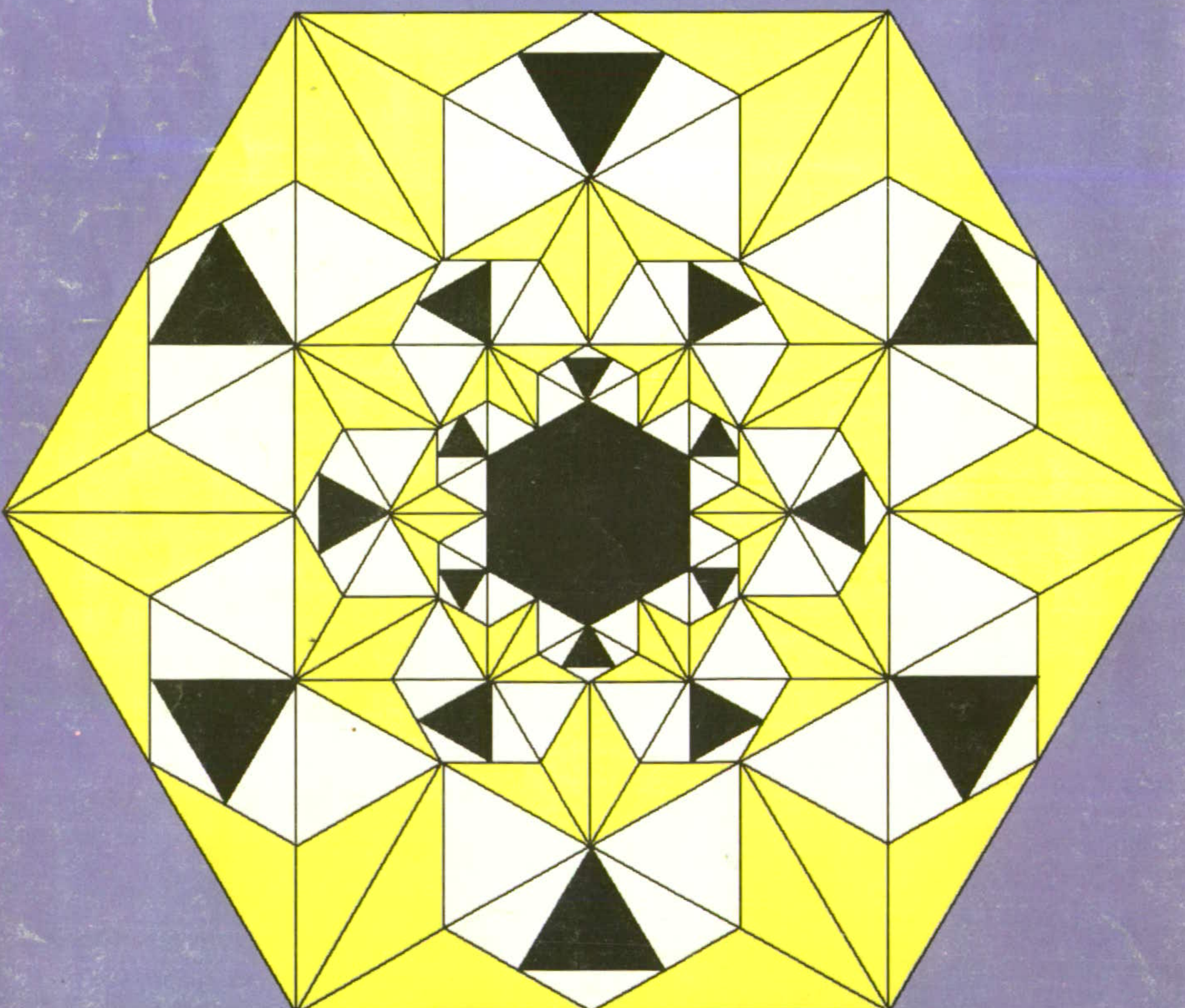
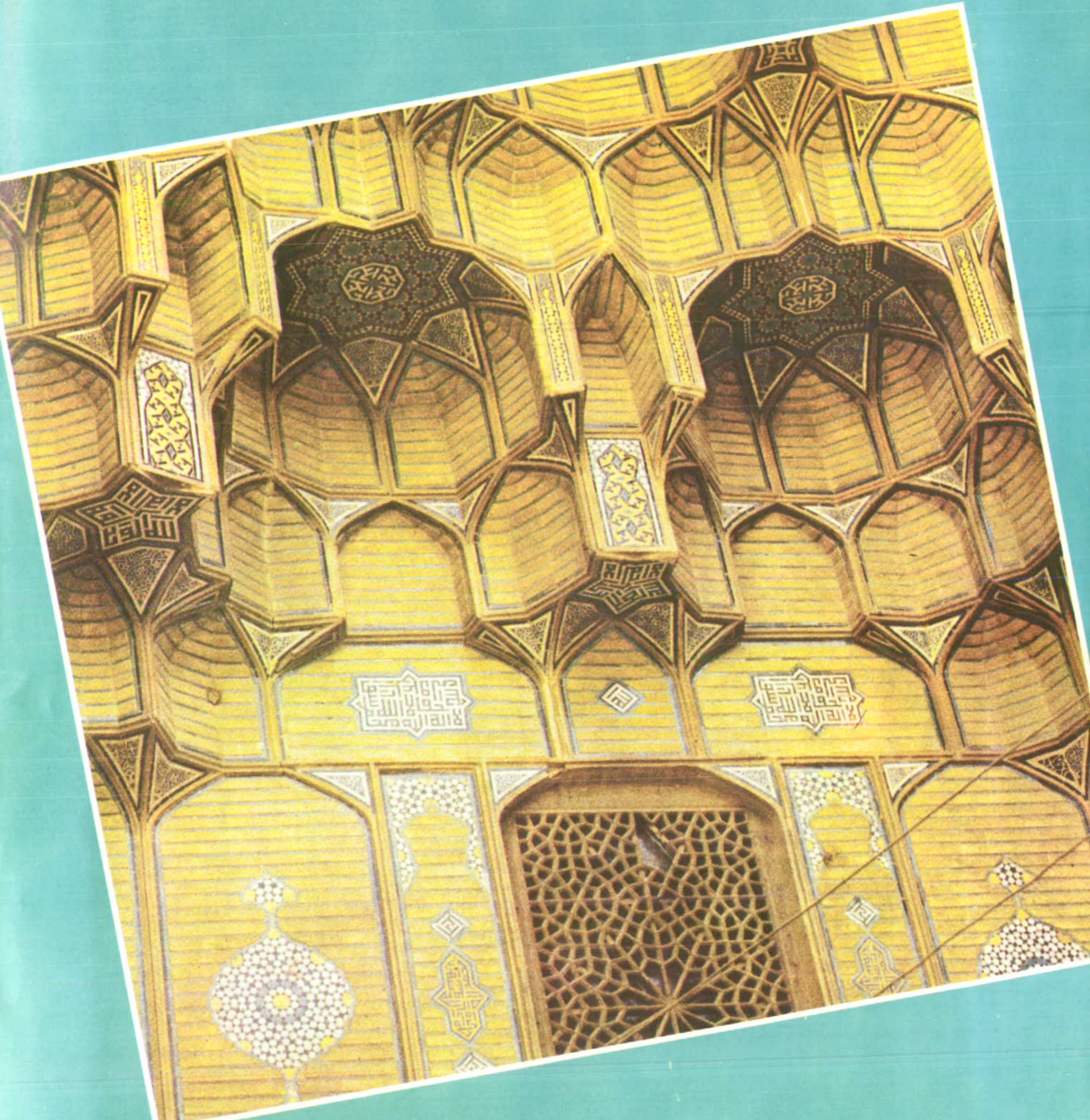
رشد

آموزش ریاضی

سال دوازدهم - بهار ۱۳۷۴ - شماره ۴۲
بها: ۱۰۰۰ ریال





بسم الله الرحمن الرحیم

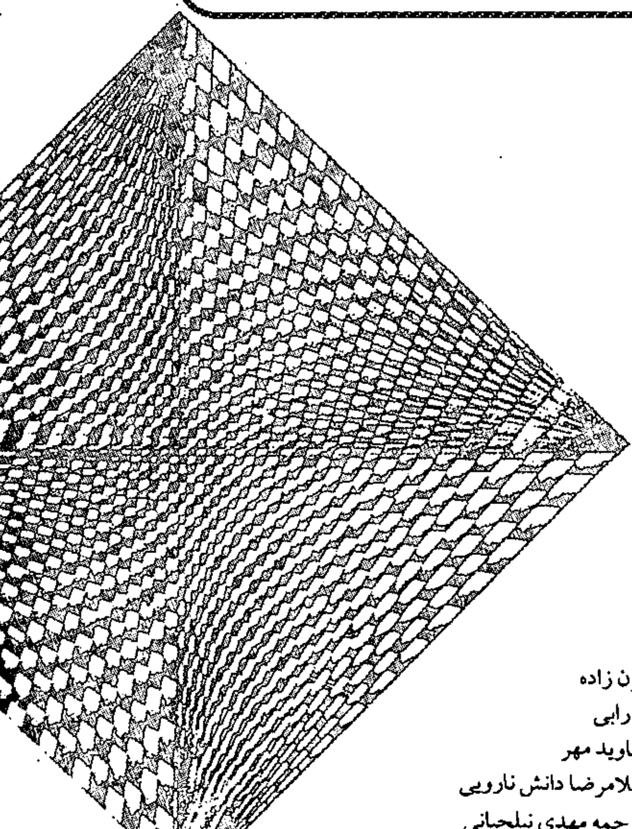
رشد آموزش ریاضی

سال یازدهم ـ بهار ۱۳۷۴ ـ شمارهٔ مسلسل ۴۲

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه ریزی و تألیف کتب درسی،

تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ ـ داخلی ۳۰۳

مجله رشد آموزش ریاضی سه شماره در سال به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم وسایر دانش پژوهان در این رشته منتشر می شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ـ۱۵۸۵۵ ارسال فرمایید.



فهرست

دبیران، دوستان و همکاران گرامی:

می دانید که از اوایل سال گذشته تاکنون، یعنی حدود یک سال، در انتشار مجلات رشد تخصصی و از جمله همین مجلّه ای که در دست دارید وقفه ایجاد شد و ارتباط سالم و سازنده ای که از سالیان پیش به وسیله این مجلات میان ما و شما برقرار شده بود متأسفانه به سردی گرایید، اگرچه خوشبختانه خاموش نشد. اکنون با سپاس و تشکر از علاقمندانی که در این مدت نگران عدم انتشار مجلات بودند و این نگرانی را طی نامه ها و تلفن های مکرر با ما در میان می گذاشتند، و نیز با تشکر از اعضای هیئت های تحریریه که در این سالها همواره یار و مددکار ما بوده و از این پس نیز خواهند بود، با خرسندی اعلام می داریم که بار دیگر «رشد» های تخصصی به میان شما آمده است و به یاری خدا یکی پس از دیگری در اختیار علاقمندان بویژه دبیران، دانشجویان، مدرّسان و استادان دانشگاهها قرار خواهد گرفت، ضمن اینکه با توجه به توقف یکساله و تغییراتی که در تولید و توزیع مجلات بوجود آمده است، لازم می دانیم نکته هایی را به اطلاع شما برسانیم:

۱ ـ هدف از انتشار مجلات آموزشی رشد تخصصی از ابتدا و همواره اعتلا بخشیدن به دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و دیگر دانش پژوهان بوده است. این هدف را ما همچنان دنبال می کنیم و سعیمان بر این است که هر شماره از مجله نسبت به شمارهٔ پیش از خود پربارتر و برای خوانندگان رهگشاتر باشد. اما باید دانست که تحقق بخشیدن به این هدف برای «دفتر برنامه ریزی و تألیف کتب درسی» به میزان زیادی در گرو اظهارنظرها، پیشنهادها و تجربه های شما در تدریس و بحث و تحقیق و همچنین بررسی انتقادی شما از محتوای مجلات است. بنابراین استدعا داریم از انعکاس دیدگاهها و ارسال پیشنهادها و نظرات خود برای هیئت های تحریریه دریغ نورزید و بدانید که تنها با برقراری ارتباط میان «شما» و «مجله» است که بر غنای آن افزوده خواهد شد. در همینجا لازم می دانیم از همهٔ کسانی که در گذشته این ارتباط را با ما برقرار و آن را حفظ کردند صمیمانه تشکر کنیم.

۲ ـ می دانید که این مجلات به انگیزهٔ ارتقا بخشیدن به کیفیّت آموزشی در کشور، پایه گذاری و تا امروز منتشر شده است و به همین سبب نیز هست که واژهٔ «آموزش» به صورت جزئی از عنوان و نام هریک از مجلات رشد تخصصی درآمده است. درواقع انتظار این بوده و هست که هر مجلهٔ رشد تخصصی در هر رشته ای که هست، منعکس کنندهٔ سیمای «آموزش» آن رشته در کشور باشد. باید اذعان کنیم که ما در رسیدن به این هدف آنچنانکه خواسته ایم کامیاب نبوده ایم و مجلات از این بابت کاستی هایی دارد. البته می دانیم ـ و اهل نظر نیز به ما گفته اند ـ که نیل به چنین هدفی در کشور ما که در رشتهٔ آموزش علم و برنامه ریزی آموزشی چندان پرسابقه نیست با مشکلاتی همراه است. با اینحال سؤال می کنیم: پیشنهاد و نظر شما دبیران و استادان چیست؟

۳ ـ از دو سال قبل تاکنون ادارهٔ کل آموزش های ضمن خدمت، مجلات رشد تخصصی را جزء منابع آموزشی خود قرار داده است و هرساله از آنها در دوره های غیرحضوری خود، امتحان به عمل می آورد. ما این اقدام شایسته را ارج می نهیم و امیدواریم بتواند به ایجاد ارتباط بیشتر میان دبیران و مجلات رشد، بینجامد.

۴ ـ دربارهٔ افزایش بهای مجله به میزان قابل توجه (یکصد تومان) باید با تأسف عرض کنیم که این علیرغم میل خودمان بوده است و از شما پوزش می طلبیم. درعین حال باید بگوییم که ما با توجه به افزایش بهای جهانی کاغذ و نیز بالا رفتن هزینه های تولید تن به قبول این افزایش دادیم چرا که در غیر اینصورت مجلات برای همیشه تعطیل می شد و این چیزی است که قطعاً مورد رضایت شما و ما نبوده و نیست، امید است این افزایش قیمت بر شما گران نیاید و همچنان علاقمند به «رشد» باقی بمانید.

۵ ـ مجلّه رشد آموزش زمین شناسی به سبب قلّت تیراژ و نیز به علت این که جای نسبتاً کمی را در برنامهٔ دبیرستانها به خود اختصاص داده است، دیگر منتشر نخواهد شد. علاقمندان می توانند مباحث و مقالات زمین شناسی را ـ بطور محدود ـ در مجله رشد آموزش جغرافیا مطالعه نمایند.

۶ ـ مجلهٔ رشد آموزش راهنمایی که در دوسال گذشته برای مدارس راهنمایی سراسر کشور به رایگان ارسال می شد از این پس در امر توزیع و فروش مشمول قاعدهٔ سایر مجلات خواهد بود.

۷ ـ چون توزیع مجلات به دفتر انتشارات کمک آموزشی واگذار شده است و آن دفتر به علت پاره ای مشکلات از پذیرش مشترک (آبونمان) و ارسال تک شماره برای افراد معذور است علاقمندان باید مجله را از طریق ادارات آموزش و پرورش محل خدمت خود مشترک شوند و یا از نمایندگی های انتشارات مدرسه در مناطق و شهرستانها تهیه کنند.

۸ ـ نوشته ها، مقالات، نقدها، پیشنهادها و نظرات خود را به آدرس: تهران ـ خیابان ایرانشهر شمالی سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی ـ هیئت تحریریه مربوطه ارسال فرمایید.

