{4!} - \dots$$

به دست می آید . سپس اویلر استنتاج کرد که چون n خیلی بزرگ است و z خیلی کوچک ، $v = nz$ مقداری متناهی است و لذا :

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - \dots$$

که فرمول آشنای بسط تیلر کسینوس است ، [۵] .

در این به اصطلاح استدلال ، عباراتی مثل «z کمانی بی نهایت کوچک است» و «$v = nz$ مقداری متناهی است» اصلاً دقت ندارند . با این حال اویلر به راحتی آنها را به کار می برد و نتیجه ای درست به دست می آورد . یا مثلاً نگاهی به کارهایی که اویلر ، لایب نیتس ، برنولی ها و دیگران روی تابع زتا انجام دادند ، بیندازید ، [۱] ؛ واقعاً کارهای عجیب خالی از دقتی انجام شده است که مایهٔ شگفتی خواننده می شود ، به ویژه وقتی ملاحظه می شود که نتایج همگی درست اند . گویی آنها اصلاً نمی دانستند اثبات و دقت چه معنایی دارد و هر بلایی که می خواستند بر سر آن موجودات ریاضی بینوا می آوردند . مثلاً بلاهایی که بر سر سری هندسی می آوردند از همه بدتر است . اویلر می نوشت :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x} \quad |x|<1$$

و بدون هیچ اکراهی قرار می داد $x = -1$ و به دست می آورد :

$$1-1+1-1+\dots = \frac{1}{2}$$

عملگر $x(d/dx)$ را روی $f(x)$ اثر می داد و آنگاه مجدداً قرار می داد $x = -1$ و نتیجه می گرفت :

$$1-2+3-4+\dots = \frac{1}{4}$$

دوباره عملگر را به کار می برد و این بار به ازای $x = -1$ به دست می آورد [۱] :

$$1-2^2+3^2-4^2+\dots = 0$$

تاریخچه و کارهایی که اویلر روی تابع گاما انجام داده است بسیار جالب و خواندنی است ولی در جای جای آن ، اعمال عجیب غیرمجاز و بدون دقت به چشم می خورند [۴] . ولی هرچه به سمت قرن نوزدهم پیش می رویم بر دقت به معنای امروزی افزوده می گردد . تعاریف دقیق ظاهر می شوند ، مطالب در قالب قضیه ها درمی آیند و با استدلال منطقی استوار ، ثابت می شوند . دلایل متعددی برای این گرایش به دقت داده شده است [۵] . این دلایل هرچه باشند یک نتیجهٔ مهم این گرایش می تواند پیشرفت در زمینهٔ نظریهٔ حل مسأله باشد . افزایش دقت یا بهتر بگوییم اثبات دقیق مطالب ، نیاز به استراتژی و انتخاب آن را افزایش می دهد . مثلاً اویلر بدون هیچ دغدغه ای از دو طرف سری

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

مشتق می گیرد ، بدون اینکه از خود بپرسد آیا سری حاصل از مشتق گیری جمله به جمله از سری فوق ، برابر با مشتق طرف راست می شود یا نه . یا یک مورد خیلی بدتر : ما می دانیم که اگر چند جمله ای درجهٔ nی ، مانند $P(x)$ دارای n ریشه ، مثلاً $a_1, a_2, \dots, a_n$ ، باشد و ضریب جملهٔ n ـ ام $P(x)$ را نیز ۱ بگیریم ، آنگاه

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$$

یعنی $P(x)$ به طور کامل به عوامل خطی تجزیه می گردد . اویلر با سری نامتناهی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

نیز همین رفتار را می کند . یعنی فرض می کند مثلاً ریشه های آن $c_1, c_2, \dots$ هستند و با فرض $a_0 = 1$ ، آن را به صورت

