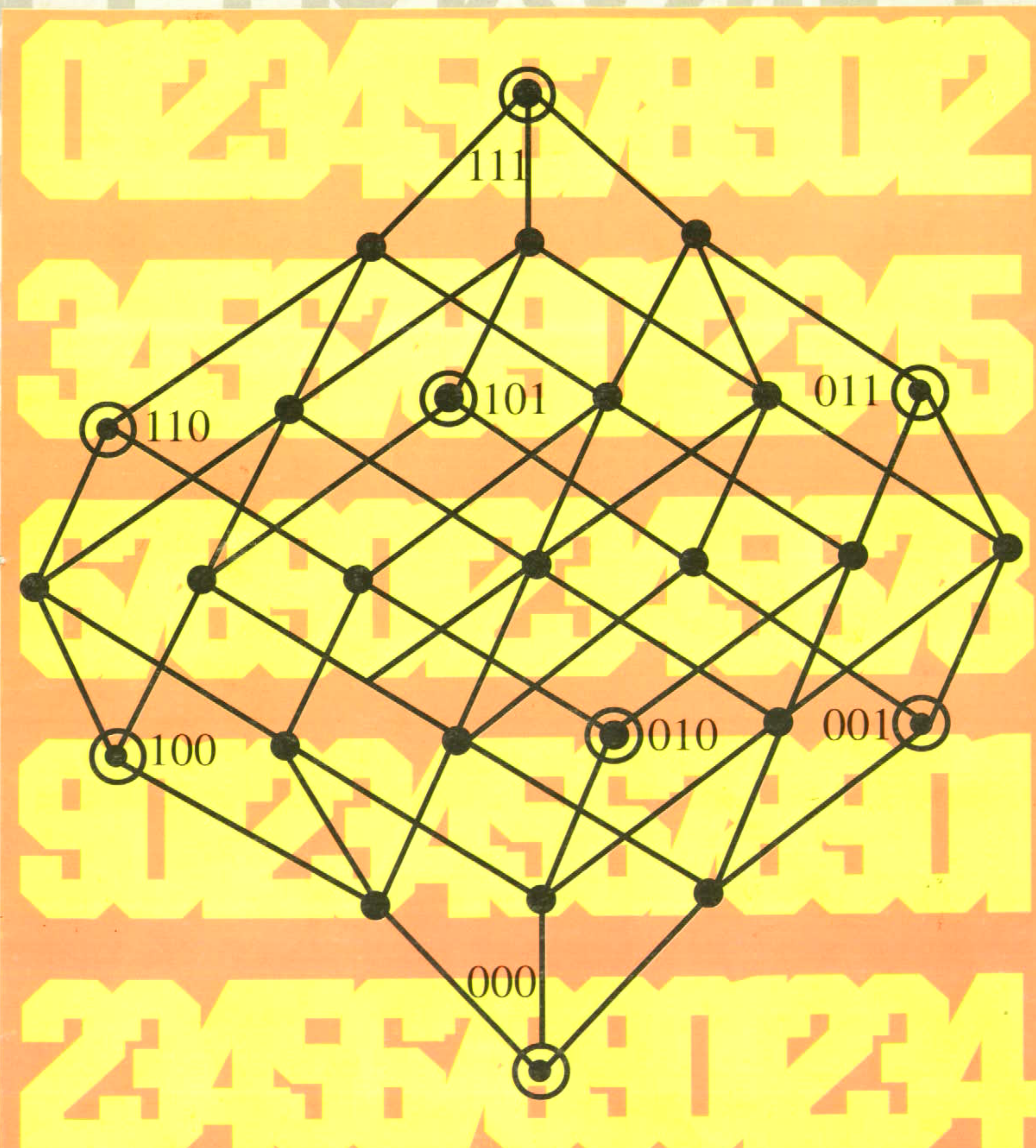
رشد

آموزش ریاضی



سیزدهم

سال ~~دهم~~ - بهار ۱۳۷۵ - شمارهٔ ۴۵ - بهاء ۱۰۰ تومان

رشد ۴۵ آموزش ریاضی

سال دهم ــ بهار ۱۳۷۵ ــ شمارهٔ مسلسل ۴۵
نشریه گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش
تلفن ۴ــ ۸۳۹۲۶۲ داخلی ۳۰۳
مدیر مسئول: محمدمسعود ابوطالبی
سردبیر: دکتر علیرضا مدقالچی
مدیر داخلی: میرزا جلیلی
تولید: دفتر چاپ وتوزیع کتابهای درسی
صفحه‌آرا: طرفه سهائی
رسام: محمدرضا طهماسب‌پور
طراح جلد: فرید فرخنده‌کیش
ناظر چاپ: محمد کشمیری

مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، هرسال سه شماره به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. برای ارتقای کیفی آن، نظرات ارزندهٔ خود را به صندوق پستی ۳۶۳ــ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمایید.

فهرست

نظام آموزش جدید و آزمون سراسری

دکتر جواد لألی
عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

در سالهای آخر دبیرستان ذهن اکثر دانش آموزان و بیشتر دبیران متوجّه تحولات آموزشی کشور در خصوص قوانین و روشهای ورود به دانشگاههاست. کمتر دبیری است که در طول سال تحصیلی از تحولات و مسائل موجود در این زمینه سخن نگوید و مطلبی را در کلاس درس مطرح ننماید. برگزاری کنکور یکی از مسائل مهم آموزش کشور است که، با احتساب خانواده داوطلبان و مسئولین و دست اندرکاران مؤسسات آموزشی و آزمون سراسری، توجه میلیونها نفر از افراد جامعه را به خود معطوف می دارد. بنابراین، بحث و بررسی و تجزیه و تحلیل این مسئله مورد توجه و علاقه بسیاری از افراد جامعه، بخصوص دبیران ودانش آموزان، خواهد بود.

با توجه به رسالت مجلّه، در هر شماره، سعی می کنیم تا تازه ترین اخبار را در این زمینه گردآوری کنیم؛ به بحث در آموزش ریاضی در قالب تست کنکور بپردازیم؛ و جهت خودآزمایی، تعدادی تست کنکور با راه حل ارائه دهیم تا تمرین مناسبی برای داوطلبان و علاقه مندان به شرکت در آزمون سراسری باشد.

اولین سؤالی که در اینجا می توان مطرح کرد این است که چگونه می توان کنکور را با روش کنونی حذف نمود و پذیرش دانشجو را براساس نظام دیگری پایه گذاری کرد. با نگاه اجمالی به تعداد داوطلبان ورود به دانشگاه ها متوجه می شویم که هر ساله حدود ۱۰ الی ۲۰ درصد به تعداد آنها افزوده می گردد. در آزمون سراسری سال ۷۴[1] حدود ۱/۲۸۰/۰۰۰ نفر در چهار گروه آموزشی شرکت داشته اند که از این عده حدود ۴۲ درصد زن و ۵۸ درصد مرد بوده اند. در سال ۷۳[2]، تعداد داوطلبان حدود یک میلیون و یک صد و ده هزار نفر بوده است که شامل ۴۱ درصد زن و ۵۹ درصد مرد بوده است. این آمار نشان می دهد که در سالهای اخیر درصد شرکت کنندگان مرد و زن تقریباً یکسان و افزایش داوطلب سال ۷۴ نسبت به سال ۷۳ حدود ۱۶ درصد بوده است. اگر با یک روش تحقیقی به این نوع مسایل بنگریم می توانیم حدود شرکت کنندگان را، در پنج سال آینده، به طور متوسط هر سال ۲ میلیون نفر تخمین بزنیم. سازمان سنجش تعداد شرکت کنندگان در سال ۷۵ را قریب به یک میلیون وسیصد هزار داوطلب تخمین زده است که از این عده حدود شصت هزار نفر فارغ التحصیلان نظام جدید متوسطه خواهند بود[3]. برگزاری کنکور در سالهای آینده معضلات اجتماعی فراوانی به همراه خواهد داشت و اگر مسئولین آموزش کشور، جهت تقلیل داوطلبان، روش دیگری را جایگزین نظام آزمون کنونی نکنند، نظام آموزش کشور از پدیده های تخریبی آن در امان نخواهد بود. بنابراین، نحوهٔ پذیرش دانشجو باید تغییر یابد، و جهت بهبود انتخاب دانشجو به دنبال روشهای دیگر و فکر جدیدی باید بود تا پدیده هایی تخریبی که از معضلات کنکور ناشی می گردد به حداقل ممکن تقلیل یابد.

نظام آموزش جدید و آزمون سراسری

اولین طرحی که در ماههای اخیر جهت حذف کنکور مطرح گردید، طرحی بود که به وسیله دانشگاه پیام نور ارائه گردید. طبق این طرح که «به دوره های فراگیر دانشگاه پیام نور» موسوم گردیده است کلیه فارغ التحصیلان دیپلم نظام قدیم و نظام جدید، با شرط داشتن حد نصاب معدل کتبی (دیپلم های ریاضی یا ریاضی فیزیک ۱۲/۸ ؛ طبیعی یا علوم تجربی ۱۳/۸ ؛ و رشته های دیگر ۱۴/۸) می توانند بدون کنکور در دانشگاه پیام نور ادامه تحصیل دهند. روش اجرای طرح بدین صورت است که در اولین نیمسال تحصیل دانشجو موظف است در پنج درس که توسط دانشگاه اعلام می شود ثبت نام کند. در پایان اولین نیمسال دانشجو در امتحان این پنج درس شرکت می کند که در هر یک باید حداقل نمره ۱۰ از ۲۰ را کسب نماید و حداقل معدل او ۱۲ از ۲۰ باشد. در صورت قبولی، این دانشجو به عنوان دانشجوی رسمی تلقّی می شود[۴] و می تواند به تحصیل ادامه دهد.

دو سال قبل وزیر آموزش و پرورش در مراسم افتتاحیه یکی از دبیرستانهای تهران اعلام کرد که سیستم فعلی پذیرش کنکور از سوی وزارتخانه های فرهنگ و آموزش عالی و وزارت آموزش و پرورش تحت بررسی است. طرحهای پیشنهادی شامل روشهایی است که نقص های پذیرش دانشجو را براساس نظام کنونی برطرف می کند[۵]. بنابر ادعای مقامات رسمی کشور، جلسات متعددی بین کارشناسان وزارت آموزش و پرورش با مسئولین سازمان سنجش آموزش کشور تشکیل گردیده است. ماحصل این جلسات، در بخشنامه ای که از سوی مقامات مسئول صادر گردیده منعکس است. در این بخشنامه متذکر می شود، «در سال آینده آزمون سراسری همانند سالهای گذشته در دو مرحله انجام می پذیرد» کلیات طرح پذیرش دانشجو با توجه به نظام جدید آموزشی دورهٔ متوسطه برای سال ۱۳۷۵ به شرح زیر است کلیه فارغ التحصیلان دورهٔ پیش دانشگاهی و نیز کلیه فارغ التحصیلان نظام قدیم با توجه به ضوابطی می توانند داوطلب ورود به مؤسسات آموزش عالی باشند.

بنابراین، داوطلبان نظام جدید و قدیم جهت ورود به دانشگاه باید در آزمونهای سراسری سال ۱۳۷۵ که متشکل از آزمونهای مرحله اول و دوم است شرکت کنند. جهت اطلاع خوانندگان و شرکت کنندگان سال آینده کلیات این طرح را عیناً از مجله راه دانشگاه، شماره ۲۳، نقل می کنیم.

کلیات طرح

۱ ـ کلیه فارغ التحصیلان دورهٔ پیش دانشگاهی و نیز کلیه فارغ التحصیلان نظام قدیم با توجه به ضوابط مربوط، می توانند داوطلب ورود به مؤسسات آموزش عالی شوند.

۲ ـ کلیهٔ داوطلبان (اعم از نظام قدیم یا جدید) باید در کنکور سراسری که متشکل از آزمونهای مرحلهٔ اوّل و دوم است شرکت نمایند.

نحوهٔ اجرای طرح

۳ ـ آزمون در دو مرحله اجرا می شود.

۱ ـ ۳ ـ آزمون مرحله اوّل:

۱ ـ ۱ ـ ۳ ـ داوطلبان نظام جدید (دانش آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی) امتحانی است مبتنی بر مواد دروس عمومی دورهٔ پیش دانشگاهی و سه سال متوسطه و دروس اختصاصی دوره یکساله پیش دانشگاهی.

تبصره ۱ : حدود هفتاد و پنج درصد سؤالات دروس عمومی از برنامهٔ دروس عمومی دورهٔ پیش دانشگاهی طرح می شود.

تبصره ۲ : سؤالات درس روانشناسی در مرحله اوّل از کتاب روانشناسی نیمسال دوم سال سوم طرح خواهد شد.

۲ ـ ۱ ـ ۳ ـ داوطلبان نظام قدیم (دیپلمه ها و دانش آموزان سال آخر دورهٔ متوسطه)، امتحانی است مبتنی بر مواد دروس عمومی چهار سال دبیرستان و دروس اختصاصی سال چهارم دبیرستان.

نظام آموزش جدید و آزمون سراسری

تبصره ۱ : آزمون مرحله اوّل برای داوطلبان نظام جدید در نیمه دوم خرداد ماه، سال ۷۵ برگزار می شود.

تبصره ۲ : نتیجه آزمون مرحله اوّل، ملاک شرکت در آزمون مرحله دوم می باشد.

تبصره ۳ : مواد امتحانی مرحله اول آزمون برای دو نظام جدید و قدیم در جداول یک و سه ضمیمه ارائه شده است.

۲ ـ ۳ ـ آزمون مرحله دوم

۱ ـ ۲ ـ ۳ ـ داوطلبان نظام جدید، براساس دروس اختصاصی چهار ساله نظام جدید آموزش متوسطه برگزار می شود.

۲ ـ ۲ ـ ۳ ـ داوطلبان نظام قدیم از دروس اختصاصی چهار ساله دبیرستان خواهد بود.

تبصره ۱ : آزمون مرحله دوم برای هر دو گروه از داوطلبان در تابستان همان سال برگزار می شود.

تبصره ۲ : دانش آموزان نظام جدید به شرطی در گزینش نهایی شرکت داده خواهند شد که کلیه واحدهای درسی دوره پیش دانشگاهی را حداکثر تا ۲۰ مرداد ماه با موفقیت گذرانده باشند.

تبصره ۳ : مواد امتحانی مرحله دوم آزمون برای دو نظام قدیم و جدید در جداول دو و چهار ضمیمه ارائه شده است.

تبصره ۴ : داوطلبان هر نظام در صورت تمایل می توانند در آزمون نظام دیگر شرکت نمایند.

تبصره ۵ : تعداد مواد امتحانی در آزمونهای مرحله اوّل و دوم برای دو نظام یکسان و ضرایب دروس نیز همانند است.

تبصره ۶ : نمره هر درس و نیز نمره کل داوطلبان دو نظام تراز خواهد شد و گزینش نهایی براساس نمره تراز شده صورت می پذیرد.

تبصره ۷ : نمره کل هر داوطلب مرکب از نمرات آزمونهای مرحله اوّل و دوم با ضرایب مربوط خواهد بود.

تبصره ۸ : گزینش داوطلبان نظام جدید و قدیم، براساس امتیازات مکتسبه علمی و با توجه به ضوابط و مقررات مربوط صورت می پذیرد.

تبصره ۹ : منطقه بندی داوطلبان نظام جدید و استفاده از سهمیه مناطق، هماهنگ با نوع توزیع دبیرستانهای نظام جدید در سطح کشور و سازگار با منطقه بندی داوطلبان نظام قدیم صورت می پذیرد.

تبصره ـ سهمیه بندی برای نظام جدید براساس محل اخذ مدرک تحصیلی سالهای اوّل، دوم و سوم دبیرستان خواهد بود.

تبصره ۱۰ : برگزاری آزمونهای مرحله اوّل و دوم، گزینش نهایی و معرفی پذیرفته شدگان به مراکز آموزش عالی، توسط سازمان سنجش آموزش کشور انجام می شود.

آزمون مرحله اوّل نظام قدیم ـ جدول شماره ۱				
دروس عمومی نظام قدیم ـ کتب چهار سال دبیرستان				
۱	زبان و ادبیات فارسی			
۲	زبان عربی			
۳	فرهنگ و معارف اسلامی			
۴	زبان خارجی[۴]			
دروس اختصاصی نظام قدیم سال چهار دبیرستان				
	گروه ریاضی ـ فنی	گروه تجربی	گروه انسانی	گروه هنر
۵	ریاضیات	ریاضیات	تاریخ	درک عمومی هنر
۶	فیزیک مکانیک	زیست شناسی	جغرافیا	درک عمومی[۲]
۷	شیمی	فیزیک	جامعه شناسی	ـ
۸	دروس فنی	شیمی	فلسفه	ـ
۹	ـ	دروس فنی[۳]	روانشناسی	
۱۰	ـ	ـ	حسابداری[۵]	

آزمون مرحلهٔ دوم نظام قدیم ـ جدول شماره ۲				
دروس اختصاصی ـ نظام قدیم ـ (چهار سال آخر دبیرستان)				
	گروه ریاضی و فنی	گروه تجربی	گروه انسانی	گروه هنر[۱]
۱	ریاضیات	زمین شناسی	ریاضیات	ترسیم فنی
۲	فیزیک ـ مکانیک	ریاضیات	اقتصاد	خلاقیت تصویری
۳	شیمی	زیست شناسی	زبان و ادبیات فارسی	خلاقیت نمایشی
۴	دروس فنی	فیزیک	زبان عربی	خلاقیت موسیقی
۵	ـ	شیمی	تاریخ	خواص مواد
۶	ـ	دروس فنی[۳]	جغرافیا	
۷	ـ	ـ	جامعه شناسی	
۸	ـ	ـ	فلسفه و منطق	
۹			حسابداری[۵]	
۱۰				

نظام آموزش جدید و آزمون سراسری

آزمون مرحله اوّل نظام جدید ـ جدول شماره ۳				
دروس عمومی نظام جدید				
۱	زبان و ادبیات فارسی (سه سال آخر دبیرستان+ دورهٔ پیش دانشگاهی)			
۲	زبان عربی (سه سال آخر دبیرستان)			
۳	فرهنگ و معارف اسلامی (سه سال آخر + دورهٔ پیش دانشگاهی)			
۴	زبان خارجی[6] (سه سال آخر + دورهٔ پیش دانشگاهی)			
دروس اختصاصی نظام جدید (کتب دورهٔ پیش دانشگاهی)[4]				
	گروه ریاضی ـ فنی	گروه تجربی	گروه انسانی	گروه هنر
۵	ریاضیات	ریاضیات	تاریخ	درک عمومی هنر
۶	فیزیک	زیست‌شناسی	جغرافیا	ریاضی فیزیک[2]
۷	شیمی	فیزیک	علوم اجتماعی	ـ
۸	دروس فنی	شیمی	فلسفه	ـ
۹	ـ	دروس فنی[3]	روانشناسی[4]	
۱۰			حسابداری[5]	

آزمون مرحلهٔ دوم نظام جدید ـ جدول شماره ۴				
دروس اختصاصی ـ نظام جدید ـ (سه سال آخر + دورهٔ پیش دانشگاهی)				
	گروه ریاضی و فنی	گروه تجربی	گروه انسانی	گروه هنر[1]
۱	ریاضیات	زمین‌شناسی	ریاضیات	ترسیم فنی
۲	فیزیک	ریاضیات	اقتصاد	خلاقیت تصویری
۳	شیمی	زیست‌شناسی	زبان و ادبیات فارسی	خلاقیت نمایشی
۴	دروس فنی	فیزیک	زبان عربی	خلاقیت موسیقی
۵	ـ	شیمی	تاریخ	خواص مواد
۶	ـ	دروس فنی[3]	جغرافیا	
۷	ـ	ـ	فلسفه و منطق	
۸	ـ	ـ	جامعه شناسی	
۹			حسابداری[5]	

۱) داوطلبان رشته های نقاشی و ارتباط تصویری در امتحان عملی نیز باید شرکت کنند. ۲) درک عمومی ریاضی فیزیک برای هنر. ۳) دروس فنی (اطلاعات کشاورزی و بهداشتی). ۴) درس روانشناسی را از کتاب نیمسال دوم سال سوم دبیرستان امتحان بعمل خواهد آمد. ۵) درس حسابداری را دارندگان دیپلم امور مالی و حسابداری امتحان می دهند. ۶) انگلیسی، فرانسه و آلمانی

نکات آموزشی جهت آمادگی در آزمون سراسری

اصولاً توابعی که در دوران دبیرستان مورد مطالعه قرار می گیرند، اکثر آنها، چند جمله ای ها هستند. این نوع توابع پیوسته و مشتق پذیراند و به سادگی می توانند در هر بازه کراندار انتگرال پذیر باشند، امّا انواع دیگری از توابع که در این دوران مورد مطالعه قرار می گیرند تابع قدرمطلق، جزء صحیح و بعضی از توابع وابسته به آنها است. بررسی این گونه توابع نیاز به نکات ظریفی دارد که آگاهی از آنها درک آن را تسریع می کند. در اینجا ما به بررسی این نوع توابع می پردازیم. یادآوری می کنیم که به ازای هر عدد حقیقی x یک وتنها یک عدد صحیح مانند n هست که $n \le x < n+1$. این عدد صحیح را جزء صحیح x می نامند و آن را با نماد $[x]$ نمایش می دهند. بنابراین، به ازای $x \in R$ و $n \in Z$، داریم.

۱) $[x] \le x < [x]+1$

۲) $x-1 < [x] \le x$

۳) $0 \le x-[x] < 1$

۴) $[x+n]=[x]+n$

۵) $[-x]=\begin{cases} -[x] & x \in Z \\ -[x]-1 & x \notin Z \end{cases}$

مثال۱ ـ کوچکترین عدد صحیح ناکمتر از x کدام است؟

۱) $[x]$ ۲) $-[x]$

۳) $[-x]$ ۴) $-[-x]$

حل: از (۱) و (۵) نتیجه می شود که گزینه (۴) صحیح است.

از آنجائیکه تابع جزء صحیح در فاصله های معین تابعی ثابت است بررسی بسیاری از خواص آن نیاز به دوره تناوب آن دارد. می دانیم کــه دوره تناوب تـوابع $f(x)=[nx]$ و $g(x)=\left[\frac{x}{n}\right]$، به ترتیب، $\frac{1}{n}$ و n است و اگر مجموعه

اعداد حقیقی را به صورت اجتماعی از بازه‌های با طول دوره تناوب بنویسیم بررسی خواص آن بسیار ساده خواهد بود.

مثال ۲ـ تابع $f(x)=\left[|x^3|\right]\sin x$ در کدام نقطه از سمت چپ پیوسته است؟

۱) ۱۳۷۵   ۲) ۱۳۷۴

۳) $\sqrt[3]{1375}$ ۴) $-\sqrt[3]{1374}$

حل: ابتدا فرض کنید که $x>0$. بنابراین، اگر n عدد صحیح مثبتی باشد به طوری که $n\le x^3<n+1$. در این صورت $\sqrt[3]{n}\le x<\sqrt[3]{n+1}$.

حال اگر $-(n+1)<x^3\le -n\le 0$ آنگاه $\sqrt[3]{n}\le -x<\sqrt[3]{n+1}$. بنابراین،

$$f(x)=\begin{cases} n\sin x & 0\le \sqrt[3]{n}\le x<\sqrt[3]{n+1} \\ n\sin x & -\sqrt[3]{n+1}<x\le -\sqrt[3]{n}\le 0 \end{cases}$$

یعنی این تابع در مجموعه $\left\{\sqrt[3]{n}\ |n\in Z\right\}$ ناپیوسته است و اگر $x\ge 0$ از سمت راست و اگر $x<0$ از سمت چپ در نقاط مذکور پیوسته خواهد بود. بنابراین، گزینه (۴) صحیح است.

مثال ۳ـ فرض کنید $f(x)=[x]+[-x]$. در این صورت حاصل $f(1375)+f(1375+\sqrt{2})$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -1

۳) ۰   ۴) ۱

با توجه به قاعده (۵)، گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۴ـ به ازای کدام مقدار n عبارت $(6\sqrt{6}+14)^n-(6\sqrt{6}-14)^n$ یک عدد صحیح است؟

۱) ۱۳۷۴   ۲) ۱۳۷۵

۳) ۱۳۷۶   ۴) ۱۳۷۸

حل: بنابر دو جمله‌ای نیوتن، داریم:

$$(6\sqrt{6}+14)^n-(6\sqrt{6}-14)^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[1-(-1)^{n-k}\right](6\sqrt{6})^k(14)^{n-k}$$

برای این که عبارت فوق عدد صحیح شود باید اندیس k زوج باشد بنابراین، اگر k فرد باشد باید $1-(-1)^{n-k}=0$. از اینجا نتیجه می‌شود که n باید فرد باشد. یعنی، گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۵ـ حاصل $\left[-(6\sqrt{6}-14)^{1375}\right]$ برابر کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱

۳) ۰   ۴) 2^{1375}

حل: $14<6\sqrt{6}<15$ در نتیجه، $0<6\sqrt{6}-14<1$. بنابراین، $-1<-(6\sqrt{6}-14)^{1375}<0$ که جزء صحیح آن -1 است. یعنی، گزینه (۱) صحیح است.

خودآزمایی:

اینک جهت تمرین و خودآزمایی بیشتر تعدادی تست طرح شده که امید است داوطلبان عزیز با برنامه ریزی منظم و مطالعه صحیح به درک دقیق مفاهیم آنها بپردازند و پس از فراگیری مفاهیم لازم، جهت کسب مهارت در پاسخگویی به سؤالات تست، به سؤالات ذیل پاسخ گویند.

۱ـ فرض کنید $f(x)=\left[|x|\right]$ و $g(x)=\left|[x]\right|$. در این صورت، کدام رابطه برقرار است؟

۱) $f(x)\ge g(x)$ ۲) $f(x)>g(x)$

۳) $f(x)\le g(x)$ ۴) $f(x)<g(x)$

۲ـ اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=[x]$، دامنه تابع $h(x)=\sqrt{f(g(x))-g(f(x))}$ کدام است؟

۱) $\{x|x\ge 0\}$ ۲) $\{x|x\ge 0$ یا $x\in N\}$

۳) $R-N$ ۴) R

۳ـ حاصل $\int_{-4}^{4}x\sqrt{\left[|x|\right]}dx$ برابر کدام است؟

۱) -4 ۲) -2

۳) ۰   ۴) ۸

۴ـ مقدار $\int_{-4}^{4}x^2\sqrt{\left[|x|\right]}dx$ برابر کدام است؟

۱) ۳۸   ۲) ۴۰

۳) ۴۲   ۴) ۴۴

۵ـ اگر $\int_{0}^{a}x\left[2\sqrt{x}\right]dx=0$، بیشترین مقدار a کدام

نظام آموزش جدید و آزمون سراسری

است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۶ـ حاصل $\int_1^6 2x\left[\sqrt{x}\right]dx$ کدام است؟

۱) ۵۵ ۲) ۶۰

۳) ۶۵ ۴) ۷۰

۷ـ اگر $f(x)=(x-1)\sqrt{x^2+8}$ ، حاصل

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}$$

کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۸ ـ بیشترین مساحت مثلثی که دو رأس ثابت آن $(-1, 0)$ و $(3, 0)$ و رأس سوم روی منحنی $x^2+y^2=4$ تغییر کند، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

۹ ـ دو رأس ثابت مثلثی $(-4, 0)$ و $(1, 0)$ و رأس سوم روی منحنی $y=x^2+2$ تغییر می کند. اگر مساحت این مثلث مینیمم شود زاویه رأس مثلث، بر روی منحنی، کدام است؟

۱) ۶۰ ۲) ۹۰

۳) ۱۲۰ ۴) ۱۵۰

۱۰ ـ اگر $f(x)=\begin{cases}2 & x\in Q\\ -3 & x\notin Q\end{cases}$ در این صورت تابع $g(x)=[x]f(x)$ در کدام مجموعه دارای حد است؟

۱) $\{x|x>1\}$ ۲) $\{x|x<-1\}$

۳) $\{x|-1<x<0\}$ ۴) $\{x|0<x<1\}$

۱۱ ـ باقیمانده $f(x)=(x+1)(x^{81}-8)$ بر x^2-1 کدام است؟

۱) $-7x-7$ ۲) $-7x+7$

۳) $-9x-9$ ۴) $-9x+9$

۱۲ ـ اگر A و B دو نقطه روی منحنی $y=x^3-2x^2$ به طولهای ۲ و $2+h$ باشند ضریب زاویه خط AB وقتی که h به صفر میل می کند کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

۱۳ ـ اگر f تابعی مشتق‌پذیر در نقطه x_0 باشد، حاصل

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+4h)-f(x_0)}{h}$$

کدام است؟

۱) 0 ۲) $f'(x_0)$

۳) $\frac{1}{4}f'(x_0)$ ۴) $4f'(x_0)$

۱۴ ـ اگر P عدد اوّل بزرگتر از $(4n)!+1$ باشد و

$$a=\left[\frac{P-(4n)!}{n}\right]$$

حدود تغییرات a کدام است؟

۱) $1\le a\le 2$ ۲) $1\le a\le 3$

۳) $a\ge 4$ ۴) $a<4$

۱۵ ـ اگر A یک ماتریس قطری و حاصلضرب اعضای روی قطر ۴ باشد، مقدار دترمینان ماتریس A^{2n} کدام است؟

۱) 2^{4n} ۲) 2^{2n}

۳) $8n$ ۴) $4n$

۱۶ ـ اگر f تابعی نزولی بر R و نمودار آن از نقطه $(2, 0)$ بگذرد، دامنه تابع $g(x)=\log f(x)$ کدام است؟

۱) R ۲) $\{x|x>0\}$

۳) $\{x|x<2\}$ ۴) $\{x|x>2\}$

۱۷ ـ f تابعی صعودی و نمودار آن از نقطه $(2, 0)$ می گذرد. دامنه تابع $g(x)=\sqrt{(x^2-1)f(x)}$ کدام است؟

۱) $[-1,1]\cup[2,\infty)$ ۲) $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

۳) $[-1,1]$ ۴) $[2,\infty)$

۱۸ ـ کدام عدد طبیعی n در رابطه :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ \dots\ +\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=6$$

صدق می کند؟

۱) ۴۸ ۲) ۴۹

۳) ۵۰ ۴) ۵۱

۱۹ ـ اگر n زوج باشد باقیمانده 19^n+21^n بر ۸ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۲۰ ـ اگر در مختصات قطبی مکان منحنی به صورت $r=\frac{2}{1+\sin\theta}$ باشد، این مکان چیست؟

۱) دایره ۲) سهمی

۳) بیضی ۴) هذلولی

حل :

۱ ـ فرض کنید که $h(x)=f(x)-g(x)$. در این صورت، اگر $x\geq 0$ یا $-x\in N$ آنگاه $h(x)=0$ و اگر $n-1<x<n\leq 0$ آنگاه $h(x)=-n-(1-n)=-1$

بنابراین،

$$h(x)=\begin{cases}0 & \text{، } x\geq 0 \text{ یا } -x\in N\\ -1 & \text{در غیر این صورت ،}\end{cases}$$

گزینه (۳) درست است.

۲ ـ بنابر مسئله ۱ ،

$$h(x)=\sqrt{[\![x]\!]-[\![|x|]\!]}=\begin{cases}0 & x\geq 0 \text{ یا } -x\in N\\ 1 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

گزینهٔ ۴ درست است.

۳ ـ فرض کنید که $f(x)=x\sqrt{[\![|x|]\!]}$. در این صورت $f(-x)=-f(x)$ بنابراین :

$$\int_{-2}^{2}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}f(x)dx$$

با تغییر متغیر $x=-t$ خواهیم داشت :

$$-\int_0^2 f(t)dt+\int_0^2 f(x)dx=0$$

به طور کلی می توان ثابت کرد که اگر f تابعی فرد باشد.

$$\int_{-a}^{a}f(t)dt=0$$

و اگر f تابعی زوج باشد؛ یعنی، $f(-x)=f(x)$ در این صورت :

$$\int_{-a}^{a}f(t)dt=2\int_0^a f(t)dt$$

۴ ـ فرض کنید $f(x)=x^2\sqrt{[\![|x|]\!]}$. در این صورت $f(-x)=f(x)$ بنابراین،

$$\int_{-4}^{4}f(x)dx=2\int_0^4 f(x)dx=2\left(\int_0^1 f(x)dx+\int_1^4 f(x)dx\right)$$
$$=2\left(0+\int_1^4 x^2dx\right)=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_1^4=42$$

گزینه ۳ درست است.

۵ ـ می دانیم که انتگرال یک تابع سطح زیر منحنی آن تابع است و اگر مقدار انتگرال تابع نامنفی صفر باشد باید نمودار آن، محدود به حدود انتگرال، روی محور xها باشد؛ بنابراین،

$$\left[2\sqrt{x}\right]\leq\left[2\sqrt{a}\right]\leq 1$$

بالنتیجه $2\sqrt{a}=1$ یا $a=\frac{1}{4}$

۶ ـ اگر $n-1\leq\sqrt{x}<n$ آنگاه $(n-1)\leq x<n^2$ و $\left[\sqrt{x}\right]=n$. بنابراین،

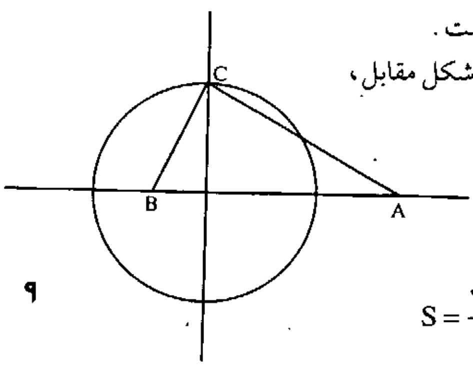
$$\int_0^6 x\left[\sqrt{x}\right]dx=0+\int_1^4 2xdx+\int_4^6 4xdx$$
$$=0+15+40=55$$

۷ ـ

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=f'(1)=3$$

گزینه ۳ درست است.