دفتر برنامه ریزی و تألیف کتب درسی

پیشگفتار

۱ـ موفقیت چشمگیر تیمهای ریاضی و کامپیوتر باعث شور و شعف فراوان در بین جوانان و نوجوانان و ملت ایران و سبب شگفتی و حیرت دیگران گردید. این موفقیت عظیم را به همه دست‌اندرکاران و مسئولین محترم کمیته‌های ملّی المپیاد ریاضی و کامپیوتر تبریک عرض می‌کنیم. این موفقیت و پیروزی نه تنها حاکی از استعدادهای درخشان دانش‌آموزان و جوانان این مرزوبوم است و نه تنها حاصل تلاش مستمر و شبانه‌روزی آنها است، نتیجهٔ کوششهای مداوم تک‌تک اعضای کمیته‌های علمی و حتیّ اجرایی نیز هست. کوششهای زیادی طی چند سال گذشته انجام گرفت تا اینکه در المپیاد ریاضی از رتبهٔ بیست‌وششم در سال ۶۷ به رتبهٔ چهارم در سال ۷۳ رسیدیم. این پیروزی شگفت‌آور و این ارتقاء سریع و شگفت‌آور بدون عوامل فوق‌الذّکر میسر نبود. برنامه‌ریزی دقیق کمیته‌ها برای انجام مراحل مختلف آزمونها، طرح سؤالات و مسائل دقیق و خوب برای ارزشیابی از یک‌سو و کار و کوشش و تقلّای دانش‌آموزان منجر به این نتایج متعالی گردید. کوششهای همه را ارج گذاریم زیرا این موفقیتها مدیون کوششهای آشکار و پنهان همهٔ افرادی است که در طول این سالها به‌ویژه در سالهای اوّلیه سنگ بنای اوّلیه را محکم گذاشتند و این بنا را ساختند و آن‌چنان ساختند که امروزه موفقیت تیمهای ما در المپیادها یکی از افتخارات ملّی ما شده است که دوستان را خوشحال می‌کند و خار چشمی است برای دشمنان ما.

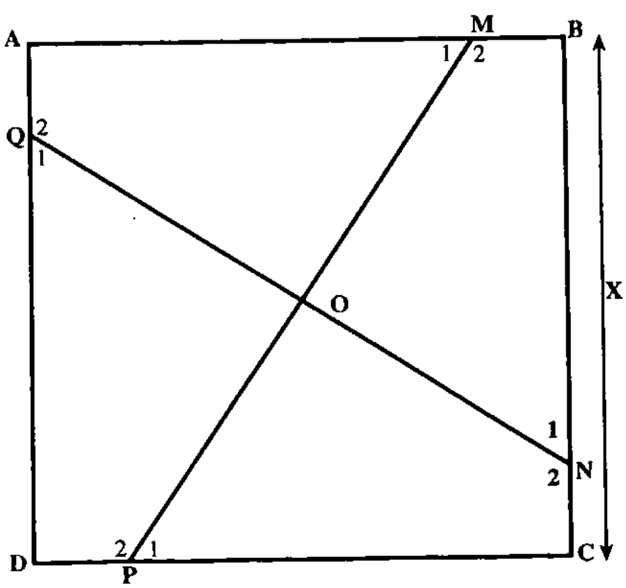
امّا این موفقیتها و پیروزی‌ها نباید موجب انحراف ما از مسیر اصلی شود، اراده و عزم ملّی ما براساس آرمانهای انقلاب اسلامی بر این قرار دارد که به پیشرفتهای علمی و تکنولوژیکی نایل شویم. امروزه اهمیّت دانش و دانش فنی بر هیچ‌کسی پوشیده نیست. صنعت و تکنولوژی نیازمند دانش قوی ریاضی و به‌طور کلی علوم پایه است. و از این‌رو، در مرحلهٔ بازسازی نیازمند خبرگان و نخبگان دانش هستیم. بدون شک این نخبگان از بین همین جوانان و نوجوانان کوشا و شکست‌ناپذیر رشد می‌کنند. نباید از مسیر اصلی منحرف شویم باید ضمن تشدید کوششهای کمیته‌ها کوشش شود تا سطح دانش ریاضی در آموزش دبیرستان و دانشگاه ارتقاء یابد تا از این راه دانشجویانی با کیفیّت بالاتری وارد دوره‌های کارشناسی ریاضی شوند تا سطح دانش ریاضی که به حق مادر و زیربنای تمام علوم است بالاتر رود.

۲ـ درس کامپیوتر به‌عنوان یک درس وارد آموزش متوسطه شد. همزمان سیستمهای اداری و اجرایی به کامپیوتر مجهز گردید. رشد سریع استفاده از کامپیوتر در کشور ما ایجاب می‌کرد که مجلهٔ رشد ریاضی هم کمکی در این راه داشته باشد. لهذا، مقالات مربوط به هوش مصنوعی، الگوریتمها در شماره‌های اخیر به چاپ رسید. امّا این فعالیتها متناسب با رشد سریع استفاده از کامپیوترها نبود. از این‌رو هیأت تحریریه مجله برمبنای رهنمودهای مسئولین محترم آموزش‌وپرورش تصمیم گرفت که صفحاتی از مجله رابه مقالاتی در زمینه کامپیوتر اختصاص دهد و این مقالات را در زمینهٔ: جایگشتها، برنامه‌نویسی بر مبنای کتاب مبانی کامپیوتر و انفورماتیک، الگوریتمهای کلیدی، روابط تراجعی (بازگشتی) و کاربرد آنها در کامپیوتر، اخبار مربوط به المپیادهای کامپیوتر در کشورهای مختلف منتشر کند تا دبیران و دانش‌آموزان ما را با این علم بیشتر آشنا سازد. همکاران محترم و متخصصین گرامی این به معنی فراخوان مقاله است. با ارسال مقالاتی در این زمینه‌ها ما را یاری دهید. همکاران محترم دانشگاهی که در زمینهٔ کامپیوتر، آنالیز عددی تحقیق در عملیات تخصص دارند کمک شایانی می‌توانند بکنند و با تهیّه و ارسال مقالاتی در این موضوعات مجموعه مقالات این بخش را پربارتر سازند.

استقـــراء در هنـدســـــه (۲)

اثبـات به کـمک استقراء

ل. آی. گالووینا.
آی. ام. یاگلوم.
ترجمه و تنظیم از: ابراهیم دارابی



بسیاری از قضایای مقاله اول را می‌توان مثالهایی از روش استقراء برای اثبات قضایای هندسه درنظر گرفت. مثلاً، مثال: مجموع زوایای داخلی n ضلعی را حساب کنید از مقاله قبل را، می‌توان چنین فرمولبندی کرد: ثابت کنید مجموع زوایای داخلی n ضلعی برابر است با $2d(n-2)$ یا در مثال بعدی: یک n ضلعی (محدب یا غیرمحدب) به‌وسیله اقطار غیر متقاطع به چند مثلث تجزیه می‌شود را می‌توان چنین مطرح کرد که:

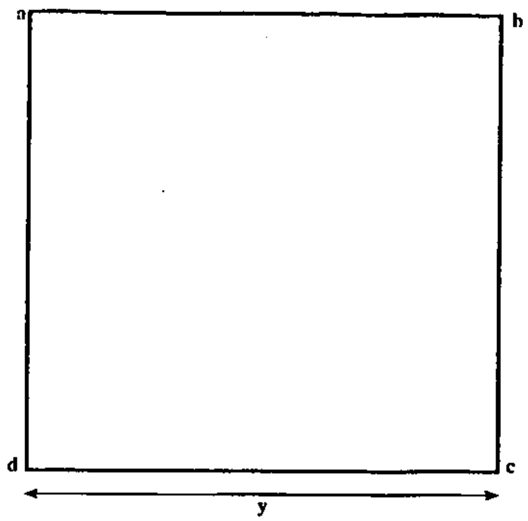
ثابت کنید اقطار غیرمتقاطع یک n ضلعی، آن را به $(n-2)$ مثلث تقسیم می‌کند. در این مقاله، مثالهای زیادی از این نوع مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال ۱. n مربع مفروضند. ثابت کنید می‌توان آنها را طوری برش داد که از قطعات حاصل از آنها بتوان مربع دیگر پدید آورد.

الف. حل. برای $n=1$ حکم احتیاج به اثبات ندارد.

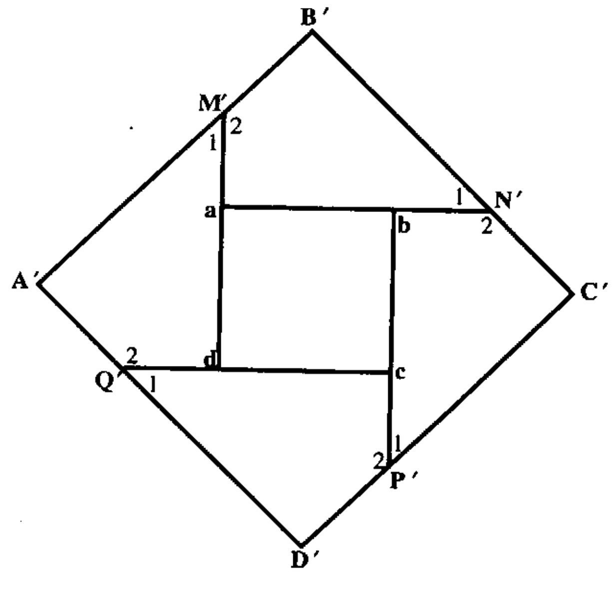
ثابت می‌کنیم که به ازای $n=2$ هم حکم درست است.

طول اضلاع مربع‌های ABCD و abcd را به ترتیب با x و y نشان می‌دهیم. فرض کنیم $x \geqslant y$.



(شکل ۱,a)

بر روی اضلاع مربع ABCD به ضلع x پاره خطهای $AM=BN=CP=DQ=\frac{x+y}{۲}$ را مشخص می‌کنیم و مربع را در طول خطوط MP و NQ، که به‌آسانی دیده می‌شود یکدیگر را در نقطهٔ O مرکز مربع به‌زاویه قائمه قطع کرده‌اند، می‌بریم. مربع به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌شود.



(شکل ۱,b)

اکنون این قطعات را بر روی مربع دیگر که در شکل (۱,b) نشان داده شده است، قرار می‌دهیم. شکل حاصل هم یک مربع می‌شود. زیرا زوایای حاصل در نقاط Q' ، P' ، N' ، M' مکمل یکدیگرند و زوایای D' ، C' ، B' ، A' قائمه‌اند و در ضمن:

$$A'B'=B'C'=C'D'=D'A'$$

ب. فرض کنید حکم به ازای n مربع ثابت شده باشد. اگر $n+۱$ مربع $k_۱, k_۲, \dots, k_n, k_{n+۱}$ داشته باشیم، همانطور که در قسمت ۱ نشان داده شد، دوتا از این مربع‌ها مثلاً k_n و $k_{n+۱}$ را می‌توان برش داد و از قطعات حاصل از آنها مربع جدیدی مثلاً k' را پدید آورد. پس بنا به فرض می‌توان ازمربع‌های $k_۱, k_۲, \dots, k_{n-۱}, k'$ که تعداد آنها n تا است بنابر فرض استقراء، مربع جدیدی ساخت.

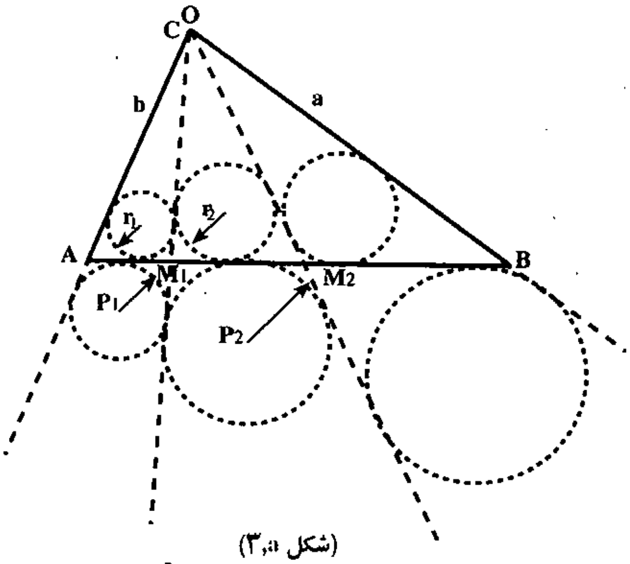
مثال ۲. مثلث ABC و $(n-۱)$ خط راست

$$CM_۱ ، CM_۲ ، \dots CM_{n-۱}$$

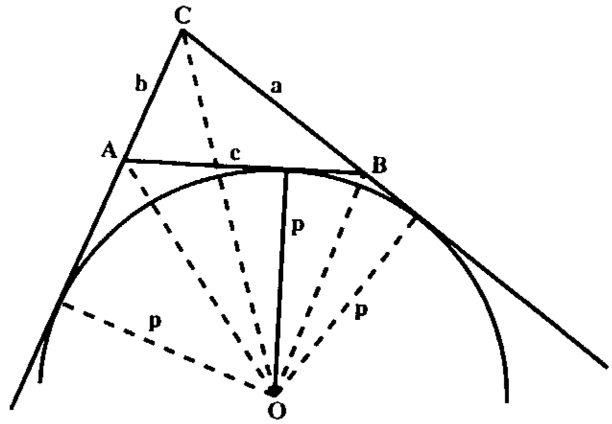
که از رأس C رسم می‌شوند، مثلث را به n مثلث کوچکتر $ACM_۱ ، M_۱CM_۲ ، \dots M_{n-۲}CB$ تجزیه می‌کنند.
اگر $r_۱, r_۲, \dots r_n$ و $\rho_۱, \rho_۲, \dots \rho_n$ به ترتیب شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی و خارجی این مثلثها (تمام دایره‌های محاطی خارجی در داخل زاویه C مثلث قرار دارند شکل (۳,a) را ببینید.) و r و ρ شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث ABC باشند، ثابت کنید

$$\frac{r_۱}{\rho_۱}=\frac{r_۲}{\rho_۲}=\cdots=\frac{r_n}{\rho_n}=\frac{r}{\rho}$$

حل. مساحت مثلث ABC را با S و نصف محیط آن را با P نشان می‌دهیم. می‌دانیم $S=Pr$.
از طرف دیگر اگر O مرکز دایره محاط خارجی این مثلث باشد، شکل (۳,b)،



(شکل ۳,a)



(شکل ۳,b)

آنگاه

$$S = S_{AOAC}+S_{AOCB}-S_{AOAB}=\frac{1}{2}b\rho+\frac{1}{2}a\rho-\frac{1}{2}c\rho =$$
$$=\frac{1}{2}(b+a-c)\rho=(P-c)\rho$$

بنابراین:

$$Pr=(P-c)\rho\ ,\ \frac{r}{\rho}=\frac{P-c}{P}$$

علاوه بر این از فرمول مشهور مثلثاتی داریم

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)}{P(P-a)}},\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(P-a)(P-c)}{P(P-b)}}$$

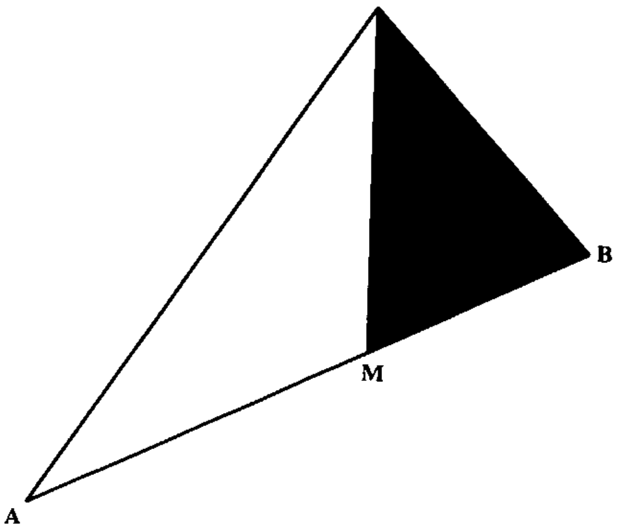
از آنجا نتیجه می‌شود:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(P-b)(P-c)(P-a)(P-c)}{P(P-a)P(P-b)}}=\frac{P-c}{P}=\frac{r}{\rho}\qquad(1)$$

پس از این یادآوری مقدماتی، به اثبات قضیه برمی‌گردیم.