$f(x)=(1-\frac{x}{c_1})(1-\frac{x}{c_2})(1-\frac{x}{c_3})\ldots$ که یک حاصل ضرب نامتناهی است تجزیه می کند و از خود نمی پرسد که آیا اصلاً این حاصلضرب نامتناهی همگرا هست یا نه واگر همگرا است به $f(x)$ همگرا می شود؟ پاسخ به این سؤالها که هرکدام یک مسأله است، محتاج استراتژی یابی است و این سؤالها نیز صرفاً به واسطهٔ دقت بخشیدن به اعمالی که از نظر شهودی درست اند و نتیجهٔ درستی را نیز در بردارند پیش می آیند. یافتن استراتژی برای دقیق کردن بحث در استراتژی تاریخی که در ابتدای سخن به آن اشاره کردیم به چشم می خورد. پوشاندن ناحیه با مستطیلها و جمع کردن مساحتهای آنها تقریبی از مساحت آن ناحیه را به دست می دهد و ظریفتر کردن مستطیلها و میل دادن تعداد آنها به بی نهایت استراتژیی است برای یافتن مقدار دقیق مساحت، یا به تعبیری حل مسأله. دقت بخشیدن به اعمالی که به ظاهر درست اند، و درنتیجه تلاش برای یافتن استراتژی برای حل مسائلی که در این زمینه ها پیش می آیند، منشأ پیدایش قضایای متعددی در ریاضیات بوده است. قضیه هایی که به تعویض جای حد و اعمال دیگری از قبیل مشتق گیری و انتگرال گیری مربوط می شوند، از این دسته قضیه ها هستند. قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ در آنالیز حقیقی نمونهٔ بارزی است. این قضیه شرط کافی برای تعویض جای حد و انتگرال در انتگرال گیری از سریهای تابعی را به دست می دهد.

با همهٔ این حرفها کار صوری و شهودی خالی از دقت در پیشرفت ریاضیات بسیار مؤثر است. انجام اعمال دقیق برای حل یک مسأله از همان ابتدای کار ممکن است از پیشرفت کار و داشتن درک صحیح از مسأله جلوگیری کند. بنابراین، آموزش ریاضیات به صورت شهودی و نادقیق و سپس مجهز ساختن فراگیر به ابزارهای دقت بخشیدن و سرانجام بیان دقیق همان مطالب در رشد آموزش و نیز تفکر ریاضی بسیار مؤثر است. این کاری است که من اسم آن را **گذر از دید اویلری** گذاشته ام. یکی از استراتژیهای راهیابانهٔ پولیا این است: به نتیجه نگاه کنید. شاید اگر دانش آموز یا متعلم با انجام اعمال نادقیق نتیجه را به دست آورد و ببیند، بتواند راه اثبات دقیق مطلب را نیز بیابد. البته باید توجه کرد که این کار باید به صورت سازمان یافته انجام شود. کسی می گفت: گرمکن چیزی است که کودک وقتی می پوشد که والدینش احساس سرما می کنند! لکن در ریاضیات اثبات نباید چیزی باشد که شاگردان زمانی مجبورند به آن گوش فرا دهند که معلم آنها دربارهٔ صحت قضیه ای تردید می کند [۲]. باید تفاوت ریاضیات صوری و استدلال دقیق ریاضی و نیاز به استراتژی یابی برای دقت بخشیدن به مطالب صوری کاملاً روشن گردد.

« به علت فشردگی مطالب، قسمت دوم این مقاله را در شماره آینده مطالعه فرمایید. »

اخبار

درسومین کنگرهٔ بین المللی آموزش ریاضی که در سال ۱۹۷۶ در کارلزروهٔ آلمان برگزار گردید، گروه بین المللی روانشناسی آموزش ریاضی اعلام موجودیت کرد و از آن پس، به عنوان یکی از گروههای این کنگره، به طور مستقل، هرساله برگزارکنندهٔ یک کنفرانس بین المللی بوده است. اولین رئیس این گروه افرایم فیشباین بود و پس از او به ترتیب ریچارد اسکمپ، جراد ورناد، کوین کولیس، پییر لانشر، نیکولا بالاچف، کاتلن هارت و کارولین کیرن بوده اند. در سال ۱۹۹۴، در هجدهمین کنفرانس بین المللی روانشناسی آموزش ریاضی در لیسبون پرتغال، استفن لرمن از انگلستان با اکثریت آراء، ریاست فعلی این گروه را عهده دار شد.