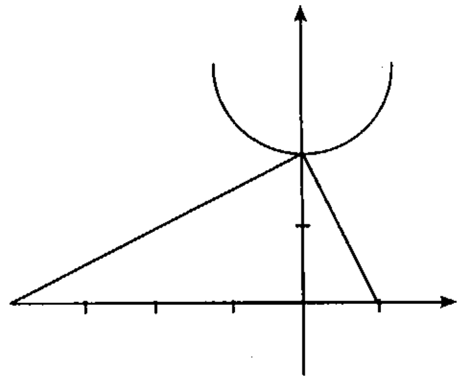
۸ ـ با توجه به شکل مقابل،



$$S=\frac{2\times 4}{2}=4$$

نظام آموزش جدید و آزمون سراسری

۹ ـ با توجه به شکل زیر، ارتفاع واسطه هندسی بین دو قطعه جدا شده بر قاعده است پس مثلث قائم‌الزاویه و زاویه رأس روی منحنی ۹۰ درجه است گزینه ۲ درست است.



۱۰ ـ گزینه ۴ درست است.

۱۱ ـ $f(x) = (x+1)(x^{81}-1) - 7(x+1)$

عبارت $(x+1)(x^{81}-1)$ بر x^2-1 بخشپذیر است. بنابراین، باقیمانده $-7x-7$. گزینه ۱ درست است.

۱۲ ـ ضریب زاویه خط AB وقتی که h به صفر میل می‌کند برابر مشتق y در نقطه $x = 2$ است بنابراین، گزینه ۱ درست است.

۱۳ ـ بنابر تعریف مشتق گزینه ۳ درست است.

۱۴ ـ کلیه اعداد به صورت $(4n)!+k$ ، وقتی که $2 \le k \le 4n$ ، مرکب اند بنابراین اگر P عدد اول باشد آنگاه $P > (4n)!+4n$ بنابراین،

$$\frac{P-(4n)!}{n} > 4$$

بنابراین، گزینه ۳ درست است.

۱۵ ـ چون $|A| = 4$. بنابراین،

$$|A^{2n}| = 4^{2n} = 2^{4n}$$

گزینه ۱ درست است.

۱۶ ـ چون f نزولی است پس به ازای هر $x \le 2$ ، $f(x) \ge f(2) = 0$ بنابراین، به ازای هر $x > 2$ ، $f(x) < 0$. بالنتیجه گزینه ۳ درست است.

۱۷ ـ توجه کنید چون f صعودی است، اگر $x \ge 2$ ، $f(x) \ge 0$ ؛ و اگر $x < 2$ آنگاه $f(x) < 0$. بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

x	-1	1	2	
x^2-1	+	−	+	+
$f(x)$	−	−	−	+
$(x^2-1)f(x)$	−	+	−	+

۱۸ ـ توجه کنید که:

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

بنابراین $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

$$= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$= \sqrt{n+1} - 1 = 6$$

بنابراین، $n = 48$. گزینه ۱ صحیح است.

۱۹ ـ فرض کنید که $n = 2k$. در این صورت:

$$21^n + 19^n = (16+5)^n + (16+3)^n$$

$$\equiv 5^{2k} + 3^{2k} \equiv (24+1)^k + (8+1)^k \equiv 1+1 \pmod 8$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۲۰ ـ $r^2 = x^2 + y$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

بنابراین: $r + r\sin\theta = 2$

$$\sqrt{x^2+y^2} + y = 2 \quad , \quad x^2 + y^2 = y^2 + 4 - 4y$$

$$x^2 = 4 - 4y$$

گزینه ۴ صحیح است.

پانوشتها:

۱ ـ راه دانشگاه شماره بیست و سوم، تیرماه ۱۳۷۴ .

۲ ـ راه دانشگاه شماره نوزدهم، فروردین ۱۳۷۳ .

۳ ـ اطلاعات ۷۴/۲/۱۸ .

۴ ـ کیهان ۷۳/۱۰/۸ .

۵ ـ کیهان ۷۴/۶/۱۲ .

نتایج باورنکردنی در ریاضیات (۲)

حدس بونیاکوسکی[۱۱]

دکتر امید علی کرم زاده

در سال ۱۸۵۷، بونیاکوسکی حدس زد که اگر $f(x)$ یک چند جمله ای غیر ثابت با ضرایب صحیح باشد به طوری که عدد یک بزرگترین عدد صحیح باشد که $|f(x)|$ را برای همه مقادیر صحیح x عاد کند آن گاه $|f(x)|$ بی شمار عدد اول تولید می کند. درحالتی که درجه $f(x)$ برابر با یک باشد این حدس ثابت شده است و همان قضیه معروف دیریکله در مورد وجود بی شمار عدد اول در یک تصاعد حسابی است که اولین جمله و قدر نسبت تصاعد نسبت به هم اولند. اثبات این قضیه دیریکله خیلی پیچیده و به ریاضیات بسیار پیشرفته ای نیاز داشت تا اینکه درسال ۱۹۵۰ ریاضیدان دانمارکی اِ-سلبرگ[۱۲] یک اثبات مقدماتی ولی بازهم پیچیده ارائه نمود.

در میان نتایج مربوط به چند جمله ایهای یک متغیره و تولید اعداد اول توسط آنها شاید بهترین نتیجه مربوط به سرینسکی باشد که ثابت کرده است برای هر عدد طبیعی m یک عدد طبیعی n وجود دارد که x^2+n برای بیش از m مقدار متمایز x عدد اول تولید می کند.

اخیراً این نتیجه تعمیم یافته و ثابت شده است که برای هر عدد صحیح $k \geq 2$ و هر عدد طبیعی m اعداد طبیعی c و d وجود دارند به طوری که x^k+c و x^k-d برای بیش از m مقدار متمایز x اعداد اول تولید می کنند.

در مورد چند جمله ای $f(x)$ از درجه n که تحویل پذیر باشد می دانیم $f(x)$ حداکثر $2n$ عدد اول تولید می کند (اثبات بدیهی است) یعنی یک عدد صحیح k وجود دارد به طوری که $f(x)$ برای $x \geq k$ غیر اول است. جالب است بدانیم که چند جمله ایهای تحویل ناپذیر وجود دارند که فقط اعداد غیر اول تولید می کنند، مثلاً x^2+x+2k که $k \geq 2$.

بعد از این نتایج انسان خواست خود را تغییر داد و به جای تولید اعداد اول توسط $f(x)$ به فکر بخشپذیری $f(x)$ بر اعداد اول افتاد یعنی $f(x) \equiv 0 \pmod p$ یا در حقیقت حل معادله $f(x)=0$ در میدان $\mathbb{Z}_p$ به زودی در این مورد نیز فهمید که:

قضیه: برای هر $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ تعداد بی شمار عدد اول p وجود دارد که $f(x) \equiv 0 \pmod p$ جواب ندارد.

قضیه: برای هر $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ تعداد بی شمار عدد اول p وجود دارد که $f(x) \equiv 0 \pmod p$ کاملاً به عوامل خطی تجزیه می شود.

ولی با وجود همه این نتایج هنوز بشر در آرزوی یک چند جمله ای بود (البته آشکارست که چند متغیره) که مقادیر مثبت آن همه اعداد اول را تولید کند. اولین نتیجه در این رابطه در سال ۱۹۶۳ توسط بی - ام - بردیهین[۱۳] به این شکل ثابت شد که نشان داد:

$f(x,y)=x^2+y^2+1$ برای بی شمار زوج (x,y) عدد اول تولید می کند. البته آشکارست که این چند جمله ای بی شمار عدد غیراول هم تولید می کند کافیست x فرد و y زوج باشد آن گاه $f(x,y)$ همیشه زوج است. در رابطه با این آرزوی بشر بهتر است به سخنرانی معروف هیلبرت در سال ۱۹۰۰ که در کنگره ریاضیدانان در پاریس ایراد کرد برگردیم. هیلبرت در آن سخنرانی تعداد ۲۳ مسأله برای نسل آینده مطرح کرد که تعدادی از آنها حل شده است و تحقیق روی بقیه ادامه دارد. در یکی از آنها (مسأله دهم) سؤال شده بود که آیا یک الگوریتم وجود دارد که بتوانیم برای هر معادله دیوفانت داده شده بفهمیم که آیا آن معادله جواب دارد یا نه؟ روی این مسأله افراد زیادی کار کردند ولی چهار نفر به طور مشخص کارهایی ارزنده کردند. ام - دیویس[۱۴]،

اچ ـ پاتنام[15]، جی. رابینسون[16] و بالاخره وای ـ ماتیاسویچ[17] که حل کننده مسأله بود (او نشان داد که چنین الگوریتمی وجود ندارد).

تعریف: اگر N مجموعه اعداد طبیعی باشد آن گاه

$$A \subseteq \overbrace{N\times N\times \dots\times N}^{n\ \text{بار}}$$

یک مجموعه دیوفانت نامیده می شود هرگاه

$$\exists f(x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_m)$$
$$\in Z[x_1,x_2,\dots,x_n,y_1,y_2,\dots,y_m]\ ,\ m\geq 0$$

به طوری که

$$A=\{(a_1,a_2,\dots,a_n) | f(a_1,a_2,\dots,a_n,$$
$$b_1,b_2,\dots,b_m)=0, \exists b_1,b_2,\dots,b_m\in N\}$$

توجه: منظور از جوابهای یک معادله دیوفانت $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$ (یعنی مسأله دهم هیلبرت) جوابهای صحیح هستند ولی با توجه به اینکه هر عدد طبیعی x_i را می توان به شکل مجموع مربعات چهار عدد طبیعی نوشت (قضیه لاگرانژ)، پس $x_i=a_i^2+b_i^2+c_i^2+d_i^2$ و درنتیجه

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$$
$$\Leftrightarrow f(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2,\dots\dots,a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2)=0$$

یعنی یافتن جوابهای مثبت $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$ معادل است با یافتن جوابهای صحیح

$f(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2,\dots\dots,a_n^2+b_n^2+c_n^2+d_n^2)=0$. پس کافیست برای مسأله هیلبرت فقط جوابهای طبیعی را در نظر گرفت. کار اصلی در حل مسأله دهم هیلبرت این موضوع بود که نشان داده شود مجموعه های خاصی از اعداد دیوفانت هستند. مثلاً مجموعه اعدادی که توانهای ۲ نیستند یک مجموعه دیوفانت است، زیرا

$$A=\{x\in N: x=y(2z+1), y,z\in N\}$$

پس در اینجا $f(x,y,z)=x-y(2z+1)$.

تعریف: تابع $f:\overbrace{N\times N\times\dots\times N}^{n\ \text{بار}}\longrightarrow N$ یک تابع دیوفانت است هرگاه گراف آن یعنی

$$A=\{(x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1}) | x_{n+1}=f(x_1,x_2,\dots,x_n)\}$$

یک مجموعه دیوفانت باشد. موضوع مهم دیگر در حل مسأله دهم هیلبرت این بود که کدام توابع دیوفانت هستند. اولین توابع دیوفانت را کانتور برای ما تهیه کرده است. می دانیم که او نشان داد تابع

$$f:N\times N\longrightarrow N$$

که

$$f(x,y)=\frac{(x+y-2)(x+y-1)}{2}+y$$

دوسویی است یعنی برای هر عدد طبیعی Z یک زوج یکتای (x,y) وجود دارد به طوری که $Z=f(x,y)$ یعنی

$$2Z=(x+y-2)(x+y-1)+2y$$

پس f یک تابع دیوفانت است. به این تابع دو تابع دیوفانت دیگر می توان نسبت داد. تعریف می کنیم $g:N\longrightarrow N$، $h:N\longrightarrow N$ به این شکل که $y,x,h(z)=y,g(z)=x$ اعداد طبیعی یکتایی هستند که $z=f(x,y)$. حال برای اینکه ببینیم چرا g و h توابع دیوفانت هستند کافیست توجه کنیم که

$$x=g(z)\Leftrightarrow \exists y\ ,\ 2z=(x+y-2)(x+y-1)+2y$$

و

$$y=h(z)\Leftrightarrow \exists x\ ,\ 2z=(x+y-2)(x+y-1)+2y$$

با توجه به مطالب بالا قضیه زیر را ثابت کرده ایم.

قضیه: توابع دیوفانت $h(z),g(z),f(x,y)$ وجود دارند به طوری که برای تمام اعداد طبیعی x,y,z داریم

$$,\ h(f(x,y))=y\ ,\ g(f(x,y))=x$$
$$.\ f(g(z),h(z))=z\ ,\ h(z)\leq z, g(z)\leq z$$

قضیه ساده و جالب دیگری که نقش کلیدی در اثبات مسأله دهم هیلبرت داشت به شکل زیر است.

قضیه: $S\subseteq N$ یک مجموعه دیوفانت است اگر و تنها اگر یک چند جمله ای $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ با ضرایب صحیح وجود داشته باشد به طوری که S دقیقاً برابر با مجموعه مقادیر مثبت f شود.

اثبات: فرض کنیم که S دیوفانت است پس یک چند جمله ای $P(y_1,y_2,\dots,y_m)$ با ضرایب صحیح وجود دارد

به طوری که

$$S=\{x|P(x,a_1,a_2,\ldots,a_m)=0, a_1,a_2,\ldots,a_m\in N\}$$

حال قرار می‌دهیم

$$. f=x\left(1-P^2(x,x_1,x_2,\ldots,x_m)\right)$$

پس اگر $x\in S$ آن گاه $x_1,x_2,\ldots,x_m\in N$ را انتخاب می‌کنیم که $P(x,x_1,x_2,\ldots,x_m)=0$ درنتیجه $f(x,x_1,x_2,\ldots,x_m)=x$. همچنین اگر $y=f(x,x_1,\ldots,x_m)$ و $y>0$ ، پس باید

$$P(x,x_1,x_2,\ldots,x_m)=0$$

زیرا در غیر این صورت $y\le 0$ که ممکن نیست پس $y=x\in S$. بالعکس داریم

$$S=\{x|x-f(x_1,x_2,\ldots,x_m)=0\}$$

یعنی S دیوفانت است.

با استفاده از قضیه فوق می‌توان نشان داد که مجموعه اعداد فیبوناتچی $A=\{1,1,2,3,5,8,\ldots\ldots\}$ یک مجموعه دیوفانت است، زیرا A از مقادیر مثبت

$$f(x,y)=y\left(2-(y^2-xy-x^2)^2\right)$$

به دست می‌آید، x,y اعداد صحیح‌اند.

اثبات دیوفانت بودن بعضی توابع کار ساده ای نیست. مثلاً برای تمرین نشان دهید که توابع

$$h(n)=2^n\ ,\ g(n)=n!\ ,\ f(n,m)=C_n^m$$

دیوفانت هستند.

جی ـ رابینسون در سال ۱۹۵۰ نشان داد که اگر یک تابع دیوفانت یافت شود که بین دو تابع نمایی قرار گیرد آن گاه جواب مسأله هیلبرت منفی است. در سال ۱۹۷۰، ماتیاسویچ که در آن هنگام ۲۲ ساله بود نشان داد که $f(n)=x_{2n}$ (x_n دنباله فیبوناتچی دیوفانت است) و چون $(\frac{5}{4})^n<x_n<2^{n-1}$ (با استقراء بدیهی است) پس مسأله هیلبرت تمام است. شگفتی اینکه تمام ریاضیاتی که برای اثبات نتایج اخیر به کار برده شد تماماً در درس نظریه اعداد مقدماتی سالهای اول دانشگاهها وجود دارد. موضوع باورنکردنی دیگر اینکه، من مطمئن هستم که اگر هیلبرت این مسأله را مطرح نکرده بود و فرض کنیم خود ماتیاسویچ یک مقاله می نوشت و توابع دیوفانت را معرفی می‌کرد و همین کارهایی که منجر به حل مسأله هیلبرت شد را انجام می‌داد و آن را برای چاپ به بعضی از مجلات به اصطلاح معتبر می‌فرستاد، آن گاه به او می نوشتند که ریاضیات مقاله شما مقدماتی است و در استاندارد مجله ما نمی گنجد. حال بگذارید چند نتیجه باورکردنی که از کارهای ماتیاسویچ نتیجه می‌شوند عنوان کنم.

۱ ـ در هر سیستم اصولی که برای نظریه اعداد در نظر گرفته شود یک معادله دیوفانت وجود دارد که جواب ندارد ولی نمی توان در آن سیستم آن را اثبات کرد (تعمیم قضیه ناتمامیّت گودل).

۲ ـ یک چند جمله ای $f(n,x,y,z,y_1,y_2,\ldots,y_g)$ وجود دارد به طوری که $f=0$ دارای جوابهای مثبت است اگر و تنها اگر اعداد طبیعی x,y,z و $n>2$ وجود داشته باشند به طوری که $x^n+y^n=z^n$.

۳ ـ یک چند جمله ای $f(x,x_1,\ldots,x_g)$ وجود دارد به طوری که برای هر چند جمله‌ای p یک عدد n که به p بستگی دارد وجود دارد که $f(n,x_1,\ldots,x_g)=0$ دارای جوابهای صحیح است اگر و تنها اگر $p=0$ دارای جواب صحیح باشد.

۴ ـ هیچ الگوریتمی وجود ندارد که با آن بتوان یک معادله دیوفانت را برای داشتن فقط n جواب که $n=0,1,2,\ldots\ldots$ ، تست کرد (تعمیم مسأله دهم هیلبرت).

غیر از این نتایج، نتیجه مهم و باورنکردنی دیگری که از کار حل مسأله دهم هیلبرت به دست آمد این موضوع بود که نشان داده شد که مجموعه اعداد اول دیوفانت است. پس با توجه به قضیه ساده ای که در مورد مجموعه های دیوفانت ثابت کردیم یک چند جمله ای چند متغیره وجود دارد که مقادیر مثبت آن تمام اعداد اول را می دهد:

$$P=(k+2)\left\{1-[xz+h+j-q]^2-\right.$$
$$[(gk+2g+k+1)(h+J)+h-z]^2$$
$$-[2n+p+q+z-e]^2$$

$$
\begin{aligned}
&-\left[16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2\right]^2\\
&-\left[e^3(e+2)(a+1)^2+1-t^2\right]^2\\
&-\left[(a^2-1)y^2+1-w^2\right]^2\\
&-\left[16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2\right]^2\\
&-\Big[\left((a+u^2(u^2-a))^2-1\right)(n+4dy)^2\\
&+1-(w+cu)^2\Big]^2\\
&-\left[n+l+v-y\right]^2-\left[(a^2-1)l^2+1-m^2\right]^2\\
&-\left[ai+k+1-l-i\right]^2-\Big[p+l(a-n-1)\\
&+b(2an+2a-n^2-2n-2)-m\Big]^2\\
&-\Big[q+y(a-p-1)\\
&+s(2ap+2a-p^2-2p-2)-w\Big]^2\\
&-\left[z+pl(a-p)+o(2ap-p^2-1)-pm\right]^2\Big\}
\end{aligned}
$$

یک چند جمله ای از درجه ۲۵ و ۲۶ متغیره

به راحتی می توان حل یک معادله دیوفانت از هر درجه ای را به حل یک معادله دیوفـانت از درجه کمتر یا مساوی چهار تبـدیل کرد، البـته تعـداد متـغیـره ها زیادتر می شـوند. پس همـواره می توان یک چند جمـله ای از درجه پنج نوشت کـه مقادیر مثبت آن تمام اعداد اول را بدهد.

توجه مـی کنیم که مـقادیر مثـبت این چند جملـه ای تمام اعداد اول را می دهد. زیرا این موضـوع بدیهی است که هیچ چندجمـله ای حتی چند متـغیـره غیر از چند جـمله ای ثابت نمی تواند فقط عدد اول تولید کند.

در رابطه با مسأله دهم هیلبرت بهـتر است این موضوع را یادآوری کنم که اـ بیکر[۱۸] از کمبریج در سال ۱۹۶۸ نشان داد که اگر معادله دیوفانت فقط دارای دو متغیر باشد جواب مثبت است.

همچنین یادآوری می کنم کـه نه تنها مجمـوعه اعداد اول دیوفانت است بـلکه مجمـوعه اعداد اول دوقلـو، مجمـوعه اعداد اول فرما، مجموعه اعداد اول مرسن نیز مجموعه های دیوفانت هستند. همچنین در مـسأله دهم هیلبرت اگر بجای جوابهـای صحیح معـادله دیوفانت جوابهای گـویا مورد نظر باشد مسأله هنوز حل نشده است. نتیجه باورنکردنی بعدی، قضیـه ای است در حساب که برای بیان آن ابـتدا تعریفی را با هم مرور می کـنیم. وقتی می گـوییم عدد n را در پایه قویاً ۲ بنویسید یعنی وقتی n را به صورت توانهایی از ۲ می نویسیم هیچ عددی در این نمایش نباید بیش از ۲ باشد یعنی توانها را نیز در پایه ۲ می نویسـیم تا هیچ عـددی بزرگتـر از ۲ در این نمایش وجود نداشته باشد.

مثلاً ۱۷ در پایه قویاً ۲ برابر است با $17=2^{2^2}+1$

یا $514=2^9+2=2^{2^3+1}+2=2^{2^{2+1}+1}+2$

مفـهوم نوشتـن در پایه قویاً ۳ و ۴ و ... به همین شکل است.

حال این قضیه که توسط گودشتاین[۱۹] در سال ۱۹۴۴ ثابت شد می گوید هر عدد دلخواهی مانند n را درنظر بگیرید. اول آن را در پایه قویاً ۲ بنویسـید آن گاه تـمام ۲ ها را با ۳ عوض کنید و سـپس یک واحد از عدد حـاصل کم کنید. حـال عدد جدید را در پایه قویاً ۳ بنویسید تمام ۳ ها را با ۴ عوض کنید و از عدد حاصل یک واحد کم کنیـد و همین کار را ادامه دهید. این قضیـه می گوید بعد از تعداد متناهی مرحله بـه عدد صفر می رسیم.

اگر این مراحل را انجام دهید هرگـز باور نخواهید کرد که به صفر می رسـیم زیرا این دنباله سریعاً صـعودیست و بعد از تعداد خـیلی زیادی مرحله شـروع به کم شدن می کند. مـثلاً برای عـدد ۵۱ در مـرحله دوم عـــددی نزدیک به 10^{13} و در مرحله بعـدی نزدیک به 10^{155} و بعد 10^{2185} و بالاخره در مرحله هفـتم عددی نزدیک به $10^{15151337}$ به دست می آید. مثـلاً عدد ۳ بعد از شش مـرحله به صفر می رسـد ولی عدد چهار بعد از تـقریباً $10^{121210700}$ مرحله به صـفر می رسد. اثبات این قضـیه با استفاده از اُردینـالهاست و در کتب درسی نظریه مـجمـوعه ها وجـود دارد، به [۱۴] و [۲۷] مراجـعه شود. بدیهی بود کـه اثباتی با استـفاده از نظریه مجمـوعه ها

برای این قضیهٔ واقعاً باورنکردنی، برای متخصصین نظریه اعداد باورنکردنی بود و سعی می‌کردند که اثباتی حسابی بدهند، تا اینکه در سال ۱۹۸۲ ال ـ کربی[20] و جی ـ پاریس[21] در [۱۷] به طور باورنکردنی نشان دادند که این قضیه با اصول حساب اثبات شدنی نیست یعنی نشان دادند که اثباتی حسابی وجود ندارد. توجه داشته باشید که حسابی را با حسابی اشتباه نکنید. بالاخره آخرین نتیجه باورنکردنی در این سخنرانی در زمینه نظریه اعداد حدسی است که آدم را خیلی وسوسه می‌کند. این حدس که توسط ب ـ توویتس[22] در سال ۱۹۵۲ ارائه شد به این شکل است برای هر عدد طبیعی n اگر n زوج باشد $\frac{n}{۲}$ را به دست می‌آوریم و اگر n فرد باشد $۳n+۱$ را به دست می‌آوریم سپس برای عدد به دست آمده همین عمل را تکرار می‌کنیم، می‌خواهیم نشان دهیم بعد از تعداد متناهی انجام این عمل به عدد یک می‌رسیم. به عبارت دیگر برای هر عدد n بعد از تعداد متناهی عمل به عددی که توانی از ۲ است خواهیم رسید. این مسأله که در منابع به مسأله $۳x+۱$ معروف است به این شکل مطرح می‌شود که یک تابع، به صورت زیر باشد:

$$f = \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f(n) = \begin{cases} ۳n+۱ & \text{اگر n فرد باشد} \\ \frac{n}{۲} & \text{اگر n زوج باشد} \end{cases}$$

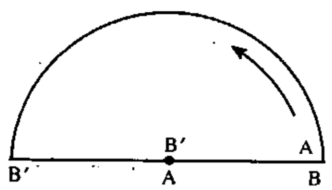
آن گاه نشان دهید برای هر n یک m وجود دارد که $f^m(n)=۱$. مثلاً $f^۶(۵)=۱$ و این حدس تا سه تریلیون = n ثابت شده است ولی به طور کلی ثابت نشده است. این حدس عجیب که شاید مقدماتی ترین بیان را دارد ریاضیدانهای زیادی را بخود مشغول کرده است و به صورت جُک معروف است که این مسأله را مانند ویروسی در بخشهای ریاضی پراکنده کرده اند تا ریاضیدانها مشغول کاری بیهوده شوند و از کار تحقیق عقب بمانند. اردیش گفته است که هنوز ریاضیات آمادگی این مسأله را ندارد. نمی‌دانم چرا من (نه اردیش) احساس می‌کنم که این مسأله هم مانند قضیه قبلی حلِ حسابی ندارد. برای تاریخچه و تعمیم این مسأله به [۲۱] و [۵] و [۷] مراجعه شود.

حال نتیجه باورنکردنی دیگری مطرح می‌کنم.

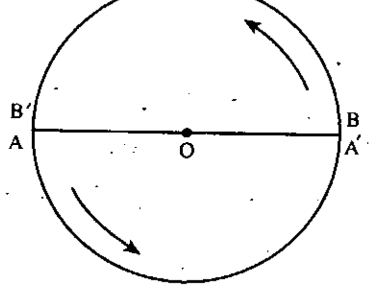
اگر پاره خط $AB = ۱$ بتواند به طور پیوسته حرکت کند تا جای دوسر پاره خط یعنی A و B با هم عوض شود می‌خواهیم ببینیم کمترین مساحتی که این پاره خط می‌پیماید (جارو می‌کند) چقدر است.

بهتر است به چند مثال توجه کنیم.

مثال ۱. نیمدایره‌ای به مرکز A و به شعاع AB رسم می‌کنیم تا نقطه B به نقطه B′ منتقل شود سپس B′A را در امتداد خود امتداد می‌دهیم تا A بر B و B′ بر A منطبق شود. می‌بینیم در این حالت مساحت طی شده برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

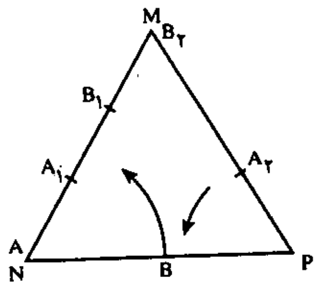


مثال ۲. به مرکز O وسط AB و شعاع نصف AB دایره‌ای رسم می‌کنیم تا A به A′ و B به B′ منتقل شوند. در این حالت هم جای A و B با هم عوض شده است و مساحت طی شده برابر با $\frac{\pi}{۴}$ است.

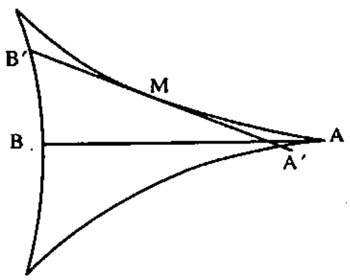


مثال ۳. مثلث متساوی‌الاضلاع به ارتفاع واحد را درنظر می‌گیریم به طوری که AB بر ضلع NP و A بر N واقع باشد. حال یک دوران به مرکز N و زاویه دوران ۶۰ درجه می‌دهیم تا B به نقطه $B_۱$ روی ضلع NM منتقل شود سپس $AB_۱$ را در امتداد خود حرکت می‌دهیم تا A به نقطه $A_۱$ و

B_1 به نقطه B_2 روی M منتقل شود. حال دوباره دورانی بمرکز M و زاویه دوران $60°$ می‌دهیم تا نقطه A_1 به نقطه A_2 روی MP منتقل شود و سپس دوران دیگری بمرکز P و زاویه $60°$ می‌دهیم تا نقطه A_2 بر B و B_2 بر A منطبق شوند. در این حالت مساحت جارو شده برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



مثال ۴. در این مثال منحنی هیپوسیکلوئید سه گوش که پوش خطوط سیمسون یک مثلث است (این منحنی از حرکت یک دایره بر روی یک دایره دیگر نیز به دست می‌آید) را درنظر می‌گیریم. این منحنی دارای این خاصیت قشنگ است که اگر از هر نقطه M روی منحنی مماسی بر منحنی رسم کنیم تا منحنی را در A' و B' قطع کند طول $A'B'$ همواره ثابت است. می‌توان این منحنی را طوری انتخاب کرد که اگر A در یکی از گوشه‌های آن باشد طول مماس AB در A برابر واحد شود و B بر منحنی قرار گیرد. حال می‌بینیم با تغییر نقطه تماس وقتی جای دو نقطه A و B عوض می‌شوند تمام سطح درون منحنی پیموده می‌شود که برابر با $\frac{\pi}{8}$ است. در سال ۱۹۱۷ ریاضیدان ژاپنی اس ـ کاکیا[23] حدس زد که این $\frac{\pi}{8}$ کمترین مساحت پیموده شده است. ولی با تعجب همگی ا. اس، بسیکویچ[24] در سال ۱۹۲۸ در [1] نشان داد که کمترین مساحت جارو شده صفر است. به این معنی که برای هر عدد $r > 0$ یک شکل وجود دارد که مساحت آن کمتر از r و پاره خط AB در آن می‌تواند به طور پیوسته حرکت کند تا جای دو سر پاره خط با هم عوض شود. با توجه به اثبات باورنکردنی این قضیه، MAA در سال ۱۹۵۸ یک فیلم ویدیویی از این اثبات تهیه کرد. این قضیه عجیب و غریب برای آقای بسیکویچ مقام استادی دانشگاه لنینگراد را به ارمغان آورد. جی ـ دی ـ برخوف[25] ریاضیدان برجسته امریکایی در آن زمانها در کتاب خود، [3] از این حدس کاکیا به عنوان یک مسأله عجیب نام می‌بَرد. بعداً برای این قضیه اثبات ساده‌تری توسط اُ ـ پرون[26] در [26] داده شد. چند سال بعد خود بسیکویچ فکر کرد که حدس کاکیا ممکن است در مورد مجموعه‌هایی که یک نوع ویژگی یک پارچگی داشته باشند درست باشد. در سال ۱۹۶۳، ا ـ ا ـ بلانک[27] در [4] مثالهایی از این مجموعه‌ها ارائه داد که مساحت جارو شده همگی از $\frac{\pi}{8}$ بزرگتر ولی خیلی نزدیک به $\frac{\pi}{8}$ بود و ادعا می‌کند که $\frac{\pi}{8}$ واقعاً کمترین است.



اما در سال ۱۹۶۵ نشان داده شد که برای این نوع مجموعه‌ها کمترین مساحت جارو شده کمتر یا مساوی $\frac{5-2\sqrt{2}}{24}\pi$ است و ادعا شد که این عدد کمترین مساحت است ولی یکدفعه در سال ۱۹۷۱ در [6] اف ـ کانینگهام[28] نشان داد که دوباره این کمترین صفر است. او نشان داد که درون و روی دایره واحد یک چند ضلعی با آن ویژگی یک پارچگی وجود دارد که هر چه قدر بخواهیم مساحتش کم است و پاره خط AB در درون آن با حرکت پیوسته جای دو سر خود را عوض می‌کند، بعد از این واقعه شکلهایی با ویژگی شبیه ستاره در نظر گرفتند. مجموعه‌ای از نقاط مانند S را شبه ستاره گویند هرگاه یک نقطه ثابت O در آن وجود داشته باشد به طوری که برای هر نقطه A در S پاره خط OA در S قرار گیرد. در مورد این شکلها ثابت شد که کمترین

مساحت کمتر یا مساوی $\pi\frac{5-2\sqrt{2}}{24}$ است و دوباره همه منتظر بودند یک کسی با ادعای مساحت صفر ظاهر شود، که دوباره همان کانینگهام تکلیف همه را روشن کرد و نشان داد که مساحت جارو شده برای این شکلها بزرگتر یا مساوی $\frac{\pi}{108}$ است.

در رابطه با این نتایج باورنکردنی سؤالهایی وجود دارد که هیچ کس فعلاً جواب آنها را نمی داند، برای مثال، سؤالهای زیر:

۱ ـ کمترین مساحت شکلی که شامل یک نسخه از هر خم با طول واحد باشد چیست؟ در سال ۱۹۷۹ نشان داده شده که این کمترین مساحت از یک عدد مثبت بزرگتر است ولی بزرگترین این عدد مثبت شناخته شده نیست.

۲ ـ کمترین حجمی که یک قرص به مساحت واحد در آن بتواند بموازات هر صفحه تغییر کند چیست؟

۳ ـ در مسأله کاکیا به جای پاره خط واحد تمام خمهایی با طول واحد را مشخص کنید که اثبات بسیکویچ برای آنها درست باشد.

نمی توان از نتایج باورنکردنی اسم برد ولی ا زقضیه باناخ ـ تارسکی[29] اسم نبرد. همان طور که می دانیم یکی دیگر از اصول باورنکردنی ریاضیات اصل انتخاب است، که گرچه بیانی ساده دارد ولی نتایجی که از آن به دست می آید عجیب و غریب است. مثلاً وقتی لُبگ[30] مسأله معروف خود را در مورد اندازه به این شکل مطرح کرد که آیا تابعی مانند m (به اسم اندازه) وجود دارد به طوری که به هر زیرمجموعه کراندار در R^n یک عدد حقیقی نامنفی نسبت دهد و در شرایط زیر صدق کند:

۱ ـ یک زیرمجموعه کراندار A وجود داشته باشد که $m(A) > 0$

۲ ـ زیرمجموعه های هم ارز دارای یک اندازه باشند (دو زیرمجموعه را هم ارز گویند هرگاه یکی را بتوان با تعداد متناهی برش به قطعاتی تقسیم کرد و با پهلوی هم گذاشتن این قطعات دیگری را به دست آورد).

۳ ـ $A_n \cap A_m = \varnothing$ ، $m(\bigcup_1^\infty A_n) = \sum_1^\infty m(A_n)$

لُبگ گرچه موافق اصل انتخاب نبود آنرا به کار برد تا نشان دهد که مجموعه های اندازه پذیر در شرط (۳) صدق می کنند.

در سال ۱۹۱۵ هاوسدرف مسأله لُبگ را به این شکل مطرح کرد که آیا تابعی مانند m از زیرمجموعه های کراندار در R^n به اعداد حقیقی نامنفی وجود دارد که در شرایط زیر صدق کند.