الف. به ازای $n=1$ حکم بدیهی است. ثابت می‌کنیم به ازای $n=2$ هم حکم درست است. در این حالت مثلث ABC با خط CM به دو مثلث کوچکتر ACM و CMB تجزیه می‌شود. بنابر فرمول (۱) داریم

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle CMA}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle CMB}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}=$$
$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle CMA}{2}\operatorname{tg}\frac{180^\circ-\angle CMA}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}=$$
$$=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{\rho}$$



ب. فرض کنید حکم برای $n-1$ خط راست درست باشد و n خط راست $CM_1, CM_2, \cdots CM_n$ داده شده باشد که مثلث را به $n+1$ مثلث کوچکتر

$$ACM_1,\ M_1CM_2,\ \cdots\ M_nCB$$

تجزیه کند. از این مثلثها، دو مثلث مثلاً مثلثهای ACM_1 و CM_1M_2 را در نظر می‌گیریم. بنابر آنچه در (الف)، دیدیم، داریم

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}=\frac{r_{12}}{\rho_{12}}$$

که در آن r_{12} و ρ_{12} شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث ACM_2 می‌باشند. اما برای n مثلث $ACM_2, M_2CM_3, \ldots, M_nCB$ تساوی زیر را داریم

$$\frac{r_{12}}{\rho_{12}}\cdot\frac{r_3}{\rho_3}\cdot\ldots\cdot\frac{r_n}{\rho_n}\cdot\frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}}=\frac{r}{\rho}$$

و بنابراین اگر به جای $\frac{r_{12}}{\rho_{12}}$ مقدار قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\frac{r_1}{\rho_1}\cdot\frac{r_2}{\rho_2}\cdot\ldots\cdot\frac{r_n}{\rho_n}\cdot\frac{r_{n+1}}{\rho_{n+1}}=\frac{r}{\rho}$$

مسأله ۱. فرض کنید خطوط راست CM و CM′ مثلث ABC را به دو طریق به دو مثلث ACM و CMB و همچنین به مثلثهای ACM′ و CM′B تجزیه کرده باشند. r_1 و r_2 و r_1' و r_2' را به ترتیب شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی آنها بنامید، ثابت کنید اگر $r_1 = r_1'$ آنگاه، $r_2 = r_2'$

خاصیت مشابهی برای دایره‌های محاطی خارجی هم وجود دارد.
راهنمایی: با استفاده از نمادگذاری مثال ۲، ابتدا ثابت کنید که

$$\frac{r}{\rho}=1-\frac{2r}{h} \quad \text{و} \quad \frac{\rho}{r}=1+\frac{2\rho}{h}$$

(که در آن h ارتفاع نظیر رأس C می‌باشد.) از آنجا تساویهای زیر نتیجه می‌شود

$$\left(1-\frac{2r_1}{h}\right)\left(1-\frac{2r_2}{h}\right)=1-\frac{2r}{h}=\left(1+\frac{2r_1'}{h}\right)\left(1+\frac{2r_2'}{h}\right)$$

و

$$\left(1+\frac{2\rho_1}{h}\right)\left(1+\frac{2\rho_2}{h}\right)=1+\frac{2\rho}{h}=\left(1+\frac{2\rho_1'}{h}\right)\left(1+\frac{2\rho_2'}{h}\right)$$

مسأله ۲. با استفاده از نماد گذاری‌های مثال ۲. ثابت کنید

$$\frac{r_1+\rho_1}{R_1}+\frac{r_2+\rho_2}{R_2}+\cdots+\frac{r_n+\rho_n}{R_n}=\frac{r+\rho}{R}$$

که در آن $R_1, R_2, \cdots R_n$ و R به ترتیب شعاعهای دایره‌های محیطی مثلثهای $ACM_1, M_1CM_2, \cdots M_nCB$ و مثلث ABC می‌باشند.
راهنمایی. می‌دانیم که

$$S=Pr=(P-c)\rho=\frac{abc}{4R}$$

از آنجا با به کار بردن قانون کسینوسها نتیجه می‌شود

$$\frac{r+\rho}{2R}=\frac{\frac{S}{P}+\frac{S}{P-C}}{\frac{abc}{2S}}=\frac{(a+b)[c^2-(a-b)^2]}{2abc}=$$

$$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=$$

$$=\cos\angle CAB+\cos\angle CBA$$

(به طریق مشابه برای مثلث ACM_1 داریم:

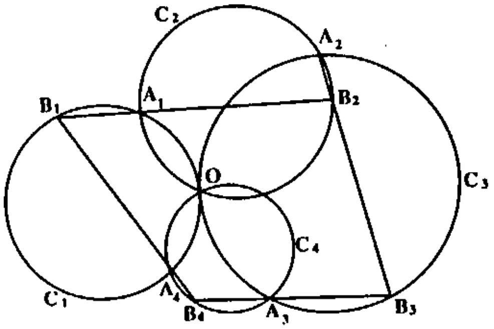
$$\frac{r_1+\rho_1}{2R_1}=\cos\angle M_1AC+\cos\angle AM_1C$$

و برای مثلث M_1CM_2 داریم:

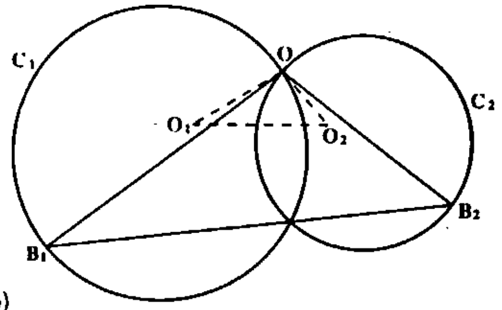
$$\frac{r_2+\rho_2}{2R_2}=\cos\angle CM_1M_2+\cos\angle M_1M_2C$$

که در $\cos\angle AM_1C$ و $\cos\angle CM_1M_2$ قرینه یکدیگرند و حذف می‌شوند، به همین ترتیب اگر برای همه‌مثلث‌هابنویسیم، به نتیجه می‌رسیم. م.)

مسأله ۳. n دایره $C_1, C_2, \cdots C_n$ که از یک نقطه مانند O می‌گذرند، مفروضند. $A_1, A_2, \cdots A_n$ را به ترتیب نقاط دوم تقاطع دایره‌های C_1 و C_2 ، C_2 و C_3 .... و C_n و C_1 می‌نامیم. (شکل ۴, a) فرض کنیم B_1 یک نقطه دلخواه بر روی دایره C_1 متمایز از O و A_1 باشد. قاطع B_1A_1 را رسم می‌کنیم تا دایره C_2 را در نقطه B_2 قطع کند. پس قاطع B_2A_2 را رسم می‌کنیم تا دایره C_3 را در نقطه B_3 قطع کند و ..... الی آخر (اگر مثلاً نقطه B_2 بر A_2 منطبق باشد، آنگاه از نقطه A_2 به جای قاطع مماسی بر دایره C_2 رسم می‌کنیم.)



(شکل ۴,a)

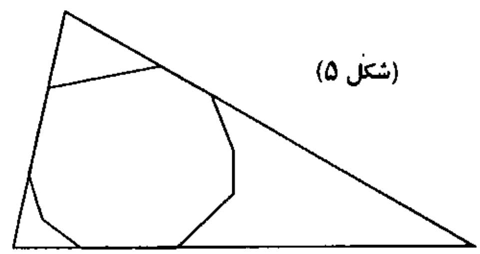


(شکل ۴,b)

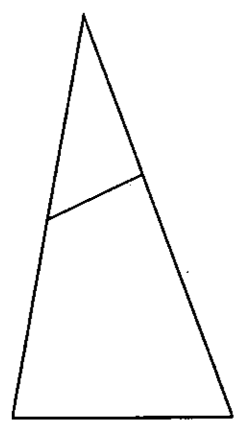
ثابت کنید که نقطه B_{n+1} که آخرین نقطه حاصل بر روی دایره C_1 می‌باشد، بر نقطه B_1 منطبق است.
راهنمایی. لم مقدماتی زیر را ثابت کنید.

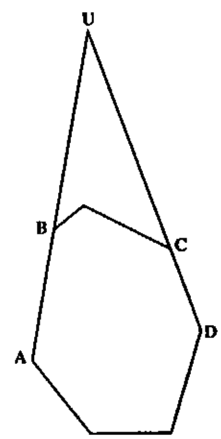
فرض کنید که O_1 و O_2 مرکزهای دایره‌های C_1 و C_2 باشند که در نقطه O یکدیگر را قطع کرده‌اند. B_1B_2 قاطعی است که از نقطه (A_1) نقطه دوم محل تلاقی آنها رسم شده است. (شکل ۴، b) پس پاره خطهای B_1B_2 و O_1O_2 روبرو به زاویه مساوی در نقطه O هستند. اکنون ثابت کنید حکم در مورد سه دایره هم درست است. آنگاه با فرض این که حکم برای $n-1$ دایره درست است، n دایره $C_1, C_2, \dots C_n$ را درنظر بگیرید و قاطعی از نقطه B_{n-1} و محل تقاطع دایره‌های C_{n-1} و C_1 رسم کنید. استقراء را برای $n-1$ دایره $C_1, C_2, \dots C_{n-1}$ به‌کار ببرید.

مثال ۳. ثابت کنید هر n ضلعی محدب که متوازی‌الاضلاع نباشد، می‌تواند در مثلثی که اضلاع آن در امتداد سه ضلع دلخواه از n ضلعی باشند، محصور شود. (شکل ۵)



(شکل ۵)





(شکل ۵،a) (شکل ۵،b)

اثبات. ابتدا ثابت می‌کنیم که هر n ضلعی محدب را در یک مثلث و یا متوازی‌الاضلاعی که اضلاع آنها به‌ترتیب بر امتداد سه و یا چهار ضلع آن قرار دارند، می‌توان محصور کرد.

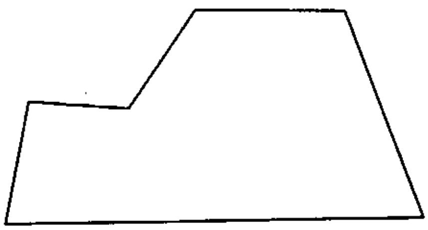
الف. برای $n=3$ حکم نیاز به اثبات ندارد.

برای $n=4$، موضوع بدیهی‌است: یا چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است و یا دو ضلع مقابل غیر موازی دارد که با هم با ضلع مجاور به هر دوی آنها، مثلثی می‌سازند که چهارضلعی داخل خود را شامل می‌شود (شکل ۵، a)

ب. فرض کنید حکم برای تمام m ضلعی‌های محدب ثابت شده باشد که در آن $m < n$.

یک n ضلعی محدب به نام M (که در آن $n \geqslant 5$) در نظر می‌گیریم. اگر AB یک ضلع دلخواه از M باشد، آنگاه M، ضلع دیگری دارد که مجاور AB نیست و موازی AB نیز نیست. چون تعداد همه اضلاع در M، بدون به حساب آوردن AB و اضلاعی که مجاور آن هستند برابر است با $n-3 \geqslant 5-3 = 2$

پس چندضلعی محدب M نمی‌تواند بیش از یک ضلع متمایز از AB و موازی با آن داشته باشد. اگر اضلاع AB و CD را که



موازی AB نیست امتداد دهیم تا یکدیگر را در نقطه U قطع کنند (فرض می‌کنیم که نقاط U و D و C، B، A همان‌طور باشند که در شکل (۵،b) دیده می‌شوند.) و به‌جای خط شکسته (سه قطعه) BC که در داخل زاویه UAD محصور شده است خط شکسته BUC را که از دوپاره خط تشکیل شده است قراردهیم، آنگاه چندضلعی دیگری مانند M_1 خواهیم داشت که تعداد اضلاع آن از n کمتر است و شامل چندضلعی M می‌باشد و تمام اضلاع M_1 در عین حال اضلاع M هم هست. بنابر فرض استقراء، مثلث و یا متوازی‌الاضلاعی وجود دارد که با اضلاع M_1 ساخته می‌شود و شامل M_1 در درون خود می‌باشد. اما اضلاع این مثلث و یا متوازی‌الاضلاع، در عین حال اضلاع M هم می‌باشند و M را در درون خود دارند.

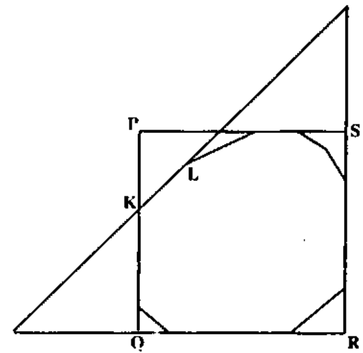
و حکم به اثبات رسیده است.

اکنون نشان می‌دهیم که حکم دقیقاً چگونه به اثبات رسیده است. (شکلهای بالا، شما را راهنمایی می‌کند تا این مساله را بهتر درک کنید.)

اگر n ضلعی تحت بررسی که M رادرون خود شامل می‌باشد، خود یک مثلث باشد، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. بنابراین تنها حالتی را درنظر می‌گیریم که n ضلعی شامل M در درون خود، متوازی‌الاضلاع PQRS باشد و خود M، متوازی‌الاضلاع نباشد. (شکل ۶)

فرض کنیم P یک رأس متوازی‌الاضلاع باشد که به رئوس n

ضلعی M، تعلق ندارد. K نزدیکترین رأس M به نقطه P واقع بر ضلع PQ از متوازی‌الاضلاع را درنظر می‌گیریم. KL ضلع M که از نقطه K خارج می‌شود، در داخل متوازی‌الاضلاع امتداد دارد. چون M یک چندضلعی محدب است، بنابراین به تمامی در نیم صفحه‌ای که به خط KL محدود می‌شود، قرار دارد و شامل رئوس Q و R و S متوازی‌الاضلاع می‌باشد از اینجا نتیجه می‌شود که M به تمامی در داخل مثلثی که اضلاع آن KL و QR و RS می‌باشند، محصور شده است. (شکل ۶)
و این اثبات حکم مسأله را کامل می‌کند.



(شکل ٦)

مثال ۳. این مثال به‌خصوص از این نظر جالب است که مسأله بعدی مستقیماً از آن نتیجه می‌شود.

مسأله ۴. ثابت کنید هر n ضلعی محدب را که متوازی الاضلاع نباشد، می‌توان با سه n ضلعی متجانس کوچکتر از n ضلعی مفروض، پوشاند.

راهنمایی. اگر n ضلعی محدب $M \equiv A_1 A_2 \cdots A_n$ متوازی‌الاضلاع نباشد، در مثلثی مانند $T \equiv ABC$ می‌تواند محصور شود که با اضلاع $AB = A_1 A_2$ و $BC \equiv A_k A_{k+1}$ و $CA = A_l A_{l+1}$ متعلق به n ضلعی ساخته می‌شود (اتحاد $AB \equiv A_1 A_2$ در اینجا به معنی منطبق بودن خط راست AB بر $A_1 A_2$ است.) فرض کنید O نقطه‌ای دلخواه در درون M باشد و U و V و W نقاطی باشند که به‌ترتیب بر روی پاره‌خطهای $A_1 A_2$ و $A_k A_{k+1}$ و $A_l A_{l+1}$ قرار دارند.
پاره‌خطهای OU و OV و OW، n ضلعی را به سه قسمت تجزیه می‌کنند که با قطعات متجانس M به مرکزهای تجانس رئوس مثلث ABC و نسبت تجانسی کمتر از ۱، اما به اندازه کافی نزدیک به ۱ پوشانده شده‌اند.
نتیجهٔ مسأله بالا نخستین بار در سال ۱۹۵۵ توسط ریاضیدان مشهور ف. و. لِوی (F. W. Levi) به اثبات رسید. قضیه نظیر آن تصادفاً و کاملاً به طریق دیگر توسط آی. تس. گوچبرگ (I. TS. Gochberg) و آ. س. مارکوس در کیشینو (جمهوری ملداوی) ثابت شده است. چون متوازی‌الاضلاع P آشکارا تنها با چهار تصویر کاهش‌یافته از خود آن، که به‌طور موازی با P گذاشته می‌شود، پوشانده می‌شود، (زیرا هیچ تصویر دیگری از P نمی‌تواند دو رأس متمایز متوازی‌الاضلاع را یکجا بپوشاند) به‌قضیه زیر می‌رسیم که گاهی قضیه لوی نامیده می‌شود (یا قضیه: لوی ـ گوچبرگ ـ مارکوس) صورت قضیه چنین است:
فرض کنیم M یک n ضلعی محدب باشد. کمترین تعداد تصاویر کاهش‌یافته از M که لازم است تا آن را بپوشاند، ۳ است اگر، M متوازی‌الاضلاع نباشد و ۴ است، اگر M متوازی‌الاضلاع باشد.
این قضیه ایدهٔ خوبی از «هندسه ترکیبی» (Combinatorial Geometry) دراختیار ما قرار می‌دهد که در سالهای ۱۹۶۰ - ۱۹۵۰ جهت‌گیری تازه‌ای در هندسه به‌وجود آورد. در این مورد استقراء در هندسه برای اثبات قضایای مختلف به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته است.
«هندسه ترکیبی» با مسایلی که با ترکیب‌بندیهای با پایان (متناهی) از نقاط و یا اشکال سر و کار دارد مربوط می‌شود.
در این مسایل، مقادیری برآورد می‌شوند که مربوط به ترکیب‌بندی اشکال (یا نقاط) بعضاً به‌معنی بهینه است.
مشکلات آشکاری را که در عرصه جدید هندسی وجود دارد می‌توان با مقایسه قضیه لوی با فرضیه زیر درک کرد. این فرضیه تقریباً به‌طور قطع درست است اما بسیاری از ریاضیدانان مشهور، در اثبات آن ناموفق بوده‌اند. فرضیه چنین است:
کمترین تعداد تصاویر کاهش‌یافته از یک n وجهی محدب مانند M (یعنی اجسامی کوچکتر از M موازی و مشابه M که نسبت اندازه آن کمتر از ۱ باشد) که با آنها بتوان چندوجهی M را پوشاند*، برای چندوجهی‌های مختلف بین ۴ و ۸ می‌باشد. (مثلاً برای چهاروجهی این عدد ۴ است درصورتیکه برای مکعب ۸ می‌باشد.) تنها چندوجهی که این تعداد برای آن ۸ است متوازی‌السطوح می‌باشد.