هدفهای اصلی این گروه عبارتند از:

الف) ارتقای تماسهای بین المللی و تبادل اطّلاعات علمی درروانشناسی آموزش ریاضی؛

ب) انگیزش و ارتقای پژوهشهای بین رشته ای در زمینهٔ آموزش ریاضی با مشارکت روانشناسها، ریاضیدانها و معلمان ریاضی؛

پ) گسترش درک و فهم بهتر و عمیق تر جنبه های روانشناسانهٔ تدریس و یادگیری ریاضی و به کارگیری یافته های پژوهشی دراین زمینه.

بیست و یکمین کنفرانس بین المللی روانشناسی آموزش ریاضی در تابستان ۱۹۷۶ در فنلاند برگزار خواهد شد. امید است که آموزشگران و معلمان ریاضی ایران حضور فعّالی دراین کنفرانس داشته باشند. آگهی تقاضای شرکت و چگونگی ارایهٔ مقاله در شمارهٔ بعدی مجله منتشر خواهد شد.

PME 20

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
تعلیم و تعلم عبادت است

قابل توجه دبیران محترم و علاقه‌مندان
به اشتراک مجلات رشد تخصصی

دبیران محترم و سایر علاقه‌مندان می‌توانند برای اشتراک هرکدام از مجلات رشد آموزش ریاضی ـ رشد آموزش شیمی ـ رشد آموزش جغرافیا ـ رشد آموزش زیست‌شناسی ـ رشد آموزش ادب فارسی ـ رشد آموزش معارف ـ رشد آموزش زبان ـ رشد آموزش فیزیک و رشد آموزش راهنمایی تحصیلی که از سوی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش وپرورش انتشار می‌یابد. فرم زیررا تکمیل نموده وبه آدرس تهران ، صندوق پستی ۱۶۵۹۵/۱۱۱، مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی، تلفن : ۷۳۳۵۱۱۰ ارسال دارند.

اینجانب   با ارسال اصل رسید بانکی
شماره   به مبلغ ۴۵۰۰ ریال که به حساب شماره
۲۵۰۰ بانک صادرات شعبه ۳۰۵۷ جاده دماوند به نام شرکت افست
واریز نموده‌ام، متقاضی اشتراک سه شماره از مجله رشد آموزش
مربوط به سال‌تحصیلی ۷۶ ــ ۷۵ می‌باشم.
لطفاً مجله را به آدرس شهرستان   خیابان
کوچه   پلاک   کدپستی   ارسال فرمایید.
※ لطفاً برای هر مجله تقاضای جداگانه ارسال دارید.