۱ ـ $m(I) = 1$ ، I مکعب n بعدی به طول واحد است.

۲ ـ زیرمجموعه های هم ارز دارای یک اندازه باشند.

۳ ـ $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ برای $A \cap B = \varnothing$.

برای $n \geq 3$ هاوسدورف نشان داد که جواب منفی است. او با به کاربردن اصل انتخاب کره را افراز کرد به زیرمجموعه های A,B,C,D به طوری که $B \cup C$ و A, B, C زیرمجموعه های هم ارز شدند. این نتیجه به پارادوکس هاوسدرف معروف است. درواقع این نتیجه باعث کشف قضیه باناخ ـ تارسکی شد. باناخ علاقه مند به مسأله هاوسدرف در حالت $n = 1, 2$ بود. او نشان داد در این حالات تابع m وجود دارد و سپس با استفاده از نتیجه هاوسدرف و با همکاری تارسکی نشان داد که هردومجموعه کراندار در R^n برای $n \geq 3$ ، که دارای درونهای ناتهی باشند با یکدیگر هم ارزند به عبارت دیگر یعنی یک کره به اندازه هرچقدر کوچک (مثلاً یک نخود) را می توان با برش هایی تقسیم کرد و سپس از پهلوی هم گذاشتن این قطعات یک کره به اندازه هرچقدر بزرگ (مثلاً کره زمین) به دست آورد. این نتیجه نمی تواند تعجب همه را به دنبال نداشته باشد. ولی از یاد نبریم اگر بخواهید آنرا باور نکنید نباید باورکنید که هر فضای برداری دارای پایه است نباید باور کنید که هر حلقه دارای ایده آل ماکسیمال است نباید باور کنید که حاصلضرب فضاهای فشرده فشرده است. البته باز هم باید بخاطر داشته باشیم که باناخ و تارسکی با به کار بردن همان اصل انتخاب نشان دادند که اگر دو چند ضلعی داشته باشیم که یکی درون دیگری باشد آن گاه نمی توان با تقسیم یکی به قطعاتی و با پهلوی هم گذاشتن این قطعات دیگری را به دست آورد. این نتیجه کاملاً باورکردنی است ولی اثباتش با اصلی است که آن

نتیجه کاملاً باورنکردنی را برای ما به ارمغان آورد. مشاهده می کنیم که اختلاف این دو نتیجه مربوط به کره ها و چندضلعی ها به علت عدم وجود تابع اندازه در حالت $n \geq ۳$ و وجود آن درحالت $n = ۲$ است. امّا عده ای معتقد هستند که این اختلاف بیشتر به این علت است که گروه تبدیلات فضا درحالت $n \geq ۳$ حل ناپذیر و در حالت $n = ۱,۲$ حل پذیر است.

تارسکی می دانست که دایره با یک مربع که مساحتش کمتر یا بیشتر از خود دایره باشد با برش قابل انطباق نیست، او در سال ۱۹۲۵ پرسید آیا می توان دایره را با برش های متناهی طوری تقسیم کرد که از پهلوی هم گذاشتن این برش ها بتوان یک مربع به دست آورد (به عبارت دیگر آیا تربیع دایره با تقسیم به زیرمجموعه ها بجای خط کش و پرگار امکان پذیر است). این مسأله ۶۵ سال بدون جواب ماند تا اینکه در سال ۱۹۹۰، ام ـ لاکوویچ[۳۰] مجارستانی در [۲۰] آنرا با حلی بسیار عجیب و ناباورکردنی تمام کرد. مثلاً تعداد قطعاتی که لازم بود تا این کار بشود چیزی نزدیک به $۱۰^{۵۰}$ است.

دنیای ریاضیات پُر از ناباورکردنی هاست ولی هرچقدر تعداد این ناباورنکردنی ها زیادتر شوند خود ریاضیات بیشتر باورکردنی می شود. باور نمی کنید؟

منابع

1. A.S.Besicovitch, on Kakeya's Problem and Similar one, Math Z (1928), 312-320.
2. A.S. Besicovitch, The Kakeya Problem, Amer. Math. Monthly, 1963, 697-706.
3. G.D.Birkhoff, The Origin, Nature and influence of relativity, 1925.
4. A.A. Blank, A remark on the Kakeya Problem Amer. Math. Monthly, 1963, 706-711.
5. J.H.Conway, Unpredictable iterations, Proc 1972, Number theory Conference, Colorado (1972), 49-52.
6. F. Cunningham, The Kakeya Problem for Simply Connected, Amer. Math. Monthly, 78 (1971), 114-129.
7. R. E. Cvandall, on the $3x+1$ Problem, Math Comp, 32 (1978), 1281-1292.
8. M.Davis and H. Putnam, Diophantine sets for Polynomial vings, Illnois J. Math. 7(1963), 251-256.
9. M. Davis and R. Hersh, Hilbert's 10 th Problem, Scientific American, 1973.
10. J.Dieudunne, Present Trends in Pure Mathematics, Advances in Mathematics, 27 (1978), 235 - 255.
11. U.Dudley, Mathematical Cranks, MAA, 1992.
12. P.R.Halmos, Problems for Mathematicians young and old, MAA, 1991.
13. G.H.Hardy and E.M.Wright, the theory of Numbers, Oxford, 1960, 4 th ed.
14. J.M.Henle, An Outline of set theory, Springei, 1986.
15. D.Hilbert, Mathematical Problems, Bull. Amer. Math. Soc, 8 (1901), 437 - 479.
16. V.K.Ionin and E.K. Suleimenov, Characterization of vector Structures by linear mappings, Soviet, Math. Dokl, 27 (1983), 143 - 148.
17. L.Kirby and J.Paris, Accessible independence results in Peano arithmetic, Bull. Lon. Math. Soc., 14(1982), 285 - 293.
18. V.Klee and S. Wagon,, Unsolved

Problems, MAA, 1991.
19. L.Kuipers, Prime representing functions, Indag. Math, 12 (1950), 57 - 58.
20. M. Laczkovich, A Solution of tarski's - Circle - Squaring Problem, J. für die und Ange Math, 404 (1990), 77 - 117.
21. J.C.Lagarias, The Exel Problem and its generalizations, Amer. Math. Monthly, 92 (1985), 3 - 23.
22. M.Lynch, A Continuous nowhere differentiable function, Amer. Math. Monthly, 99 (1992), 8 -9.
23. W.H.Mills, A Prime representing function, Bull. Amer. Math. Soc., 53 (1947), 604.
24. G.H.Moore, Zermelo's Axiom of choice, Springer, 1982.
25. I. Niven, Functions which represent prime numbers, Proc. Amer. Math. Soc. (1951), 753 - 755.
26. O.Perron, Uber einen Satz Von Besicovich, Math. Z. 28(1928), 383 - 386.
27. M.D.Potter, Sets, An introduction, Clarendon Press, 1990.
28. J.Robinson, Unsolvable Diophantine Problems, Proc. Amer. Math. Soc, 22 (1969), 534 - 538.
29. J. Robinson,, Hilbert's tenth Problem, Proc. Symp. Pure Math., 20 (1962), 191 - 194.
30. W. Sierpinski, Les binômes $x^2 + n$ et les nombres Premiers, Bull. Soc. Royale. Sciences, 33.
31. C.P. Willans, On The formula for the n^{th} Prime numbers, Math. Gaz. 48 (1964), 413 - 415.
32. E.M.Wright, A Class of representing functions, J. Lon. Math. Soc. 29 (1954), 63 - 71.

۳۳ـ امید علی کرم‌زاده، کدام مسائل انگیزه بخش اند؟ پانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور، شیراز، مجله رشد آموزش ریاضی.

۳۴ـ امید علی کرم‌زاده، تعمیم در ریاضی، اولین کنفرانس فیزیک و ریاضی رامسر، مجله رشد آموزش ریاضی.

۳۵ـ امید علی کرم‌زاده، تفاوت ریاضیات دانشگاهی و ریاضیات دبیرستانی، کنفرانس ریاضی کشور در مشهد، مجله رشد آموزش ریاضی.

پانوشتها

11. Bouniakowsky
12. A. Selberg
13. B.M.Bredihin
14. M. Davis
15. H.Putnam
16. J. Robinson
17. Y. Matiyasevic
18. A. Baker
19. Good stein
20. L. Kirby
21. J. Paris
22. B. Thwaites
23. S. Kakeya
24. A.S.Besicovitch
25. G.D.Birkhoff
26. O.Peron
27. A.A. Blank
28. F. Cunringham
29. Banach - Tarski
30. Lebesque

یک اتحاد جالب

دکتر اسماعیل بابلیان
عضو هیأت علمی مؤسسه ریاضیات
دانشگاه تربیت معلم تهران

یکی از خوانندگان مجلهٔ رشد آموزش ریاضی به نام علی لعلی، دانشجوی رشتهٔ مکانیک، فرمول زیر را برای هیأت تحریریهٔ مجله ارسال نموده و نظر آن هیأت را خواستار شده‌اند.

$$(1)\quad P! = \sum_{k=0}^{p} (-1)k(n-k)^p \binom{p}{k}$$

آقای لعلی ادعا کرده‌اند که این فرمول را به دست آورده‌اند ولی اثباتی ارائه نکرده‌اند. با توجه به اینکه نتیجه بالا مستقل از n است این اتحاد جالب تشخیص داده شد و اثبات آن به طریق زیر تهیه شد که به نظر خوانندگان محترم می رسد.

برای اثبات (۱) باید تساویهای زیر را ثابت کنیم (چرا؟)

$$(2)\quad \sum_{k=0}^{p} (-1)^k (-1)^r \binom{p}{r} k^r \binom{p}{k} = 0\,,\quad r = 0,1,\dots,p-1$$

$$(3)\quad \sum_{k=0}^{p} (-1)^k (-1)^p k^p \binom{p}{k} = P!$$

در مورد (۲) کافی است ثابت کنیم (چرا؟)

$$(4)\quad \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} k^r = 0,\quad r = 0,1,\dots,p-1$$

تساوی (۴) برای $r=0$ به صورت $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} = 0$ درمی‌آید که معادل $(1-1)^p = 0$ است که برقرار است. برای اثبات برقراری (۴) به ازای $r=1$ گوییم

$$(5)\quad (1-x)^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} x^k$$

اگر از طرفین تساوی بالا نسبت به x مشتق بگیریم به دست می‌آید:

$$-p(1-x)^{p-1} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k kx^{k-1} \binom{p}{k}$$

اگر به جای x مقدار یک را قرار دهیم حاصل می شود

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k k \binom{p}{k} = 0$$

این (۴) به ازای $r=1$ است.

یک اتحاد جالب

دکتر اسماعیل بابلیان
عضو هیات علمی مؤسسه ریاضیات
دانشگاه تربیت معلم تهران

حال فرض می کنیم (۴) برای $r=0,1,\dots,l-1<p$ برقرار باشد (فرض استقرای قوی) و ثابت می کنیم اگر $l<p$ آن گاه

$$(۶)\quad \sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^l=0$$

برای اثبات (۶) تساوی (۵) را در x^l ضرب می کنیم

$$x^l(1-x)^p=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}x^{k+l}$$

حال از طرفین تساوی بالا l بار نسبت به x مشتق می گیریم و در حاصل به جای x عدد ۱ را قرار می دهیم، حاصل می شود (چرا؟)

$$0=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}(k+l)\times\dots\times(k+1)$$

فرض می کنیم

$$(k+l)(k+l-1)\dots(k+1)=k^l+\alpha_1k^{l-1}+\dots+\alpha_l$$

که در آن α_i ها، $i=1,\dots,l$، اعداد طبیعی مستقل از k هستند. در این صورت،

$$0=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^l+\sum_{r=1}^{l}\alpha_r\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^{l-r}\right)$$

با توجه به فرض استقرا عبارت داخل پرانتزها صفر است و درنتیجه (۶) درست است. این اثبات (۵) و درنتیجه (۴) را کامل می کند.

اثبات (۳) نیز به استقرا روی p، و با استفاده از (۴)، به قرار زیر است.

واضح است که (۳) به ازای $p=0$ برقرار است. (۳) را فرض می گیریم و برقراری آن را برای $(p+1)$ به جای p ثابت می کنیم. می دانیم که $k\binom{p+1}{k}=(p+1)\binom{p}{k-1}$، بنابراین،

$$\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^{k+p+1}k^{p+1}\binom{p+1}{k}$$
$$=\sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+p+1}k^{p}(p+1)\binom{p}{k-1}$$

که با لغزاندن حدود نتیجه می دهد:

$$=(p+1)\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k+p}\binom{p}{k}(k+1)^p$$
$$=(p+1)\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k+p}\binom{p}{k}k^p$$
$$+(p+1)\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k+p}\binom{p}{k}\left[\sum_{r=0}^{p-1}\binom{p}{r}k^r\right]$$
$$=(p+1)\times p!+(p+1)\sum_{r=0}^{p-1}(-1)^p\binom{p}{r}.$$
$$\left[\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^r\right]$$
$$=(p+1)!$$

عبارت داخل کروشه ها بنابر (۴) صفر است و حکم ثابت شده است.

با توجه به اینکه (۱) مستقل از n است می توان نتایج جالبی از آن گرفت. مثلاً،

نتیجه: اگر p عددی طبیعی و زوج باشد داریم:

$$(2^{p-1})p!=\sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1}(-1)^k(p-2k)^p\binom{p}{k}$$

اثبات: در (۱) به جای n قرار دهید $\frac{p}{2}$، نتیجه بالا فوراً به دست می آید.

مروری بر نظریهٔ مجموعه های فازی (۲)

اسماعیل یزدانی پرائی

بخش ریاضی دانشگاه شهید باهنر کرمان

۱. مقدمه

ما در مقالهٔ اول تعاریف و مفاهیم اساسی نظریهٔ مجموعه های معمولی را مرور می کنیم، یعنی، آن مطالبی که زیربنای ریاضیات معاصرند، اما این تعاریف و مفاهیم بازبینی می شوند و به مفاهیمی که به زیر مجموعه های مشکک مربوطند گسترش خواهند یافت.

مانسبتاً به آرامی پیش خواهیم رفت تا خواننده ای که ریاضیدان نیست هم قادر باشد بدون مشکلی مطلب را دنبال کند.

مثالها به خواننده اجازه خواهند داد، که قدم به قدم، تمیز دهد که آیا مفاهیم جدید را خوب درک کرده است. ولی تمام آنچه در این مقاله ارائه شده است بسیار ساده است، نظریه مجموعه های معمولی حالت خاصی از نظریه زیرمجموعه های مشکک است (ما بزودی ملاحظه خواهیم کرد که چرا لازم است بگوییم زیرمجموعه مشکک ـ و نه مجموعه مشکک ـ مجموعه مرجع مشکک نمی باشد). ما در اینجا گسترشی جدید و بسیار مفید داریم، اما همان طور که مرتب متذکر خواهیم شد، آنچه را که ممکن است توسط نظریه زیر مجموعه های مشکک تفسیر و توضیح داد، بدون آن و با استفاده از مفاهیمی دیگر نیز می توان مورد بررسی قرار داد. همیشه می توان یک مفهوم ریاضی را با مفهومی دیگر جایگزین کرد، اما آیا این جایگزینی دارای خواصی آنچنان واضح و سازنده ای هست که کشف و اثبات یا استفاده ازآنها ساده تر باشد؟

۲. مروری بر مفهوم عضویت

فرض کنید E یک مجموعه و A زیرمجموعه ای از E باشد:

$$A \subset E \qquad (۲.۱)$$

اغلب برای بیان اینکه x عضوی از E که در A است نماد $\in$ را به کار می بریم:

$$x \in A \qquad (۲.۲)$$

برای بیان این عضویت می توانیم مفهوم دیگری نیز به کار بریم یعنی یک تابع مشخصه $\mu_A(x)$، که مقادیرش (۰ یا ۱) مبین این است که آیا x عنصری از A است یا نه:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases} \qquad (۲.۳)$$

مثال: مجموعهٔ متناهی با پنج عنصر را در نظر بگیرید

$$E = \{x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵\} \qquad (۲.۴)$$

و فرض کنید

$$A = \{x_۲, x_۳, x_۵\} \qquad (۲.۵)$$

می توانیم بنویسیم

$$\mu_A(x_۱) = ۰, \quad \mu_A(x_۲) = ۰, \mu_A(x_۳) = ۱, \mu_A(x_۴) = ۰, \quad \mu_A(x_۵) = ۱ \qquad (۲.۶)$$

این قرارداد به ما اجازه می دهد که A را با همراه کردن عناصر E با مقادیر مشخصه آنها نشان دهیم:

$$A = \{(x_۱,۰), (x_۲,۱), (x_۳,۱), (x_۴,۰), (x_۵,۱)\} \qquad (۲.۷)$$

خواص مشهور جبر بول را به یاد آورید:

فرض کنید $\overline{A}$ متمم A نسبت به E باشد:

$$A\cap\overline{A}=\varnothing \qquad (۲.۸)$$

$$A\cup\overline{A}=E \qquad (۲.۹)$$

اگر $x\in A$ آن گاه

$$x\notin\overline{A} \qquad (۲.۱۰)$$

لذا، اگر $\mu_A(x)=1$ آن گاه

$$\mu_{\overline{A}}(x)=0 \qquad (۲.۱۱)$$

$$\mu_{\overline{A}}(x_1)=1,\ \mu_{\overline{A}}(x_2)=0,\ \mu_{\overline{A}}(x_3)=0,\ \mu_{\overline{A}}(x_4)=1,\ \mu_{\overline{A}}(x_5)=0 \qquad (۲.۱۲)$$

و می‌توان نوشت که

$$\overline{A}=\{(x_1,1),(x_2,0),(x_3,0),(x_4,1),(x_5,0)\} \qquad (۲.۱۳)$$

حال با داشتن دو زیرمجموعهٔ A و B می‌توان اشتراک آنها را به صورت زیر تعریف کرد.

داریم

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A \ \text{اگر}\\ 0 & x\notin A \ \text{اگر}\end{cases} \qquad (۲.۱۴)$$

$$\mu_B(x)=\begin{cases}1 & x\in B \ \text{اگر}\\ 0 & x\notin B \ \text{اگر}\end{cases} \qquad (۲.۱۵)$$

$$\mu_{A\cap B}(x)=\begin{cases}1 & x\in A\cap B \ \text{اگر}\\ 0 & x\notin A\cap B \ \text{اگر}\end{cases} \qquad (۲.۱۶)$$

حال می‌توانیم بنویسیم.

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\mu_B(x) \qquad (۲.۱۷)$$

که در آن عمل طرف راست مطابق جدول ۱ . ۲ تعریف نشده است و آنرا ضرب بولی گوییم.

(∘)	0	1
0	0	0
1	0	1

جدول ۱ . ۲

(∘)	0	1
0	0	0
1	0	1

جدول ۲ . ۲

به روشی مشابه برای دو زیرمجموعه A و B، اجتماع تعریف می‌شود:

$$\mu_{A\cup B}(x)=\begin{cases}1 & x\in A\cup B \ \text{اگر}\\ 0 & x\notin A\cup B \ \text{اگر}\end{cases} \qquad (۲.۱۸)$$

همچنین ترکیب فصلی تعریف می‌شود:

$$\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\dot{+}\mu_B(x) \qquad (۲.۱۹)$$

که در آن عمل جمع بولی $\dot{+}$ با جدول ۲ . ۲ تعریف می‌شود.

مثال. مجموعه مرجع بند (۲ . ۴) و دو زیر مجموعه زیر را درنظر بگیرید.

$$A=\{(x_1,0),(x_2,1),(x_3,1),(x_4,0),(x_5,1)\} \qquad (۲.۲۰)$$

$$B=\{(x_1,1),(x_2,0),(x_3,1),(x_4,1),(x_5,1)\} \qquad (۲.۲۱)$$

می‌توان دید

$$A\cap B=\{(x_1,0/1),(x_2,1/0),(x_3,1/1),(x_4,0/0),(x_5,1/1)\}$$
$$=\{(x_1,0),(x_2,0),(x_3,1),(x_4,0),(x_5,1)\} \qquad (۲.۲۲)$$

$$A\cup B=\{(x_1,0\dot{+}1),(x_2,1\dot{+}0),(x_3,1\dot{+}1),(x_4,0\dot{+}0),(x_5,1\dot{+}1)\}$$
$$=\{(x_1,1),(x_2,1),(x_3,1),(x_4,0),(x_5,1)\} \qquad (۲.۲۳)$$

با ادامه دادن آنها دو زیرمجموعه زیر حاصل می‌شود:

$$\overline{A\cap B}=\{(x_1,1),(x_2,1),(x_3,0),(x_4,1),(x_5,0)\} \qquad (۲.۲۴)$$

$$\overline{A\cup B}=\{(x_1,0),(x_2,0),(x_3,0),(x_4,1),(x_5,0)\} \qquad (۲.۲۵)$$

این چند مثال سرآغاز آموزش زیر مجموعه های مشکک است.

۳ . احتمال، عدم قطعیت و عدم دقت

زیرمجموعهٔ A از Ω را می‌توان به عنوان پیشامدی از یک آزمایش تصادفی درنظر گرفت. برای مثال، فرض کنید دو

مروری بر نظریهٔ مجموعه‌های فازی (۲)

تاس را می‌ریزیم. فضای همهٔ پیشامدهای ممکن عبارت است از

$$\Omega = \{(i,j) | i,j = ۱,۲,\ldots,۶\}$$

پیشامد $A = \{(i,j) | i + j = ۷\}$ را درنظر بگیرید. این پیشامد به معنی این است که «مجموع خالهای دو تاس ۷ باشد». مطمئن نیستیم که در آزمایش بعدی این پیشامد اتفاق بیفتد. این نوع عدم قطعیت مربوط به تصادفی بودن آزمایش است، و می توان آنرا به‌وسیله مفهوم شانس، با احتمال اندازه گیری کرد. به‌طور اخص، ۳۶ حالت ممکن وجود دارد که در بین آنها ۶ حالت هستند که مجموع خالهای دو تاس ۷ می‌شود. بنابراین ۶/۳۶ یعنی نسبت حالات مساعد به حالات ممکن را می‌توان به عنوان احتمال رخداد A به‌کار برد

$$P(A) = ۶/۳۶$$

ما به‌طور رسمی دانشمان را در مورد رخداد مربوط به هر آزمایش تصادفی به وسیلهٔ تابع اندازه $P: ۲^{\Omega} \to [۰,۱]$ بیان می‌کنیم که در آن P دارای خواص اساسی زیر است:

الف) $P(\Omega) = ۱, P(\varnothing) = ۰$

ب) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ هرگاه $A \cap B = \varnothing$

درنتیجه داریم

$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \le P(B) \quad P(A') = ۱ - P(A)$$

یک تابع چگالی احتمال، به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

الف) $\varphi \ge ۰$ ب) $\sum_{\omega \in \Omega} \varphi(\omega) = ۱$

P توسط φ به طریق زیر به دست می‌آید

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} \varphi(\omega)$$

هنگامی که Ω نامتناهی باشد، مثلاً $\Omega = R$، به جای جمع، انتگرال به‌کار می‌بریم، مثلاً، اگر $A = [۰,۱]$

$$P(A) = \int_A \varphi(x)dx = \int_۰^۱ \varphi(x)dx$$

در حالتی که عدم قطعیت به لحاظ تصادفی بودن باشد، اندازه احتمال، دانش (احتمالی) ما را توصیف می‌کند، مثلاً به منظور تخمین چیزی.

مفهوم دیگری از عدم قطعیت، عدم دقت است. فرض کنید که پیشامد ما x باشد که فقط می توانیم آنرا در یک فاصله $[a,b]$ بگیریم. دانش احتمالی نادقیق زمانی به وجود می‌آید که اندازه احتمال P، که آزمایش را توصیف می‌کند، به‌طور کامل معلوم نیست، مثلاً فقط می‌دانیم که $P \in \rho$ (که ρ یک کلاس از اندازه‌های احتمال است)، لذا برای هر پیشامد A مقدار $P(A)$ نامعلوم است. ولی می‌توانیم دریابیم که $\inf_Q \in \rho Q(A) \le \sup_Q \in \rho Q(A)$.

فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد. منظور از زیرمجموعه A از X عبارت است از دسته‌ای از اعضاء X که دقیقاً مشخص شده باشند. و در بعضی موارد مجموعه A را با یک خاصیت مشخص می‌کنند. یعنی اگر P خاصیتی خوشتعریف روی X باشد که مجموعهٔ A توسط آن تعیین می‌شود، می‌توان نوشت $A = [x \in X \mid P(x)]$. امّا در بسیاری موارد P خاصیتی خوشتعریف نیست و در تعیین عناصر A دچار اشکال می‌شویم. مثلاً در حالات زیر P خوشتعریف نیست.

(آ) X مجموعه زنان و P خاصیت «زیبا» بودن

(ب) X مجموعه اعداد حقیقی و P خاصیت «خیلی بزرگتر از ۱» بودن

(ج) X مجموعه انسانها و P خاصیت «با هوش» بودن

(د) X مجموعه انسانها و P خاصیت «بلند قد» بودن

(هـ) X مجموعه کشورها و P خاصیت «غیرمتعهد» بودن

در مثالهای فوق عناصر مجموعه A توسط خاصیت P مشخص نمی‌شود، در واقع ضابطه P ذهنی و ناخوشتعریف بوده و تشخیص اعضاء A بستگی به فرد تصمیم گیرنده دارد. در اینجا با نوعی از عدم قطعیت مواجهیم که مربوط است به عدم مرزبندی دقیق و محکم مفاهیم.

این عدم قطعیت ربطی به نامعلوم بودن وقوع یک پیشامد همانند آنچه که در نظریه احتمال داریم نداشته و مربوط است به ناخوشتعریف بودن مفاهیم و بنابراین آن را در محدودهٔ احتمالات نمی‌توان بررسی کرد.

۴. مفهوم زیر مجموعه مشکک

با یک مثال شروع می‌کنیم. زیرمجموعه A از E را که در

مروری بر نظریهٔ مجموعه‌های فازی (۳)

بند (۲.۷) تعریف شد درنظر بگیرید. پنج عضو E به A متعلق هستند یا متعلق نیستند، فقط به یک صورت. یعنی تابع مشخصه فقط مقادیر ۰ یا ۱ را داشته باشد.

حال تصور کنید که این تابع مشخصه بتواند هر مقداری را هرچه باشد در فاصله $[0,1]$ داشته باشد. بنابراین، عضوی مانند x از E نمی تواند عضوی از A باشد ($\mu = 0$)، می تواند کمی عضو A باشد (μ نزدیک صفر)، می تواند کم و بیش عضو A باشد (μ نه خیلی نزدیک صفر نه خیلی نزدیک ۱)، می تواند قویاً عضو A باشد (μ نزدیک ۱)، یا بالاخره ممکن است عضو A باشد ($\mu = 1$).

بدینسان مفهوم عضویت گسترش جالبی بخود می گیرد، و همان طور که خواهیم دید، به توسعه های مفید منجر می گردد.

مفهوم ریاضی ای که با عبارت زیر تعریف شده

$$A[(x_1|0/2),(x_2|0),(x_3|0/3),(x_4|1),(x_5|0/8)] \qquad (4.1)$$

که در آن x_i عضوی از مجموعه مرجع E و عدد بعد از خط عمودی مقدار تابع عضویت برای آن عضو است، این مفهوم ریاضی زیرمجموعه مشکک E نامیده و به صورت زیر نشان داده می شود:

$$\tilde{A} \subset E \ \text{یا}\ A \tilde{\subset} E \qquad (4.2)$$

می توانیم عضویت در یک زیرمجموعه مشکک را به صورت زیر نشان دهیم

$$z \in_{0/2} A \ \text{و}\ y \in_{1} A \ \text{و}\ y \in_{0} A \qquad (4.3)$$

نماد $\in_1$ را می توان معادل $\in$ و $\in_0$ را معادل $\notin$ گرفت. به منظور اجتناب از دست و پاگیری علامتگذاری، ما به راحتی $\in$ را برای عضویت، و $\notin$ را برای عدم عضویت به کار می بریم.

بنابراین، زیرمجموعه مشکک تعریف شده در (۴.۱) کمی شامل x_1 است، اصلاً شامل x_2 نیست، کمی بیشتر شامل x_3 است، کاملاً شامل x_4 است و به میزان زیاد شامل x_5 است. این به ما اجازه می دهد که یک ساختار ریاضی بسازیم که با آن قادریم مقادیری را به کار بریم که با اینکه به طور ناچیزی تعریف شده اند ولی برای آنها عضویت در یک زیرمجموعه تا حدی دارای سلسله مراتب است. لذا می توانیم، در مجموعه مردان، زیرمجموعه مشکک مردان خیلی قد بلند، در مجموعه رنگهای اصلی، زیرمجموعه مشکک رنگهای سبز سیر، در مجموعه تصمیمها، زیرمجموعه ای مشکک از تصمیمهای خوب، و الی آخر را تعریف کنیم. ما به کارمان ادامه می دهیم تا ببینیم چگونه این مفاهیم را که بنظر می رسد به خوبی، منطبق بر عدم دقت رایج در علوم اجتماعی اند، به کار خواهیم برد.

فرض کنید که E یک مجموعه، شمارا یا ناشمارا، و x عضوی از E باشد. آن گاه زیرمجموعه مشکک $\tilde{A}$ از E مجموعه است از ازواج مرتب زیر:

$$\left[(x|\mu_{\tilde{A}}(x))\right],\ \forall x \in E; \qquad (4.4)$$

به طوری که $\mu_{\tilde{A}}(x)$ مرتبه یا درجه عضویت x در $\tilde{A}$ است. لذا، اگر $\mu_{\tilde{A}}(x)$ مقادیرش را در مجموعه M، که مجموعه عضویت نامیده می شود، بگیرد، می توان گفت که x مقادیرش را در M به وسیله تابع $\mu_{\tilde{A}}(x)$ می گیرد. ما می نویسیم که

$$x \xrightarrow[\mu_{\tilde{A}}]{} M \qquad (4.5)$$

این تابع را نیز *تابع عضویت* می نامیم.

مثال ۱. مجموعه متناهی زیر را درنظر بگیرید:

$$E = \{a,b,c,d,e,f\} \qquad (4.6)$$

و مجموعه مرتب شده متناهی زیر

$$M = [0,\tfrac{1}{2},1] \qquad (4.7)$$

آن گاه

$$\tilde{A} = \left\{(a|0),(b|1),(c|\tfrac{1}{2}),(d|0),(e|\tfrac{1}{2}),(f|0)\right\} \qquad (4.8)$$

یک زیرمجموعه مشکک E است و می توان نوشت

$$a \in_0 \tilde{A},\ b \in_1 \tilde{A},\ c \in_{1/2} \tilde{A},\ d \in_0 \tilde{A}$$

مثال ۲. فرض کنید N مجموعه اعداد طبیعی و صفر باشد:

$$N = \{0,1,2,3,4,5,6,\ldots\} \qquad (4.9)$$

مروری بر نظریهٔ مجموعه‌های فازی (۲)

و $\tilde{A}$ زیرمجموعه اعداد طبیعی «کوچک» باشد

$$\tilde{A}=\{(0|1),(1|0/8),(2|0/6),(3|0/4),(4|0/2),(5|0),(6|0),\ldots\} \qquad (۴.۱۰)$$

البته در اینجا مقادیر تابعی $\mu_{\tilde{A}}(x)$ که در آن $x=0,1,2,3,\ldots$، به طور ذهنی داده شده‌اند. می‌توانیم بنویسیم:

$$\underset{1}{0\in}\tilde{A},\ \underset{0/8}{1\in}\tilde{A},\ \underset{0/6}{2\in}\tilde{A},\ \underset{0/4}{3\in}\tilde{A},\ \ldots \qquad (۴.۱۱)$$

۵. رابطه‌های تسلطی

در ابتدا طبیعت رابطه‌های تسلطی موجود بین دو nتایی مرتب را یادآوری می‌کنیم. دو nتایی مرتب زیر را درنظر بگیرید:

$$v=(k_1,\ \ldots,\ k_n) \qquad (۵.۱)$$

$$v'=(k'_1,\ \ldots,\ k'_n) \qquad (۵.۲)$$

که در آن $k_i,\ k'_i, i=1,2,\ldots,n$، متعلق به یک مجموعه مرتب K‌اند، که در آن رابطه ترتیب را با نماد $\geq$ نشان می‌دهیم. گوییم که v' مسلط بر v است و می‌نویسیم $v'\geq v$ (۵.۳) اگر و فقط اگر

$$k'_1\geq k_1, k'_2\geq k_2,\ \ldots\ ,\ k'_n\geq k_n \qquad (۵.۴)$$

مثال ۱. چهارتایی‌های زیر را درنظر بگیرید:

$$w=(3,4,1,4)\quad v=(2,2,0,4)\quad u=(7,3,0,5)$$

ملاحظه می‌کنیم که $u\geq v$ زیرا، $7>2, 3>2, 0=0, 5>4$.

چون حداقل یکی از مؤلفه‌های u، بزرگتر از مؤلفه مربوطهٔ v است، همچنین می‌توانیم بنویسیم $u>v$. به طریقی مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که $w>v$. اما u و w قابل مقایسه نیستند.

۶. اعمال ساده روی زیر مجموعه های مشکک

شمولیت. فرض کنید E یک مجموعه و M مجموعه عضویت متناظر آن باشد. فرض کنید $\tilde{B},\tilde{A}$ دو زیرمجموعه مشکک از E باشند. گوییم A مشمول در B است اگر

$$\forall x\in E: \mu_{\tilde{A}}(x)\leq\mu_{\tilde{B}}(x) \qquad (۶.۱)$$

این را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$\tilde{A}\subset\tilde{B} \qquad (۶.۲)$$

و اگر برای اجتناب از ابهام لازم باشد،

$$\tilde{A}\mathrel{\tilde{\subseteq}}\tilde{B}$$

که دقیقاً می‌گوید این یک شمولیت به مفهوم نظریه زیرمجموعه‌های مشکک است.