* بی‌تردید در اینجا مانند حالت دوبعدی، به جای n وجهی M، کاملاً مجاز هستیم که از یک جسم صلب محدب سه‌بعدی صحبت کنیم.

مرجع:

L. I. Golavina, I. M. yaglom
Induction in Geometry
Mir Publishers
MOSCOW, 1979.

الگوریتمهای کلیدی ۲

دکتر اسماعیل بابلیان،
عضو هیأت علمی مؤسسهٔ ریاضیات دانشگاه تربیت معلم

در مقالهٔ قبلی، که در رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۳۸ به‌چاپ رسید، چند مسأله با استفاده از الگوریتم تعیین ارقام یک عدد طبیعی حل کردیم. در این مقاله مسائل دیگری مطرح و با استفاده از همان الگوریتم آنها را حل می‌کنیم. سپس حل تمرینهای مقاله قبلی را ارائه می‌نماییم.

۱ـ برنامه‌ای بنویسید که اعداد طبیعی N و k، که $1<k<8$، را بگیرد و مجموع توان kام ارقام عدد N را محاسبه و چاپ کند. (مثلاً، اگر $N=435$ و $k=2$ می‌خواهیم $SK=4^2+3^2+5^2$ محاسبه شود.)

حل: برنامه مورد نظر و شرح آن در زیر ملاحظه می‌شود (چون در مسائل بعدی از این برنامه استفاده می‌کنیم آن را به‌صورت زیر برنامه می‌نویسیم).

```
10 INPUT N,K
20 GOSUB 160
30 PRINT SK
40 END
160 REM**SUBROUTINE**
170 LET SK=0
180 WHILE N>0
190     LET M = INT (N/10)
200     LET D = N-10*M
210     LET SK = SK+D^K
220     LET N = M
230 WEND
240 RETURN
```

کار سابروتین محاسبهٔ مجموع توان kام ارقام عدد N است که حاصل در برنامه اصلی چاپ می‌شود.

۲ـ برنامه‌ای بنویسید که عدد طبیعی k، $2<k<8$، را بگیرد و عددی بدست آورد که مساوی مجموع توان kام ارقامش باشد. (مثلاً، به‌ازای $k=3$ یکی از این اعداد ۱۵۳ می‌باشد زیرا، $1^3+5^3+3^3=1+125+27=153$ عدد ۳۷۱ نیز دارای همین ویژگی است.)

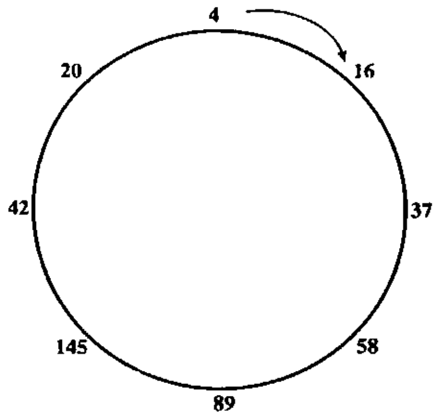
حل: در اینجا قصد نداریم دربارهٔ وجود عدد مورد نظر به‌ازای هر k بحث کنیم. ولی به‌سادگی معلوم می‌شود که به‌ازای $k=2$ چنین عددی وجود ندارد (اگر چنین عددی موجود باشد باید دو رقمی باشد (چرا؟) می‌توان نشان داد که در بین اعداد دو رقمی هم چنین عددی یافت نمی‌شود (ثابت کنید). باز هم اشاره می‌کنیم که اگر عدد مورد نظر مسأله وجود داشته باشد یک رقمی نیست و اگر این عدد را $\overline{a_1a_2...a_n}$ فرض کنیم از این‌که باید داشته باشیم $a_1^k+...+a_n^k=\overline{a_1a_2...a_n}$ می‌توان نتیجه گرفت که باید $n\leqslant k+1$. لذا، باید در بین اعداد ۱۲ تا بزرگترین عدد $k+1$ رقمی برای عدد مورد نظر جستجو کنیم.

برنامه مورد نظر، به‌کمک زیر برنامه مثال قبل، چنین است.

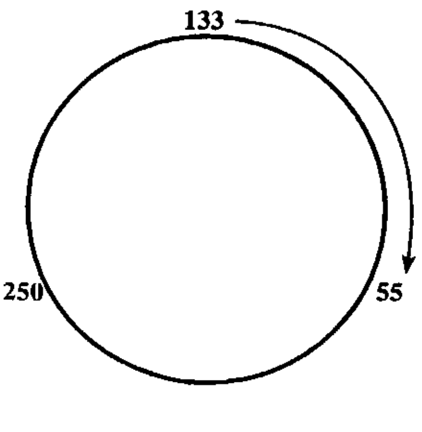
```
10 INPUT K
20 FOR I=12 TO 10^ (K+2)-1
30    LET N=I: GOSUB 160
40 IF SK=I THEN PRINT I:END
50 NEXT I
60 END
160 REM**SUBROUTINE**
170 LET SK=0
180 WHILE N>0
190    LET M=INT (N/10)
200    LET D=N-10*M
210    LET SK=SK+D^K
220    LET N=M
230 WEND
240 RETURN
```

با اجرای برنامه بالا، به‌ازای $k=4$ عدد ۱۶۳۴ و به‌ازای $k=5$ عدد ۴۱۵۰ حاصل می‌شود. شما برنامه را برای $k=6$ و ۷ اجرا کنید!

۳ـ به‌اعداد زیر توجه کنید:



با شروع از هر عدد، و در جهت پیکان، اگر مجموع مربعات ارقام هر عدد را حساب کنید عدد بعدی به‌دست می‌آید! همچنین برای اعداد زیر مجموع مکعبات ارقام هر عدد، عدد بعدی می‌شود؟



به‌راستی این اعداد چگونه به‌دست می‌آیند؟

برنامه‌ای بنویسید که عدد k، ۱<k<۷، را بگیرد و مجموعه‌ای با بیش از یک عضو و دارای این ویژگی به‌دست آورد که هر عضو آن مساوی مجموع توان kام ارقام عدد قبل از آن باشد.

حل: از عدد ۲ شروع می‌کنیم و مجموع توان kام ارقام آن را حساب می‌کنیم تا عدد بعدی به‌دست آید و این کار را ادامه می‌دهیم. اما آزمایش می‌کنیم که هر عدد جدیدی که به‌دست آمده مساوی یکی از اعدادی که قبلاً حساب شده هست یا نه. اگر جواب مثبت باشد، در صورتی که مجموعهٔ اعداد بیش از یک عضو داشته باشد، به‌مجموعهٔ مطلوب رسیده‌ایم و الا از عدد بعد از ۲، یعنی ۳، شروع می‌کنیم. (وجود چنین مجموعه‌هایی در رشد آموزش ریاضی شمارهٔ ۳۵ صفحهٔ ۲۷ نشان داده شده است.) این توضیحات را برای k = ۳ عملاً نشان می‌دهیم.

اگر از ۲ شروع کنیم دنباله زیر حاصل می‌شود (از عدد دوم به‌بعد، هر عدد مجموع توان سوم ارقام عدد قبل از خود می‌باشد)

۲،۸،۵۱۲،۱۳۴،۹۲،۷۳۷،۷۱۳،۳۷۱،۳۷۱

در اینجا به‌مجموعهٔ تک عضوی {۳۷۱} می‌رسیم که جواب موردنظر نیست (عدد ۳۷۱ جوابی برای مثال ۱ می‌باشد). پس از ۳ شروع می‌کنیم:

۳،۲۷،۳۵۱،۱۵۳،۱۵۳

مجدداً به‌مجموعهٔ تک عضوی {۱۵۳} رسیدیم که جواب مسأله نیست. از عدد ۴ شروع می‌کنیم:

۴،۶۴،۲۸۰،۵۲۰،۱۳۳،۵۵،۲۵۰،۱۳۳

به‌این ترتیب مجموعهٔ {۱۳۳،۵۵،۲۵۰} حاصل می‌شود که دارای ویژگی خواسته شده است. برنامه مورد نظر چنین است:

```
10 INPUT K:DIM A(1000)
20 FOR L=2 TO 9
30 A(I)=L: J=1
40 N=A(J): GOSUB 160
50 J=J+1: A(J)=SK
60 FOR I=1 TO J-1
70     IF A(I)= A(J) THEN 90
80 NEXT I: GOTO 40
90 IF I<> J-1 THEN 110
100 NEXT L
110 PRINT "{";
120 FOR L=I TO J-1
130     PRINT A(L);
140 NEXT L: PRINT "}"
150 END
160 REM**SUBROUTINE**
170 LET SK=0
180 WHILE N>0
190     LET M=INT (N/10)
200     LET D=N-10*M
210     LET SK=SK+D^K
220     LET N=M
230 WEND
240 RETURN
```

این برنامه را برای k = ۵ اجرا کنید همان مجموعهٔ A_5 از مقالهٔ شگفتیهای اعداد حاصل می‌شود. اما اگر آن را برای k = ۶ اجرا کنید مجموعهٔ زیر به‌دست می‌آید که با A_6 از مقالهٔ فوق متفاوت است و تعداد اعضای کمتری دارد.

{۳۸۳۸۹۰، ۱۰۵۷۱۸۷، ۵۱۳۰۶۹، ۵۹۴۴۵۲، ۵۷۰۹۴۷، ۷۸۶۴۶۰، ۴۷۷۲۰۱، ۲۳۹۴۵۹، ۱۰۸۳۳۹۶، ۸۴۱۷۰۰}.

حل تمرینهای مقاله قبل

۱- برنامه‌ای بنویسید که اعداد طبیعی N و M را بگیرد (۲≤M≤۱۶) و ارقام عدد N را در مبنای M بنویسد (اگر M>۹ برای ۱۰ تا ۱۵ به‌ترتیب از حروف A تا F استفاده کنید.).

حل: برنامه مورد نظر در زیر ملاحظه می‌شود.

```
10 DATA 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
20 DATA A,B,C,D,E,F
30 INPUT N,M
35 K=1+INT (LOG (N)/LOG (M))
40 DIM D$ (M-1), DN$ (K)
50 FOR I=0 TO M-1
60     READ D$ (I)
70 NEXT I
80 LET J=0
90 WHILE N>0
100     Q=INT (N/M)
110     R=N-Q*M
120     J=J+1
130     DN$ (J)=D$(R)
140     N=Q
150 WEND
160 FOR I=J TO 1 STEP -1
170     PRINT DN$ (I);
180 NEXT I
190 END
```

شرح برنامه

پس از گرفتن اعداد N و M ارقام ۰ تا M−۱ را، با قرارداد مسأله، در متغیر اندیسدار D$ قرار می‌دهیم. در خط ۳۵ تعداد ارقام عدد N در مبنای M حساب می‌شود. می‌دانیم که اگر

$$M^{k-1}\leq N<M^{k} \quad (*)$$

آنگاه N در مبنای M دارای k رقم است. اما از (*) نتیجه می‌شود

$$(k-1)\leq \log_M N<k \quad (**)$$

از (**)، بنابر تعریف جزء صحیح، نتیجه می‌گیریم که

$$k-1=[\log_M N]$$

و یا

$$k=1+[\log_M N].$$

در دستورات ۹۰ تا ۱۵۰ ارقام عدد N در مبنای M محاسبه می‌شوند و هر رقم برحسب شماره‌اش در متغیر اندیسدار DN$ ذخیره می‌شود. بالاخره توسط دستورات ۱۶۰ تا ۱۸۰ ارقام عدد N در مبنای M چاپ می‌شوند (توجه کنید که این ارقام باید از آخر به‌اول و کنار هم چاپ شوند). این برنامه را برای چند N و M اجرا کنید.

۲- برنامه‌ای بنویسید که عدد طبیعی N را بگیرد و معین کند ارقام عدد N^2 نزولی هستند یا نه. برنامه مورد نظر چنین است.

```
10 INPUT N
20 LET N=N^2
30 PRINT "N^2="; N
40 LET A=0
50 WHILE N>0
60     M=INT (N/10)
70     D=N-10*M
80     IF A>D THEN PRINT "NO"
       :END
90     A=D: N=M
100 WEND
110 PRINT "YES"
120 END
```

شرح برنامه

پس از گرفتن N مقدار N^2 در N جایگزین می‌شود. چون ارقام N^2 نامنفی است توسط دستور ۹۰ بلافاصله یکان N^2 در A قرار می‌گیرد و از این به‌بعد یک رقم در A و رقم سمت چپ آن، از N^2، در D قرار دارد. اگر این برنامه را برای N=۳۱ اجرا کنید خروجی چنین خواهد بود:

```
N^2 = 961
YES
```

و اگر آن را برای N = ۲۵ اجرا کنید خروجی چنین خواهد بود

```
N^2 = 625
NO
```

۳- برنامه‌ای بنویسید که کلیه اعداد دو رقمی را پیدا کند (چاپ نماید) که ارقام مربع آنها صعودی باشد. برنامه موردنظر در زیر ملاحظه می‌شود.

```
10 FOR I=10 TO 99
20     N=I^2: A=10
30     WHILE N>0
40        M=INT (N/10)
50        D=N-10*M
60        IF A<D THEN 100
70        A=D: N=M
80     WEND
90     PRINT I;
100 NEXT I
110 END
```

شرح برنامه

چون اعداد دو رقمی را می‌خواهیم پس I را از ۱۰ تا ۹۹ تغییر می‌دهیم و هر بار مربع آن را در N قرار می‌دهیم و با استفاده از برنامه مقاله اول صعودی بودن ارقام آن را تحقیق می‌کنیم. اگر ارقام N، یعنی I^2، صعودی‌بودند I را چاپ می‌کنیم و الاّ از دستور WHILE-WEND خارج شده I بعدی را مورد آزمایش قرار می‌دهیم.

خروجی این برنامه، پس از اجرا، به‌قرار زیر است:

12 13 15 17 34 35 37 38 67 83

تمرینهای زیر به‌کمک برنامه بالا و برنامه مقاله اول به‌راحتی حل می‌شود.

۱- برنامه‌ای بنویسید که کلیه اعداد دو رقمی را بنویسد که ارقام مربع آنها، از چپ به‌راست، اکیداً صعودی باشد.

۲- برنامه‌ای بنویسید که کلیه اعداد دو رقمی را بنویسد که ارقام مربع آنها، از چپ به‌راست، اکیداً نزولی باشد.