مرکز توزیع انتشارات کمک آموزشی

Roshd رشد آموزش ریاضی
Mathematics Education Journal

Vol. 12- No. 46 - 1996

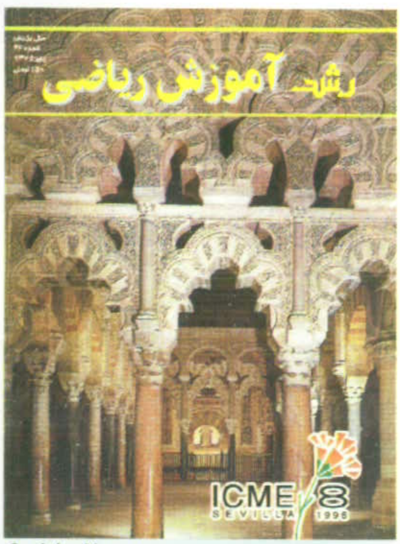
P.O.Box 1587

Mathematic Department

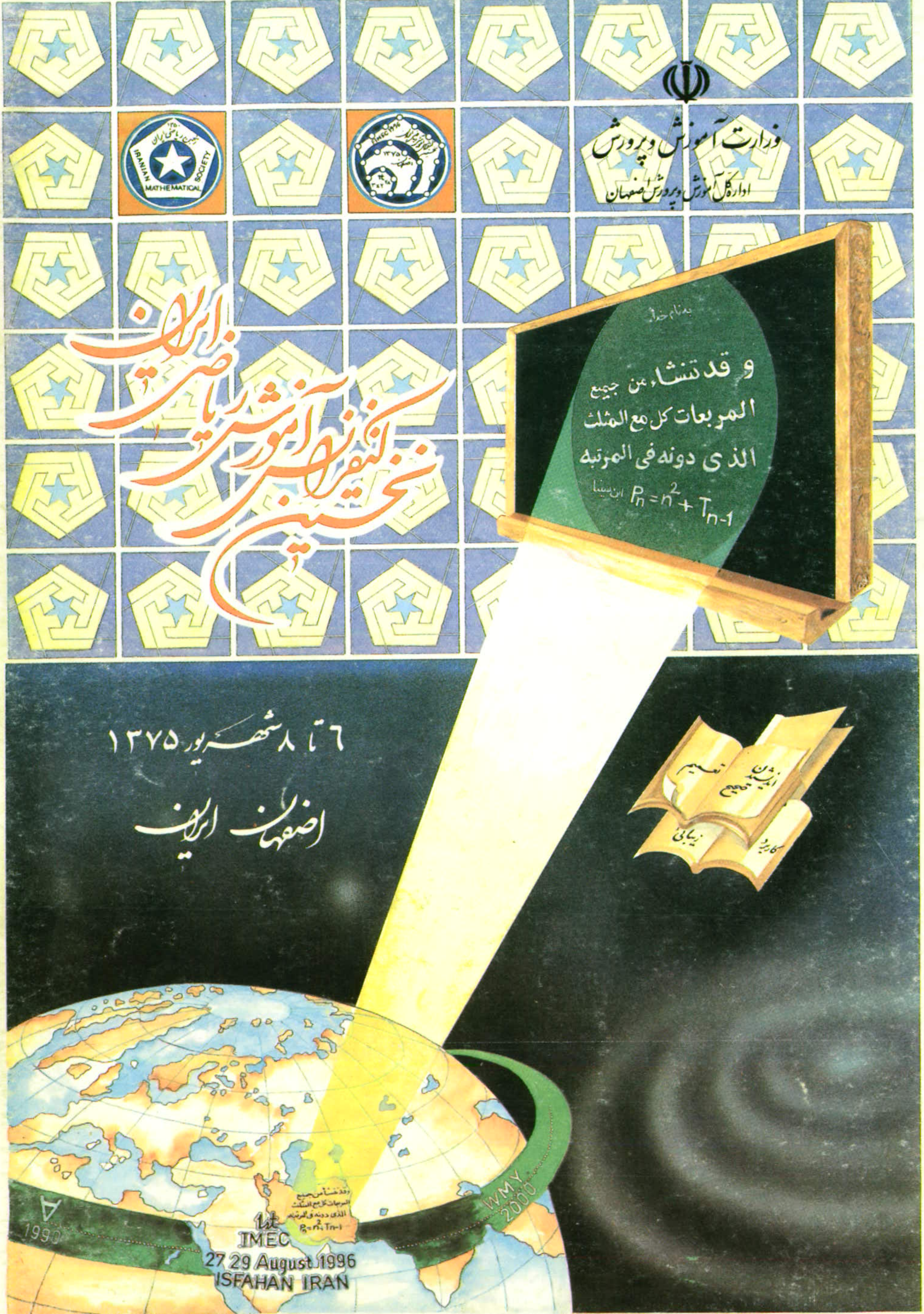
Iranshahr Shomali,

Building No.4

In The Name of Allah



Cordoba Mosque



وزارت آموزش و پرورش
اداره کل آموزش و پرورش اصفهان
IRANIAN MATHEMATICAL SOCIETY
نخستین کنفرانس آموزش ریاضی ایران
بنام خدا
و قد تنشأ من جميع
المربعات كل مع المثلث
الذی دونه فی المرتبه
ابن سینا $P_n = n^2 + T_{n-1}$
٦ تا ٨ شهریور ١٣٧٥
اصفهان ایران
تعمیم
زیبایی
کاربرد
1990
WMY 2000
1st
IMEC
27 29 August 1996
ISFAHAN IRAN