شمولیت اکید، متناظر با حالتی است که حداقل یک رابطه در (۵.۱) اکید باشد، که به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$\tilde{A}\subset\subset\tilde{B} \text{ یا } \tilde{A}\mathrel{\tilde{\subset}}\subset\tilde{B} \qquad (۶.۳)$$

ما سه مثال را مورد توجه قرار می‌دهیم

(۱) فرض کنید

$$E=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}, M=[0,1] \qquad (۶.۴)$$

$$\tilde{A}=\{(x_1|0/4),(x_2|0/2),(x_3|0),(x_4|1)\} \qquad (۶.۵)$$

$$\tilde{B}=\{(x_1|0/3),(x_2|0),(x_3|0),(x_4|0)\} \qquad (۶.۶)$$

داریم که

$$\tilde{B}\subset\tilde{A} \text{ چون } 1>0, 0=0, 0/2>0, 0/4>0/3 \qquad (۶.۷)$$

(۲) فرض کنید

$$\tilde{A}\subset E,\ \tilde{B}\subset E,\ M=[0,1] \qquad (۶.۸)$$

اگر

$$\forall x\in E: \mu^2_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{B}}(x) \qquad (۶.۹)$$

آن گاه

$$\tilde{B}\subset\tilde{A}$$

(۳) فرض کنید $E=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}, M=[0,1]$

می‌توانیم بنویسیم

(۶.۱۰)

$$E=\{(x_1|1),(x_2|1),(x_3|1),(x_4|1),(x_5|1)\}$$

لذا E مشمول در خودش به مفهوم نظریه زیر مجموعه‌های مشکک می‌باشد:

$$E\mathrel{\tilde{\subset}}E \qquad (۶.۱۱)$$

و این خاصیت برای هر E صادق است:

تساوی. فرض کنید E یک مجموعه و M مجموعه عضویت متناظرش باشد، و فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو زیرمجموعه مشکک از E باشند. گوییم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مساوی‌اند اگر و فقط اگر

$$\forall x\in E: \mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{B}}(x) \qquad (۶.۱۲)$$

این را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$\tilde{A} = \tilde{B} \qquad (۶.۱۳)$$

اگر حداقل یک x از E به قسمی باشد که $\mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{B}}(x)$ صادق نباشد، گوییم که $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مساوی نیستند، و به صورت زیر نشان می‌دهیم

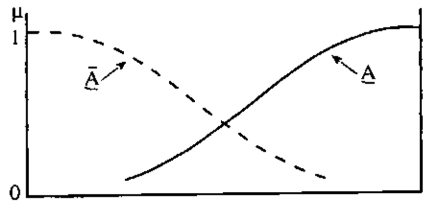
$$\tilde{A} \neq \tilde{B} \qquad (۶.۱۴)$$

متمم گیری. فرض کنید E یک مجموعه و $M=[0,1]$ مجموعه عضویت متناظرش باشد و $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو زیرمجموعه مشکک E، گوییم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ متمم یکدیگرند اگر

$$\forall x \in E: \mu_{\tilde{B}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \qquad (۶.۱۵)$$

این را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$\tilde{A} = \tilde{B} \text{ یا } \tilde{B} = \tilde{A} \qquad (۶.۱۶)$$



متمم

به طور وضوح همواره داریم

$$\overline{(\tilde{A})} = \tilde{A} \qquad (۶.۱۷)$$

در اینجا توجه داریم که متمم گیری برای $M=[0,1]$ تعریف شده است. اما ما می‌توانیم این را به سایر مجموعه های عضویت مرتب M با تعاریفی مناسب گسترش دهیم.

ما مثالی را مورد توجه قرار می‌دهیم:

$$E=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}, M=[0,1] \qquad (۶.۱۸)$$

$$\tilde{A}=\{(x_1|0.13),(x_2|0.61),(x_3|0),(x_4|0),(x_5|1),(x_6|0.03)\} \qquad (۶.۱۹)$$

$$\tilde{B}=\{(x_1|0.87),(x_2|0.39),(x_3|1),(x_4|1),(x_5|0),(x_6|0.97)\}$$

آن گاه حتماً

$$\tilde{A} = \tilde{B} \qquad (۶.۲۰)$$

اشتراک. فرض کنید E یک مجموعه، $M=[0,1]$ تابع عضویت متناظر با آن و $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ در زیر مجموعه مشکک از E باشند. اشتراک $\tilde{A}\cap\tilde{B}$ را به عنوان بزرگترین زیرمجموعه مشکک که مشمول در هر دوی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ است تعریف می‌کنیم. یعنی

$$\forall x \in E: \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\min(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)) \qquad (۶.۲۱)$$

مثال. فرض کنید

$$E=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}, \quad M=[0,1] \qquad (۶.۲۲)$$

$$\tilde{A}=\{(x_1|0.2),(x_2|0.7),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|0.5)\} \qquad (۶.۲۳)$$

$$\tilde{B}=\{(x_1|0.5),(x_2|0.3),(x_3|1),(x_4|0.1),(x_5|0.5)\} \qquad (۶.۲۴)$$

آن گاه

$$\tilde{A}\cap\tilde{B}=\{(x_1|0.2),(x_2|0.3),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|0.5)\}$$

بعلاوه با مراجعه به تعریف کلی (۶.۲۰) و (۶.۲۱)، می‌توان نوشت:

$$\forall x \in E: x \underset{\mu_{\tilde{A}}}{\in} A, x \underset{\mu_{\tilde{B}}}{\in} B \Rightarrow x \underset{\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}}{\in} A\cap B \qquad (۶.۲۵)$$

اجتماع. فرض کنید E یک مجموعه، $M=[0,1]$ تابع عضویت متناظر با آن و $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو زیرمجموعه مشکک از E، اجتماع

$$\tilde{A}\cup\tilde{B} \qquad (۶.۲۶)$$

را به عنوان کوچکترین زیرمجموعه مشکک که شامل هردوی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ است تعریف می‌کنیم. یعنی،

(۶.۲۷)

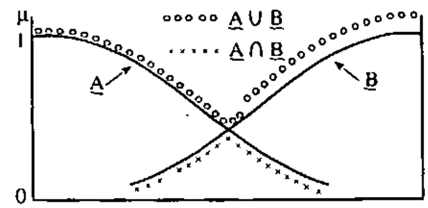
$$\forall x \in E: \mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\max(\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x))$$

با درنظر گرفتن مثالی که در (۶.۲۴)_(۶.۲۲) ارائه شد، ملاحظه می‌کنیم

(۶.۲۸)

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=\{(x_1|0.5),(x_2|0.7),(x_3|1),(x_4|0.1),(x_5|0.5)\}$$

مروری بر نظریهٔ مجموعه‌های فازی (۲)



اجتماع واشتراک

با درنظر گرفتن (۶.۲۶) و (۶.۲۷)، بعلاوه می‌توانیم بنویسیم:

(۶.۲۹)

$$\forall x \in E: \underset{\mu_{\tilde{A}}}{x \in \tilde{A}} \text{ و / یا } \underset{\mu_{\tilde{B}}}{x \in \tilde{B}} \Rightarrow \underset{\mu_{\tilde{A}\tilde{B}}}{x \in \tilde{A} \cup \tilde{B}}$$

جمع فصلی. جمع فصلی در زیر مجموعه مشکک برحسب اجتماع و اشتراک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (\tilde{A} \cap \bar{\tilde{B}}) \cup (\bar{\tilde{A}} \cap \tilde{B}) \qquad (۶.۳۰)$$

این عمل متناظر با «حرف ربط مشکک یا» است که «یاً» خوانده می‌شود «یا»، و فرض بر این است که مرتکب خطا نمی‌شویم. ما یک مثال را (مثالی که مورد استفاده اجتماع و اشتراک قرار گرفته) مورد توجه قرار می‌دهیم.

$$\tilde{A} = \{(x_1|0/2),(x_2|0/7),(x_3|1),(x_4|0),(x_5|0/5)\} \qquad (۶.۳۱)$$

$$\tilde{B} = \{(x_1|0/5),(x_2|0/3),(x_3|1),(x_4|0/1),(x_5|0/5)\} \qquad (۶.۳۲)$$

$$\bar{\tilde{A}} = \{(x_1|0/8),(x_2|0/3),(x_3|0),(x_4|1),(x_5|0/5)\} \qquad (۶.۳۳)$$

$$\bar{\tilde{B}} = \{(x_1|0/5),(x_2|0/7),(x_3|0),(x_4|0/9),(x_5|0/5)\} \qquad (۶.۳۴)$$

$$\tilde{A} \cap \bar{\tilde{B}} = \{(x_1|0/2),(x_2|0/7),(x_3|0),(x_4|0),(x_5|0/5)\} \qquad (۶.۳۵)$$

$$\bar{\tilde{A}} \cap \tilde{B} = \{(x_1|0/5),(x_2|0/3),(x_3|0),(x_4|0/1),(x_5|0/5)\} \qquad (۶.۳۶)$$

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \{(x_1|0/5),(x_2|0/7),(x_3|0),(x_4|0/1),(x_5|0/5)\}. \qquad (۶.۳۷)$$

تفاضل. تفاضل با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} \cap \bar{\tilde{B}} \qquad (۶.۳۸)$$

مجدداً مثال (۶.۲۴) و (۶.۲۵) را مورد توجه قرار داده و (۶.۳۶) و (۶.۳۷) را به کار می‌بریم

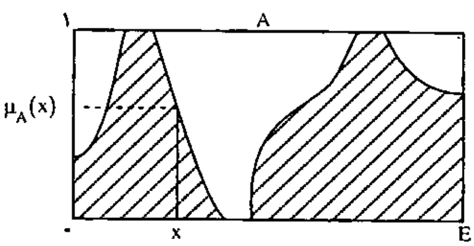
$$\tilde{A} \cap \bar{\tilde{B}} = \{(x_1|0/2),(x_2|0/7),(x_3|0),(x_4|0),(x_5|0/5)\} \qquad (۶.۳۹)$$

البته، بجز در موارد خاص،

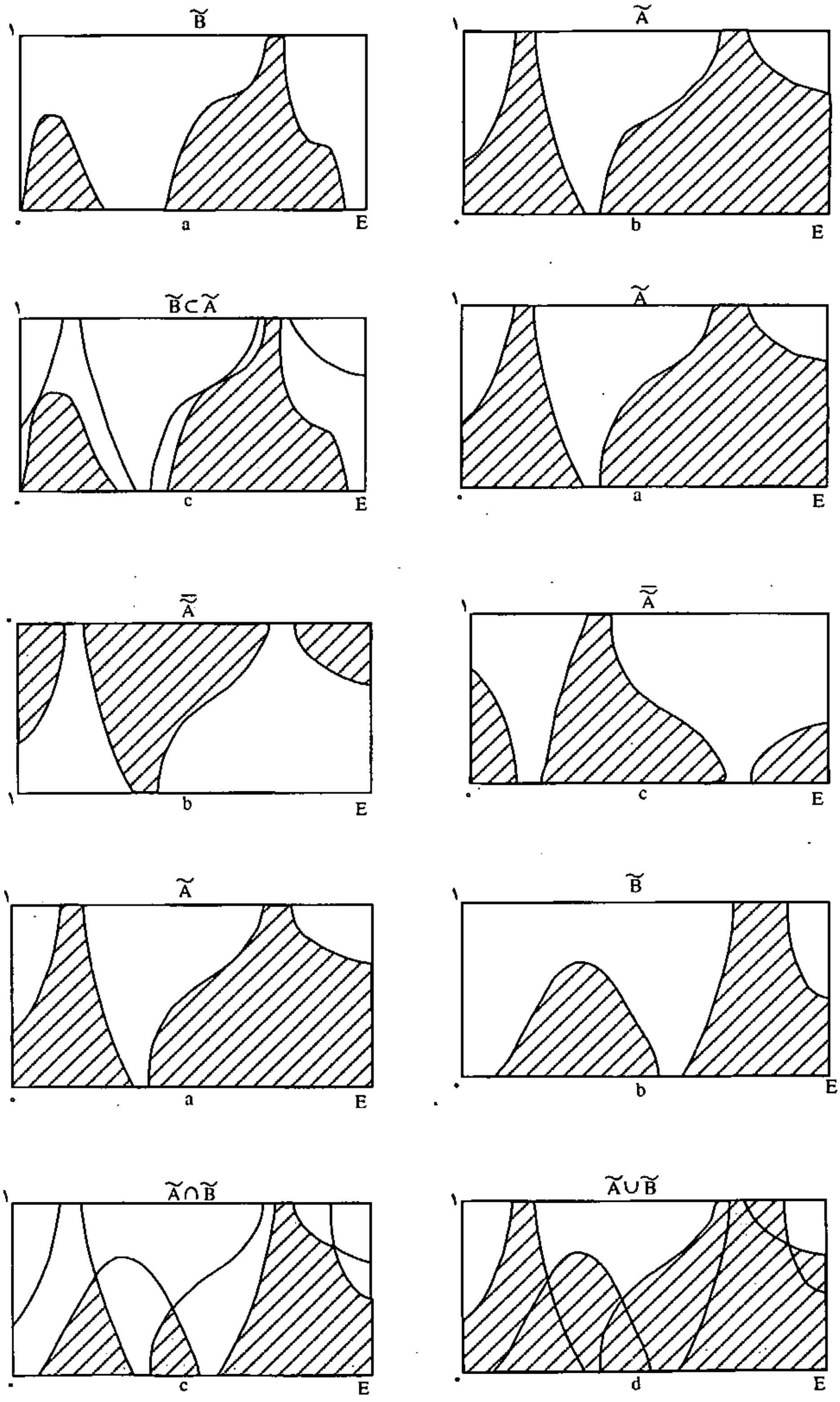
$$\tilde{A} - \tilde{B} \neq \tilde{B} - \tilde{A} \qquad (۶.۴۰)$$

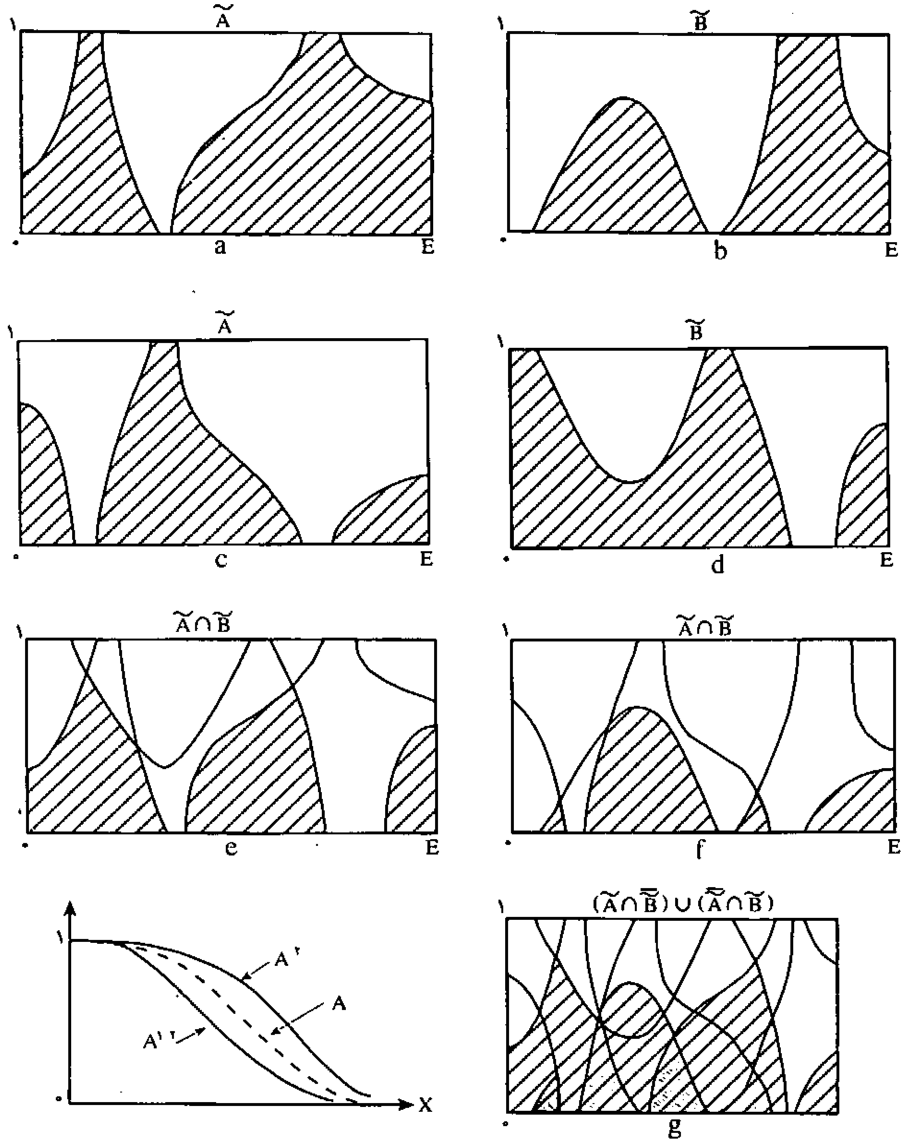
نمایش تصویری اعمال ساده روی زیرمجموعه های مشکک. در مورد زیر مجموعه های مشکک، می‌توان یک نمایش تصویری متجانس با آنچه که در مورد زیرمجموعه های معمولی است (دیاگرامهای ون ـ اویلر) ساخت.

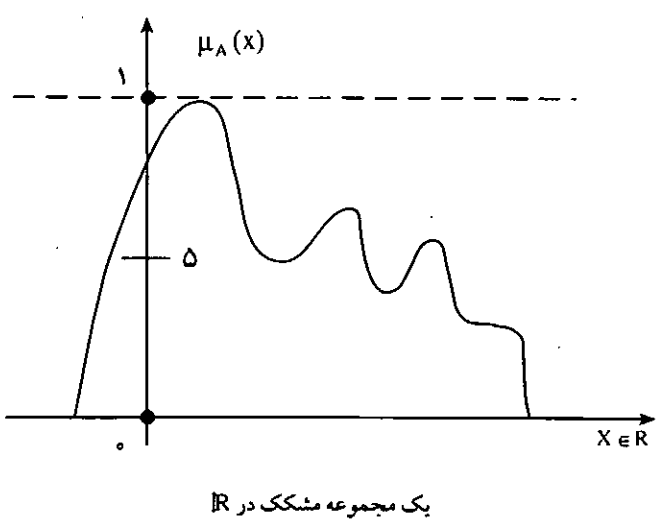
در شکل زیر یک مستطیل را با مقادیر $\mu_{\tilde{A}}(x)$ را به عنوان عرض و اعضاء E را با یک ترتیب دلخواه (اگر E ذاتاً و کلاً مرتب باشد، همین ترتیب را در نظر می‌گیریم) به عنوان طول در نظر بگیرید. در شکل زیر عضویت هر عضو با عرض آن نمایش داده شده است. قسمت هاشور خورده به طور قراردادی بیانگر* زیرمجموعه مشکک $\tilde{A} \subset E$ است.



در شکل های صفحه ۲۹ خاصیت شمولیت، متمم گیری و خواص اجتماع و اشتراک نشان داده شده است. و در شکل صفحه ۳۰ خواص تفاضل $\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} \cap \bar{\tilde{B}}$ و حاصل جمع فصلی $\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (\tilde{A} - \tilde{B}) \cup (\bar{\tilde{A}} \cap \tilde{B})$ بیان شده است.


B̃
Ã
a
b
E
B̃⊂Ã
Ã
c
a
Ã
Ã
b
c
Ã
B̃
a
b
Ã∩B̃
Ã∪B̃
c
d





یک مجموعه مشکک در ℝ

۷ . مجموعه زیرمجموعه های مشکک در حالتی که E و M متناهی اند .

برای زیرمجموعه های مشکک ، مجموعه توانی یا « مجموعه زیرمجموعه های مشکک » به روش دیگری ارائه می‌شود . ابتدا یک مثال را مورد توجه قرار می دهیم . فرض کنید

$$M = \{0, 1/2, 1\} \qquad (۷ . ۱)$$

$$E = \{x_1, x_2\} \qquad (۷ . ۲)$$

مجموعه زیرمجموعه های مشکک $\tilde{P}(E)$ عبارتند از

$$\tilde{P}(E) = \qquad (۷ . ۳)$$

$$\{\{(x_1|0),(x_2|0)\},\{(x_1|0),(x_2|0.5)\},\{(x_1|0.5),(x_2|0)\}\}$$

$$\{\{(x_1|0.5),(x_2|0.5)\},\{(x_1|0),(x_2|1)\},\{(x_1|1),(x_2|0)\}\}$$

$$\{\{(x_1|1),(x_2|0.5)\},\{(x_1|0.5),(x_2|1)\},\{(x_1|1),(x_2|1)\}\}$$

بطور کلی تر ، اگر

$$\mathrm{Card}E = n, \mathrm{Card}M = m \qquad (۷ . ۴)$$

که در آن منظور از " Card " عبارت است از تعداد عضوهای مجموعه ، آن گاه

$$\mathrm{Card}\ \tilde{P}(E) = m^n \qquad (۷ . ۵)$$

بنابراین نتیجه می شود که $\mathrm{Card}\ \tilde{P}(E)$ متناهی است اگر و فقط اگر m و n متناهی باشند . مجموعه $\tilde{P}(E)$ شامل 2^n زیرمجموعه معمولی است .

بخوبی می دانیم که ساختار مجموعه توانی $P(E)$ یک مجموعه یک شبکه توزیعی و متمم دار است ، یعنی یک شبکه بولی. درحالی که مجموعه زیرمجموعه های مشکک $\tilde{P}(E)$ ، دارای ساختار یک شبکه برداری است که توزیع پذیر است ولی متمم دار نیست .

یادآور می شود که در یک شبکه توزیعی اگر متمم یک عنصر وجود داشته باشد ، منحصر بفرد است و همین موضوع در شبکه برداری نیز درست است . متمم گیری که در اینجا مد نظر است معنی متفاوتی با آنچه که در (۵ . ۶) دادیم دارد .

این متمم گیری ، آنگونه که در یک شبکه ما به آن متمم گوییم ، لزوماً این را نمی دهد که $\tilde{A} \cap \bar{\tilde{A}} = \varnothing$ و $\tilde{A} \cup \bar{\tilde{A}} = E$. کل اختلاف همین است ، ولی چیز مهمی است .

در شکلهای ۶ . ۷ ـ ۱ . ۷ ما تعدادی مثال ساده ارائه می دهیم که به منظور ساده سازی برچسبها ، زیرمجموعه های مشکک را با توابع عضویت متناظرشان نمایش داده ایم .

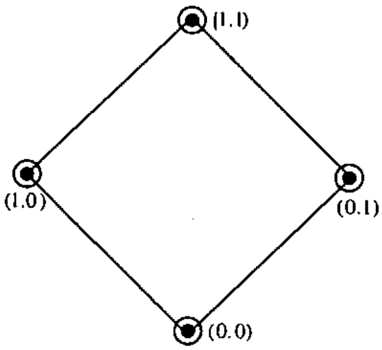
شکل ۲ . ۷ : $E = \{x_1, x_2, x_3\}, M = \{0, 1/2, 1\}$. این شکل یک شبکه برداری از زیرمجموعه های مشکک ، و شکل ۱ . ۷ یک شبکه بولی از زیرمجموعه های معمولی را نشان می دهد .

شکل ۴ . ۷ : $E = \{x_1, x_2, x_3\}, M = \{0, 1/2\ 1\}$. این شکل یک شبکه برداری از زیرمجموعه ها : مشکک ، و شکل ۳ . ۷ ، یک شبکه بولی از زیرمجموعه های معمولی را نشان می دهد .

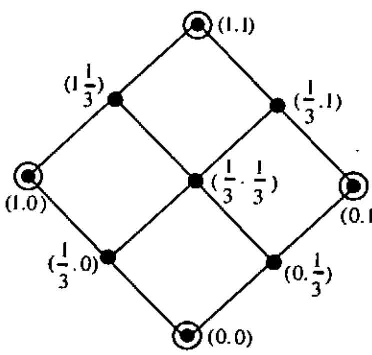
شکل ۶ . ۷ : این نمایش دیگری از شبکه برداری شکل ۴ . ۷ است ، که در سمت چپ آن یک شبکه بولی از مجموعه های معمولی (شکل ۵ . ۷) قرار گرفته است .

۸ . خواص مجموعه زیر مجموعه های مشکک

اگر $\tilde{A}$ ، $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ زیرمجموعه های مشکک E باشند ، همه خواص زیر برقراراند .



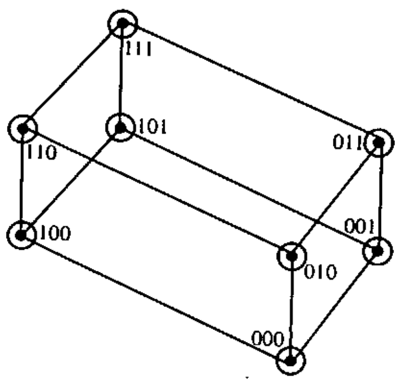
شکل ۱ . ۷



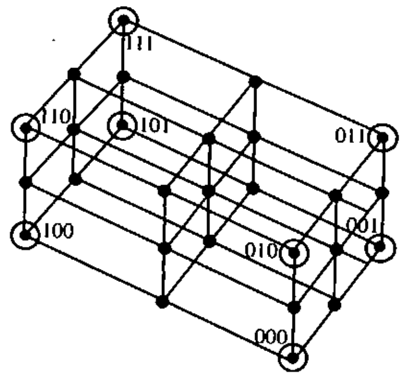
شکل ۲ . ۷

مروری بر نظریهٔ مجموعه‌های

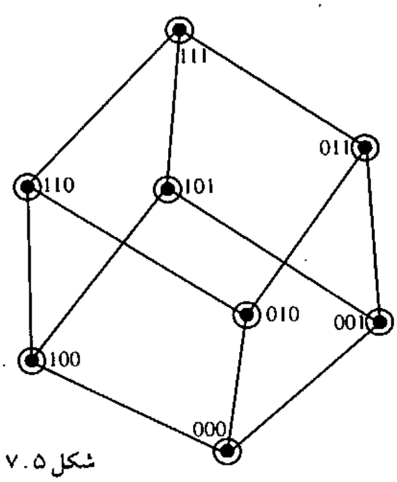
فازی (۲)



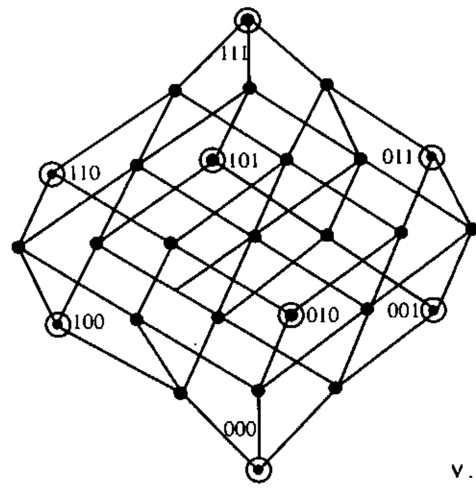
شکل ۷.۳



شکل ۷.۴



شکل ۷.۵



شکل ۷.۶

$\tilde{A}\cap\tilde{B}=\tilde{B}\cap\tilde{A}$ جابجایی

$\tilde{A}\cup\tilde{B}=\tilde{B}\cup\tilde{A}$

$(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cap\tilde{C}=\tilde{A}\cap(\tilde{B}\cap\tilde{C})$

$(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cap\tilde{C}=\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cup\tilde{C})$

$\tilde{A}\cap\tilde{A}=\tilde{A}$ خودنمایی

$\tilde{A}\cup\tilde{A}=\tilde{A}$

$\tilde{A}\cap(\tilde{B}\cup\tilde{C})=(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cup(\tilde{A}\cap\tilde{C})$ توزیعپذیری

$\tilde{A}\cup(\tilde{B}\cap\tilde{C})=(\tilde{A}\cup\tilde{B})\cap(\tilde{A}\cup\tilde{C})$

$\tilde{A}\cap\emptyset=\emptyset$ ، که در آن $\emptyset$ زیر مجموعه معمولی به قسمی است که: $\forall x\in E:\mu\emptyset(x)=0$

$\tilde{A}\cup\emptyset=\tilde{A}$

$\tilde{A}\cap E=\tilde{A}$ ، که در آن E زیر مجموعه معمولی به قسمی است که: $\mu_E(x_i)=1, \forall x\in E$

$\tilde{A}\cup E=E$

$\overline{(\bar{\tilde{A}})}=\tilde{A}$ متمم یابی

$\overline{\tilde{A}\cap\bar{\tilde{B}}}=\tilde{A}\cup\bar{\tilde{B}}$

قضایای دمورگان برای حالت زیرمجموعه های مشکک

$\overline{\tilde{A}\cup\bar{\tilde{B}}}=\tilde{A}\cap\bar{\tilde{B}}$

لذا، ما تأکیدمی کنیم: همه خواص مجموعه توانی معمولی را نداریم، بلکه این یک ساختار شبکه برداری است.

مروری بر نظریهٔ مجموعه های فازی (۲)

۹ . ضرب و جمع جبری در زیر مجموعه مشکک

فرض کنید E یک مجموعه و $M=[۰,۱]$ مجموعه متناظر عضویت آن باشد. فرض کنید $\tilde{A},\tilde{B}$ و زیر مجموعه مشکک E باشند. ضرب جبری $\tilde{A},\tilde{B}$ را که به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$\tilde{A}.\tilde{B} \qquad (۹.۱)$$

به طریق زیر تعریف می کنیم

$$\forall x\in E:\mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x) \qquad (۹.۲)$$

به همین روش جمع جبری، که به صورت زیر نمایش می دهیم

$$\tilde{A}\hat{+}\tilde{B} \qquad (۹.۳)$$

به طریق زیر تعریف می شود

$$\forall x\in E:\mu_{\tilde{A}\hat{+}\tilde{B}}(x)= \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x) \qquad (۹.۴)$$

مجدداً مثالهای (۲۴ . ۶) ـ (۲۲ . ۶) را در نظر بگیرید:

$$\tilde{A}=\{(x_1|۰/۲),(x_2|۰/۷),(x_3|۱),(x_4|۱),(x_5|۰/۵)\} \qquad (۹.۵)$$

$$\tilde{B}=\{(x_1|۰/۵),(x_2|۰/۳),(x_3|۱),(x_4|۱),(x_5|۰/۵)\} \qquad (۹.۶)$$

$$\tilde{A}.\tilde{B}=\{(x_1|۰/۱۰),(x_2|۰/۲۱),(x_3|۱),(x_4|۰),(x_5|۰/۲۵)\} \qquad (۹.۷)$$

$$\tilde{A}\hat{+}\tilde{B}=\{(x_1|۰/۶۰),(x_2|۰/۷۹),(x_3|۱),(x_4|۰/۱),(x_5|۰/۷۵)\} \qquad (۹.۸)$$

حال نکته مهم زیر را متذکر می شویم: اگر $M=\{۰,۱\}$، یعنی، اگر در حالت زیرمجموعه های معمولی باشیم، آن گاه

$$A\cup B=A\hat{+}B \quad (۹.۱۰) \qquad A\cap B=A.B \quad (۹.۹)$$

در واقع، اگر $\mu_A(x)\in\{۰,۱\}$ و $\mu_B(x)\in\{۰,۱\}$، جدولهای زیر معادلند، اما این برای $M\neq\{۰,۱\}$ مگر در چند حالت بدیهی درست نیست.

min	0	1
0	0	0
1	0	1

معادل است با

(•)	0	1
0	0	0
1	0	1

شکل ۱۱ . ۹

max	0	1
0	0	0
1	1	1

معادل است با

$(\hat{+})$	0	1
0	0	1
1	1	1

شکل ۱۲ . ۹

اگر دو عمل . و + را روی مجموعه توانی زیرمجموعه های مشکک در نظر بگیریم، تنها خواص زیر را می توان اثبات کرد، اینها به طور وضوح محدودتر از خواص $\cap$ و $\cup$ روی مجموعه توانی زیر مجموعه های مشکک اند، و به طریق اولی از خواص $\cap$ و $\cup$ روی مجموعه توانی زیرمجموعه های معمولی می توان به راحتی ثابت کرد:

$$\tilde{A}.\tilde{B}=\tilde{B}.\tilde{A} \qquad (۹.۱۳)$$
جابجایی
$$\tilde{A}\hat{+}\tilde{B}=\tilde{B}\hat{+}\tilde{A} \qquad (۹.۱۴)$$
$$(\tilde{A}.\tilde{B}).\tilde{C}=\tilde{A}.(\tilde{B}.\tilde{C}) \qquad (۹.۱۵)$$
شرکتپذیری
$$(A+B)+C=A+(B+C) \qquad (۹.۱۶)$$
$$\tilde{A}.\varnothing=\varnothing \qquad (۹.۱۷)$$
$$\tilde{A}\hat{+}\varnothing=\tilde{A} \qquad (۹.۱۸)$$
$$\tilde{A}.E=\tilde{A} \qquad (۹.۱۹)$$
$$\tilde{A}\hat{+}E=E \qquad (۹.۲۰)$$
$$\overline{(\bar{A})}=\tilde{A} \qquad (۹.۲۱)$$
$$\overline{\tilde{A}.\tilde{B}}=\bar{A}\hat{+}\bar{B} \qquad (۹.۲۲)$$

قضایای دمورگان برای اعمال . و + روی زیرمجموعه های مشکک

$$\overline{\tilde{A}\hat{+}\tilde{B}}=\bar{A}.\bar{B} \qquad (۹.۲۳)$$

برای اثبات (۱۶ .۹)، مثلاً، با فرض

$$:a=\mu_{\tilde{A}}(x),\quad b=\mu_{\tilde{B}}(x),\quad c=\mu_{\tilde{C}}(x) \qquad (۹.۲۴)$$

$(\tilde{A}\hat{+}\tilde{B})\hat{+}\tilde{C}=\tilde{A}\hat{+}(\tilde{B}\hat{+}\tilde{C})$ (۹.۲۵)، اثبات می شود اگر

$$(a+b-ab)+c(a+b-ab) \qquad (۹.۲۶)$$
$$c=a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)$$

اثبات شود. با بسط دو طرف این رابطه داریم

$$a+b-ab+c-ac-bc+abc \qquad (۹.۲۷)$$
$$=a+b+c-bc-ab-ac+abc$$

دو طرف این رابطه هم یکسانند. لذا (۹.۲۵) یک فرمول درستی است.

منابع:

(1) Asai, K., and Negoita, C.V., eds., *Introduction to Fuzzy Systems Theory.* Ohmsha, Tokyo (1978) (in Japanese).

(2) Dubois, D, and Prade. H., *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications,* Academic Press, Cambridge, Mass.(1980).

(3) Sugeno, M., "Fuzzy Theory [I]. "*Journal of the Society for Instrument and Control Engineers*. 22 (1), pp. 84 - 86 (1983) (in Japanese).