اسامی خوانندگانی که حل مسائل رشد ۳۹ را برای ما فرستاده‌اند

همکار ارجمند آقای جاوید مهر، دبیر، قم ۱۰-۸ و ۷-۳

خانم مریم عباسی، دانش‌آموز، مشهد ۸-۹-۴

آقای محمد اسماعیلی مهموئی، دانشجو، مشهد ۸-۴-۳

آقای حسین تیموری، دانش‌آموز، کاشمر ۱۰

آقای مهدی صدوقی یزدی، دانش‌آموز، کاشمر ۱۰

آقای شاهین صفوی، دانشجو، اصفهان ۱۰-۹-۸-۷-۴-۳-۲-۱

آقایان مهدی امیرعلی، علی حیدری گودرزی، بروجرد ۱۰

آقای شهاب دانشور، دانش‌آموز، کرج ۱۰-۸-۷-۴-۳

آقای محمداسماعیل خسروی، دانشجو، تهران ۱۰-۹-۷-۲

آقای محمدمهدی امینی، دانشجو، تهران ۱۰-۸-۷-۲-۱

آقای محمد رمضانی طرخورانی، دانشجو، گیلان ۸

آقای علی قلاسی، دانشجو، مشهد ۷-۴

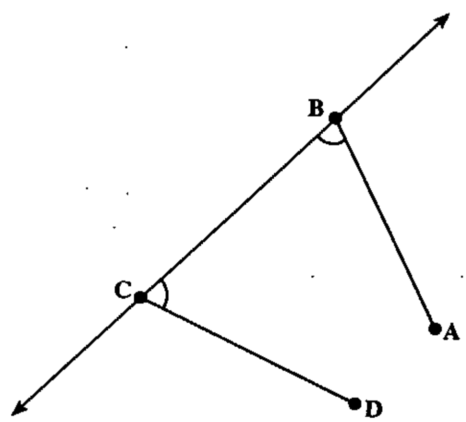
آقای محمد جواهری، دانش‌آموز، کامیاران ۱۰-۹-۷-۲

درسهایی از هندسهٔ ناقلیدسی (۳)

دکتر امیر خسروی
عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه تربیت معلم

در دو شمارهٔ گذشته تا اینجا پیش رفتیم که وقتی نواقص کار اقلیدس نمایان گشت و تلاشهای زیاد برای اثبات اصل پنجم اقلیدس (اصل توازی) از روی بقیهٔ اصول به‌نتیجه نرسید عدهٔ دیگری از ریاضیدانان مستقلاً در جهت دیگر گام برداشتند و موفق به‌کشف هندسهٔ نااقلیدسی شدند. هندسه‌هایی که نه تنها هندسهٔ اقلیدسی را تضعیف نکرد بلکه باعث رفع نواقص آن شد. به‌خاطر آشنایی با این تلاشها و فراهم آوردن زمینه‌ای برای معرفی هندسه‌های نااقلیدسی، بیست و شش صورت معادل از اصل توازی را بیان می‌کنیم (برای اثبات به [۱] یا [۲] مراجعه کنید.)

۱ـ **اصل توازی اقلیدس:** اگر A و D در یک طرف $\overleftrightarrow{BC}$ باشند به‌طوری که $m\angle ABC+m\angle BCD < ۱۸۰^\circ$ آنگاه $\overrightarrow{BA}$ نیمخط $\overrightarrow{CD}$ را قطع می‌کند.



(شکل ۱)

۲ـ اگر A و D در یک طرف $\overleftrightarrow{BC}$ و $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{BA}$ آنگاه

$$m\angle ABC+m\angle BCD = ۱۸۰^\circ$$

۳ـ اگر $m \parallel l$ و $n \parallel m$ آنگاه $n \parallel l$ (دو خط موازی با یک خط باهم موازی‌اند)

۴ـ اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.

۵ـ به‌ازای هر خط l و هر نقطهٔ خارج آن مانند P یک و تنها یک خط هست که از P می‌گذرد و با l موازی است (اصل پلی‌فر)

۶ـ اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است.

۷ـ اگر $m \parallel l$ و $r \perp l$ و $s \perp m$ آنگاه r و s یک خط‌اند یا $r \parallel s$

۸ـ در هر مثلث عمودمنصفهای اضلاع آن متقاربند.

۹ـ از هر سه‌نقطه غیرواقع بر یک خط، یک دایره می‌گذرد (فورکوش بویوئی).

۱۰ـ به‌ازای هر سه نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، نقطه‌ای هست که از این سه نقطه به‌یک فاصله است.

۱۱ـ اگر خطی بر یکی از اضلاع زاویهٔ حاده‌ای عمود باشد، ضلع دیگر آن را هم قطع می‌کند.

۱۲ـ به‌ازای هر نقطه در داخل یک زاویه، خطی هست که از آن نقطه می‌گذرد و هر دو ضلع آن را در نقاطی متمایز از رأس زاویه قطع می‌کند (لژاندر).

۱۳ـ مجموع اندازه‌های زوایای هر مثلث مساوی با ۱۸۰ درجه است. اندازهٔ زاویهٔ خارجی برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن.

۱۴ـ اگر نقطهٔ C خارج پاره‌خط $\overline{AB}$ اما روی دایرهٔ به‌قطر $\overline{AB}$ باشد آنگاه $\angle ACB$ قائمه است.

۱۵ـ اگر $\angle ACB$ قائمه باشد، آنگاه C روی دایرهٔ به‌قطر $\overline{AB}$ واقع است.

۱۶ـ در هر مثلث قائم‌الزاویه عمود منصفهای دو ساق آن همدیگر را در وسط وتر قطع می‌کنند.

۱۷ـ اگر $l \perp r$ و $r \perp s$ و $s \perp m$ آنگاه l خط m را قطع می‌کند.

۱۸ـ زاویهٔ حاده‌ای هست که هر خط عمود بر یک ضلع این زاویه، ضلع دیگر را قطع می‌کند.

۱۹ـ زاویهٔ حاده‌ای هست که هر نقطه در داخل آن روی خطی

واقع است که هر دو ضلع زاویه را در نقاطی متمایز از رأس قطع می‌کند.

۲۰ـ مثلثی هست که مجموع اندازه‌های زوایای آن برابر با ۱۸۰ درجه است.

۲۱ـ مثلثی با کاستی صفر موجود است (کاستی $\triangle ABC$ برابر است با $180-(m\angle A+m\angle B+m\angle C)$

۲۲ـ مستطیلی موجود است.

۲۳ـ دو خط مانند l و m هست که همهٔ نقاط l از m به‌یک فاصله‌اند.

۲۴ـ اگر سه زاویهٔ یک چهار ضلعی قائمه باشد، زاویهٔ چهارم آن هم قائمه است.

۲۵ـ خطی مانند l و نقطه‌ای خارج آن مانند P موجود است که یک و تنها یک خط هست که از P می‌گذرد و با l موازی است.

۲۶ـ دو مثلث متشابه و غیرقابل انطباق موجودند (اصل والیس)

خواهیم دید که اگر هندسهٔ اقلیدسی سازگار باشد، یعنی از روی اصول و تعریف نشده‌های آن به‌تناقضی نمی‌رسیم، هندسه‌های هذلولوی (لوباچفسکی) و بیضوی هم سازگارند. چیزی که باعث شد ریاضیدانان روی این هندسه‌ها هم تحقیق کنند. حال بحث هندسهٔ هذلولوی را آغاز می‌کنیم تا معادل بودن بعضی از صورتهای فوق هم ثابت شود.

دیدیم که در هندسهٔ نتاری (مطلق) به‌ازای هر خط l و هر نقطهٔ P خارج آن خطی هست که از P می‌گذرد و با l موازی است و با توجه به‌این مطلب هیلبرت اصل توازی اقلیدس را به‌صورت زیر بیان کرد.

اصل توازی هیلبرت برای هندسهٔ اقلیدسی. به‌ازای هر خط l و هر نقطهٔ خارج آن مانند P حداکثر یک خط موازی با l از P می‌گذرد.

نقیض این گزاره در هندسهٔ نتاری به‌اصل توازی هذلولوی معروف است و به‌شرح زیر می‌باشد.

اصل توازی هذلولوی. خطی مانند l و نقطه‌ای مانند P خارج آن هست که بیش از یک خط موازی با l از P می‌گذرد.

هندسه‌ای راکه بر مبنای این اصل و اصول هندسهٔ نتاری بنا می‌شود هندسهٔ هذلولوی (لوباچفسکی) می‌نامند.

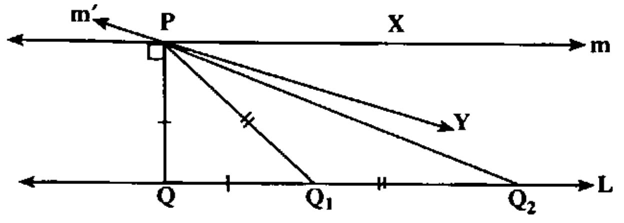
حال قضیهٔ زیر راکه نقیض (۲۵) می‌باشد ثابت می‌کنیم:

قضیهٔ کلی هذلولوی. به‌ازای هر خط l و هر نقطه خارج آن مانند P بیش از یک خط موازی با l از P می‌گذرد.

برای اثبات این قضیه به‌لم زیر که نقیض (۱۳) است نیاز داریم

لم. در هندسهٔ هذلولوی مثلثی هست که مجموع اندازه‌های زاویای آن از $180°$ کمتر است.

برهان. بنابر اصل توازی هذلولوی خطی مانند l و نقطه‌ای مانند P خارج آن هست که حداقل دو خط موازی با l از P می‌گذرند.



(شکل ۲)

ابتدا با رسم عمود خط m را موازی l و ماربر P به‌دست می‌آوریم. در نتیجه خط دیگری مانند m' هست که از P می‌گذرد و با l موازی است. پس بنابر یکتایی عمود m' بر خط $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود نیست و لذا با $\overrightarrow{PQ}$ یک زاویهٔ حاده پدید می‌آورد و بنابراین نیمخطی از آن مانند $\overrightarrow{Py}$ بین $\overrightarrow{PQ}$ و نیمخطی از m مانند $\overrightarrow{Px}$ است (شکل ۲ را ببینید): فرض‌کنید. $\alpha = m\angle xPy$ پس $0<\alpha<90°$.

نقطه‌ای‌مانند Q_1 روی l ودرطرفی از $\overleftrightarrow{PQ}$ که x قراردارد‌هست که $QQ_1 = QP$ پس $m\angle QQ_1P = m\angle QPQ_1$ و بنابرقضیهٔ زاویهٔ بیرونی $90°\geqslant 2m\angle QQ_1P$. بنابراین $m\angle QQ_1P\leqslant\frac{90°}{2}$.
مجدداً نقطه‌ای مانند Q_2 هست که Q_2 و Q در دو طرف $\overleftrightarrow{PQ_1}$ واقع‌اند و $Q_1Q_2 = Q_1P$.

بنابراین $m\angle Q_1PQ_2 = m\angle Q_1Q_2P$ و بنابر قضیهٔ زاویهٔ بیرونی در $\triangle PQ_1Q_2$ داریم $2m\angle Q_1Q_2P\leqslant\frac{90°}{2}$. درنتیجه $m\angle QQ_2P\leqslant\frac{90°}{2^2}$.

با ادامهٔ این روش به‌استقرا می‌توان نشان دادکه به‌ازای‌هر k مثلثی مانند $\triangle PQQ_k$ هست‌که $m\angle QQ_kP\leqslant\frac{90°}{2^k}$. چون $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{90}{2^k}=0$ عددی مانند k هست که $\frac{90}{2^k}<\alpha$ و در مثلث $\triangle PQQ_k$ اولاً $\overrightarrow{Py}$ متمایز از $\overrightarrow{PQ_k}$ است و $\overrightarrow{Py}$ بین $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PQ_k}$ نیست. در نتیجه $m\angle QPQ_k\leqslant m\angle QPy$ وثانیاً $m\angle QQ_kP<\alpha=m\angle yPx$.

در نتیجه

$$m\angle PQQ_k+m\angle QPQ_k+m\angle PQ_kQ<90+\alpha+m\angle QPy=$$
$$90°+90°=180°$$

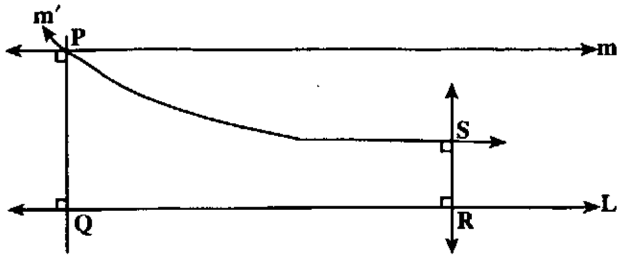
و $\triangle PQQ_k$ مثلث مطلوب است.

نتیجه. در هندسهٔ هذلولوی مجموع زوایای هر مثلث از $180°$

درجه کمتر است و مستطیلی وجود ندارد.

توجه کنید که این نتیجه، نقیض (۲۰) و نقیض (۲۲) می‌باشد.

برهان قضیهٔ کلی هذلولوی. فرض کنید l خطی دلخواه و P نقطهٔ دلخواهی خارج آن باشد.

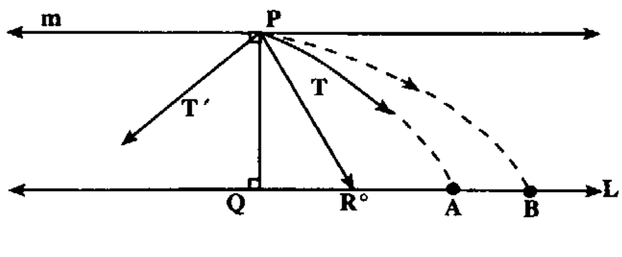


(شکل ۳)

با رسم خطوط عمود خط m را ماربر P و موازی l رسم می‌کنیم. نقطه‌ای روی l متمایز از Q مانند R موجود است. خطی مانند n عمود بر l در نقطهٔ R رسم می‌کنیم پس $n \parallel \overleftrightarrow{PQ}$ و P خارج n است. از P خطی مانند m′ عمود بر n رسم می‌کنیم پس $l \parallel m'$ و در نتیجه $\square PQRS$ متوازی‌الاضلاع است که دارای سه زاویهٔ قائمه می‌باشد. پس بنابر نتیجهٔ فوق $\angle QPS$ قائمه نیست و در نتیجه m' بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود نیست و بنابراین m' متمایز از m است پس از نقطهٔ P دو خط m و m' می‌گذرند که هر دو با l موازیند.

برای درک بهتر مفاهیم فوق و دسته‌بندی موازیها، اصل توازی را در هندسهٔ نتاری با استفاده از اعداد حقیقی بررسی می‌کنیم.

اگر P نقطه‌ای خارج خط l باشد زوایایی مانند $\angle QPR_0$ هست که $\overrightarrow{PR_0}$ خط l را می‌برد.



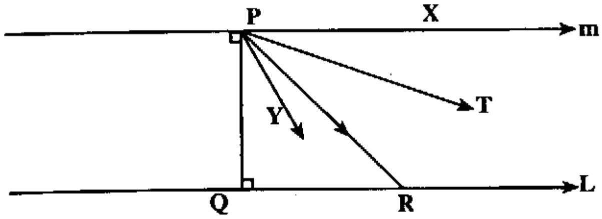
(شکل ۴)

و زوایایی مانند $\angle QPx$ هست که $\overrightarrow{PX}$ خط l را نمی‌برد. چنانچه

$$\alpha = \mathrm{Sup}\{m\angle QPR : \overrightarrow{PR} \text{ خط l را می‌برد}\}$$

اولاً این مجموعه ناتهی است زیرا $m\angle QPR_0$ عضو آن است و ثانیاً بنابر قضیهٔ زاویهٔ بیرونی این مجموعه از بالا به $90°$ محدود است. پس α موجود است و بعلاوه $m\angle QPR_0 < \alpha \leqslant 90°$.

در طرفی از $\overleftrightarrow{PQ}$ که x واقع است نیمخطی یکتا مانند $\overrightarrow{PT}$ هست که $m\angle QPT = \alpha$ و در طرف دیگر $\overleftrightarrow{PQ}$ نیمخطی یکتا مانند $\overrightarrow{PT'}$ هست که $m\angle QPT' = \alpha$. ادعامی‌کنیم که $\overrightarrow{PT}$ و $\overrightarrow{PT'}$ خط l را نمی‌برند. زیرا اگر مثلاً $\overrightarrow{PT}$ خط l را در نقطه‌ای مانند A ببرد، نقطه‌ای مانند B هست که $Q-A-B$ و لذا $\overrightarrow{PT}$ بین $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PB}$ واقع است و درنتیجه $\alpha = m\angle QPT \angle m\angle QPB$ و این یک تناقض است. زیرا $m\angle QPB$ عضو مجموعه و بزرگتر از سوپریمم آن است. فرض کنید y در طرفی از $\overleftrightarrow{PQ}$ باشد که T واقع است. اگر $\overrightarrow{Py}$ خط l را ببرد آن‌گاه $m\angle QPy < \alpha$ وبعکس اگر $m\angle QPy < \alpha$ بنابر خواص مشخصهٔ سوپریموم نیمخطی مانند $\overrightarrow{PR}$ هست که خط l را می‌برد و $m\angle QPy < m\angle QPR$. پس بنابر قضیهٔ قطعه‌بر در $\triangle QPR$ نیمخط $\overrightarrow{Py}$ ضلع $\overline{QR}$ و در نتیجه خط l را می‌برد. بدین‌ترتیب قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.



(شکل ۵)

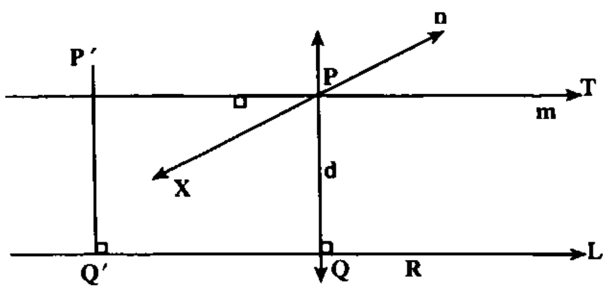
قضیه. اگر P نقطه‌ای خارج خط l و $\overleftrightarrow{PQ}$ خط ماربر P و عمود بر l باشد آن‌گاه در طرفین $\overleftrightarrow{PQ}$ دو نیمخط یکتا مانند $\overrightarrow{PT}$ و $\overrightarrow{PT'}$ هست که خط l را نمی‌برند و

$m\angle T'PQ = m\angle TPQ = \alpha$ و شرط لازم و کافی برای آنکه $\overrightarrow{Py}$ خط l را ببرد این است که $\overrightarrow{Py} = \overrightarrow{PQ}$ یا $m\angle QPy < m\angle TPQ$.

دو نیمخط $\overrightarrow{PT}$ و $\overrightarrow{PT'}$ را موازیهای حدی l در نقطهٔ P و α را زاویهٔ توازی حدی برای PQ می‌نامند و به $\pi(PQ)°$ نمایش می‌دهند.

قضیه. اگر عدد مثبتی مانند x_0 باشد که $\pi(x_0)° = 90$ آن‌گاه به‌ازای هر $x > 0$ داریم $\pi(x)° = 90$ و اصل توازی اقلیدس برقرار است و اگر $x_0 > 0$ ای باشد که $\pi(x_0)° < 90$ آن‌گاه اصل توازی هذلولوی برقرار است.

برهان. فرض کنید $\pi(x_0)° = 90°$. اگر l خطی دلخواه باشد



(شکل ٦)

نقطه‌ای مانند Q روی l واقع و از Q می‌توان خطی مانند d بر l عمود کرد و روی d نقطه‌ای مانند P هست که $PQ = x_0$. پس اگر با رسم عمود خط m را ماربر P و موازی l رسم کنیم به‌ازای هر خط دیگر ماربر P مانند n بنابر یکتائی عمود n بر d عمود نیست و در نتیجه با d زاویهٔ حاده‌ای پدید می‌آورد و لذا نیمخطی از آن مانند $\overrightarrow{Px}$ هست که $m\angle xPQ < 90^\circ$ و بنابراین $\overrightarrow{Px}$ خط l را می‌برد. درنتیجه n خط l را می‌برد و ازنقطهٔ P یک و تنها یک خط ماربر p و موازی l می‌گذرد. اگر x عدد مثبت دلخواهی باشد و بودن (۲۵)) بنابر قضیهٔ کلی هذلولوی از ′p هم یک و تنها یک خط موازی l می‌گذرد. پس $\pi(x)^\circ = \pi(PQ)^\circ = 90^\circ$ و خاصیت توازی اقلیدسی برقرار است.

اگر $x_0 > 0$ای باشد که $\pi(x_0)^\circ < 90^\circ$ آنگاه به‌روش فوق خطی مانند l و نقطه‌ای مانند p به‌فاصلهٔ x_0 از l انتخاب می‌کنیم. چون $\pi(PQ)^\circ = \pi(x_0)^\circ < 90^\circ$ پس از نقطهٔ P لااقل دو خط موازی با l می‌گذرد و اصل توازی هذلولوی برقرار است. حال بنابر قضیهٔ کلی هذلولوی به‌ازای هر خط ′l و هر نقطهٔ ′p خارج ′l حداقل دو خط هست که از ′p می‌گذرند و با l موازی‌اند.

تاکنون در هندسهٔ هذلولوی به‌دو نوع توازی برخوردیم یکی مانند m و l که دارای عمود مشترک $\overline{PQ}$ اند و آنها را موازی واگرا می‌نامند و دیگری مانند $\overrightarrow{PT}$ و l که یکی شامل یک نیمخط موازی حدی با دیگری است و اینها را موازی مجانبی می‌نامند. در شماره‌های بعد نشان خواهیم داد که موازیها منحصر به‌همین دو دسته‌اند.

مراجع

۱ـ گرینبرگ، م. ج. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۰.

۲ـ Martin, Fundamentals of geometry, springer – verlag. 1981.

اعداد کاتالان و پی

ترجمهٔ: ارشام برومند سعید ـ دانشگاه شهید باهنر کرمان

اعداد به‌صورت $\dfrac{\binom{2n-2}{n-1}}{n}$ را اعداد کاتالان می‌نامند که در بسیاری از مسائل ریاضیات گسسته خود را نشان می‌دهند. برای یک بحث جدی دربارهٔ تعدادی از این مسائل به مرجع [۳] مراجعه شود.

به درستی مقدار ثابت π در سراسر ریاضی و دیگر علوم تجربی هست به هر حال این عدد ثابت غالباً در حساب دیفرانسیل مقدماتی مطرح می‌شود که آنها زیربنای ریاضیات پیوسته هستند.

در سری زیر اعداد کاتالان و پی بروشی دقیق توسط $\frac{1}{\pi}$ به هم مربوط می‌شوند

$$(1)\quad \frac{1}{\pi} = \frac{3}{16} + \frac{9}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\binom{2k-2}{k-1}}{k}\right]^2 \frac{4k^2-1}{2^{4k}(k+1)^2}$$

رامانوجان* [۴] ۱۷ سری برای $\frac{1}{\pi}$ ارائه کرده است و در محدودهٔ تئوری تابع بیضوی سه‌تا از آنها را اثبات کرد.

ظاهراً رامانوجان توجه کمی به ترکیبات داشته است بنابراین درصدد تعبیر جملات آن بر حسب اشیای جالب ترکیبات برنیامده است.

* رامانوجان: ریاضیدان بزرگ هندی (۱۹۲۰-۱۸۸۷) م که دربارهٔ تئوری اعداد کار کرده است. (مترجم)

با وجود این، چندتا از سریهایش جملاتی دارند که شامل ضرایب دوجمله‌ای $\binom{2n}{n}$ است که $n=0, 1, \ldots$.

برخلاف سریهای ارائه‌شده توسط رامانوجان سری (۱) احتیاج به هیچ‌گونه تکنیک پیشرفته‌ای برای برقراری ندارد. درحقیقت تمامی ابزارهایش در کتابهای درسی حساب دیفرانسیل مقدماتی یافت می‌شود.

برای ثابت کردن (۱) قبل از هرچیزی توجه می‌کنیم که برای $0 \leqslant x < 1$

$$(2)\quad \int_0^x t\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{3}\left[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

از طرف دیگر تابع زیر انتگرال را بسط می‌دهیم و با انتگرالگیری جمله به جمله بدست می‌آوریم:

$$(3)\quad \int_0^x t\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{x^2}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{2k-2}{k-1}}{k2^{2k-1}}\, \frac{x^{2k+2}}{2k+2}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\binom{2j-4}{j-2}}{(j-1)2^{2j-3}} \cdot \frac{x^{2j}}{2j}$$

حال، از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$(4)\quad \frac{1}{3}\left[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{x^2}{2} - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\binom{2j-4}{j-2}}{(j-1)2^{2j-3}}\, \frac{x^{2j}}{2j}$$

(توجه کنید که در (۲) و بنابراین در (۳)، $x=1$ نمایش حالت حدی است.)

در (۴) به جای x، $\sin x$ را قرار می‌دهیم و از معادله حاصل از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ انتگرال می‌گیریم. نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)^2}{2}\,dx -$$

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\binom{2j-4}{j-2}}{(j-1)2^{2j-3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2j}x}{2j}\,dx .$$

در این هنگام، با استفاده از فرمول والیس* [۲] که بصورت زیر است

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2j}x\,dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\binom{2j}{j}}{2^{2j}}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

و تغییر اندیس چون

$$\binom{2k+2}{k+1} = \frac{4(2k+1)(2k-1)}{k(k+1)} \binom{2k-2}{k-1}$$

داریم

$$\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} = \frac{\pi}{8}\left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{2k-2}{k-1}^2}{2^{4k-2}}\, \frac{(2k-1)(2k+1)}{k^2(k+1)^2}\right]$$

سرانجام با تقسیم طرفین بر π و ضرب‌کردن در $\frac{9}{2}$ و خلاصه‌کردن (۱) را به‌دست می‌آوریم آقای بُروین در [۱] اخیراً نشان داده‌اند که همدستگی تمام سریهایی که توسط رامانوجان برای $\frac{1}{\pi}$ ارائه شده می‌تواند در تئوری تابع فوق هندسی ثابت شود. آنها (مولفین فوق‌الذکر) ارقام اعشاری π را که در این سریها وجود دارد تا آنجا که می‌خواسته‌اند بکار گرفته‌اند.

مرجع

EWell, A. John, Math. Magazine, vol 65, 92

مراجع مقاله

1- J. M. Borwein and P. B. Borwein, pi and The ACM, john wiley and sons Inc, New York 1986.

2- R. Courant, Differential and calculus, vol. 1, Interscience publishers New York. 1957

3- R. B. Eggleton and R. K. cuy, catalan strikes again! Haw Likelyisa function to be conrex? This Magazine 61(1988) 211-219.

4- S. Ramanojan. calleeted papers. chelsea publishing co. New York. 1962.

* والیس: ریاضیدان بزرگ انگلیسی (۱۷۰۳-۱۶۱۶)م قبل از نیوتون بزرگترین ریاضیدان بوده و در زمینه‌های جبر و آنالیز و لگاریتم و... کار کرده است. (مترجم)

گزارشی از بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور

تهیه و تنظیم: فرزاد صیرفی زاده، دانشگاه تبریز

بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور از تاریخ هشتم تا یازدهم فروردین ماه ۱۳۷۳ (28-31 March 1994) در دانشگاه صنعتی شریف برگزار شد. این کنفرانس هر سال یکبار، در یکی از دانشگاههای ایران و زیرنظر انجمن ریاضی ایران تشکیل می‌شود و یکی از فعالترین، مهمترین و مفیدترین کنفرانسهای علمی است. هدف اصلی کنفرانس تبادل تجربیات و اطلاعات پیرامون ریاضیات در سطح بین‌المللی است به طوری که ریاضیدانان و اساتید، نتیجه تحقیقات خود را ارائه می‌دهند و در سطح جهانی نیز از نظرات دیگران بهره‌مند می‌گردند.

در این کنفرانس علمی، بیش از ۱۰۰۰ نفر از ریاضیدانان و اساتید ایرانی و سیزده کشور خارجی، دانشجویان و دبیران ریاضی‌کشور شرکت داشتند.

محل برگزاری کنفرانس ساختمان تالارهای دانشگاه صنعتی شریف بود. مراسم افتتاحیه و اختتامیه، سخنرانیهای عمومی، میزگرد و مجمع عمومی انجمن ریاضی ایران در تالار ورزش و سخنرانیهای تخصصی و کارگاهها در سایر تالارها برگزار شد.

در طی چهار روز برگزاری این کنفرانس، ۱۶۴ مقاله در موضوعهای مختلف ارائه گردید. برنامه‌های علمی کنفرانس شامل سخنرانیهای عمومی، کارگاههای آموزشی- پژوهشی و سخنرانیهای تخصصی بود که تعدادی از مقالات تخصصی با توجه به عنوان مقاله در یکی از کارگاههای آنالیز تصادفی، ترکیبات، جبر غیر جابجایی آنالیز عددی،سیستمهای دینامیکی و آموزش ریاضیات و تعدادی دیگری نیز در جلسات نظریه اعداد، هندسه، آنالیز عددی و ریاضیات کاربردی در کارگاه، آمار، نظریه گروهها، آنالیز تابعی، تاریخ ریاضیات و جبر ارائه شد.

*** مراسم افتتاحیه**

مراسم افتتاحیه کنفرانس در ساعت ۹/۱۵ صبح روز دوشنبه ۸ فروردین در تالار ورزش تشکیل شد که بعد از اعلام برنامه و تلاوت آیاتی از کلام‌الله مجید و نواختن سرود جمهوری اسلامی ایران، آقای دکتر اعتمادی رئیس دانشگاه صنعتی شریف ضمن خیر مقدم به حضار، تاریخچه‌ای از ۲۵ سال گذشته کنفرانس را بیان نمودند و باتشکر و سپاسگزاری از هیات امناء و دبیر برگزار کننده، مطالب خود را به پایان رساندند. سپس جناب آقای دکتر حبیبی، معاون اول ریاست محترم جمهوری اسلامی ایران سخنانی را در مورد اهمیت ریاضیات در جوامع بشری بیان فرمودند: «ریاضیات باسه هدف مطرح می‌شود، اول به عنوان مبانی تمدن بشر، دیگر به عنوان یکی از آلات تربیت فکر و بالاخره اهمیت ریاضی در کاربردپذیری آن». ایشان با اشاره به اینکه در حال حاضر بیش از ۵۰۰۰ دانشجوی کارشناسی در ۳۰ دانشگاه، ۲۵۰ دانشجوی کارشناسی ارشد در ۱۵ دانشگاه و ۵۰ دانشجوی دکتری در ۶ دانشگاه مشغول به تحصیل هستند به نقش و اهمیت پژوهش ریاضی تأکید کردند. ایشان عوامل زیر را دلیلی برای خوش‌بینی نسبت به آیندهٔ پژوهش ریاضیات در ایران برشمردند:

۱ـ تأسیس برنامه‌های دکتری ریاضی:

۲ـ تاسیس مراکز تحقیقاتی که از فعالیتهای پژوهشی دانشگاهها حمایت می‌کنند؛

۳ـ موفقیتهای چشمگیر جوانان در عرصهٔ المپیادهای جهانی و جذب تعداد قابل ملاحظه‌ای از اعضای تیمهای المپیاد در رشته ریاضی.

«موارد گوناگون دیگری نیز به عنوان نشانه‌های پیشرفت ریاضیات در ربع قرن گذشته در کشورمان شایسته یادآوری است. از جمله پیشرفتهایی که در زمینهٔ ریاضی نگاری (شامل واژه گزینی، ویراستاری ریاضی و...) تحصیل شده است آقای دکتر حبیبی ضمن آرزوی موفقیت برای اعضاء برگزار کننده کنفرانس، سخنرانی خود را به پایان رساندند.

سپس آقای دکتر حقانی، دبیر انجمن ریاضی ایران در مورد جایگاه ریاضیات در ایران از ۲۵ سال گذشته تاکنون، چگونگی شکل گرفتن انجمن ریاضی و کارهای اصلی از جمله برگزاری کنفرانسها سالانه و سمینارهای فصلی، گزارش ارائه دادند و چاپ مجلات ریاضی را در دانشگاههای کشور، ظهور اعتماد به نفس در ریاضیات دانستند.

بعد از سخنان دکتر حقانی، پنج تن از استادان پیشکسوت ریاضیات از طرف انجمن ریاضی ایران و کمیتهٔ برگزاری بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور توسط دکتر حبیبی مورد تجلیل قرار گرفتند که این اساتید عبارت اند از:

استاد احمد بیرشک، استاد دکتر علی افضلی‌پور، استاد دکتر اسداله آل بویه، استاد دکتر بهمن مهری، استاد دکتر مهدی بهزاد. سپس آقای دکتر رجبعلی پور دربارهٔ جایزهٔ دکتر عباس‌ریاضی کرمانی و نحوهٔ انتخاب بهترین مقاله توضیحاتی دادند. جایزهٔ دکتر عباس‌ریاضی کرمانی توسط آقای صالحی معاون وزارت فرهنگ و آموزش عالی به بهترین مقالهٔ کنفرانس سال گذشته (دانشگاه شهید بهشتی) که متعلق به آقای دکتر صدیقی بود، اهداء شد. بعد از اهداء جایزهٔ دکتر ریاضی کرمانی، جوایز نفرات اول تا پنجم مسابقهٔ ریاضی کشور که سال گذشته در دانشگاه شهید بهشتی انجام گرفت توسط آقای دکتر نجفی وزیر آموزش و پرورش اهداء شد ومراسم افتتاحیه در ساعت ۱۰/۳۰ به پایان رسید.