(4) Sugeno, M., "Fuzzy Theory [II]. "*Journal of the Society for Instrument and Control Engineers*. 22 (4), pp. 42 - 46 (1983) (in Japanese).

(5) Sugeno, M., "Fuzzy Theory [III]." *Journal of the Society for Instrument and Control Engineers*, 22 (5), pp. 38 - 42 (1983) (in Japanese).

(6) Sugeno, M.,"Fuzzy Theory [IV]". *Journal of the Society for Instrument and Control Engineers*. 22 (6), pp . 50 - 55 (1983) (in Japanese).

(7) Zimmerman, H.J., *"Fuzzy Set Theory - and Its Applications*, Kluwer - Nijhoff Publishing (1985).

(8) Kaufmann A., [1975], "Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets, "Vol. 1, Academic Press, New York.

(9) Gupta M.M. and Yamakawa T. [1988], "Fuzzy Logic in Knowledge - Based Systems, Decision and Control", North Holland, Amsterdam.

۱۰ ـ معرفی زیرمجموعه های مشکک، پیک ریاضی جلد پنجم شماره ۴ آذرماه ۱۳۷۱ صفحات ۳۷۲ ـ ۳۵۶.

۱۱ ـ مقدمه ای بر نظریه زیرمجموعه های فازی جلداول: اصول نظری بنیادی، نویسنده: کافمن، مترجم: ماشین چی ۳۷۱.

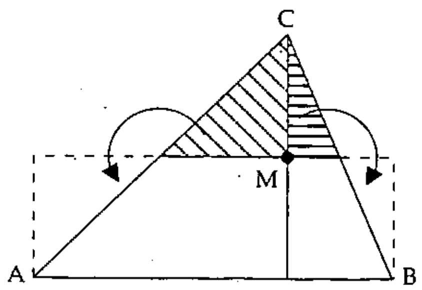
۱۲ ـ یادداشتهای درس منطق فازی و کاربرد آنها، مؤلف: هونگ. تی. گوئن، مترجم: ماشاءا... ماشین چی ۱۳۷۳.

بیشتر ببینیم، کمتر حساب کنیم

ترجمهٔ: دکتر احمد قرائی ـ اتریش

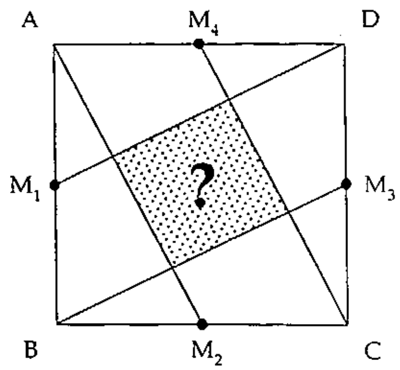
مثال هایی برای حل مسأله های هندسه

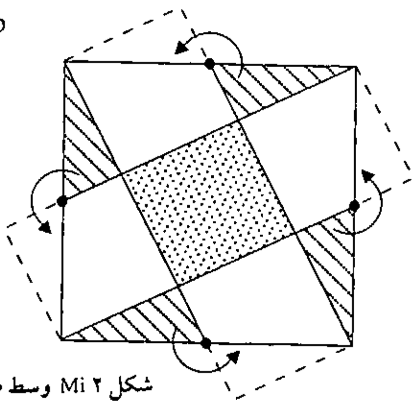
فرمول محاسبهٔ مساحت مثلث اغلب ازشکل ۱ به دست می آید. با این فرض که دانش آموزان قبول کنند خطی که از وسط ارتفاع مثلث موازی AB رسم می شود ضلع های AC و BC را نیز نصف می کند.



شکل ۱

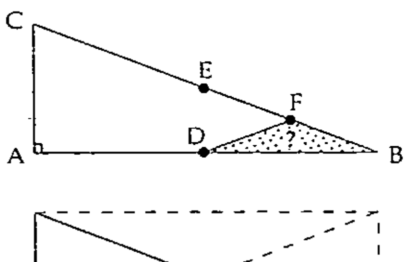
مشابه آن، مسأله مربوط به شکل ۲a است. شکل ۲b راه حل اساسی زیر را ارائه می کند: مساحت موردنظر برابر است با یک پنجم مساحت مربع.

۲a


۲b


شکل ۲ Mi وسط ضلع های مربع هستند

بدون استفاده از قضیهٔ خطوط موازی و مورّب می توان مسأله ای را که توسط شکل ۳a در یک مسابقه ریاضی (آلمان) به صورت کلامی مطرح شده بود حل کرد. برخی از دانش آموزان مثلث را به یک مستطیل تبدیل کرده و از خاصیت قطرها استفاده کردند (شکل ۳b).

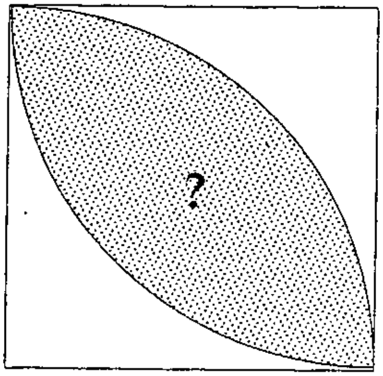
۳a


۳b


شکل ۳ ــ D ، E ، F وسط AB ، CB و EB هستند.

در شکل ۴ برخلاف مسایل بالا مساحت مطلوب بدون تغییر شکل از تفاضل زیر به دست می‌آید.

$$1-2(1-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}-1$$



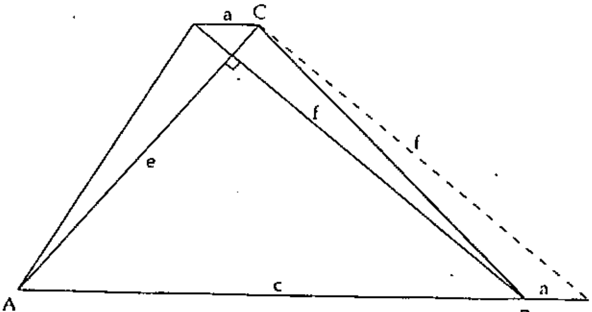
شکل ۴

مثال بعدی مربوط می‌شود به قضیه فیثاغورث. ذوزنقه ABCD با قاعده‌های a و c و قطرهای e و f داده شده است. ثابت کنید قطرها وقتی و فقط وقتی برهم عمودند که داشته باشیم:

$$(a+c)^2=e^2+f^2 \qquad (*)$$

در این جا اکثر دانش‌آموزان بلافاصله از قضیه تالس استفاده می‌کنند (سپس به مشکل برمی‌خورند، از دستگاه معادلات به دست آمده رابطهٔ مطلوب را نتیجه بگیرند).

دانش‌آموزان مستعدتر در (*) قضیهٔ فیثاغورث را تشخیص می‌دهند و آن را در شکل نیز می‌بینند (شکل ۵).



شکل ۵

با این دید خیلی سریع می‌توان به حلّ مسألهٔ زیر پی برد.

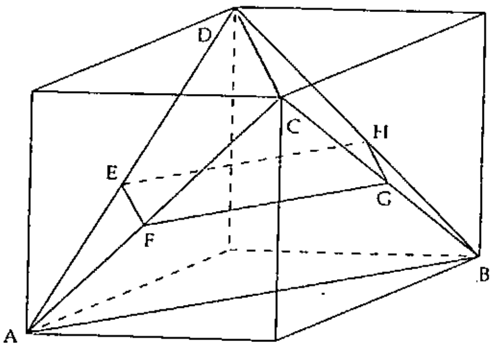
مثلث ABC مفروض است. به چه نسبتی خط موازی با AB ارتفاع وارد بر AB را تقسیم می‌کند هرگاه این خط مثلث را به دو قسمت با مساحت های برابر تقسیم کند؟ از آنجا که محاسبات اغلب همراه با اشتباه هستند، این ادّعا که مسأله را می‌توان ذهنی حل کرد موجب تعجب وکنجکاوی می‌شود. آنچه باید دیده شود این است که تمام مثلث با مثلث «کوچک» متشابه است. چون نسبت مساحت ها $\frac{2}{1}$ است پس مربع ضریب تشابه برابر با ۲ و از آن جا نسبت مطلوب $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ (محاسبه ذهنی!) خواهد بود. این مسأله را می‌توان به هندسه فضایی هم تعمیم داد.

هرگاه هرمی یا مخروطی توسط صفحه‌ای موازی قاعده به دو قسمت با حجم‌های برابر تقسیم شود، این صفحه ارتفاع را به نسبت $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ تقسیم می‌کند.

روش کامل کردن شکلها را می‌توان در فضا هم بکار برد.

در چهاروجهی منتظم ABCD، E ، F ، G ، H وسط یال های AD ، AC ، CB و BD هستند. ثابت کنید EFGH مربع است.

هرگاه چهاروجهی را در یک مکعب محاط کنیم، آنگاه E ، F ، G ، H مرکز وجه‌های مکعب خواهند بود و از آن جا مربع به سادگی قابل رؤیت است. حتی می‌توان به مساحت آن نیز پی برد (شکل ۶).



شکل ۶

در بیست و هفتمین المپیاد ریاضی آلمان از دانش‌آموزان خواسته شده بود ثابت کنند:

برای هر مکعب مستطیل به ابعاد a ، b ، c که قطر آن d و مساحت کل آن A است داریم $d=\frac{1}{3}(a+b+c)$ اگر و فقط اگر $A=8d^2$ باشد.

سعی کنید چنین مکعب مستطیلی را یکبار مجسم کنید. بعضی از دانش‌آموزان این کار را انجام دادند و متوجه شدند دریک مکعب مستطیل «واقعی» باید داشته باشیم $a+b+c<3d$! حالا چه می‌گویید؟

مرجع

MATHEMATIK LEHREN, HEFT 46

دو مسأله در نظریهٔ اعداد

تنظیم از دکتر لآلی

آقای علی رضا زارع، دانشجوی ریاضی دانشگاه یزد، نامه ای برای ما ارسال داشته اند که پس از اظهار لطف نسبت به مطالب مجله تقاضای حل دو مسأله را داشتند. از آنجایی که این نوع مسایل دارای نکات جالب و دارای برهان مقدماتی است، برهانی به صورت ذیل جهت علاقمندان تنظیم گردیده است.

مسأله اوّل: فرض کنید n عدد طبیعی ومربع نباشد. ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح a که نسبت به n اوّل است اعداد صحیحی مانند x و y هست که در شرایط ذیل صدق می کنند:

$$ax \equiv y \pmod n),\ 0 < |x| < \sqrt{n},\ 0 < |y| < \sqrt{n}$$

حل: فرض کنید $[\sqrt{n}] = k$. در این صورت، $k < \sqrt{n} < k+1$. حال اگر

$$A = \{(x,y) | x,y \in z, 0 \le x < \sqrt{n}, 0 \le y < \sqrt{n}\}$$

تعداد اعضای A برابر $(k+1)^2$ است. لذا، تعداد اعداد به صورت $ax - y$ که، $(x,y) \in A$ برابر $(k+1)^2$ است. از طرفی داریم $(k+1)^2 > n$. بنابر اصل حجره ها، دو عضو متمایز از A، مانند (x_1, y_1) و (x_2, y_2)، موجود است که

$$ax_1 - y_1 \equiv ax_2 - y_2 \pmod n$$

یا،

$$a(x_1 - x_2) \equiv (y_1 - y_2) \pmod n$$

حال اگر $x_0 = |x_1 - x_2|$ و $\operatorname{sign}(x_1 - x_2)$ $y_0 = |y_1 - y_2|$ آنگاه $0 \le x_0 < \sqrt{n}$ و $0 \le |y_0| < \sqrt{n}$ و چون دو نقطهٔ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) متمایزند و a و n نسبت بهم اول، پس $x_0 \neq 0$ و $y_0 \neq 0$. بنابراین، x_0 و y_0 دارای ویژگیهای مطلوبند.

تبصره: این قضیه معروف به قضیه توئه است و در اثبات یکی ازقضایای معروف نظریه اعداد مورد استفاده قرار می گیرد که صورت آن چنین است:

قضیه (فرما) شرط لازم و کافی برای اینکه عدد فرد اوّل P به صورت $x^2 + y^2$ باشد آنست که P به صورت $4k+1$ باشد.

[برهان کامل این قضیه را می توانید در کتاب تئوری مقدماتی اعداد، جلد دوم قسمت سوم صفحه ۱۵۶۵، تألیف دکتر غلامحسین مصاحب مشاهده نمایید.]

مسأله دوم: هرگاه $n > 1$، ثابت کنید مجموع $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ یک عدد صحیح نیست.

حل: حکم را به برهان خلف اثبات می کنیم. فرض کنید به ازای $n > 1$،

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = m$$

که در آن، m عدد صحیحی است. طرفین تساوی فوق را در $n!$ ضرب می کنیم، بنابراین،

$$n! + \frac{1}{2}.n! + \ldots + \frac{1}{n}.n! = m.n!$$

اگر s بزرگترین توان ۲ در $n!$ باشد و t بزرگترین توان ۲ دربین تمام اعداد از ۱ تا با n آنگاه k_0 ای هست که $1 < k_0 \le n$ و $k_0 = 2^t p$ که در آن p عددی فرد است. بنابراین،

$$\frac{n!}{2^{s-t}} + \ldots + \frac{n!}{2^{s-t} \times 2^t p} + \ldots + \frac{n!}{2^{s-t} \times n} = \frac{n!m}{2^{s-t}}$$

تمام جملات طرف راست و چپ تساوی فوق، بجز $\frac{n!}{2^s p}$، زوج است و این یک تناقض است.

تذکر: برهان این مسأله و برهان دیگری از آن بوسیله یکی ازخوانندگان گرامی ارسال شده است ولی آدرس و نام ایشان در نامه ذکر نگردیده است. از همه عزیزانیکه برای ما نامه می نویسند تقاضا داریم در موقع ارسال نامه، اسم و مشخصات خود و آدرس پستی را در بالای نامه ویا در انتهای آن درج نمایند.

میرائی مجموعه های ماتریسهای ۲ × ۲

by Mark A Miller
ترجمه و تنظیم از : میرزا جلیلی

آیا دانشجـویان دورهٔ لیسانس رشتـهٔ ریاضی آگاهی زیادی نسبت به آنهمـه ریاضیاتی که در قرن اخیـر کشف شده است دارند یا نه؟ یکی از مـفاهـیمی از این قـبیل کـه در دهه ۱۹۳۰ شکوفا شد، نظریهٔ حل پذیری است. گفته می شود یک مسأله حل پذیر است هرگاه یک فرآیند تعـیین کننده یا یک الگوریتم (یعنی یک فرآیند مـشخص که گامـهای با پایانی را برای حل یک مسـأله به کار ببرد) که مـنجر به حل مسأله گـردد وجود داشتـه باشد. هدف این مقـاله ذکر مـثالهایی از مـسائل باز و حل پذیر است و نشـان دادن آن راه برای حل مـسـائل دیگر. اطلاعـات مورد نیـاز برای درک مسـأله جـبر خطی در حـد چهارم دبیرستان است.

برای درک آسانتر بعضی از مفـاهیمی را که دنبال خواهیم کرد، مجموعه ماتریسهای ۲×۲ زیر را درنظر می گیریم:

$$A=\left\{\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix},\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix},\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\right\}$$

توجـه کنیـد کـه از ضـرب دو عـضـو اول A مـاتریس $\begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}$ حاصل می شـود که درایه های روی قطر اصلی آن مساوی شده است. همچنین از ضرب عضو سوم در خودش ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ حـاصل می شـود که هـمانْ خـاصـیت را داراست. **در حالت کلی یک مجـموعهٔ با پایان از ماتریسـها، گفته می شود دارای حاصلضرب برابر شده هستند.**

هرگـاه حاصلضـربی (به هر تعدادی) از مـاتریسهـای این مجمـوعه وجود داشته باشد کـه دارای درایه های مساوی در جاهای مشخص و از قبل تعیین شده باشند.

اگر بخواهیم که آن جاهای مشخص شده روی قطر اصلی باشد، مجـموعه A بالا دارای حاصلضرب برابر شده است ولی مجموعهٔ زیر دارای چنین خاصیتی نیست:

$$B=\left\{\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix},\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix},\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}\right\}$$

چونکه درایه های بالایی و سـمت چپ هر حاصلـضرب همواره از درایه های پاییـنی و سمت راست کوچکتـر خواهد بود. توجه کنید که مجموعـهٔ ماتریسهای مورد بررسی ممکن است خـود شامل عـضوی با درایه های مـساوی در جـاهای معین باشد، و حاصلضـربها می توانند شامل این ماتریس نیز باشند و این حالت آخری است که یافـتن حاصلضربهای برابر شـده را در یک مجـموعـه از ماتریسـها بیـشتـر مبارزطلب می سازد، چونکه هرکدام از مـاتریسها می تواند به عنوان یک عـامل ضـرب به تعـداد زیاد دلخـواه به کـار برده شـود. در حقـیقت اگر ما یک الـگوریتم بخواهیم که تعـیین کند آیا یک حاصلضرب برابر شده در یک مجمـوعهٔ ماتریسهای مفروض وجـود دارد یا نه یا فرآیندی کـه «هر حـاصلضرب مـمکن از ماتریسـها را در مجـموعه بررسی کند»، اگـر مجمـوعه یک حاصلضـرب برابر شده نداشتـه باشد، چون فـرآیند هیچگاه خاتمه نمی پذیرد، هرگز به ما جواب نمی دهد.

فرض کنید ما یک مجموعه از ماتریسهای خاصی را مورد بررسی قرار می دهیم، مثلاً تمـام ماتریسهای قطری ۲×۲ با

درایه های صحیح آیا الگوریتمی وجود دارد که به ما بگوید هر مجموعه متناهی از چنین ماتریسهایی دارای حاصلضرب برابر شده است یا نه؟ نتیجه اینکه جواب به این مسأله برابری درایه «بله» است (پانوشت [۱] را ببینید) و آن بدین معناست که این مسأله خاص حل پذیر است.

برای درک بیشتر نسبت به مسائل برابری درایه، در ابتدا باید به ایدههای پشت مسأله توجه کنیم. **یک مجموعه متناهی از ماتریسهای غیر صفر $n \times n$ با درایه های صحیح گفته می شود میرا است هرگاه حاصلضربی از ماتریسها در این مجموعه وجود داشته باشد که برابر ماتریس صفر باشد.** مسأله میرائی در حقیقت طرح این مسأله است که آیا الگوریتمی برای تعیین میرائی یک مجموعه مفروض از ماتریسها وجود دارد یا نه؟ اگر چنین الگوریتمی وجود نداشته باشد گوییم مسأله میرائی حل ناپذیراست.

مشخص شده است (پانوشتهای [۲] و [۳] را ببینید) که برای $n \geq ۳$ مسأله میرائی معادل است با مسأله حل ناپذیر معروف قبلی و لذا خودش حل ناپذیر است. برای $n = ۱$ مسأله بدیهی است از این جهت تنها حالتی که هنوز قطعی نشده است حالت ماتریسهای ۲×۲ است.

برای حالتهای خاصی از ماتریسهای ۲×۲ نشان داده شده است که مسأله میرائی حل پذیر است. مثلاً اگر ماتریسها همگی بالا مثلثی یا پایین مثلثی باشند، ما تنها نیاز به این بررسی داریم که ببینیم آیا برای هر محل روی قطر حداقل یک ماتریس در مجموعه با درایه های صفر روی قطر وجود دارد. (همچنین پانوشت [۱] را ببینید). اگرچه مسأله در حالت کلی ممکن است حل ناپذیر باشد اما ممکن است نوعی از محدودیتها (مثل بالا) را پیدا کرد که مسأله را حل پذیر سازد، و با تضعیف بعضی از این محدودیتها، حتی جزیی، ممکن است ناگهان مسأله حل ناپذیر گردد.

کروم و کروم[۱] ثابت کردند که مسأله درایه برابر معادل است با مسأله میرائی ماتریسهای ۲×۲ به عبارت دیگر، اگر یکی حل پذیر باشد دیگری نیز حل پذیر است.

(۱) ـ آیا الگوریتمی وجود دارد که نشان دهد مسأله درایه برابر، برای یک مجموعه متناهی P از ماتریسهای غیر منفرد ۲×۲ (ماتریسهایی که دترمینان آنها مخالف صفر است) با درایه های صحیح، ماتریسی مثل C وجود دارد که یک حاصلضرب از اعضای P که عضو C است دارای این خاصیت باشد $C_{۲۱} = C_{۲۲}$ یا نه؟

(۲) ـ آیا الگوریتمی وجود دارد که تعیین کند که برای هر مجموعهٔ متناهی P از ماتریسهای پایین مثلثی غیرمنفرد ۲×۲ با درایه های صحیح، حاصلضربی از اعضای P یافت می شود که عضوهای سطر دوم آن برابر باشند؟

اگر جواب (۲) منفی باشد آن گاه جواب (۱) نیز منفی است لذا مسأله میرائی حل ناپذیر است.

یادآوری کنیم که اگر مسأله (۱) یا حتی مسأله (۲) حل ناپذیر باشد، شاید بتوانیم با اعمال نوعی از محدودیتها و عبور از نوعی به نوع دیگر از حل ناپذیری به حل پذیری برسیم.

در این راستا ما محدودیتهای اضافی بر (۲) اعمال کرده ایم تا به حالتی برسیم که قادر باشیم نشان دهیم مسأله حل پذیر است.

فرض کنید P یک مجموعه متناهی از ماتریسهای پایین مثلثی غیر منفرد ۲×۲ با درایه های صحیح باشد. همچنین فرض کنید درایه ها در هر ماتریس خاص دارای علامت یکسان باشند، مثلاً نامنفی و با فرض این که درایه بالا و سمت چپ حداقل مساوی درایه پایین و سمت راست باشد (ما می توانیم فرض کنیم که تمام درایه ها نامنفی هستند، لذا با ضرب در -۱ تغییری در حاصلضرب برابر شده ایجاد نخواهد شد). به عبارت دیگر با مجموعهٔ زیر سر و کار داریم:

$$\left\{\begin{bmatrix} m_{۱۱} & ۰ \\ m_{۲۱} & m_{۲۲} \end{bmatrix} \middle| m_{ij} \in \mathbb{Z}, m_{ij} \geq ۱, m_{۱۱} \geq m_{۲۲}, m_{۱۱}m_{۲۲} \neq ۰\right\}$$

قبل از اینکه نشان دهیم برای این حالت خاص تحدید شده الگوریتمی وجود دارد، توجه می کنیم که هدف ثابت کردن حل پذیری مسأله در این حالت است. آنچه که ما باید انجام دهیم تعیین یک الگوریتم است، مهم نیست که کارآیی آن تا چه اندازه ممکن است باشد.

نمایش الگوریتم

فرض کنید P یک مجموعه متناهی از ماتریسهای مثلثی غیر منفرد ۲×۲ به صورت، $\begin{bmatrix} x & ۰ \\ y & z \end{bmatrix}$ باشد به قسمی که x، y و z اعداد صحیح نامنفی هستند و $x \geq z$. هدف این است که نشان دهیم الگوریتمی وجود دارد که تعیین کند آیا یک حاصلضرب بوجود آمده از اعضای P برابر ماتریسی مثل E است به قسمی که $e_{۲۱} = e_{۲۲}$ ؟

چونکه ضرب یک عدد در یک ماتریس تغییری در نتیجه نهایی مسأله درایه برابر ایجاد نمی کند ما می توانیم هر ماتریس را در $\frac{۱}{z}$ متناظر با آن ماتریس ضرب کنیم (توجه کنید که اعضای P غیر منفی است) این کار به ما مجموعهٔ P' از ماتریسهای به شکل $\begin{bmatrix} a & ۰ \\ b & ۱ \end{bmatrix}$ خواهد داد که $a \geq ۱$ و توجه کنید وقتی که ما چنین دو ماتریسی را در هم ضرب کنیم خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} a_۱ & ۰ \\ b_۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_۲ & ۰ \\ b_۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_۱a_۲ & ۰ \\ a_۲b_۱ + b_۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

لذا

$$e_{۲۱} = a_۲b_۱ + b_۲ \ , \ e_{۲۲} = ۱$$

اگر ما سه تا از این ماتریسها را در هم ضرب کنیم آن گاه،

$$e_{۲۱} = a_۳a_۲b_۱ + a_۳b_۲ + b_۳$$
$$= a_۳(a_۲b_۱ + b_۲) + b_۳$$

و

$$e_{۲۲} = ۱$$

و در حالت کلی اگر m تا از اینها را در هم ضرب کنیم آن گاه،

$$e_{۲۱} = a_m x_m + b_m \ \text{و} \ e_{۲۲} = ۱$$

درحالیکه

$$x_۱ = ۰ \ \text{و} \ x_{m+۱} = a_m \ x_m + b_m$$

توجه کنید همینطور که عاملها از طرف راست در حاصلضرب، ضرب می شود، x_m در حال نانزولی باقی می ماند (چونکه a ها حداقل برابر ۱ و b ها مثبت هستند)

می خواهیم بدانیم که آیا مجموعه ای از ماتریسهای $\begin{bmatrix} a_i & ۰ \\ b_i & ۰ \end{bmatrix} \in P'$ که $i = ۱ \ , \ ۲ \ , \ \ldots \ m$ وجود دارد به قسمی که داشته باشیم،

$$a_m x_m + b_m = ۱$$

یا معادل آن:

$$x_m = \frac{۱ - b_m}{a_m}$$

یا نه؟

توجه کنید که در تساوی اخیر، کسر طرف راست فقط شامل عضوهای آخرین ماتریس (ماتریس m اُم) در حاصلضرب است و طرف چپ تساوی شامل اعضای ماتریس قبلی $m-۱$ اُم است. این به ما می گوید، مثلاً، که اگر m امین ماتریس دارای $b_m = ۱$ نباشد آن گاه آن عضو نانزولی متناظر $x_m > ۰$ و لذا حداقل یکی از $m-۱$ ماتریس قبلی در یک حاصلضرب برابر شده ماتریس قطری نیستند زیرا b_i وجود دارد به قسمی که $b_i > ۰$ برای $i < m$.

در امتحان یک مجموعه متناهی P از ماتریسها برای یافتن یک حاصلضرب برابر شده، اول ما مجموعه جدید P' را تشکیل می دهیم و سپس یک ترتیبی را به P' نسبت می دهیم و آن گاه برای هر ماتریسی از P' با آن ترتیب امتحان می کنیم که ببینیم آیا آن می تواند آخرین ماتریس (یا m امین) ماتریس در یک حاصلضرب برابر شده از m ماتریس باشد؟ گامهای این الگوریتم به قرار زیر است:

۱ـ اگر تمام ماتریسها در P' قطری باشند آن گاه الگوریتم را متوقف می کنیم با جواب «خیر» (یعنی حاصلضرب برابر شده وجود ندارد).

دیگر، i را برابر صفر قرار بدهید، $i = ۰$

۲ـ قرار بدهید $i = i + ۱$ و $m = ۰$

۳ـ اگر i امین ماتریس $\begin{bmatrix} a & ۰ \\ b & ۱ \end{bmatrix}$ باشد قرار دهید

$$d = \frac{۱ - b}{a}$$

۴ـ اگر $d = ۰$ آن گاه الگوریتم را متوقف کنید با جواب «آری» (یعنی ماتریس i ام در P یک حاصلضرب برابر شده است).

۵ـ قرار بدهید $m = m + 1$

۶ـ ماتریس i ام را در P' مورد بررسی قرار دهید که آیا m امین عامل در حاصلضرب m ماتریس است. اگر $m = 1$ به گام ۵ بروید.

۷ـ بروید به میان m^{m-1} انتخاب برای آنکه اولین $m - 1$ ماتریس در حاصلضرب چه خواهد بود. محاسبات متناظر با x_m را انجام دهید و یک فهرستی از این x_m را محاسبه کنید.

۸ـ حالت۱. وجود دارد یک d به قسمی که $x_m = d$

الگوریتم را متوقف کنید با جواب «yes»

حالت۲. برای تمام x_m ، $x_m > d$

اگر $i < n$ به گام ۲ بروید

دیگر، الگوریتم را متوقف کنید با جواب «خیر» چونکه تمام درایه های ماتریسها نامنفی هستند و x_m نا نزولی است

در غیر این صورت: به گام ۵ بروید

برای نمایش آنکه این الگوریتم چگونه کار می کند ۲ مثال در زیر آمده است

مثال ۱ : فرض کنید

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۶ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ ۸ & ۶ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۸ & ۰ \\ ۹ & ۴ \end{bmatrix} \right\}$$

اولین ماتریس در P تنها ماتریسی است که شانس آخرین عامل ضرب بودن را در یک حاصلضرب برابر شده دارد. آن سه تای دیگر هرکدام دارای $d > ۰$ اگرچه مقدار d برای اولین ماتریس، کمتر از تمام مقادیر ممکن x_m است و از اینجهت این مجموعه P نمی تواند یک حاصلضرب برابر شده را تولید کند.

مثال ۲ : فرض کنید

$$P = \left\{ \begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۶ & ۱ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۸ & ۰ \\ ۴ & ۸ \end{bmatrix} \right\}$$

اولین ماتریس پس از محاسبه $x_۳$ ها خط می خورد، ماتریس دوم همچنین دارای $d > ۰$. ضمن محاسبه $x'_۴$ ها برای سومین ماتریس کشف می شود که مربع آن ماتریس یک حاصلضرب برابر شده است. همچنین، حاصلضرب ماتریسهای سوم و چهارم نیز حاصلضرب برابر شده است خواننده ممکن است علاقمند باشد که سایر صورتهای درایه های برابر را نیز امتحان کند. چنین حاصلضربهایی از ماتریسهای ۲×۲ دارای درایه های برابر در محل های ستون دوم هستند. همچنین برای آگاهی از حل ناپذیری انواع مختلف دیگر ماتریسهای ۲×۲ شماره [۴] را ملاحظه کنید.

نویسنده مدیون سردبیر و همهٔ داورها برای تعبیر مفید خود می باشد.

منابع

[۱] Melvin Krom and Myren Krom Solvability of Problems with matrices.

[۲] Michal . S. Paterson unsolvability of 3×3×3 Matrices, Studies in applied mathematics 49 (1970) 105 -107.

[۳] P. Schultz Mortality of 2×2 matrices, Amer Math Month, 84 (1977) 463 - 464 Correction, 85 (978) 263.

[۴] Jan My Cielski Equations unsolvability in GL2 (c) and related Problems. Amer Math month, 85.

چگونه یک برنامهٔ آموزش دروس با سؤالهای چهار جوابی تهیه کنیم؟

(قسمت سوّم)

مهندس قراخانی بهار
گروه کامپیوتر دفتر تحقیقات

چکیده

در این قسمت از مقاله نحوهٔ ایجاد برنامه برای انتخاب و ایجاد سؤالات مورد شرح و بررسی قرار گرفته است. برای این قسمت از کار شرحی از منطق برنامه و همچنین اصل برنامه ارائه گردیده است.

مقدمه

در قسمتهای قبلی این مقاله مطلب را به آنجا رساندیم که «فهرست انتخاب چگونه ساخته می‌شود» و در انتها قطعه برنامه‌ای به زبان بیسیک را برای آن ارائه دادیم. اینک در دنبالهٔ آن مطالب، نحوهٔ تهیهٔ برنامه مربوط به انتخاب اوّل از این فهرست را شرح می‌دهیم.

نحوهٔ ایجاد برنامه برای عملیات انتخاب اوّل

همان طور که فهرست انتخاب نشان می‌دهد، انتخاب اوّل به ایجاد سؤالات مربوط می‌شود. اطلاعات مربوط به هر سؤال ما، در عمل دارای یک شرح سؤال، ۴ شرح جواب و یک عدد بین ۱ تا ۴ برای پاسخ درست آن سؤال خواهد بود. برای این کار باید فایلی انتخاب کنیم و اطلاعات وارده مربوط به هر سؤال را در داخل آن قرار دهیم.

برای ضبط اطلاعات مربوط به سؤالات فایلی به نام QUESTION و با حالت دستیابی «تصادفی» (Random) انتخاب شده است. توضیح این که رکوردها یا سطرهای این فایل که هرکدام حاوی اطلاعات مربوط به یک سؤال خواهند بود از طریق یک شماره که یک عدد صحیح و مثبت (در محدودهٔ تعریف اعداد صحیح در زبان بیسیک) است، قابل دسترسی هستند. اگر فرض کنیم که برای هر موضوع ۵۰۰ سؤال در نظر گرفته شود، در این صورت سؤالهای با شمارهٔ ۱ تا ۵۰۰ و در مورد هر موضوع درسی، در رکوردها، سطرهای ۱، ۵۰۱، ۱۰۰۱، ۱۵۰۱ و غیره از این فایل، قابل ضبط خواهند بود.

اسامی فیلدهای این فایل به ترتیب A1$ برای پاسخ اوّل، A2$ برای پاسخ دوم، A3$ برای پاسخ سوّم، A4$ برای پاسخ چهارم و QS$ برای شرح خود سؤال و بالاخره AN$ برای جواب صحیح در نظر گرفته شده است. طول هر کدام از پاسخها و یا شرح سؤال، ۲۵ کاراکتر و طول جواب صحیح یک کاراکتر است. یک کاراکتر دیگر تحت عنوان US$ نیز برای نشان دادن اشغال بودن یا نبودن رکورد، در نظر گرفته شده است. وقتی در سطری از فایل (و یا به اصطلاح در رکوردی از آن)، اطلاعات مربوط به سؤالی را ضبط کردیم، در US$، علامت «y» را قرار می‌دهیم. برای حذف یک سؤال از مجموعهٔ سؤالات موجود، در این محل علامت «N» قرار می‌گیرد. به بیان دیگر US$ پر یا خالی بودن رکورد برای ضبط یک سؤال جدید را مشخص می‌کند.