*** برنامه‌های علمی کنفرانس**

۱ـ سخنرانیهای عمومی

در طول کنفرانس، ۱۱ سخنرانی عمومی توسط یازده دانشمند و صاحب نظر ریاضی ایراد گردید که عنوانها تازه و جالب بود. هنگام اجرای سخنرانی عمومی، هیچ برنامه دیگری اجرا نمی‌شد تا شرکت کنندگان بتوانند در این سخنرانیها حضور داشته باشند.

۲ـ سخنرانیهای تخصصی و کارگاهها

همان‌طور که قبلاً اشاره شد با توجه به عنوان مقاله، هر سخنرانی تخصصی، در یکسی از کارگاههای آنالیز تصادفی، ترکیبیات، جبر غیر جابجائی روشهای عددی، سیستمهای دینامیکی و آموزش ریاضیات و در حضور مسئول آن کارگاه ارائه می‌شد.

در طول کنفرانس، ۹۱ مقاله تخصصی در فاصلهٔ زمانی ۲۰ دقیقه تا یک ساعت توسط سخنرانان و به طور همزمان در شش تالار برگزار می‌شد. زمان اجرای سخنرانیها طوری تنظیم شده بود که شرکت کنندگان در کنفرانس می‌توانستند در طول روز حداقل از پنج مقاله استفاده کنند.

استقبال شرکت کنندگان، بخصوص دبیران و دانشجویان از کارگاه آموزش ریاضی نسبت به سایر کارگاهها بیشتر بود. دو جلسه از کارگاه آموزش ریاضی به آقای دکتر شرودر از امریکا اختصاص پیدا کرد. ایشان در جلسهٔ اول مسائلی را که در زندگی روزمره و طبیعت رخ می‌دهد به زبان ریاضی بیان و حل نمودند و در جلسه دوم به اهمیت آموزش تکنولوژی در ریاضیات پرداختند و کتابچه‌هایی تحت عنوان «دوره‌های کوتاه مدت عملی آموزش ریاضی» توزیع شد که مورد توجه دبیران ریاضی قرار گرفت. از دیگر برنامه‌های این کارگاه، سخنرانیهایی بود که توسط چند تن از از اساتید و دبیران ایراد گردید و همچنین میز گردهایی تحت عنوان «برنامهٔ ریاضیات در نظام جدید آموزش متوسطه»، «نقش آموزشهای ضمن خدمت در ارتقاء کیفی معلمان ریاضی» ارائه شد.

۳ـ جلسه (نشست) در نظریهٔ اعداد، هندسه، در این جلسات که مدت ارائه مقاله ۲۰ دقیقه تا یک ساعت بود و به طور همزمان با کارگاهها برگزار می‌شد، ۵۶ مقاله ارائه شد. موضوعات و مقالات ارائه شده در این جلسات متنوع و جدید بود.

*** برنامه‌های جانبی کنفرانس**

از دیگر برنامه‌های مفید کنفرانس می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱ـ نمایشگاه کتاب: در این نمایشگاه که با حضور ناشران بین‌المللی و داخلی در محل کتابخانه مرکزی دانشگاه دایر شده بود، بیش از دو هزار عنوان کتاب تخصصی ریاضی در معرض دید شرکت کنندگان قرار گرفت. در محل نمایشگاه کتاب، نرم افزارهای فارسی شده TEX نیز به نمایش گذاشته شده بود.

۲ـ دورهٔ آشنایی با متمتیکا (Mathematica) و TEX کارگاه آشنائی با نرم‌افزار ریاضی متمتیکا در روزهای اول و دوم کنفرانس و کارگاه آشنایی با TEX در روزهای سوم و چهارم در ساعت ۱۳ تا ۱۴ برگزار شد.

۳ـ نمایش فیلمهای ویدئویی ریاضی.

از دیگر فعالیتهای مفید و جالب، پخش فیلمهای ویدئویی ریاضی بود که هر روز از ساعت ۱۲/۴۵ تا ۱۴ در اتاق

سمعی و بصری دانشکده مکانیک به نمایش گذاشته می‌شد.

۴ـ نشریات

علاوه بر مجموعهٔ خلاصه مقالات، یادنامهٔ کنفرانس و جزوهٔ تجلیل از پیشکسوتان که توسط کمیته برگزاری کنفرانس در روز ثبت نام (۷۳/۱/۷) در اختیار شرکت کنندگان قرار گرفت. کتابهای زیر نیز به مناسبت برگزاری کنفرانس در بین شرکت کنندگان توزیع شد.

۱ـ دفاعیهٔ یک ریاضیدان ـ اثر گ. ه. هاردی، ترجمهٔ سیامک کاظمی

۲ـ گفت و شنودهایی در ریاضیات ـ اثر آلفردرینی، ترجمهٔ سعید قهرمانی

۳ـ آزمون ریاضی فرهنگستان علوم جمهوری اسلامی ایران (مسائل و جوابها) ـ انتشار امیرکبیر ـ شرکت پست جمهوری اسلامی ایران نیز به مناسبت برگزاری بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور یک قطعه تمبر یادبود منتشر کرد.

*** مسابقه ریاضی:**

در روز دوم کنفرانس، مسابقه ریاضی در دو نوبت صبح (′۳۰/۱۲ـ′۳۰/۹) و بعد از ظهر (′۳۰/۱۷ـ′۳۰/۱۴) بین ۱۲۰ نفر از دانشجویان ریاضی از دانشگاههای مختلف کشور انجام شد. همچنین در طی برگزاری کنفرانس، میز گردی تحت عنوان «دور نمای ۲۵ سال آینده ریاضیات در جهان سوم» به زبان انگلیسی برگزار شد. در این بحث میز گرد تجربه دو کشور هندوستان و برزیل در زمینهٔ گسترش آموزش و پژوهشهای ریاضی در سطح بسیار پیشرفته، توسط پرفسور نارالیمان رئیس اسبق تاتا و پرفسور کاماچواز ایمپا مطرح شد. هندوستان در انستیتوی ریاضی «تاتا» و برزیل در موسسه پژوهشی «ایمپا» هر دو از کشورهای جهان سوم هستند که در تأسیس موسسات پژوهشهای ریاضی تجربیات گرانبهایی دارند. این دو تجربه موفق می‌تواند برای سایر کشورهای جهان سوم نیز الگویی باشد. در این بحث میزگرد پیشنهاد شد که ما در ایران می‌باید به تولید نوعی ریاضیات ایرانی نیز توجه کنیم و فرهنگ ریاضی خاص ایران را پدید آوریم.

*** مراسم اختتامیه**

مراسم اختتامیه بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور در ساعت ′۳۰/۱۸ روز پنج شنبه با تلاوت آیاتی از کلام‌الله مجید آغاز شد. سپس با نمایش فیلمی کوتاه، نقطه نظرات تعدادی از ریاضیدانان مدعو و اساتید دانشگاه پیرامون کنفرانس به نمایش گذاشته شد. در ادامه آقای تابش (دبیر کنفرانس) گزارش کوتاهی از کنفرانس ارائه دادند. سپس پروفسور «ناراسیمان» ریاضیدان نامدار جهان، رئیس سابق انستیتوی ریاضی «تاتا» در هندوستان و رئیس فعلی بخش ریاضی «مرکز بین‌المللی فیزیک نظری ICTP» در تریست ـ ایتالیا، چکیده‌ای از نظریات ریاضیدانان برجستهٔ جهان را دربارهٔ سطح فعلی دانش ریاضی در ایران بیان کرد. ایشان در پیام خود گفتند:

«... شکی نیست که جوانان جویندهٔ ایرانی، در قلمرو ریاضیات، استعداد انکار ناپذیر و درخشانی دارند. در حوزه‌های دانشگاهی ایران نیز قابلیت رهبری و هدایت این استعدادها وجود دارد. پس بجاست که مقامات دولتی باپشتیبانی مادی و معنوی خود، این دو سرمایه بالفعل رابه ثمر برسانند و اگر چنین شود، ما به‌زودی شاهد تولد نسلی از ریاضیدانان جوان ایرانی خواهیم بود که در عرصه جهانی خواهند درخشید.»

سخنران بعدی این مراسم، آقای دکتر هاشمی گلپایگانی وزیر فرهنگ و آموزش عالی بودند. ایشان بااشاره به نیاز جامعه ریاضی برای ورود جدی به قلمرو و تحقیق و پژوهش گفتند: «ریاضیات در ایران در حال حاضر وارد دوران بلوغ شده است و مرحلهٔ ثمردهی را می‌آزماید و اگر در این مرحله از همه امکانات بالقوه جامعه برای بسط و گسترش پژوهشهای ریاضی در سطح جهانی استفاده کنیم، در آینده‌ای نه‌چندان دور شاهد شکوفایی مکاتب اصیل ریاضی در ایران خواهیم بود.»

سپس آقای دکتر حقانی، دبیر انجمن ریاضی ایران، طی یک سخنرانی کوتاه، انتظارات ریاضیدانان ایران از مسئولان و مدیران جامعه را بیان کردند.

در پایان مراسم اختتامیه، آقای دکتر حقانی، اسامی برندگان هیجدهمین دورهٔ مسابقهٔ ریاضی بین دانشجویان کارشناسی راکه هر ساله همزمان با کنفرانس ریاضی و به همت انجمن ریاضی ایران برگزار می‌شود به شرح زیر اعلام نمودند:

نفر اول: رامین تکلو، نفر دوم: کسری رفیعی، نفر سوم: بهرنگ نوحی، نفر چهارم: پیمان کسایی از دانشگاه صنعتی شریف، نفر پنجم: امین الله زرگریان از دانشگاه تهران

جوایز این افراد توسط جناب آقای دکتر لاریجانی و آقای دکتر هاشمی گلپایگانی اهداء شد. همچنین از طرف انتشارات اشپیرنگر آلمان مبلغ ۱۰۰۰ مارک به آنها تعلق خواهد گرفت. لازم به تذکر است که براساس بیانیه‌ای که در سال ۱۹۹۲ در ریودوژانیرو صادر شد، سال ۲۰۰۰ سال جهانی ریاضیات اعلام شده است زیرا ریاضیات در قرن بیست و یکم بی شک نقش مهمی در علوم خواهد داشت.

آقای صدیق حیدریان ـ دبیر محترم دهگلان کردستان هفت مسألهٔ هندسه را با چندین راه‌حل ارسال کرده بودند که هیأت تحریریه از بین این مسایل، مسایل ۱، ۶، ۷ را انتخاب کرده که ذیلاً این مسائل را با راه‌حل آنها می‌آوریم.

«هیأت تحریریه»

صدیق حیدریان

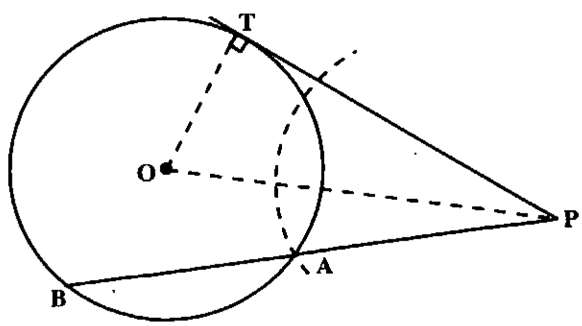
دبیر دبیرستانهای دهگلان کردستان

حل چند مسألهٔ هندسه

مسأله اوّل. نقطهٔ P را در بیرون دایرهٔ $C(O$ و $R)$ در نظر می‌گیریم از آن نقطه خطی رسم کنید که دایره را در نقاط A و B قطع کند و $PA = AB$ باشد. آیا مسئله همیشه جواب دارد؟ مجموعهٔ نقاط P را چنان تعیین کنید که مسئله جواب داشته باشد.

«حل این مسئله سبب می‌شود تا معلومات دانش‌آموز در مورد قوت نقطه نسبت به‌دایره تقویت شود. همچنین دانش‌آموز بتواند به‌درستی از قضیه‌ها و آموخته‌های قبلی خود در مورد مثلثها استفاده نماید.»

روش اول. اگر مسئله را حل شده فرض کنیم و قاطع PAB جواب مسئله باشد. از نقطه‌ی P مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم.



بنابراین می‌توان نوشت: $PT^2 = PA.PB$، حال اگر مرکز دایره را به‌نقطهٔ P و همچنین به‌نقطهٔ تماس T وصل کنیم و نیز با توجه به‌اینکه $PA = AB$ و $PA+AB = PB$، پس رابطهٔ فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

داریم:

$$PT^2=PA.PB=PA(PA+AB)=PA(PA+PA)=2PA^2$$

$$(1)\quad PA=\frac{\sqrt{2}}{2}PT$$

نتیجه می‌شود: $\Delta OPT:(OP^2=PT^2+TO^2$ و $TO=R)$

$$(2)\quad PT^2=OP^2-R^2 \qquad PT=\sqrt{OP^2-R^2}$$

چون نقطه P مشخص است پس طول OP معلوم است و در نتیجه PT معلوم می‌باشد. حال اگر مقدار PT را از رابطهٔ (۲) در رابطه‌ی (۱) جاگذاری کنیم داریم؛

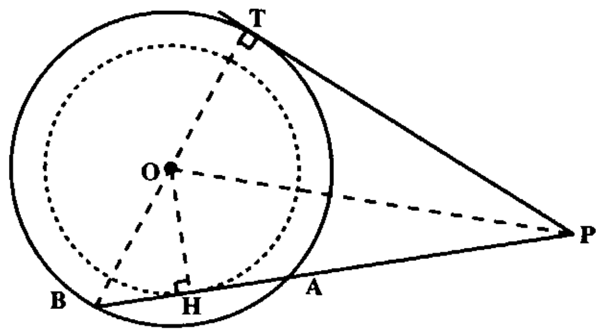
$PA=\frac{\sqrt{2(OP^2-R^2)}}{2}$ یعنی PA طبق مفروضات مسئله مقداری است معلوم. و لذا راه‌حل مسئله به‌این ترتیب است که ابتدا به‌مرکز P و شعاع PA دایره‌ای رسم کنیم از برخورد آن با دایرهٔ مفروضی نقطهٔ A به‌دست می‌آید. حال P را به A وصل کرده و امتداد می‌دهیم، امتداد PA دایره را در نقطه B قطع می‌کند و در نتیجه قاطع PAB جواب مسئله خواهد بود. و چون P خارج دایره است لذا $PO>R$ و همواره می‌توان دایره‌ای به‌مرکز P و شعاع PA رسم کرد.

بحث. اگر دایرهٔ (PA و P) دایرهٔ مفروض را در دو نقطه قطع کند در این صورت مسئله دو جواب دارد و چنانچه بر آن مماس باشد مسئله یک جواب دارد و اگر نقطهٔ مشترکی نداشته باشند مسئله جواب ندارد.

از طرفی چون P در خارج دایره است لذا $R<OP$ و با توجه به‌اینکه بزرگترین وترها در دایره برابر قطر دایره است پس حداکثر $AB = 2R$ یعنی $PA = 2R$ و لذا $OP\leqslant 3R$ پس برای اینکه مسئله همواره جواب داشته باشد باید $R<OP\leqslant 3R$. از این رو

مجموعهٔ نقاط P در درون حلقهٔ بین دو دایرهٔ (O,R) و $(O,۳R)$ واقع هستند، همچنین نقاط واقع بر دایرهٔ بزرگتر نیز عضو مجموعه‌اند.

روش دوم. اگر مسئله را حل شده فرض کنیم و قاطع PAB جواب مسئله باشد. از نقطهٔ P مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ P به O وصل کرده و عمود OH را بر AB وارد می‌کنیم و نیز از نقطهٔ O به‌نقاط T و B وصل می‌کنیم.