صورت قطعه برنامهٔ حاوی این قسمت در زیر نشان داده شده است. تعریف فایل و فیلدهای آن در سطرهای 1010 تا 1070 صورت گرفته است.

```
1000, Create Question Routine
1010 OPEN "R", #1, "QUESTION", 128
1020 FIELD #1, 0    AS QQ$,25 AS A1$
1030 FIELD #1,25    AS QQ$,25 AS A2$
1040 FIELD #1,50    AS QQ$,25 AS A3$
```

```
1050 FIELD #1,75   AS QQ$,25 AS A4$
1060 FIELD #1,100 AS QQ$,25 AS QS$
1070 FIELD #1,125 AS QQ$,1   AS AN$,1
 AS US$
```

همچنین قطعه برنامهٔ مربوط به ورود اطلاعات یک سؤال در زیر نشان داده شده است. سطرهای 1080 الی 1980 بدنهٔ اصلی برنامهٔ این قسمت را می سازند. در اینجا نیز حلقه ای ساخته ایم که برای گرفتن اطلاعات مربوط به سؤالات مختلف دایماً تکرار می شود، مگر آن که به جای شمارهٔ سؤال (که در برنامه درخواست می گردد) صفر وارد شود.

```
1080 QN=1
1090 WHILE QN< >0
1100 CLS: COLOR 3
1110 LOCATE 8, 28: PRINT "CREATE
QUESTION"
1111 LOCATE 12, 28: PRINT "ENTER
QUESTION >>>"
1112 LOCATE 13, 28: PRINT "ENTER
ANSWER 1 >>>"
1113 LOCATE 14, 28: PRINT "ENTER
ANSWER 2 >>>"
1114 LOCATE 15, 28: PRINT "ENTER
ANSWER 3 >>>"
1115 LOCATE 16, 28: PRINT "ENTER
ANSWER 4 >>>"
1116 LOCATE 17, 28: PRINT "ENTER
CORRECT NO. >"
1117 LOCATE 21, 28: PRINT "Note:Enter
Each in 25 Chracters"
1120 LOCATE 10, 28: INPUT "ENTER
QUESTION NO. (0 TO EXIT) >>>",QN
1130 IF QN=0 THEN 1990 ELSE GET #
1,QN
1140 IF US$ < > "Y" 1190
1150 LOCATE 12, 48: PRINT QS$
1151 LOCATE 13, 48: PRINT A1$
1152 LOCATE 14, 48: PRINT A2$
1153 LOCATE 15, 48: PRINT A3$
1154 LOCATE 16, 48: PRINT A4$
1155 LOCATE 17, 48: PRINT AN$
1156 BEEP:LOCATE 22, 28:PRINT
"Question No.";QN;" in use."
1157 LOCATE 23, 28:PRINT "1-Change,
2-Delete, 3-Other>>>": CH$=INPUT$ (1)
1170 IF CH$="2" THEN LSET
US$="N":PUT# 1,QN:GOTO 1980
1180 IF CH$="3" THEN 1980
1190 LOCATE 12,46:INPUT QSS$
1200 LOCATE 13,46:INPUT A11$
1210 LOCATE 14,46:INPUT A22$
1220 LOCATE 15,46:INPUT A33$
1230 LOCATE 16,46:INPUT A44$
1240 LOCATE 17,46: ANN$=INPUT$(1):IF
ANN$>"4" OR ANN$<"1" THEN
BEEP:GOTO 1240
1250 LSET QS$=QSS$:LSET
A1$=A11$:LSET A2$=A22$
1260 LSET A3$=A33$:LSET
A4$=A44$:LSET AN$=ANN$
1270 LSET US$= "Y"
1280 PUT # 1,QN
1980 WEND
```

حلقه دارای شرط $QN \neq 0$ (شمارهٔ سؤال مخالف صفر) است. QN ابتدا یک درنظر گرفته می شود. سطرهای 1100 الی 1120، ابتدا با پاک کردن صفحه و تنظیم رنگ دلخواه صفحه و ورود اطلاعات مربوط به یک سؤال را می سازند و سپس درخواست ورود یک شمارهٔ

سؤال می شود. اگر شمارهٔ سؤال صفر باشد، عملیّات خاتمه یافته و از حلقه خارج می شویم. در غیر این صورت سؤال با شمارهٔ داده شده، از فایل بازیابی شده و در مورد این که آن قبلاً پر شده یا نشده است، بررسی می شود. همان طور که در سطر 1140 دیده می شود، چنانچه قبلاً سؤالی در آن رکورد از فایل ثبت شده باشد، ابتدا محتویات آن نمایش داده شده و در مورد، تغییر یا حذف آن و یا ادامهٔ کار سؤال می شود.

اگر در رکورد با شمارهٔ مورد نظر قبلاً سؤالی ضبط نشده بود، امکان گرفتن اطلاعات مربوط به سؤال با آن شماره داده می شود و در انتها سؤال وارد شده با کلیهٔ اطلاعات آن (در ۷ فیلد) در فایل ثبت می شود. توضیح این که در مورد پربودن رکورد، پاسخ ۱، ۲ و یا ۳ به جواب سؤال در مورد تغییر، حذف و یا ادامه برای سؤال دیگر، به ترتیب ما را به دستور گرفتن اطلاعات مربوط به سؤال، حذف آن و سپس ادامهٔ کار و یا ادامهٔ کار بدون هیچ عمل خاص، هدایت می کند.

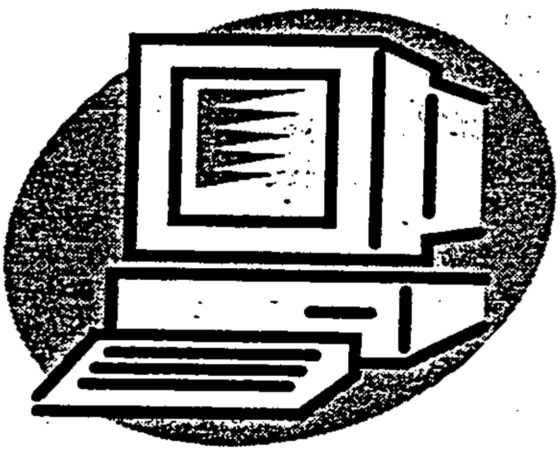
صورت کامل برنامه ای که تا به حال ساخته شده در زیر آمده است. توضیح این که چون هنوز قسمتهای دیگر برنامه کامل نشده است، ما به صورت موقت سطرهایی را به انتهای آن افزوده ایم تا برنامه کار کند. ضمناً وارد کردن سؤال برای یک موضوع مشخص با توجه به دامنهٔ شمارهٔ سؤال که قبلاً توضیح داده شد، می تواند صورت گیرد. همان طور که قبلاً نیز یادآور شدیم بعد از تکمیل برنامه، صورت فارسی آن را نیز خواهیم آورد. در قسمت بعدی مقاله که در شمارهٔ آینده چاپ خواهد شد در مورد این قسمت از برنامه و به خصوص منطق آن (که صورت کامل آن را در زیر می بینید)، توضیحات بیشتری خواهیم داد.

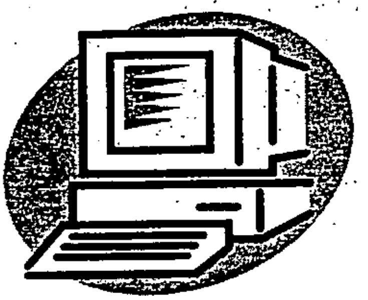
```
10 KEY OFF: OK$="Y"
20 WHILE OK$="Y"
30 CLS: COLOR 3
40 LOCATE 5, 28: PRINT "QUESTION / ANSWER SYSTEM"
50 LOCATE 8, 28: PRINT "1- Create Question"
60 LOCATE 10, 28: PRINT "2 - Do Question/ Answer"
70 LOCATE 12, 28: PRINT "3 - User Record"
80 LOCATE 14, 28: PRINT "4- Exit"
90 LOCATE 18, 28: PRINT "ENTER YOUR CHOICE>>>": BEEP: CH$=INPUT$(1)
100 CH= VAL (CH$)
110 ON CH GOSUB 1000, 2000, 3000, 4000
120 WEND
1000 ' Create Questions Routine
1010 OPEN "R", #1, "QSTION", 128
1020 FIELD #1, 0 AS QQ$, 25 AS A1$
1030 FIELD # 1, 25 AS QQ$, 25 AS A2$
1040 FIELD # 1, 50 AS QQ$, 25 AS A3$
1050 FIELD # 1, 75 AS QQ$, 25 AS A4$
1060 FIELD # 1, 100 AS QQ$, 25 AS QS$
1070 FIELD # 1, 125 AS QQ$, 1 AS AN$, 1 AS US$
1080 QN=1
1090 WHILE QN < > 0
1100 CLS: COLOR 3
1110 LOCATE 8, 28: PRINT "CREATE QUESTION"
1111 LOCATE 12, 28: PRINT "ENTER QUESTION>>>"
1112 LOCATE 13, 28: PRINT "ENTER ANSWER 1>>>"
1113 LOCATE 14, 28: PRINT "ENTER ANSWER 2>>>"
1114 LOCATE 15, 28: PRINT "ENTER ANSWER 3>>>"
```

```
1115 LOCATE 16, 28: PRINT "ENTER
ANSWER 4>>>"
1116 LOCATE 17, 28: PRINT "ENTER
CURRENT NO. >>>"
1117 LOCATE 21, 28: PRINT "Note: Enter
Each in 25 Characters"
1120 LOCATE 10, 28 : INPUT "ENTER
QUESTION NO. (0 TO EXIT)>>>", QN
1130 IF QN=0 THEN 1990 ELSE GET #1,
QN
1140 IF US$ < > "Y" 1190
1150 LOCATE 12, 48: PRINT QS$
1151 LOCATE 13, 48: PRINT A1$
1152 LOCATE 14, 48: PRINT A2$
1153 LOCATE 15, 48: PRINT A3$
1154 LOCATE 16, 48: PRINT A4$
1155 LOCATE 17, 48: PRINT AN$
1156 BEEP: LOCATE 22, 28: PRINT
"Question No."; QN; "in use."
1157 LOCATE 23, 28: PRINT "1- Change,
2- Delete, 3- Other >>>": CH$= INPUT$ (1)
1170 IF CH$= "2" THEN LSET US$ ="N":
PUT #1, QN:GOTO 1980
1180 IF CH$="3" THEN 1980
1190 LOCATE 12, 46: INPUT QSS$
1200 LOCATE 13, 46: INPUT A11$
1210 LOCATE 14, 46: INPUT A22$
1220 LOCATE 15, 46: INPUT A33$
1230 LOCATE 16, 46: INPUT A44$
1240 LOCATE 17, 46: ANN$=INPUT$ (1):
IF ANN$> "4" OR ANN$ < "1" THEN
BEEP: GOTO 1240
1250 LSET QS$= QSS$: LSET A1$= A11$:
LSET A2$=A22$
1260 LSET A3$= A33$: LSET A4$= A44$:
LSET AN$=ANN$
1270 LSET US$= "Y"
1280 PUT #1, QN
1980 WEND
1990 CLOSE: RETURN
2000 ' Do Question / Answer Routine
2990 CLOSE: RETURN
3000 ' User Record
3990 CLOSE : RETURN
4000 ' Exit
4990 END
```

برنامه مرتب کردن اطلاعات

تهیه کننده: علیرضا مهدویانی





برنامه مرتب کردن اطلاعات داده شده به حافظه از طریق DATA (یک بار نسبت به اسم یا فامیل و یک بار نسبت به سن شخص و یک بار نسبت به معدل نمرات شخص). در این برنامه نام ۱۰ نفر به همراه معدل و سن آنها از طریق DATA به کامپیوتر داده می‌شود (داخل برنامه) سپس هنگام اجرای برنامه از کاربر می پرسد که مایل است اطلاعات از روی اسم یا فامیل مرتب شود (انتخاب شماره ۱) یا از روی معدل اشخاص (انتخاب شماره ۲) و یا از روی سن اشخاص (انتخاب شماره ۳). سپس اطلاعات را برطبق خواسته کاربر مرتب می کند.

درهرصورت بقیه اطلاعات مربوط به هر شخص بدون تغییر در ردیف مربوط به آن شخص چاپ خواهد شد. شما می توانید با تغییر نامها و بقیه اطلاعات مربوط به آنها مجدداً از این برنامه استفاده کنید. حتی می توانید تعداد اسامی را نیز تغییر دهید (که در این صورت باید در برنامه تغییرات کلی بدهید).

```
10 DIM FAMIL $ (10), AVER (10),AGE
(10), AA$ (10), BB(10), CC(10)
20 FOR T=1 TO 10
30 READ FAMIL$ (T), AVER (T),
AGE (T)
40 AA$ (T) = FAMIL $ (T)
50 BB(T) = AVER (T)
60 CC(T) = AGE (T)
70 NEXT T
90 PRINT "If you want to sort information
with respect to name & family enter No. 1"
100 PRINT "If you want to sort information
with respect to average enter No. 2"
110 PRINT "If you want to sort information
with respect to age enter No. 3"
120 INPUT NO
130 IF NO=1 THEN GOSUB 1000
140 IF NO=2 THEN GOSUB 2000
150 IF NO=3 THEN GOSUB 3000
500 DATA mahdavi, 18, 18
510 DATA ahmady, 17, 20
520 DATA akbary, 18, 20
530 DATA sohraby, 20, 16
540 DATA kabiry, 19, 21
550 DATA shegerf, 18,22
560 DATA tabeshnia, 17, 20
570 DATA forohideh, 18,24
580 DATA morysi, 16, 27
590 DATA khosravi, 15.5, 28
600 END
1000 FOR I=1 TO 10
1010 FOR J=I+1 TO 10
1020 K=1
1030 IF LEFT$ (AA$(I),K) > LEFT$
(AA$(J), K) THEN SWAP AA$(I), AA$(J)
1040 IF LEFT$ (AA$(I),K) = LEFT$
(AA$(J), K) THEN K=K+1: GO TO 1030
1050 NEXT J, I
1060 FOR X=1 TO 10
1070 FOR Y=1 TO 10
1080 IF AA$ (X) < > FAMIL$ (Y) THEN
GOTO 1100
1090 PRINT AA$ (X), AVER (Y), AGE(Y)
1095 FAMIL$ (Y)=""
1100 NEXT Y, X
1110 RETURN
2000 FOR I= 1 TO 10
2010 FOR J= I+1 TO 10
2020 IF BB(I) > BB(J) THEN SWAP
BB(I), BB(J)
2030 NEXT J, I
2040 FOR X=1 TO 10
2050 FOR Y=1 TO 10
2060 IF BB(X) < > AVER(Y) THEN GOTO
2080
2070 PRINT FAMIL$ (Y), BB (X), AGE(Y)
2075 AVER (Y)=0
2080 NEXT Y, X
2090 RETURN
3000 FOR I=1 TO 10
3010 FOR J=I+1 TO 10
3020 IF CC(I) > CC(J)THEN SWAP CC(I),
CC(J)
3030 NEXT J, I
3040 FOR X=1 TO 10
3050 FOR Y=1 TO 10
3060 IF CC(X) < > AGE(Y) THEN GOTO
3080
3070 PRINT FAMIL$ (Y), AVER (Y),
CC(X)
3075 AGE(Y) =0
3080 NEXT Y, X
3090 RETURN
```

یک نامساوی مفید و چند نتیجه

ترجمه و تنظیم از: محمود نصیری

اگر a و b و c اعداد حقیقی مثبتی باشند، آن گاه،

$$(1)\quad (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc\,.$$

نامساوی های زیر به سادگی به دست می آیند.

$$(a+b-c)(b+c-a)=a^{2}-(b-c)^{2}\le a^{2}$$
$$(b+c-a)(b+a-c)=b^{2}-(a-c)^{2}\le b^{2}$$
$$(c+a-b)(c+b-a)=c^{2}-(a-b)^{2}\le c^{2}$$

مشخص است که حداکثر یکی از پرانتزهای سمت چپ در نامساوی (۱) می تواند منفی باشد لذا از ضرب نامساوی های فوق، نامساوی (۱) به دست می آید.

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $a=b=c$.

گفتیم حداکثر یکی از پرانتزهای سمت چپ در نامساوی (۱) می تواند منفی باشد، برای مثال اگر $c>a+b$ ، پرانتز اول منفی است و نامساوی بدیهی است، زیرا سمت چپ همواره منفی و سمت راست مثبت است. لذا حالت جالب نامساوی وقتی اتفاق می افتد که؛

$$c+a>b\quad,\quad b+c>a\quad,\quad a+b>c$$

یعنی a و b و c اندازه های اضلاع مثلث باشند. در هر مثلث $2p=a+b+c$ ، در نتیجه نامساوی (۱) در هر مثلث به صورت زیر است.

$$8(P-a)(P-b)(P-c)\le abc$$

با توجه به رابطه هرون در محاسبه مساحت مثلث، داریم $8S^{2}\le abcP$. با توجه به رابطه $abc=4RS$ در مثلث، $2S\le PR$ (۲) که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

همچنین می دانیم در هر مثلث $S=rp$ که r شعاع دایره محاطی داخل مثلث است، لذا از نامساوی فوق نامساوی معروف زیر نتیجه می شود.

$$(3)\quad R\ge 2r\quad \text{یا}\quad \frac{2S}{P}\le R$$

اکنون از این نامساوی، نامساوی های دیگری را در مثلث نتیجه می گیریم.

می دانیم در هر مثلث، $S=2R^{2}\sin A\sin B\sin C$ ، با توجه به قانون سینوسها داریم:

$$2P=a+b+c=2R(\sin A+\sin B+\sin C)$$

و با توجه به نامساوی (۲)، $2S\le PR$ داریم:

$$4R^{2}\sin A\sin B\sin C\le R^{2}(\sin A+\sin B+\sin C)$$

یا

$$(4)\quad \sin A+\sin B+\sin C\ge 4\sin A\sin B\sin C$$

حال اگر سمت چپ نامساوی (۴) را به حاصلضرب تبدیل کنیم داریم؛

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

بنابراین از نامساوی (۴) نتیجه زیر حاصل می شود که یک نامساوی معروف در مثلث است.

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\ge 4\sin A\sin B\sin C$$

که با توجه به رابطهٔ $\sin 2x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ داریم،

$$(5)\quad \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$$

البته، هدف از نامساوی (۱)، فقط اثبات نامساوی (۵) نیست بلکه نتایجی هستند که شامل نامساوی های (۲) تا (۵) می باشند. زیرا نامساوی (۵) را می توانیم مستقیماً نیز ثابت کنیم، چنانچه آن را در زیر می بینید.

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}-\cos\frac{B+C}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2}-\sin\frac{A}{2}\right]\le\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{A}{2}-\sin^{2}\frac{A}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[-\left(\sin\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{1}{4}\right]$$

$$\le\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$$

مراجع

G. Leversha, The Mathematical Gagette 1990.

مسایل شماره ۴۵

تهیه و تنظیم : ابراهیم دارابی

۱ . مجموع $5n$ عدد به صورت زیر را پیدا کنید :
$$5, 55, 555, 5555, \ldots$$

۲ . معادله را حل کنید :
$$x^{\log^2 x + \log x + 3} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}$$

۳ . ثابت کنید مجموع همه عضوهای هریک از سطرهای افقی در جدول زیر با مجذور یک عدد فرد برابر است :

$$\begin{array}{llllllll}
1 \\
2 & 3 & 4 \\
3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

۴ . کوچکترین عدد x را طوری تعیین کنید که در مربعی به ضلع x ، بتوان هر مثلث قائم‌الزاویه به وتر ۱ را جاداد .

۵ . ثابت کنید هر مکعب را با یک صفحه می توان طوری قطع کرد که مقطع حاصل یک شش ضلعی منتظم باشد .

۶ . نامعادله را حل کنید :
$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\cos \pi x\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۷ . اگر a وتر و b و c اضلاع مثلث قائم‌الزاویه باشند، ثابت کنید برای هر $n \geq 2$ داریم $a^n + b^n \leq c^n$

۸ . ثابت کنید برای اینکه مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، لازم و کافیست که داشته باشیم :
$$\frac{1}{(m_a + m_b - m_c)} + \frac{1}{(m_a + m_c - m_b)} + \frac{1}{(m_b + m_c - m_a)} = \frac{9R^2}{4S^2}$$

که در آن m_a و m_b و m_c طول میانه های مثلث و R شعاع دایره محیطی و S مساحت آن است .

۹ . در داخل شش ضلعی منتظمی که طول هر ضلع آن برابر واحد است ، نقطه ای را انتخاب می کنیم و به همه رئوس آن وصل می کنیم . ثابت کنید دربین مثلث های حاصل از تجزیه شش ضلعی ، دو مثلث موجود است که طولهای اضلاع هیچ یک از آنها کمتر از ۱ نمی باشد .

۱۰ . معادله را حل کنید :
$$2\cos^2 \frac{x^2 + x}{6} = 2^x + 2^{-x}$$

مسابقه ریاضی دانشگاه تربیت معلم

تنظیم از: دکتر جواد لآلی
عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت معلم

۱. کوچکترین عدد صحیح مثبت n را به گونه ای به دست آورید که به ازای هر عدد صحیح m که $0 < m < 1373$، عدد صحیحی مانند k با شرط زیر موجود باشد.

$$\frac{m}{1373} < \frac{k}{n} < \frac{m+1}{1374}$$

۲. مقدار سری زیر را به دست آورید:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(n-2k)\binom{n}{k}$$

که در آن نماد [ ] به معنی جزءِ صحیح است.

۳. کلیه توابعی که، مانند $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ در شرط زیر صدق می کنند به دست آورید:

به ازای هرسه عدد طبیعی m، n، p،

$$f\big(f(m)f(n)f(p)\big) = mnp$$

۴. معادلهٔ $n\in\mathbb{N}, x^2 - y^2 = n^3$ را در مجموعهٔ اعداد طبیعی حل کنید.

۵. تعداد ریشه های حقیقی و متمایز معادله:

$$\frac{a^2}{x^2-1}+\frac{b^2}{x^2-4}+\frac{c^2}{x^2-9}=1$$

را وقتی که b,a و c اعداد حقیقی ومتمایز از صفر هستند به دست آورید.

۶. فرض کنید $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ دنباله ای از اعداد حقیقی ناصفر باشد به طوری که:

$$Z_n^2 - Z_{n-1}Z_{n+1} = 1$$

ثابت کنید که عدد حقیقی مانند a هست که به ازای هر $n\geq 1$:

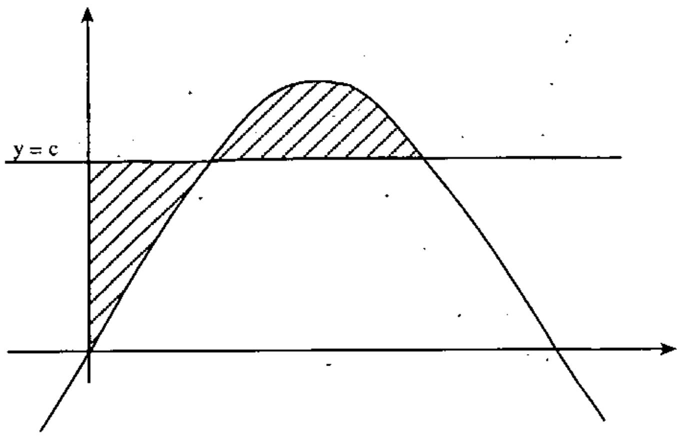
$$Z_{n+1} = aZ_n - Z_{n-1}$$

آیا می توان Z_n را برحسب فرمول صریحی از n به دست آورد؟

۷. مقدار انتگرال زیررا به دست آورید:

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \cos^2\frac{\pi}{6}(x+y+z)\,dxdydz$$

۸. خط افقی $y=c$ منحنی $y = 2x - 3x^3$ را در ناحیهٔ اول مطابق شکل زیر قطع می کند. عدد C را به گونه ای به دست آورید که مساحت دو ناحیه هاشورزده یکسان باشد.



۹. f را یک رابطه هم ارزی در A خوانیم در صورتی که به ازای هر b,a و c.

الف) $(a,a)\in f$

ب) اگر $(a,b)\in f$ آنگاه $(b,a)\in f$

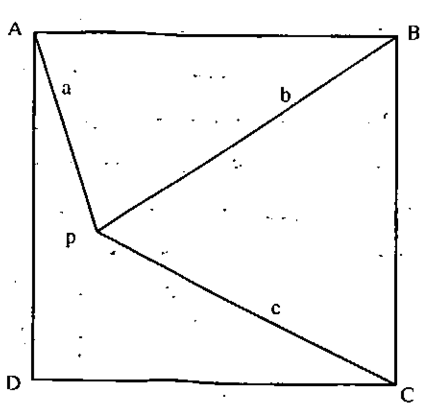
ج) اگر $(a,b)\in f$ و $(b,c)\in f$ آنگاه $(a,c)\in f$

فرض کنید که T اشتراک همه روابط هم ارزی درخط حقیقی $\mathbb{R}$ باشد که حاوی مجموعه زیر است:

$$S=\{(x,y)\,|\,y+|x|=1\}$$

ثابت کنید که T یک رابطهٔ هم ارزی است کلاسها (یا رده های) هم ارزی T را معین کنید.

۱۰. سه طول a، b و c داده شده اند. با استفاده از خط کش و پرگار، بدون تجزیه وتحلیل هندسی، مربع $ABCD$ و نقطهٔ P را به گونه ای به دست آورید که $|PA|=a$، $|PB|=b$ و $|PC|=c$



علی اکبر جاوید مهر ـ دبیر ریاضی قم

۹۹×۹۹=۹۸۰۱

```
   ۸۱
+ ۸۱۸۱
   ۸۱
 ------
 ۹۸۰۱
```

۱۱×۱۱=۱۲۱

```
   ۰۱
+ ۰۱۰۱
   ۰۱
 ------
  ۱۲۱
```

روابط بالا برای اعداد ۲۲، ۳۳، . . . ، ۸۸ نیز برقرار است! امتحان کنید.

***

۹۹۹×۹۹۹=۹۹۸۰۰۱

```
     ۸۱
+   ۸۱۸۱
   ۸۱۸۱۸۱
    ۸۱۸۱
     ۸۱
  -------
  ۹۹۸۰۰۱
```

۱۱۱×۱۱۱=۱۲۳۲۱

```
     ۰۱
+   ۰۱۰۱
   ۰۱۰۱۰۱
    ۰۱۰۱
     ۰۱
  -------
   ۱۲۳۲۱
```

روابط بالا برای اعداد ۲۲۲، ۳۳۳، . . . ، ۸۸۸ نیز برقرار است! امتحان کنید.

***

۱۱×۱۳۵=۱۴۹۸۵

```
     ۰۵
    ۰۳۰۵
+ ۰۱۰۳۰۵
    ۰۱۰۳
     ۰۱
  -------
   ۱۴۹۸۵
```

۱۱×۱۳=۱۴۳

```
   ۰۳
+ ۰۱۰۳
   ۰۱
 ------
  ۱۴۳
```

با ثابت نگهداشتن عامل ۱۱ می توانید عامل دوم را تغییر دهید و نتایج مشابهی به دست آورید.

***

۴۴۴×۳۳۳=۱۴۷۸۵۲

```
      ۱۲
     ۱۲۱۲
+  ۱۲۱۲۱۲
     ۱۲۱۲
      ۱۲
  --------
   ۱۴۷۸۵۲
```

۴۴×۳۳=۱۴۵۲

```
    ۱۲
+ ۱۲۱۲
    ۱۲
 ------
  ۱۴۵۲
```

۲۲۲۲×۱۳۴۵=۲۹۸۸۵۹۰

```
        ۱۰
       ۰۸۱۰
     ۰۶۰۸۱۰
+  ۰۲۰۶۰۸۱۰
     ۰۲۰۶۰۸
       ۰۲۰۶
        ۰۲
  ---------
   ۲۹۸۸۵۹۰
```

حالا شما هم با استفاده از جمع و الگوهای بالا حاصل ضربهای زیر را به دست آورید.

۸۸۸×۲۲۴=?   ۱۱۱۱×۱۳۴۵=?

***

مربعهای وفقی با درایه های اول

۲۳۹	۱۷	۱۹۱
۱۰۱	۱۴۹	۱۹۷
۱۰۷	۲۸۱	۵۹

۴۴۷

۲۱۱	۱۲۷	۷۹
۷	۱۳۹	۲۷۱
۱۹۹	۱۵۱	۶۷

۴۱۷

۲۸۱	۲۳	۱۹۷
۸۳	۱۶۷	۲۵۱
۱۳۷	۳۱۱	۵۳

۵۰۱

۲۴۱	۱۹	۱۹۳
۱۰۳	۱۵۱	۱۹۹
۱۰۹	۲۸۳	۶۱

۴۵۳

یک جدول وفقی ۳×۳ دیگر با درایه های اول و مجموع ۵۰۱ وجود دارد آن را پیدا کنید. جدولهای وفقی ۳×۳ دیگری با درایه های اول وجود دارد. آنها را پیدا کنید ولی برای درج در مجله ارسال نفرمائید!

تشابهات هندسی

علی نجف‌آبادی
دبیر هندسه دبیرستانهای تهران

مطالب این مقاله شرح قضیه و برهانی است کلی و جدید در اثبات تشابه و تساوی اشکال هندسی از راه ترسیم آنها. به کمک این قضیه می‌توان همه مسائل مربوط به تشابه و تساوی را که از راه های کلاسیک اثبات آنها بسیار مشکل و گاهی ناممکن است به آسانی ثابت کرد به شرطی که شکل ها را با استفاده از مکانهای هندسی رسم کنیم تا همه جوابهای ممکن مسئله به دست آیند.

قضیه: دو n ضلعی f و f' را در نظر می گیریم، اگر بین بعضی از اجزاء خطی متناظر f و f' تناسب و بین زوایائی از f و f' متناظراً تساوی برقرار باشد و به علاوه اجزاء خطی و زوایائی از شکل f که در تناسب و تساوی مذکور شرکت دارند برای رسم شکل f لازم و کافی باشند و از ترسیم f با همین اجزاء فقط یک جواب و یا جوابهای مساوی با هم به دست آیند در این صورت دو شکل f و f' متشابهند و اگر نسبت مشترک اجزاء خطی متناسب f و f' برابر یک باشد دو شکل با هم برابرند.

برهان: شکل f را با فرض معلوم بودن اجزاء خطی و زوایائی از آن که در تناسب و تساوی مذکور شرکت دارند رسم می کنیم و تمام شکلی را که در ترسیم f ایجاد شده F می نامیم و مجانس F را با مرکز دلخواه ω و با نسبت مشترک اجزاء خطی متناسب f و f' رسم می کنیم و شکل حاصل را F' می نامیم در این صورت F' شکل f' را با اجزاء و زوایائی از f' که در تناسب و تساوی مذکور شرکت دارند رسم می کند و بنا به خاصیّت تجانس دو شکل f و f' که به این صورت رسم می شوند متشابهند. اگر نسبت مشترک اجزاء خطی دو شکل برابر یک باشد F' بر F و در نتیجه f' و f منطبق می شود و لذا با هم برابر می شوند.

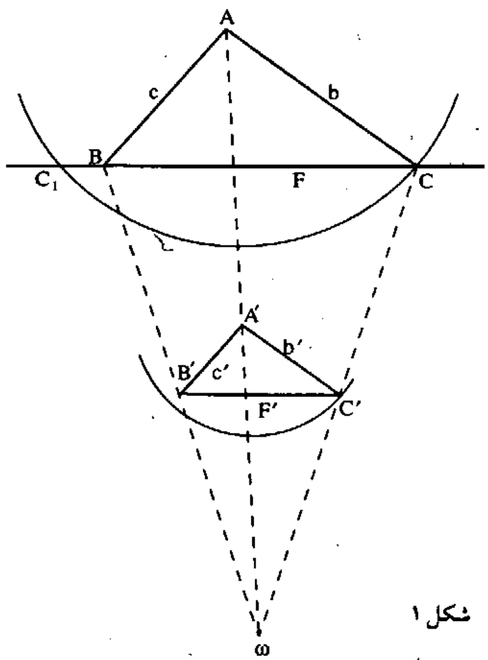
توجه: مجموع و تفاضل و یا هر چند جمله ای درجه اوّل از اجزاء خطی (یا زوایای) یک شکل هم یک جزء مربوط به همان شکل منظور شده است.

قضیه و برهان فوق از یافته های اینجانب است و اقتباس یا ترجمه نشده است.

با ذکر مثال سادهٔ زیر قضیه کاملاً روشن می شود:

مثال ۱: هرگاه دو ضلع و زاویه مقابل به ضلع بزرگتر از یک مثلث به ترتیب متناسب و متساوی با اجزای نظیر از مثلث دیگر باشند دو مثلث متشابهند.

برهان: فرض می کنیم در دو مثلث ABC و $A'B'C'$



شکل ۱

داشــتــه بــاشــیـم $\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ و $\hat{B}=\hat{B}'$ و $b>c$ و $b'>c'$.

(اجزائی کـه در تناسب شرکت دارند عـبارتند از $AB=c$ و $AC=b$ و $A'B'=c'$ و $A'C'=b'$ و اجــزائی کــه در تساوی شـرکت دارند $\hat{B}$ و $\hat{B}'$ هسـتنـد) مثلث ABC را با داشتن دو ضلع b و c و زاویه B رسم می کنیم. برای این کـار زاویه ای برابر $\hat{B}$ رسم کـرده روی یک ضلع آن AB را برابر با c جدا کرده بـه مرکز A و به شعاع b دایره‌ای رسم می کنیم تا ضـلع دیگر زاویه را در C و C_1 قطع کند (شکل ۱) (تمام ترسیمات هندسی برای رسم مثلث ABC در قضیه F نامـیده شده) دو مـثـلث ABC و ABC_1 به دست می آیند ولی فقط مـثلث ABC که شـامل زاویهٔ B و جواب مـسئله است . (ABC در قـضیـهf نامـیده شـده است) . حال اگـر مـجـانس شکل حـاصل را کـه F می نامـیم نسـبت به نقطه اختـیـاری ω و با نسـبت k رسم کنیم شکل 'F به دست می آید و 'F مثلث $A'B'C'$ را با معـلومات 'b و 'c و $\hat{B}'$ رسم می کند ($\Delta A'B'C'$ در قضیـه 'f نامیـده شده است) . چون F و 'F مـتـجـانسند پس دو مـثلث ABC و $A'B'C'$ نیز متجانسند و بنابراین متشابهند .

اگــر $k=1$ باشـــد دو شکل F و 'F بر هم منـطبق می شـوند در نتیـجه دو مـثلث ABC و $A'B'C'$ نیز بر هم منطبق می شوند و بنابراین برابرند .

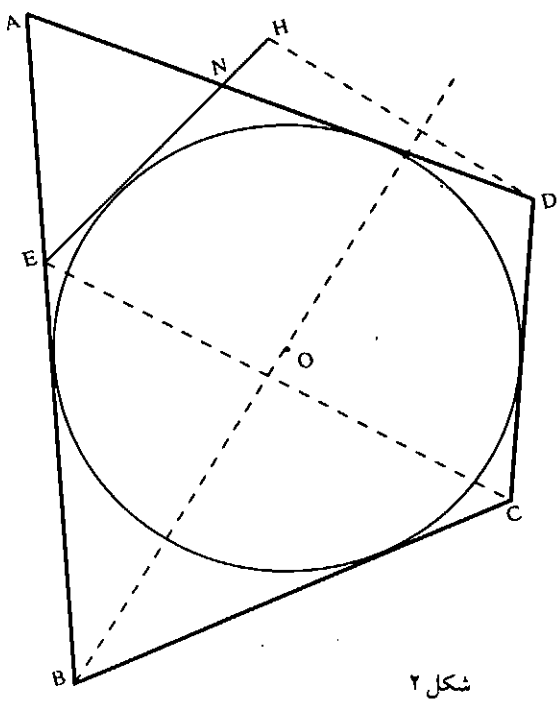
توجه : سـعی در اثبـات مـثال فـوق از راه کـلاسـیک و همچنین اثبـات مثالهای زیر و مـسائلی که در آخر مـقاله ارائه می شوند اهمیّت فوق العادهٔ این روش را مخصوصاً در اثبات تشابه چند ضلعی ها روشن می سازد زیرا اثبات مسائلی از این قبـیل از راه کلاسـیک اگر غـیر مـمکن نباشـد بسیار مـشکل است . به دو مـثال زیر در اثبـات تشابه چند ضلعی ها تـوجه فرمائید :

مـثــال ۲ : در دو چهــار ضلعی مـحــیطی ABCD و $A'B'C'D'$ داریم :

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=k$$

و $\hat{C}=\hat{C}'$ و $\hat{A}=\hat{A}'$ ثابـت کنیـــد دو چــهـــار ضلــعی متشابهند .

برهان : چهار ضلعی محیطی ABCD را (که در قضیه f نامـیـده شـده) به فـرض مـعلوم بودن دو ضلع AB و BC (اضـلاعی که در تناسب شـرکت دارند) و دو زاویه A و C (زوایائی کـه در تساوی شـرکت دارند) رسم می کنیم : برای این منظور مسئله را حل شـده فرض کرده قرینه BC و CD را نسـبت به محـور BO رسم می کنیم (شکل ۲) قرینه BC



شکل ۲

به صورت BE بر AB واقع است و قرینه CD یعنی EH بر دایره محاطی چهـار ضلعی مماس است و داریم $\widehat{HEB}=\hat{C}$ و $AE=AB-BC$ پس از مـــثلث AEN ضلع AE و دو زاویه A و $\widehat{AEN}=180^\circ-C$ مـعلوم است ایـن مـثلث را رسم می کنیم دایره مـحاطی خـارجی آن که در زاویه A واقع است همـان دایره مـحاطی چهـار ضلعی مـحـیطی ABCD است . بعد از رسم این دایره روی AE ضلع AB را به طول داده شـده جـدا می کنیم و از B مـمـاس دیگری بر دایرهٔ O رسم کرده و BC را که معلـوم است جدا کرده از C مماس CD را بر دایره رسم می کنیم تا AN را در D قطع کند چهـار ضلعی ABCD جواب مسئله است و مسئله فقط یک جواب دارد . حال اگر مـانند مثال ۱ عمل کنیم یعنی مـجانس شکل حـاصل را رسم کنـیم ثابت می شـود کـه دو چهـــار ضلعی ABCD و $A'B'C'D'$ مــتـشـابـهند و باز به ازاء $k=1$ دو چهار ضلعی بر هم منطبق می شوند و بنابراین با هم برابرند .

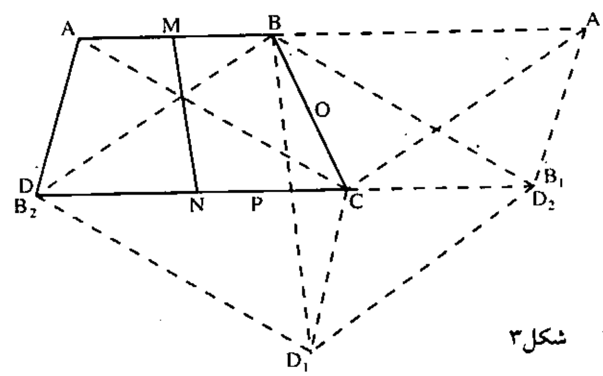
مثال ۳ : در دو ذوزنقهٔ ABCD و $A'B'C'D'$ اوساط دو قاعـده AB و CD از ذوزنقه اوّل را M و N و اوساط دو قاعده $A'B'$ و $C'D'$ از ذوزنقه دوّم را 'M و 'N می نامیم

و داریم:

$$\frac{AB+CD}{A'B'+C'D'}=\frac{AD}{A'D'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{MN}{M'N'}=k$$

ثابت کنید دو ذوزنقه متشابهند.

برهان: ذوزنقهٔ ABCD را با داشتن دو ساق AD و BC و مجموع دو قاعدهٔ $(AB+CD)$ و پاره خط MN که اوساط دو قاعده را به هم وصل می کند می توان رسم کرد:
برای این منظور مسئله را حل شده فرض می کنیم مثلث ABD را به اندازهٔ بردار $\vec{AC}$ انتقال می دهیم (شکل ۳) مثلث



شکل۳

CD_1B_1 انتقال یافته ABD است و لذا:

$CD_1 = AD$ و $DB_1 = DC + CB_1 = DC + AB$ و $BD_1 = 2MN$ (زیرا در مثلث ABD_1، MN اوساط دو ضلع AB و AD_1 را به هم وصل می کند پس $MN \overset{\parallel}{=} \frac{1}{2}BD_1$) و لذا به طریق زیر می توانیم ذوزنقه ABCD را رسم کنیم (شکل ۳).

مثلث BCD_1 را که سه ضلع آن معلوم است رسم می کنیم و وسط BD_1 را P نامیده CP را از طرف P به اندازهٔ نصف مجموع دو قاعده امتداد می دهیم رأس D از ذوزنقه به دست می آید و برای تعیین رأس A نقطه B_1 قرینه D را نسبت به P تعیین کرده C را به اندازهٔ بردار $\vec{B_1B}$ انتقال می دهیم رأس A به دست می آید و ذوزنقه ABCD جواب مسئله است. چون D و B_1 همواره نسبت به P قرینه اند بنابراین اگر جای این دو نقطه را عوض کنیم و آنها را D_2 و B_2 بنامیم و رأس C را به اندازهٔ بردار $\vec{B_2B}$ انتقال دهیم رأس A_1 و از آنجا ذوزنقه A_1BCD_2 به دست می آید که جواب دیگر مسئله است و چون دو ذوزنقه نسبت به نقطه O وسط BC قرینه اند پس دو جواب مسئله با هم برابرند پس می توان گفت که دو ذوزنقه ABCD و $A'B'C'D'$ بنا به قضیهٔ بالا متشابهند. و به ازاء $k=1$ متساویند.

مثال ۴: هرگاه میانه های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متناسب باشند دو مثلث متشابهند.

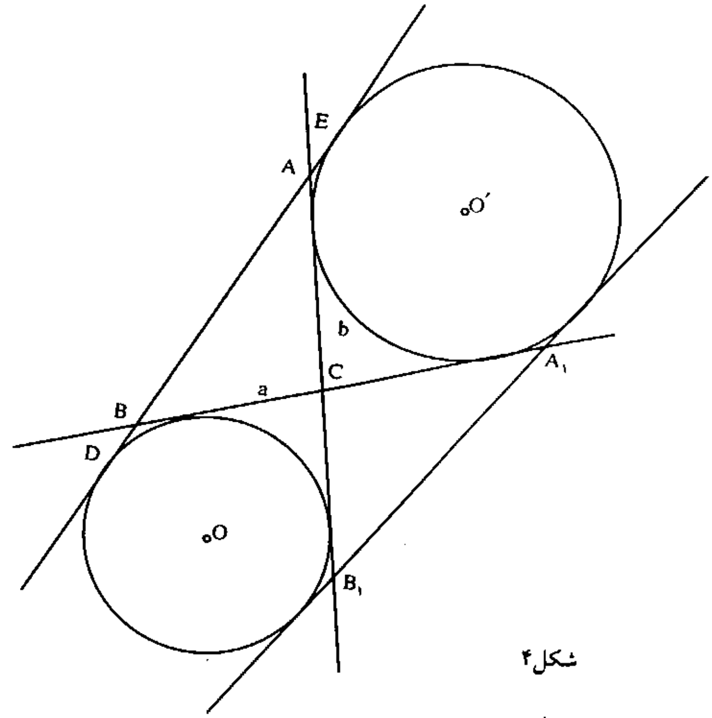
برهان: مثلث ABC را با داشتن سه میانه رسم می کنیم برای این منظور فرض می کنیم مثلث ABC رسم شده و AD و BE و CF میانه های آن می باشند (شکل ۴). ضلع BA را به اندازهٔ $AK = BA$ و میانه CF را به اندازه $FH = CF$ امتداد می دهیم نقطه A محل تلاقی میانه های مثلث HKC است (زیرا $\frac{FA}{AK}=\frac{1}{2}$ و F وسط HC است) و اضلاع مثلث HKC دو برابر میانه های مثلث ABC است (زیرا $HK = 2MK = 2BE$ و $KC = 2AD$ و $CH = 2CF$) و اضلاع مثلث ABC برابر $\frac{2}{3}$ میانه های مثلث HKC است ($AB = AK = \frac{2}{3}KF$ و $AC = \frac{2}{3}CM$ و $BC = AH = \frac{2}{3}HN$) از آنجا برای رسم مثلث ABC ابتدا مثلث HKC را با داشتن سه ضلع که هر یک دو برابر میانه های مثلث ABC می باشند رسم کرده و سپس با $\frac{2}{3}$ هر یک از میانه های مثلث HKC که برابر اضلاع مثلث ABC می باشند مثلث ABC را رسم می کنیم. چون دو مثلث مساوی با هم از این ترسیم بدست می آیند پس بنا بر توضیحات مثال ۱ دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند و در حالت خاص اگر میانه های دو مثلث برابر باشند آن دو مثلث متساویند (مسئله بالا از نظر ارتباط بین اضلاع و میانه های دو مثلث ABC و HKC بسیار جالب توجه است).

مثال ۵: در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ داریم:

$$\frac{r_a}{r_{a'}}=\frac{r_b}{r_{b'}}=\frac{a+b}{a'+b'}=k$$

ثابت کنید دو مثلث متشابهند (r_a و r_b شعاعهای دایره های محاطی خارجی واقع در $\hat{A}$ و $\hat{B}$ از مثلث ABC و $r_{a'}$ و $r_{b'}$ شعاعهای دایره های محاطی خارجی متناظر واقع در A' و B' از مثلث $A'B'C'$ هستند).

برهان: باز هم یکی از دو مثلث را به فرض معلوم بودن اجزاء طولی آن که در تناسب شرکت دارند رسم می کنیم برای منظور ملاحظه می کنیم که طول مماس مشترک خارجی



شکل۴

دو دایره محاطی خارجی واقع در $\hat{A}$ و $\hat{B}$ از مثلث ABC برابر است با $a+b$. بنابراین برای رسم مثلث ABC ابتدا پاره خط DE را برابر $a+b$ رسم کرده و دو دایرهٔ $(O\ ,\ r_a)$ و $(O'\ ,\ r_b)$ را در یک طرف DE و به ترتیب در D و E بر آن مماس می کنیم (شکل ۴) و سپس مماسهای مشترک داخلی و خارجی این دو دایره را رسم می کنیم از تقاطع آنها دو مثلث ABC و A_1B_1C به دست می آیند که چون دو مثلث نسبت به محور OO' قرینه اند بنابراین با هم برابرند پس با توجه به قضیه مذکور و مثال ۱ دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابهند و به ازاء $k=1$ دو مثلث متساویند.

مسائل زیر چند نمونه از مسائلی است که شاید فقط به کمک قضیه فوق بتوان ثابت کرد.

الف ـ با استفاده از قضیه بالا تشابه بین دو دایره، دو بیضی، دو سهمی، دو هذلولی و ... را بیان کنید (مثلاً دو بیضی در صورتی متشابهند که اقطارشان متناسب باشند).

ب ـ ثابت کنید دو مثلث ABC و $A'B'C'$ در حالات زیر متشابهند:

۱. $\hat{A}=\hat{A}'\ ,\ \dfrac{a}{a'}=\dfrac{h_a}{h_{a'}}$

۲. $\dfrac{r}{r'}=\dfrac{r_a}{r_{a'}}=\dfrac{a}{a'}$

۳. $\dfrac{r_a}{r_{a'}}=\dfrac{r_b}{r_{b'}}=\dfrac{c}{c'}$

۴. $\hat{C}=\hat{C}'\ ,\ \dfrac{r_a}{r_{a'}}=\dfrac{r_b}{r_{b'}}$

۵. $\dfrac{h_a}{h_{a'}}=\dfrac{d_a}{d_{a'}}=\dfrac{ma}{ma'}$

۶. $\dfrac{h_a}{h_{a'}}=\dfrac{d_a}{d_{a'}}=\dfrac{ma}{ma'}$

۷. $\dfrac{h_a}{h_{a'}}=\dfrac{m_a}{m_{a'}}=\dfrac{a}{a'}$

۸. $\hat{A}=\hat{A}'\ ,\ \dfrac{r}{r'}=\dfrac{r_a}{r_{a'}}$

۹. $\hat{A}=\hat{A}'\ ,\ \dfrac{r_a}{r_{a'}}=\dfrac{r_b}{r_{b'}}$

۱۰. $\hat{B}=\hat{B}'\ ,\ \dfrac{r}{r'}=\dfrac{r_a}{r_{a'}}$

۱۱. $\dfrac{r}{r'}=\dfrac{r_c}{r_{c'}}=\dfrac{a-b}{a'-b'}$

۱۲. $\dfrac{r_c}{r_{c'}}=\dfrac{r_b}{r_{b'}}=\dfrac{P-c}{P'-c'}$

(در مسائل بالا a طول ضلع BC و h_a طول ارتفاع وارد بر BC و r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC و r_a و r_b و r_c به ترتیب طول شعاع دایره محاطی خارجی واقع در $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و d_a طول نیمساز داخلی زاویه A و m_a طول میانه وارد بر ضلع BC و P نصف محیط مثلث ABC است).

۱۳ ـ در دو ذوزنقه متساوی الساقین ABCD و $A'B'C'D'$ داریم $\dfrac{BD}{B'D'}=\dfrac{BC}{B'C'}$ (نسبت دو قطر مساوی با نسبت دو ساق) و زاویه بین دو قطر که مقابل به دو ساق است با هم برابرند ثابت کنید متشابهند.

۱۴ ـ در دو مستطیل نسبت محیط ها با نسبت قطرها برابرند ثابت کنید دو مستطیل متشابهند.

۱۵ ـ در دو ذوزنقه ABCD و $A'B'C'D'$ اضلاع نظیر به نظیر متناسبند. ثابت کنید دو ذوزنقه متشابهند.

۱۶ ـ در دو چهار ضلعی محاطی ABCD و $A'B'C'D'$ داریم $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{R}{R'}$ و زاویه بین دو ضلع مقابل AB و CD از چهار ضلعی ABCD با زاویه بین دو ضلع مقابل $A'B'$ و $C'D'$ از چهار ضلعی $A'B'C'D'$ برابرند ثابت کنید دو چهار ضلعی متشابهند (R و R' شعاعهای دایره های محیطی دو چهار ضلعی است).

۱۷ ـ دو ذوزنقه که دو قاعده و دو قطر آنها نظیر به نظیر متناسب باشند متشابهند (در مسائل بالا اگر نسبت مشترک تناسبها برابر یک باشد دو شکل با هم برابر می شوند).

حل مسایل شماره ۴۳

(فرستنده: آقای نیلچیان)
تهیه و تنظیم: ابراهیم دارابی

۱ـ فرض کنید $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{0,1\}$ و f توابعی باشند که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ در معادلات تابعی زیر صدق می کنند ثابت کنید f و g متناوبند.

$$f(x+1) = \frac{g(x)}{f(x)} \quad , \quad g(x+1) = \frac{g(x)-1}{f(x)-1}$$

اثبات:

$$f(x+2) = \frac{f(x)(g(x)-1)}{g(x)(f(x)-1)} \ , \ g(x+2) = \frac{f(x)}{f(x)-1}$$

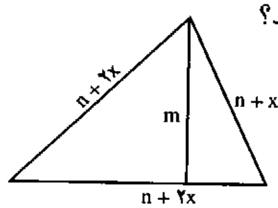
$$f(x+3) = \frac{g(x)}{g(x)-1} \quad , \ g(x+3) = \frac{g(x)}{g(x)-f(x)}$$

$$f(x+4) = \frac{g(x)-1}{g(x)-f(x)} \ , \ g(x+4) = \frac{f(x)(g(x)-1)}{g(x)-f(x)}$$

$$f(x+5) = f(x) \quad , \quad g(x+5) = g(x)$$

بنابراین f و g هردو متناوب با دورهٔ تناوب ۵ می باشند.

۲ـ فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت و x یک عدد حقیقی $(0 < x \le 1)$ باشد. چند مثلث بصورت زیر می تواند وجود داشته باشد؟



اثبات: مساحت مثلثی به اضلاع a، b و c را می‌توان از فرمول:

$$\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \qquad (1)$$

که در آن $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$ محاسبه نمود با جاگذاری $a = n+x$، $b = n+2x$ و $c = n+3x$ در فرمول (۱) و مساوی قراردادن آن با $\frac{n(n+2x)}{2}$ خواهیم داشت:

$$\sqrt{\frac{3n+6x}{2} \cdot \frac{n+4x}{2} \cdot \frac{n+2x}{2} \cdot \frac{n}{2}} = \frac{n(n+2x)}{2}$$

$$\frac{3(n+2x)(n+4x)(n+2x)n}{16} = \frac{n^2(n+2x)^2}{4}$$

$$\frac{3(n+4x)}{16} = \frac{n}{4}$$

$$12x = n$$

چون $0 < x \le 1$ و n یک عدد صحیح مثبت است، پس دقیقاً ۱۲ مثلث با شرایط بالا وجود دارد که در آنها:

$$(x,n) = (\frac{1}{12},1), (\frac{2}{12},2) \ldots, (1,12)$$

۳ـ ثابت کنید:

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \ldots$$

$$+\frac{1}{\cos 88^\circ \cos 89^\circ}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin^2 1^\circ}$$

اثبات : داریم :

$$\frac{\cos 1}{\sin^2 1}=\frac{\cot g 1}{\sin 1}=\frac{tg 89}{\sin 1}$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم :

$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \cos 1}+\frac{\sin 1}{\cos 1 \cos 2}+\dots$$

$$+\frac{\sin 1}{\cos 88 \cos 89}=tg 89 \qquad (1)$$

چون : $\sin 1=\sin(x+1)\cos x-\cos(x+1)\sin x$

بنابراین : $\frac{\sin 1}{\cos x \cos(x+1)}=tg(x+1)-tgx$

سمت چپ (۱) عبارتست از مجموع زیر :

$$(tg1-tg0)+(tg2-tg1)+\dots$$

$$+(tg89-tg88)=tg89$$

۴ـ فرض کنید S یک نیمگروه باشد. اگر n عدد صحیح مثبت ثابتی باشد به طوری که به ازای هر $x,y\in S$ ، $xy=y^n x^n$. ثابت کنید S جابجایی است.

اثبات : برای هر $x\in S$ داریم :

$$x^n=xx^{n-1}=(x^{n-1})^n x^n=(x^n)^n$$

بنابراین، برای هر $a,b\in S$ ،

$$ab=b^n a^n=(a^n)^n (b^n)^n=a^n b^n=ba$$

لذا S جابجایی است.

۵ـ ثابت کنید عدد طبیعی n منحصراً سه مقسوم علیه مثبت متمایز دارد اگر و تنها اگر m مربع یک عدد اول باشد (اقتباس از مسأله ارسالی آقای فوآد ابراهیمی)

اثبات : اگر P عدد اول و $n=P^2$ ، واضح است که تنها مقسوم علیه های آن عبارتند از ۱ و P و n .

بالعکس اگر n عدد طبیعی و منحصراً سه مقسوم علیه مثبت متمایز a و b و c داشته باشد، چون ۱ و n مقسوم علیه مثبت n هستند، پس می توان فرض کرد که $a=1$ و $c=n$ پس $1<b<n$ و $b|n$ درنتیجه l ای هست که $n=bl$ و بنابراین $l|n$ و چون $1<b<n$ داریم $1<l<n$ یعنی $l=b$ و $n=b^2$.

اکنون نشان می دهیم که b عددی است اول. اگر b اول نباشد عدد اولی مانند P هست که $P|b$ پس $P|n$ ، امّا $1<P<b<n$ پس n مقسوم علیه متمایز از n و l و b دارد و این یک تناقض است، پس حکم به اثبات رسیده است.

۶ـ ثابت کنید اگر P عددی اول و بزرگتر از ۲ باشد، آنگاه $\left[(2+\sqrt{5})^P\right]-2^{P+1}$ بر P بخشپذیر است.

[ ] نماد جزء صحیح است.

اثبات : از اینکه $(2+\sqrt{5})^P+(2-\sqrt{5})^P$ یک عدد صحیح است و داریم $-1<(2-\sqrt{5})^P<0$ (P عدد فرد است) نتیجه می شود که :

$$\left[(2+\sqrt{5})^P\right]=(2+\sqrt{5})^P+(2-\sqrt{5})^P$$

بنابر دوجمله ای نیوتن داریم :

$$(2+\sqrt{5})^P+(2-\sqrt{5})^P=2(2^P+C(P,2)2^{P-2}.5$$

$$+C(P,4)2^{P-4}.5^2+\dots+C(P,P-1).2.5^{\frac{P-1}{2}})$$

بنابراین :

$$\left[(2+\sqrt{5})^5\right]-2^{P+1}=2(C(P,2)2^{P-2}.5$$

$$+C(P,4)2^{P-4}.5^2+\dots+C(P,P-1)2.5^{\frac{P-1}{2}})$$

تمام ضرایب $C(P,2i)$ بر عدد P بخشپذیرند زیرا :

$$C(P,2)=\frac{P(P-1)}{1\times 2},C(P,4)=$$

$$\frac{P(P-1)(P-2)(P-3)}{1\times 2\times 3\times 4},\dots$$

$$C(P,P-1)=P$$

بر عدد اول P بخشپذیرند، زیرا صورت عبارت مانند $C(P,k)$ بر P بخشپذیر است درحالی که مخرج آن بخشپذیر نیست. پس تفاضل $\left[(2+\sqrt{5})^P\right]-2^{P+1}$ هم بر P بخشپذیر است و اثبات کامل است.

۷ـ ریشه های صحیح معادله زیر را پیدا کنید :

$$1!+2!+3!+\dots+x!=y^2$$

حل : به آسانی می توان امتحان کرد که به ازای $x<5$ ، ریشه های معادله عبارتند از : $x=1$ ، $y=\pm 1$ و $x=3$ ، $y=\pm 3$.

اکنون ثابت می کنیم که : به ازای $x\geq 5$ معادله جواب ندارد.

چون $1!+2!+3!+4!(=33)$ به رقم ۳ ختم می شود ولی !۵ و !۶ و !۷ و ... همه به صفر ختم می شوند درنتیجه به ازای $x\geq 5$ آخرین رقم (یکان) مجموع $1!+2!+3!+4!+\dots+x!$ ، ۳ است. پس این مجموع نمی تواند مربع یک عدد صحیح باشد.

(مربع هیچ عدد صحیحی به ۳ ختم نمی شود.)

۸ـ ۱۲۰ توپ تنیس روی میز مساوی را با هم بسته و به شکل هرم مثلث القاعده منتظم درآورده ایم. پیدا کنید چند تا از این توپ ها در قاعده هرم قرار گرفته اند؟

حل: توپ هایی که در قاعده هرم قرار دارند، تشکیل مثلث متساوی الاضلاع می دهند. اگر هر ضلع مثلث شامل n توپ باشد، قاعده هرم شامل:

$$n+(n-1)+\ldots+3+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$$

توپ خواهد بود. تعداد توپ هایی که در ردیف دوم قاعده هرم (از پایین) قرار دارند، برابر است با:

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1=\frac{(n-1)n}{2}$$

و تعداد توپ هایی که در ردیف سوم قاعده هرم قرار گرفته اند برابر است با $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ و الی آخر.

آخرین ردیف (از پایین یا اولین ردیف از بالا) شامل یک توپ است و مجموع همه توپ های این ردیف ها برابر است با ۱۲۰. پس داریم:

$$120=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}+\frac{(n-2)(n-1)}{2}+\ldots+\frac{3\times 4}{2}+\frac{2\times 3}{2}+\frac{1\times 2}{2}$$

سمت راست این تساوی برابر است با $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (به استقراء ثابت می شود) پس داریم:

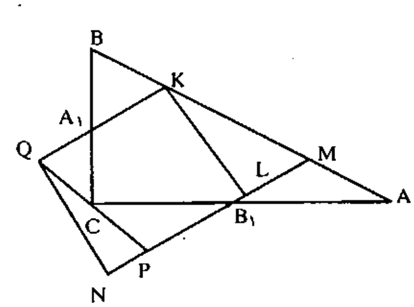
$$120=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\Rightarrow n(n+1)(n+2)=720$$

یک جواب معادله $n=8$ است، اگر همه جملات را به سمت چپ ببریم و بر $n-8$ تقسیم کنیم، نتیجه می شود:

$n^2+11n+90=0$

که این معادله جواب حقیقی ندارد.

۹ـ مثلث قائم الزاویه ای را که یک زاویه 30° دارد، به چهار ناحیه طوری تقسیم کنید که از مجموع آنها، یک مربع تشکیل شود.



حل: اگر A_1 و B_1 به ترتیب اوساط CB و CA در مثلث قائم الزاویه ABC باشند که در آن A حاده و اندازه آن 30° است (شکل را نگاه کنید) از نقاط A_1 و B_1 خطوط متوازی A_1K و B_1M را به فاصله جذر مساحت مثلث مفروض رسم می کنیم (مساوی با ضلع مربع مطلوب مسأله) زاویه KMB_1 را حاده فرض می کنیم. از نقطه K عمودی بر B_1M فرود می آوریم. به آسانی ثابت می شود که پای این عمود، یعنی نقطه L بر روی پاره خط MB_1 قرار می گیرد. به این ترتیب مثلث ABC به ۴ ناحیه تقسیم می شود که عبارتند از مثلث های A_1KB و B_1MA و KML و پنج ضلعی CA_1KLB_1 همانطور که از روی شکل دیده می شود از ترکیب آنها مربع QKLN پدید آمده است.

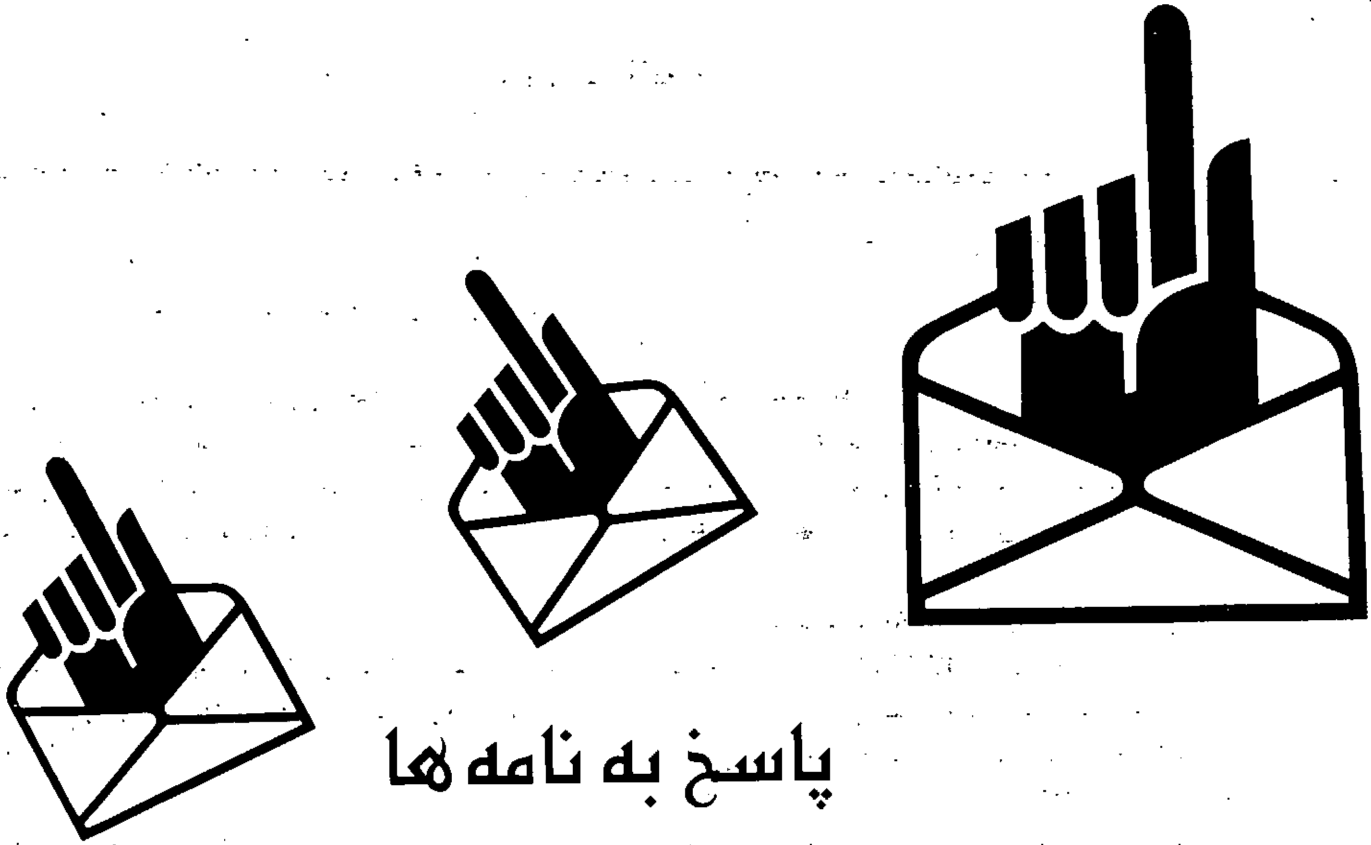
۱۰ـ بر روی صفحه شطرنج، ۸ مهره را طوری می چینیم که در هر ردیف افقی (عرض افقی) و در هر ردیف قائم (عرض قائم) تنها یک مهره وجود داشته باشد. ثابت کنید تعداد مهره هایی که بر روی خانه های سیاه قرار دارند، زوج است.

حل: در خانه های سیاه عرض قائم که شماره آنها فرد است، ۱ می نویسیم و در بقیه خانه های سیاه ۲ (شکل زیر را نگاه کنید).

در خانه های سفید عرض افقی که شماره آنها فرد است، رقم ۳ می نویسیم. فرض کنید در خانه های از نوع شماره های ۱، n مهره و در خانه های نوع شماره ۲، m مهره و در خانه های نوع شماره ۳، k مهره وجود داشته باشد.

بنابر فرض مسأله در خانه های از نوع ۱ و ۳ رویهم رفته، ۴ مهره، وجود دارد. یعنی $n+k=4$ در خانه های از نوع شماره های ۲ و ۳ هم رویهم رفته ۴ مهره وجود دارد، یعنی $m+k=4$ از آنجا نتیجه می شود $n=m$ یعنی تعداد مهره های واقع بر خانه های سیاه $2n$ می باشد.

	۲		۲		۲		۲
۱	۳	۱	۳	۱	۳	۱	۳
	۲		۲		۲		۲
۱	۳	۱	۳	۱	۳	۱	۳
	۲		۲		۲		۲
۱	۳	۱	۳	۱	۳	۱	۳
	۲		۲		۲		۲
۱	۳	۱	۳	۱	۳	۱	۳



پاسخ به نامه ها

آقای عباس روح الامینی، دانش آموز، سیرجان.
با تشکر از شما در صورت نیاز از مسایل ارسالی شما استفاده خواهیم کرد.

آقای علی منصوری، دانشگاه شهید باهنر، کرمان
مطلب ارسالی شما درباره درونیابی را دریافت کردیم. این موضوع برای کلیه دانش آموزان و دبیران ناآشناست و جا دارد از مبنا مورد مطالعه قرار گیرد نه در حالتی بسیار خاص نظیر آنچه شما بررسی کرده اید.

آقای حامد غلامی، دانش آموز، شیرگاه، مازندران.
درباره محاسبه محیط بیضی بارها و بارها تذکر داده ایم. محاسبات شما هر قدر هم که دقیق باشد، تقریبی است و برای محاسبات تقریبی ابزارهای بسیار دقیق تر از جمله کامپیوتر وجود دارد. بهتر است شماره های گذشته رشد را در این باره مطالعه کنید.

آقایان محمد حسین سلمانی، دانشجو، یزد و صالح شریعتی، دیپلمه، سنندج
مقالات شما در مورد آخرین قضیه فرما به دستمان رسید. جهت آگاهی شما و سایر خوانندگان توصیه می کنیم که سر مقاله سر دبیر مجله رشد آقای دکتر مدقالچی را در شماره ۴۰ بخوانید.

آقای محمد رضا رضوانی، دانش آموز، شهرستان محلات.
مطلب شما درباره عدد سال ۱۹۹۴ را دریافت کردیم. با تشکر از شما خاطر نشان می کنیم که از درج مطالب تکراری و یکنواخت معذوریم. منتظر دریافت مطالب خوب از شما هستیم.

آقای علی مقدم، دانش آموز، تهران
با تشکر از شما که با استفاده از ارقام ۱۳۷۴ اعداد ۱ تا

پاسخ به نامه‌ها

۱۰۰ را نوشته‌اید، از درج این نوع مطالب که دیگر تکراری و برای خوانندگان خسته کننده شده است خودداری می‌کنیم.

آقای احمد رضا داوری، دانشجو، تهران

اثباتی که برای قضیه فرما فرستاده بودید رسید. توجه شما را به سرمقاله شماره ۴۰ مجله رشد در این باره، جلب می‌کنیم. حتماً آنرا با دقت بخوانید.

آقای علی ثابتیان

مسایلی که فرستاده‌اید مانند نام و نشانتان مبهم‌اند. بهتر است هم نام و آدرس خودتان را کامل بنویسید و هم صورت مسایل را!!

آقای سزار حسینی، دانش آموز، خرم آباد

از مسایلی که برای مجله فرستاده‌اید ممنونیم. در صورت نیاز از مسایل شما استفاده خواهیم کرد.

آقای مهدی خرم آبادی، دیپلمه، کاشان

با تشکر از شما دو مسأله ارسالی شما را دریافت کردیم، چون هر دو مسأله به نوعی در کتابهای قدیم و فعلی وجود دارد؛ از چاپ آنها معذوریم.

آقای علی جعفری، کردستان بانه

نامه شما که نشاندهنده صداقت و صفای باطنی شما است به دستمان رسید و از اینکه ما را در راهی که در پیش گرفته‌ایم تشویق و ترغیب می‌نمائید تشکر می‌کنیم. ما در رابطه با نوشتن اعداد از یک تا ۱۰۰، با ارقام عدد ۱۹۹۴، به کمک چهار عمل اصلی و فاکتوریل، جذرگیری، و توان مطالب و مقالات زیادی دریافت نموده‌ایم از آنجائیکه در تنظیم این اعداد متحمل زحماتی شده‌اید تنها به ذکر چهار نمونه از آخرین اعداد تنظیم شده اکتفا می‌کنیم.

$$97 = 1 \times \sqrt{9} + 94$$

$$98 = 1 + \sqrt{9} + 94$$

$$99 = 1 \times 9 \times (9 + \sqrt{4})$$

$$100 = (1+9)(\sqrt{9}! + 4)$$

آقای محمد صادق علی سواری، دانشجو، تهران

با تشکر از مطالبی که برای مجله فرستاده‌اید، به اطلاع می‌رساند که این مسایل در اکثر کتابهای موجود وجود دارند و تعمیم کلی آنها در شماره‌های قبلی رشد، آمده است.

آقای محمد حسین ملاّ، دانشجوی رشته مهندسی مکانیک طراحی جامدات، دانشگاه آزاد تهران

مطالب ارسالی شما جالب ولی مقدماتی است و ما نکته‌ای از آن را جهت اطلاع خوانندگان چاپ می‌کنیم:

فرض کنید که $f(k) = k^2 - k + 41$ می‌خواهیم بدانیم به ازای چه مقادیری از k حاصل این چند جمله‌ای اوّل است این چند جمله‌ای که به چند جمله‌ای اویلر معروف است به ازای $1 \le k \le 40$ اوّل است ولی $k = 41$ اوّل نیست.

آقای محمد باقر صدر، دانش آموز، تبریز

با تشکر از ابراز علاقه شما نسبت به کارکنان مجله، به اطلاع شما می‌رسانیم که چون در معادله درجه دوّم $ax^2 + bx + c = 0$ حاصلضرب ریشه‌ها در معادله همواره $\frac{c}{a}$ بنابراین با فرض $x_1 = k$ داریم $kx_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_2 = \frac{c}{ka}$ بنابراین مثالهای شما بر این اساس ساخته شده‌اند. برای سایر نوشته‌های خود هم می‌توانید از روابط بین ریشه‌های معادله احکام کلی به دست آورید.

آقای بهزاد خورشیدی، دانش آموز، تبریز

مقاله شما در هیأت تحریریه خوانده شد و قضیه شما در مورد دوره تناوب رقم کیان عدد را می‌توان با توجه به قضیه فرما که به ازای هر عدد صحیح a (به هنگ ۵) $a^5 \equiv a$ و (به هنگ ۲) $a^2 \equiv a$ پس (به هنگ ۱۰) $a^5 \equiv a$ نتیجه گرفت. از این که در دوره دبیرستان به چنین دقّتی رسیده‌اید، مایه خوشحالی است. برای شما آرزوی موفقیت داریم.

پاسخ به نامه ها

آقای مهدی باغ عنبری، دانشجوی سال اول آمار

تساوی که عنوان کرده اید بنا بر تعریف توان بدیهی است و محاسبهٔ آن نیز احتیاجی به برنامه کامپیوتر ندارد.

آقای قربان قاسمی، دانش آموز سال سوم ریاضی، از آمل

بازی فکری با عدد ۱۳۷۴ توسط چند نفر دیگر هم ارسال شده است. از زحمات شما متشکریم ولی از چاپ آن معذوریم.

آقای مسعود باغفلکی از کرمانشاه

بازی فکری با عدد ۱۳۷۴ رسید به علت تکراری بودن از چاپ آن معذوریم.

برادر گرامی آقای عادل خانزاده

نامهٔ مورخهٔ ۷۳/۸/۲ شما واصل شد. در مورد تثلیث زاویه بد نیست یادآوری کنیم که منظور از خط کش و پرگار همان خط کش و پرگار اقلیدسی است که خط کش غیر مدرج و پرگار فروریختنی است نه خط کش مدرج و پرگار معمولی. در صورت علاقه به این مسئله به کتاب گرینبرگ «هندسه های اقلیدسی و نااقلیدسی» از انتشارات مرکز نشر دانشگاهی و کتابهای جبر، مبحث نظریهٔ گالوا و ساختن با خط کش و پرگار، مراجعه کنید.

اسامی خوانندگانی که حل مسایل شماره ۳۹ را فرستاده اند.

خانم نازگل عرفانی قربانی، دانش آموز، مشهد

۱ ـ ۸ ـ ۹ ـ ۱۰

آقای امیر حسین اثناعشری، دانش آموز، تهران ۱۰

آقای امیر حسین بسطامی، تهران

۵ ـ ۷ ـ ۱۰

اسامی خوانندگانی که حل مسایل شماره ۴۰ را فرستاده اند.

۱. آقای مهدی نیلچیانی، عضو هیت علمی دانشگاه تربیت معلم تبریز ۴

۲. آقای احسان امیری، دانش آموز، مشهد. ۸

۳. آقای روح الامینی، دانش آموز، سیرجان

۱ ـ ۳ ـ ۴ ـ ۵ ـ ۸ ـ ۹ ـ ۱۰

۴. آقای مهرداد بهرامی. دانش آموز، اصفهان

۴ ـ ۵ ـ ۷ ـ ۱۰

۵. آقای محمد اسماعیل خسروی، دانشجو، بروجرد:

۱ ـ ۳

۶. آقای امیر مهدی شجاع، دانش آموز، تهران ۳ ـ ۱

اسامی خوانندگانی که حل مسایل شماره ۴۰ را فرستاده اند

آقای علی اسلامی، دانش آموز، زنجان

۱ ـ ۳ ـ ۵ ـ ۷ ـ ۸

آقای رضا کبیری مریدی، دانش آموز، تهران ۱

آقای شهاب دانشور، دانش آموز، کرج ۵

آقای حسین نوروزی، دانش آموز، تفرش

۱ ـ ۳ ـ ۴ ـ ۷ ـ ۸

آقای علیرضا پورتقی انوریان، دانش آموز، تبریز

۱ ـ ۲ ـ ۴ ـ ۵ ـ ۶ ـ ۱۰

آقای مهدی نیامنش، دانش آموز، ارومیه

۱ ـ ۲ ـ ۳ ـ ۴ ـ ۷ ـ ۱۰

اسامی خوانندگانی که حل مسایل شماره ۳۷ را فرستاده اند

آقای مهرداد بهرامی، دانش آموز، اصفهان

۴ ـ ۶ ـ ۸ ـ ۹ ـ ۱۰

آقای مهران نقی زاده، دانش آموز، شهر ری

۴ ـ ۸ ـ ۹ ـ ۱۰

ضوابط تشخیص و تعبیر هندسی پیوستگی یکنواخت

سید محمودطالبیان عضو هیأت علمی
گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم سبزوار

فرض کنید تابع f بر بازهٔ I پیوسته باشد. عموماً تشخیص پیوستگی یکنواخت f بر I برای دانشجویانی که آشنایی مختصری با مفهوم پیوستگی یکنواخت دارند کاری دشوار است. چنان که ملاحظه خواهید کرد، تعبیر هندسی پیوستگی یکنواخت کار تشخیص را بسیار آسان می‌کند. بعلاوه، مشاهده خواهید کرد که توجه به تعبیر هندسی باعث می‌شود که، در مورد ردهٔ خاصی از توابع، بدون توسّل به خاصیّت فشردگی ثابت کنیم که اگر تابعی از آن رده بر بازهٔ بسته‌ای پیوسته باشد برآن بازه به طوریکنواخت پیوسته است.

معذالک، حدس و سپس اثبات یک شرط لازم و کافی برای تشخیص پیوستگی یکنواخت بر $\mathbb{R}$ موجب شد که بخش اول بحث را به تشریح مفهوم پیوستگی یکنواخت و ضوابط تشخیص و بررسی خواص آن بر بازه‌های کراندار و بی‌کران با ابزار آنالیز اختصاص دهیم و در بخش دوم به تعبیر هندسی و بررسی آثار ناشی از آن بپردازیم.

بخش اول: پیوستگی یکنواخت و ضوابط تشخیص آن بر بازه‌های کراندار و بی‌کران

۱ . ۱ تعریف و چند مثال

تعریف ۱ . فرض کنید تابع f بر بازهٔ I تعریف شده باشد. می‌گوییم f بر I به طور یکنواخت پیوسته است در صورتی که به ازای هر عدد مثبت ε عددی مثبت مانند δ (که فقط به تابع f، بازهٔ I، و عدد ε بستگی دارد) موجود باشد به طوری که (*) «به ازای هر x و هر y از I، اگر $|x-y|<\delta$ آن گاه $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$».

مثال ۱ ـ تابع $f(x)=x^2$ بر هر بازهٔ بسته مانند $[a,b]$ به طور یکنواخت پیوسته است.

برهان: اگر $a=b$ چیزی برای اثبات نمی‌ماند. فرض می‌کنیم $a<b$ و $M=\max\{|a|,|b|\}$. در این صورت، بدیهی است که هر x از $[a,b]$ در نامساوی $|x|\le M$ صدق می‌کند. فرض می‌کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. اگر $\delta=\frac{\varepsilon}{2M}$ و $x,y\in[a,b]$ به طوری که $|x-y|<\delta$، خواهیم داشت:

$$|f(x)-f(y)|=|x^2-y^2|=|x+y||x-y|\le$$
$$(|x|+|y|)|x-y|\le 2M|x-y|<2M\delta=\varepsilon$$

در این مثال، وابستگی δ به f، بازهٔ I، و عدد ε به خوبی دیده می‌شود.

مثال ۲ ـ پیوستگی تابع $f(x)=1/x$ بر بازهٔ $(0,1)$ یکنواخت نیست.

برهان: فرض کنید $\cdot < \delta < 1$. اگر $x = \delta$ و $y = \frac{\delta}{2}$ آن گاه $x, y \in (0,1)$ و $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ ولی

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta}\right| = \frac{1}{\delta} > 1$$

آنچه ثابت شد با تعریف پیوستگی یکنواخت f بر $(0,1)$ متناقض و، از این رو، برهان تمام است.

۱ . ۲ خواص پیوستگی یکنواخت

قضیهٔ ۱ . اگر f بر I به طور یکنواخت پیوسته باشد و $J \subseteq I$ آن گاه f بر J نیز به طور یکنواخت پیوسته است.

اثبات این قضیه آسان است.

قضیهٔ ۲ . اگر f و g بر I به طور یکنواخت پیوسته باشند، $f + g$ نیز بر I به طور یکنواخت پیوسته است.

برهان: فرض کنید f و g بر I به طور یکنواخت پیوسته باشند. اگر ε عدد مثبت دلخواهی باشد آن گاه:

الف ـ عددی مثبت مانند δ_1 موجود است به طوری که به ازای هر x و هر y از I:

(۱) اگر $|x - y| < \delta_1$ آن گاه $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

ب ـ عددی مثبت مانند δ_2 موجود است به طوری که به ازای هر x و هر y از I:

(۲) اگر $|x - y| < \delta_2$ آن گاه $|g(x) - g(f)| < \frac{\varepsilon}{2}$

فرض کنید $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. اگر x و y دو عضو دلخواه از I باشند به طوری که $|x - y| < \delta$ آن گاه این x و y در (۱) و (۲) صدق می کنند و، بنابراین، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&|[f(x) + g(x)] - [f(y) + g(y)]| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

و برهان تمام است.

قضیهٔ ۳ . فرض کنید f بر I به طور یکنواخت پیوسته باشد. اگر c عددی ثابت باشد تابع cf نیز بر I به طور یکنواخت پیوسته است.

اثبات آسان است. دو حالت $c = 0$ و $c \neq 0$ را از هم جدا کنید.

۱ . ۳ پیوستگی یکنواخت بر بازه های کراندار

قضیهٔ ۴ . شرط لازم و کافی برای آن که f بر $[a, b]$ به طور یکنواخت پیوسته باشد آن است که f بر این بازه پیوسته باشد.

برهانی از این قضیه را می توانید در صفحهٔ ۱۶۳ از مرجع ۲ ملاحظه کنید.

قضیهٔ ۵ . فرض کنید تابع f بر بازهٔ کراندار (a,b) پیوسته باشد. آن گاه، f بر این بازه به طور یکنواخت پیوسته است فقط و فقط وقتی که $f(a^+)$ و $f(b^-)$ موجود باشند.

برهانی از این قضیه در صفحهٔ ۱۵۶ مرجع ۱ آمده است.

مثال ۳ـ پیوستگی تابع $f(x) = 1/x$ بر بازهٔ $(0,1)$ یکنواخت نیست؛ زیرا، $f(0^+)$ موجود نیست.

۱ . ۴ پیوستگی یکنواخت بر بازه های بی کران

قضیهٔ ۶ . فرض کنید $a \geq 0$ و تابع f بر بازهٔ $[a, \infty)$ پیوسته باشد. آن گاه f بر این بازه به طور یکنواخت پیوسته است فقط و فقط وقتی که به ازای هر عدد مثبت ε عددی مانند X موجود باشد به طوری که $X > a$ و نامساوی:

$$\left|f(x) - f\left(\frac{x+1}{y}\right)\right| < \varepsilon$$

به ازای هر x و y از $[X, \infty)$ برقرار باشد.

برهان لزوم شرط. فرض کنید f بر $[a, \infty)$ به طور یکنواخت پیوسته باشد. ε را عدد مثبت دلخواهی در نظر بگیرید. آن گاه عددی مثبت مانند δ موجود است به طوری که هرگاه:

$$x, y \in [a, \infty) \text{ و } |x - y| < \delta \qquad (1)$$

آن گاه:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

عدد مثبت X را چنان انتخاب کنید که $X \geq \max\left\{a, \frac{1}{\delta}\right\}$.

اگر $X \leq x \leq y$ آن گاه $x \in [a, \infty)$ و $x + 1/y \in [a, \infty)$ و $1/y \leq 1/X < \delta$. این نشان می دهد که x و $x + 1/y$ در (۱) صدق می کنند و، بنابراین:

$$\left|f(x) - f\left(\frac{x+1}{y}\right)\right| < \varepsilon \qquad (2)$$

و برهان لزوم شرط تمام است.

برهان کفایت شرط. فرض کنید عددی مانند X موجود باشد به طوری که $X > a$ و (۲) به ازای هر x و y از $[X, \infty)$ برقرار باشد. بگیرید $\delta = \frac{1}{X}$ و فرض کنید $X \leq x < y$

به طوری که $y-x<\delta$. اگر قرار دهیم $y-x=\frac{1}{z}$ ، خواهیم داشت:

$y=x+\frac{1}{z}$ ، که در آن $z>X$. از این رو، بنا به فرض:

$$|f(x)-f(y)|=\left|f(x)-f(x+\frac{1}{z})\right|<\varepsilon$$

این نشان می دهد که f بر $[X,\infty)$ به طور یکنواخت پیوسته است.

به آسانی می توان ثابت کرد که اگر f بر بازه‌های $[a,X]$ و $[X,\infty)$ به طور یکنواخت پیوسته باشد آن گاه f بر بازهٔ $[a,\infty)$ نیز به طور یکنواخت پیوسته است. این کفایت شرط را تمام می کند.

حکم مذکور در قضیهٔ ۶ را به صورت زیر نیز می توان بیان کرد:

قضیهٔ ۶*. فرض کنید $a\geq 0$ و f بر $[a,\infty)$ پیوسته باشد. آن گاه f بر $[a,\infty)$ به طور یکنواخت پیوسته است فقط و فقط وقتی که:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}[f(x)-f(x+1/y)]=0$$

مثال ۴ـ تابع $f(x)=\sin x$ بر $\mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته است.

برهان: کافی است ثابت کنیم که f بر $[a,\infty)$ به طور یکنواخت پیوسته است. بدیهی است که f بر $[0,\infty)$ پیوسته است. ملاحظه کنید که:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}[f(x)-f(x+1/y)]=\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}[\sin x-\sin(x+1/y)]$$

$$=\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left[(1-\cos\frac{1}{y})\sin x-\cos x\sin\frac{1}{y}\right]=0$$

از این رو، به استناد قضیهٔ ۶*، f بر $[0,\infty)$ به طور یکنواخت پیوسته و برهان تمام است.

در مثال بالا حد f در بی نهایت وجود ندارد. اگر این حد موجود باشد باز هم شرط قضیهٔ ۶* برقرار می شود و نتایج زیر را به دست می آوریم:

نتیجهٔ ۱. فرض کنید تابع f بر بازهٔ $[a,\infty)$ ، که در آن $a\in\mathbb{R}$ ، پیوسته باشد. اگر حد f در بی نهایت موجود و متناهی باشد آن گاه پیوستگی f بر $[a,\infty)$ یکنواخت است.

نتیجهٔ ۲. فرض کنید f بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. اگر $\lim_{x\to\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ موجود و متناهی باشند آن گاه f بر $\mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته است.

مثال ۵ـ تابع $f(x)=x^2$ بر $\mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته نیست.

برهان: کافی است ثابت کنیم که پیوستگی f بر $[0,\infty)$ یکنواخت نیست.

ملاحظه می کنیم که:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x+1/x)]=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^2-(x+1/x)^2\right]=-2\neq 0$$

این نشان می دهد که شرط قضیهٔ ۶* برقرار نیست و برهان تمام است.

مثال ۶ـ پیوستگی تابع $f(x)=x\sin x$ بر $[0,\infty)$ یکنواخت نیست.

برهان: اگر تفاضل $f(x)-f(x+1/x)$ را به صورت:

$$f(x)-f(x+1/x)=\frac{1}{2x}\left(\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\right)^2\sin x-\frac{1}{x}\sin(x+1/x)$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cos x$$

بنویسیم، متوجه می شویم که وقتی $x\to\infty$ این تفاضل به صفر نمی گراید.

بخش دوم: تشخیص پیوستگی یکنواخت با استفاده از تعبیر هندسی

در این بخش فقط توابعی مورد بررسی قرار می گیرند که بر بازهٔ مفروض دارای مشتق پیوسته باشند.

۲ . ۱ تعبیر هندسی پیوستگی یکنواخت و نقش آن در تشخیص پیوستگی یکنواخت

فرض کنید تابع f بر بازهٔ I پیوسته باشد. از نظر هندسی، تابع f وقتی بر بازهٔ I به طور یکنواخت پیوسته است که به ازای هر عدد مثبت ε عددی مثبت مانند δ وجود داشته باشد به طوری که:

(**) «اگر مستطیلی به قاعدهٔ δ و ارتفاع ε را به موازات

به طوری که $y - x < \delta$. اگر قرار دهیم $y - x = \frac{1}{z}$ ، خواهیم داشت: $y = x + \frac{1}{z}$ ، که در آن $z > X$. از این رو، بنا به فرض:

$$|f(x) - f(y)| = \left|f(x) - f\left(x + \frac{1}{z}\right)\right| < \varepsilon$$

این نشان می دهد که f بر $[X, \infty)$ به طور یکنواخت پیوسته است.

به آسانی می توان ثابت کرد که اگر f بر بازه های $[a, X]$ و $[X, \infty)$ به طور یکنواخت پیوسته باشد آن گاه f بر بازهٔ $[a, \infty)$ نیز به طور یکنواخت پیوسته است. این کفایت شرط را تمام می کند.

حکم مذکور در قضیهٔ ۶ را به صورت زیر نیز می توان بیان کرد:

قضیهٔ *۶. فرض کنید $a \geq 0$ و f بر $[a, \infty)$ پیوسته باشد. آن گاه f بر $[a, \infty)$ به طور یکنواخت پیوسته است فقط و فقط وقتی که:

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} [f(x) - f(x + 1/y)] = 0$$

مثال ۴- تابع $f(x) = \sin x$ بر $\mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته است.

برهان: کافی است ثابت کنیم که f بر $[a, \infty)$ به طور یکنواخت پیوسته است. بدیهی است که f بر $[0, \infty)$ پیوسته است. ملاحظه کنید که:

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} [f(x) - f(x + 1/y)] = \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} [\sin x - \sin(x + 1/y)]$$

$$= \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \left[(1 - \cos\frac{1}{y})\sin x - \cos x \sin\frac{1}{y}\right] = 0$$

از این رو، به استناد قضیهٔ *۶، f بر $[0, \infty)$ به طور یکنواخت پیوسته و برهان تمام است.

در مثال بالا حد f در بی نهایت وجود ندارد. اگر این حد موجود باشد باز هم شرط قضیهٔ *۶ برقرار می شود و نتایج زیر را به دست می آوریم:

نتیجهٔ ۱. فرض کنید تابع f بر بازهٔ $[a, \infty)$ ، که در آن $a \in \mathbb{R}$ ، پیوسته باشد. اگر حد f در بی نهایت موجود و متناهی باشد آن گاه پیوستگی f بر $[a, \infty)$ یکنواخت است.

نتیجهٔ ۲. فرض کنید f بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. اگر $\lim_{x \to \infty} f(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ موجود و متناهی باشند آن گاه f بر $\mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته است.

مثال ۵- تابع $f(x) = x^2$ بر $\mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته نیست.

برهان: کافی است ثابت کنیم که پیوستگی f بر $[0, \infty)$ یکنواخت نیست.

ملاحظه می کنیم که:

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - f(x + 1/x)] = \lim_{x \to \infty} [x^2 - (x + 1/x)^2] = -2 \neq 0$$

این نشان می دهد که شرط قضیهٔ *۶ برقرار نیست و برهان تمام است.

مثال ۶- پیوستگی تابع $f(x) = x \sin x$ بر $[0, \infty)$ یکنواخت نیست.

برهان: اگر تفاضل $f(x) - f(x + 1/x)$ را به صورت:

$$f(x) - f(x + 1/x) = \frac{1}{2x}\left(\frac{\sin\frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x}}\right)^2 \sin x - \frac{1}{x}\sin(x + 1/x) - \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cos x$$

بنویسیم، متوجه می شویم که وقتی $x \to \infty$ این تفاضل به صفر نمی گراید.

بخش دوم: تشخیص پیوستگی یکنواخت با استفاده از تعبیر هندسی

در این بخش فقط توابعی مورد بررسی قرار می گیرند که بربازهٔ مفروض دارای مشتق پیوسته باشند.

۲ . ۱ تعبیر هندسی پیوستگی یکنواخت و نقش آن در تشخیص پیوستگی یکنواخت

فرض کنید تابع f بر بازهٔ I پیوسته باشد. از نظر هندسی، تابع f وقتی بر بازهٔ I به طور یکنواخت پیوسته است که به ازای هر عدد مثبت ε عددی مثبت مانند δ وجود داشته باشد به طوری که:

(**) «اگر مستطیلی به قاعدهٔ δ و ارتفاع ε را به موازات

محـورهای مخـتصات حـرکت دهیم، نمودار تابـع هیچ گاه همزمان اضلاع بالا و پایین مستطیل را قطع نکند».

بدیهی است که اگر تابع f، بازهٔ I، و عدد ε تغییر کند δ نیز تغییر خواهد کرد. مثالهای زیر مؤیّد این واقعیت است.

مثال ۷ـ فرض کنید $a > 0$. تابع $f(x) = x^2$ را بر بازهٔ $[-a,a]$ در نظر بگیرید. ملاحظه می کنیم که:

الف ـ $|f'(x)| = |2x| \leq 2a \quad , \quad -a \leq x \leq a$

ب ـ به استناد قضیهٔ مقدار میانگین، اگر $x, y \in [-a,a]$ و $x \neq y$، نقطه‌ای مانند z بین x و y موجود است به طوری که $f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$. و نتیجه می گیریم که:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x-y| \leq 2a|x-y|$$

از این رو، اگر $\varepsilon > 0$ مـفروض باشـد هر عـدد مثبت δ که $\delta \leq \varepsilon/2a$ در (*) صدق می کند.

در این مثـال می بینیم کـه اگر a به بی نهایـت میل کند δ الزاماً به صفر میل می کند. مثلاً، اگر $a = 1$ آن گاه $\delta = \varepsilon/2$ در (*) صدق می کند؛ ولی، اگر $a = 4$ آن گاه $\delta = \varepsilon/2$ در (*) صـدق نمی کند. در واقـع، تابع مـشـتق در $(-\infty,\infty)$ بی کران است. بنابراین، از نظر هندسی، می تـوان گفت که اگر $a \to \infty$ شیب منحنی نمایش تابع در نقاط a و $-a$ به ∞ میل خواهد کرد. این تعبیر باعث می شود که حدس بزنیم که پیـوسـتـگی تابع $f(x) = x^2$ بر بازهٔ $(-\infty,\infty)$ یکنواخت نیـسـت. این حـدس ناشی از این است که چـون شیب نقـاط دوردست منحنی بسـیار زیاد است به ازای هر عـدد مثبت δ احتمالاًدو نقطهٔ x و y موجود خواهند بود که $|x-y| < \delta$ ولی اختـلاف ارتفاع آنها از عـدد معیّنـی بیشتـر باشد. با یک بررسی ساده این حدس به یقین تبدیل می شود.

فرض کنید δ عددی مـثبت و کـوچکتر از واحـد باشد. بگیـریـد $x = 1/\delta$ و $y = 1/\delta + \delta/2$. خـواهیـد داشت: $|x-y| = \delta/2 < \delta$ و

$$|f(x) - f(y)| = \left|\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta} + \delta/2\right)^2\right|$$
$$= 1 - \delta^2/4 > 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

مثال ۸ـ تابع:

$$f(x) = \sin x \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

را در نظر بگیرید. اگر $x, y \in \mathbb{R}$ نامساوی:

$$|f(x) - f(y)| = |\sin x - \sin y| \leq |x-y|$$

از قضیهٔ مـقدار میانگین به دست می آید و نتیجـه می گیریم که اگر $\varepsilon > 0$ مفروض باشد و $0 < \delta \leq \varepsilon$، عدد δ در (*) صدق می کند.

در این مثال، تابع مـشتق کراندار است. از نظر هندسی، شیـب منحنی نمایش تابع از مـیزان مـعیّنی تجـاوز نمی کند. چنان که خواهید دید، همهٔ توابعی که دارای این ویژگی باشند پیوستگی آنها بر بازهٔ مفروض یکنواخت است.

۲.۲ شرط لیپ شیتس

تعریف ۲. فرض کنید تابع f بر مجموعهٔ S تعریف شده باشد. می گوییم f بر S در شرط لیپ شیـتس صدق می کند در صـورتی کـه عـددی مـثـبت مـانند M مـوجـود باشـد به طوری که نامسـاوی:

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| \qquad (1)$$

به ازای هر x و y از S برقرار باشد.

قضیهٔ ۷. شرط کافی برای آن که f بر مجموعهٔ S به طور یکنواخت پیوسته باشد آن است که f بر S در شرط لیپ شیتس صدق کند، ولی این شرط لازم نیست.

برهان: فرض کنید ε عدد مثبت دلخواهی باشد. M را عدد مثبتی بگیرید که به استناد تعریف ۲ موجود است. فرض کنید $\delta = \varepsilon/M$. آن گاه، به ازای هر x و y از S که $|x-y| < \delta$ خواهید داشت:

$$|f(x) - f(y)| < M|x-y| < M\delta = \varepsilon$$

و برهان کفایت شرط تمام است.

تابع $f(x) = \sqrt{x}$ بر بازهٔ $[0,1]$ به طور یکنواخت پیوسته است ولی بر این بازه در شـرط لیپ شیتس صـدق نمی کند. این برهان را تمام می کند.

اگر f یک تابع لیپ شـیـتس بر I باشـد تعبیـر هندسی نامساوی (۱) این است که قدرمطلق اختلاف ارتفاع دو نقطهٔ $(x, f(x))$ و $(y, f(y))$ از نمودار تابع f حداکثر برابر $M|x-y|$ است. از این رو، اگر x و y به هم نزدیک باشند این اختلاف ارتفاع، به لحاظ قدرمطلق، کاهش می یابد و نتیجه می گیریم که اگر $\varepsilon > 0$ مفروض باشد می توانیم عدد مثبت δ را به قدری کوچک انتخاب کنیم که وقتی مستطیل به ارتفاع ε و پایهٔ δ به موازات مـحورهای مـختصـات حرکت می کند نـمودار تابع هیچ گاه همزمان اضلاع بالا و پایین مسـتطیل را قطع نکند.

حال، فرض کنید f بر I دارای مشتق کراندار باشد و عدد مثبت M چنان باشد که نامساوی:

$$|f'(x)| \leq M \qquad (2)$$

به ازای هر x از I برقرار باشد. به استناد قضیهٔ مقدار میانگین، اگر x و y دو نقطه از I باشند، عددی مانند c بین x و y موجود است به طوری که:

$$f(x)-f(y)=f'(c)(x-y) \qquad (۳)$$

از (۲) و (۳) نتیجه می گیریم که نامساوی (۱) به ازای هر دو نقطهٔ x و y از I برقرار است. از این رو، اگر f بر I دارای مشتق کراندار باشد آن گاه f بر I در شرط لیپ شیتس صدق می کند و، بنابراین، بر I به طور یکنواخت پیوسته است و قضیهٔ زیر به دست می آید:

قضیهٔ ۸. فرض کنید f بر بازهٔ I پیوسته و مشتق پذیر باشد. اگر مشتق f بر I کراندار باشد پیوستگی f بر I یکنواخت است؛ ولی، اگر شیب نمودار تابع f در یکی از نقاط داخلی یا انتهایی I به ∞ یا $-\infty$ میل کند پیوستگی یکنواخت f بر I به خطر می افتد.

برهان: حکم اول در قضیهٔ ۷ ثابت شده است. برای اثبات حکم دوم، ملاحظه می کنیم که پیوستگی تابع $f(x)=x^2$ بر $(-\infty,\infty)$ و پیوستگی تابع $f(x)=1/x$ بر $(0,1)$ یکنواخت نیست؛ ولی تابع $f(x)=\sqrt{x}$ بر بازهٔ $[0,1]$ به طور یکنواخت پیوسته است.

مثال ۹ـ نمودار تابع $f(x)=x$ بر $\mathbb{R}$ یک خط راست با شیبی ثابت است. از این رو، به استناد قضیهٔ بالا، f بر $\mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته است.

نتیجهٔ ۱. فرض کنید I بازه ای کراندار با ابتدای a و انتهای b باشد. فرض کنید f بر I پیوسته باشد. اگر نمودار f در یکی از نقاط داخلی یا انتهایی I دارای مجانب قائم باشد، پیوستگی f بر I یکنواخت نیست.

برهان: فرض کنید، مثلاً، خط $x=a$ مجانب قائم نمودار f بر I باشد. فرض کنید $0<\delta<b-a$. مستطیل به پایهٔ δ و ارتفاع واحد را طوری به موازات محورهای مختصات حرکت دهید که گوشهٔ پایین سمت راست آن بر نقطهٔ $(a+\delta\ ,\ f(a+\delta))$ منطبق شود. چون $f(a+)=\infty$، نقطه ای مانند x از بازهٔ $(a,a+\delta)$ می توان یافت به طوری که $f(x)>f(a+\delta)+1$. این نشان می دهد، که نمودار f الزاماً اضلاع بالا و پایین مستطیل مذکور را همزمان قطع می کند و برهان تمام است.

نتیجهٔ ۲. پیوستگی تابع $f(x)=x^P$ بر بازهٔ $(0,1)$ فقط و فقط وقتی یکنواخت است که $P\ge 0$.

قضیهٔ ۹. فرض کنید تابع f بر بازهٔ $[a,\infty)$، که در آن $a\in\mathbb{R}$، مشتق پذیر باشد و تابع مشتق بر هر زیر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ از بازهٔ $[a,\infty)$ کراندار باشد. اگر:

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty \qquad (۱)$$

آن گاه پیوستگی f بر $[a,\infty)$ یکنواخت نیست.

برهان: فرض کنید δ عدد مثبت دلخواهی باشد. به استناد (۱)، عددی مانند X موجود است که $X\ge a$ و به ازای هر x از (X,∞) نامساوی $f'(x)>2/\delta$ برقرار است. حال، فرض کنید $x\in(X,\infty)$ و $y=x+\delta/2$. به استناد قضیهٔ مقدار میانگین، عددی مانند c وجود دارد به طوری که $x<c<y$ و:

$$f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)=f'(c)\delta/2$$

بدیهی است که $c\in(X,\infty)$ و، از این رو، $f'(c)>2/\delta$. این نشان می دهد که:

$$f(y)-f(x)>1$$

و برهان تمام است.

مثال ۱۰ـ تابع $f(x)=x^P$ بر بازهٔ $[1,\infty)$ فقط و فقط وقتی به طور یکنواخت پیوسته است که $P\le 1$.

نتیجه. اگر f بر $\mathbb{R}$ مشتق پذیر باشد آن گاه هر تابع f که نمودارش دارای مجانبهای مایل باشد در قلمرو خود به طور یکنواخت پیوسته است.

مثال ۱۱ـ تابع $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ بر $\mathbb{R}$، که نمودار آن دارای مجانب مایل است، بر $\mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته است.

مراجع

۱ ـ آشنایی با آنالیز ریاضی، ترجمهٔ سید محمود طالبیان، انتشارات آستان قدس رضوی، ۱۳۶۹.

2 _ Robert G. Bartle, Donald R. Sherbert; Introduction to Real Analysis. John Wiley & Sons, 1992.

3 _ Robert G. Bartle, The Elements of Real Analysis. John Wiley & Sons, 1976.

4 _ Richard R. Goldberg, Methods of Real Analysis. Blaisdell Publishing Co., 1964.

وزارت آموزش و پرورش
اداره کل آموزش و پرورش اصفهان
نخستین کنفرانس آموزش ریاضی ایران
و قد تنشا من جميع
المربعات كل مع المثلث
الذى دونه فى المرتبه
$P_n = n^2 + T_{n-1}$
۶ تا ۸ شهریور ۱۳۷۵
اصفهان ایران
MATHEMATICAL SOCIETY
1st
IMEC
27 29 August 1996
ISFAHAN IRAN