حال بنابر فرض مسئله یعنی $PA = AB$ و بنابر قوت نقطهٔ P نسبت به‌دایره می‌توان نوشت:

$$PT^{۲} = PA.PB = PA(PA+AB) = PA(PA+PA) =$$

$$۲PA^{۲} = ۲AB^{۲}$$

$$(۱)\ \Delta OPT: (OP^{۲} = PT^{۲}+TO^{۲} \text{ و } TO = R) \Rightarrow$$

$$۲AB^{۲} = OP^{۲} - R^{۲}$$

$$\Delta OHB: \angle H = ۹۰^{\circ} \Rightarrow OB^{۲} = BH^{۲}+OH^{۲} \Rightarrow R^{۲} =$$

$$(\frac{AB}{۲})^{۲} + OH^{۲} \Rightarrow$$

$$(۲)\ ۴OH^{۲} = ۴R^{۲} - AB^{۲} \Rightarrow ۸OH^{۲} = ۸R^{۲} - ۲AB^{۲}$$

اگر به‌جای $۲AB^{۲}$ مساویش را از رابطه‌ی (۱) قرار دهیم رابطه‌ی (۲) به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

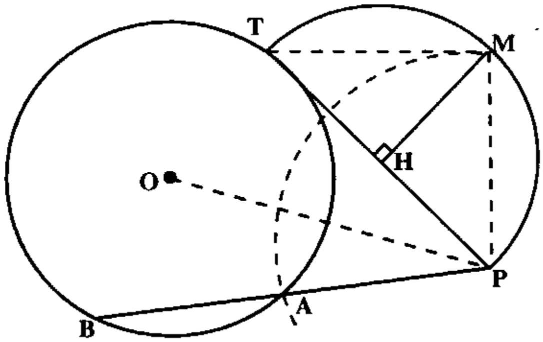
$OH = \sqrt{\frac{۹R^{۲} - OP^{۲}}{۸}}$ که با فرض اینکه زیر رادیکال مثبت یا صفر باشد دایره‌ای به‌مرکز O و شعاع OH خواهد بود، لذا داریم؛

$$۹R^{۲} - OP^{۲} \geqslant ۰$$

$$(۳)\ OP^{۲} \leqslant ۹R^{۲} \Rightarrow -۳R \leqslant OP \leqslant ۳R$$

پس برای حل مسئله کافی است که به‌مرکز O و شعاع OH دایره‌ای رسم کنیم و از نقطه‌ی P بر این دایره مماسی رسم کنیم تا دایرهٔ اصلی را در نقاط A و B قطع کند و به‌این ترتیب قاطع PAB جواب مسئله به‌دست می‌آید.

بحث. چون P خارج دایره است پس $OP>R$ از طرفی طبق نامساوی (۳) همواره داریم $-۳R \leqslant OP \leqslant ۳R$ پس نتیجه می‌شود که $R<OP \leqslant ۳R$، لذا مسئله فقط وقتی جواب دارد که داشته باشیم $R<OP \leqslant ۳R$.



روش سوم. اگر مسئله را حل شده فرض کنیم و قاطع PAB جواب مسئله باشد. از نقطهٔ P مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم و پس از آن نیم دایره‌ای به‌قطر PT در نظر می‌گیریم، حال اگر فرض کنیم که M وسط کمان PT باشد در آن صورت با توجه به‌اینکه زاویه‌ی PMT محاطی روبرو به‌قطر است پس مثلث PMT قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است، پس می‌توان نوشت: $PM^{۲}+MT^{۲} = PT^{۲}$ یعنی

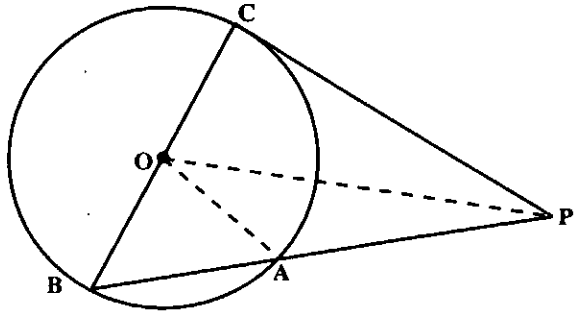
$$(۱)\ PT^{۲} = ۲PM^{۲}$$

از طرفی قوت نقطهٔ P نسبت به‌دایره و مفروضات مسئله داریم:

$$(۲)\ PT^{۲} = PA.PB = PA(PA+AB) = PA(PA+PA) = ۲PA^{۲}$$

با توجه به‌رابطه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $۲PA^{۲} = ۲PM^{۲}$ یعنی $PA = PM$. پس راه‌حل مسئله چنین است که ابتدا نیم دایره‌ای به‌قطر PT رسم کنیم سپس از نقطه H وسط PT عمودی بر PT رسم کنیم تا این نیم دایره را در M قطع کند. حال با مشخص شدن P و M به‌مرکز P و شعاع PM کمانی می‌زنیم تا دایرهٔ اصلی را در A قطع کند، نقطه‌ی P را به A وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه‌ی B قطع کند در این صورت قاطع PAB جواب مسئله خواهد بود.

بحث: اگر کمانی به‌مرکز P و شعاع PM دایره را در دو نقطه قطع کند مسئله دو جواب دارد، اگر بر آن مماس شود مسئله یک جواب دارد و اگر آن را قطع نکند مسئله جواب ندارد. شرط وجود جواب آن است که $PM = PA \leqslant ۲R$ پس $PO \leqslant ۳R$ و چون P خارج دایره است لذا $R < OP$، پس برای اینکه مسئله همواره جواب داشته باشد باید $R < PO \leqslant ۳R$.



روش چهارم. اگر مسئله را حل شده فرض کنیم و قاطع PAB جواب مسئله باشد. در آن صورت B را به‌مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا آن را در نقطه‌ی C قطع کند، حال C را به P و O را به A وصل می‌کنیم. در مثلث PBC پاره خط OA وسط ضلع BC را به‌وسط ضلع PB وصل نموده است. بنابراین OA نصف PC می‌باشد، یعنی $PC = ۲R$. بنابراین راه‌حل مسئله به‌این ترتیب است که به‌مرکز P و شعاع $۲R$ قوسی می‌زنیم تا دایره را در C قطع نماید. نقطهٔ C را به‌مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ B حاصل شود، سپس P را به B وصل می‌کنیم و قاطع PAB جواب مسئله خواهد بود.

بحث. اگر قوس به‌مرکز P و شعاع $۲R$ دایرهٔ اصلی را در دو نقطه قطع کند مسئله دو جواب دارد و اگر بر آن مماس باشد مسئله یک جواب دارد و اگر با آن نقطه‌ی مشترکی نداشته باشد مسئله جواب ندارد.

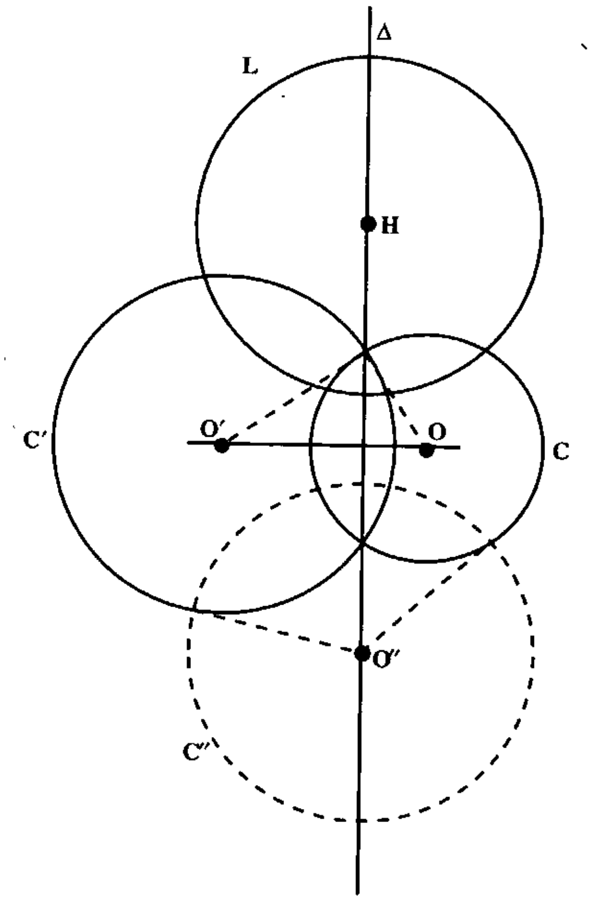
شرط وجود جواب آن است که مثلث POC قابل تشکیل شدن باشد، بنابراین:

$$\triangle\ POC : PC - CO < PO < PC + CO \Rightarrow$$

$$۲R - R < PO < ۲R + R$$

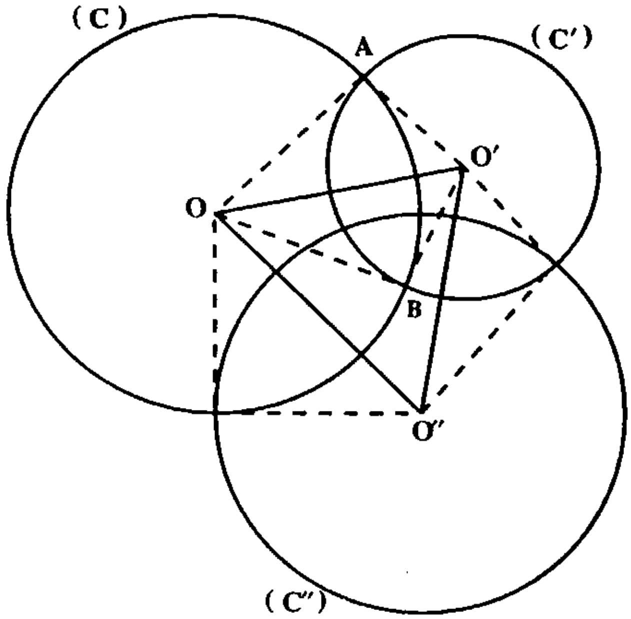
یعنی $R < PO < ۳R$ همچنین در حالتی که قوس بر دایره مماس است وتر AB برابر قطر دایره خواهد شد یعنی در این حالت $PO = ۳R$ و لذا همواره برای اینکه مسئله جواب داشته باشد، باید داشته باشیم $R < PO \leqslant ۳R$.

مسئلهٔ دوّم . ثابت کنید بیش از سه دایرهٔ دو به‌دو عمود برهم وجود ندارد. «حل این مسئله با روشهای مختلف سبب می‌شود که خاصیت محور اصلی در دایره‌های عمود برهم، دسته دوایر و مزدوج دسته دوایر و نیز خاصیت مرکز اصلی سه دایره در فکر دانش‌آموزان تقویت شود.»



روش اول. ابتدا دو دایرهٔ عمود برهم C و C' را رسم می‌کنیم، حال اگر بخواهیم دایرهٔ سومی که بر این دو دایره عمود باشد رسم کنیم باید مرکزش روی محور اصلی این دو دایره باشد. این دایره را رسم کرده و آن را C'' می‌نامیم.

اکنون گوییم بیش از این سه دایرهٔ دو به‌دو عمود برهم وجود ندارد، زیرا اگر دایرهٔ چهارم L با این خاصیت وجود داشته باشد باید مرکزش روی محور اصلی C و C' باشد. اما این دایره بر C'' نمی‌تواند عمود باشد. زیرا دسته دوایر شامل C و C' متقاطعند و لذا دسته دوایر مزدوج این دسته دوایر که L و C'' نیز عضو آن می‌باشند نامتقاطع بوده و نمی‌توانند برهم عمود باشند، در نتیجه بیش از سه دایرهٔ دو به‌دو عمود برهم وجود ندارد.

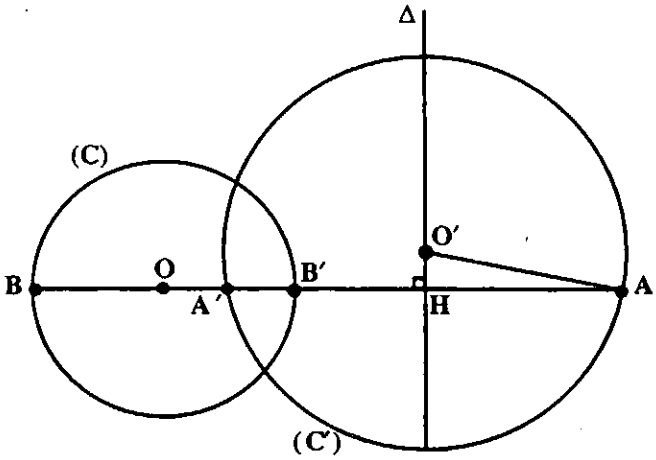


روش دوم. هرگـاه سـه دایـرهٔ $C(O,R)$، $C'(O',R')$، و $C''(O'',R'')$، دو به‌دو بر یک دیگر عمود باشند باید ثابت کنیم که هر سه زاویهٔ مثلث $OO'O''$ حاده هستند. حال اگر نقاط تقاطع دایره‌های C و C' را A و B بنامیم.

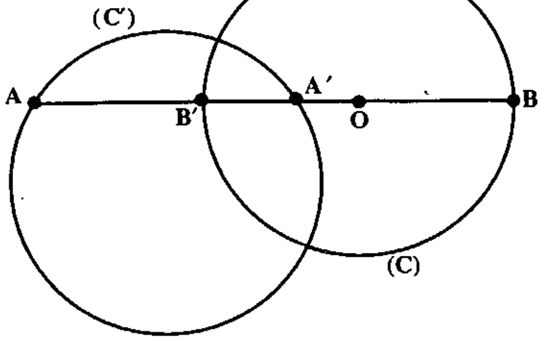
زاویه‌های OAO' و OBO' قائمه خواهند بود. از آنجا که مرکز O'' خارج دو دایرهٔ C و C' قرار دارد، زیرا قوت O'' نسبت به‌دوایر C و C' مساوی R''^{2} و مثبت است. و چون مثلثهای OAO' و OBO' قائم‌الزاویه هستند پس زاویهٔ $OO''O'$ حاده می‌باشد. پس اگر فرض کنیم دایرهٔ دیگری مانند C_1 وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که بر هر سه دایره عمود باشد، مرکز آن مرکز اصلی سه دایرهٔ C و C' و C'' است. و چون مرکز اصلی این سه دایره نقطه‌ی همرسی ارتفاعهای مثلث $OO'O''$ می‌باشد پس داخل مثلث مفروض واقع است زیرا این مثلث حاده‌الزاویه است. و در نتیجه مرکز اصلی داخل هر سه دایره قرار دارد. از طرفی چون C_1 بر هر سه دایره عمود است لذا مرکز آن باید خارج هر سه دایره باشد و این ممکن نیست. پس از این تناقض می‌توان نتیجه گرفت که دایره C_1 اصلاً وجود ندارد.

روش سوم. قوت مرکز دایره‌ای که بر سه دایرهٔ دو به‌دو عمود برهم، عمود است نسبت به‌آن سه دایره مساوی مربع شعاع آن دایره است، پس این نقطه یعنی مرکز دایرهٔ فوق نسبت به‌هر سه دایره به‌یک قوت است. لذا مرکز دایرهٔ فوق، مرکز اصلی سه دایره است. اما دایره‌هایی که برهم عمودند دوبه‌دو متقاطع می‌باشند، بنابراین مرکز اصلی سه دایره در داخل هر سه دایره واقع است و قوت آن نسبت به‌هر سه دایره مقداری است منفی، لذا با مربع شعاع آن دایره مساوی نیست. پس دایرهٔ چهارمی که بر هر سه دایرهٔ دو به‌دو عمود برهم، عمود باشد اصلاً وجود ندارد.

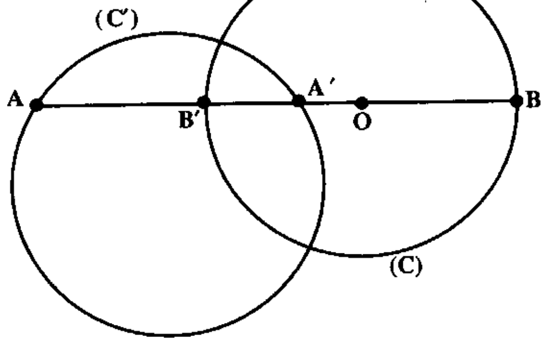
مسئله‌ی سوم. ثابت کنید تمام دایره‌هایی که از نقطه‌ی مفروض A می‌گذرند و بر دایرهٔ مفروضی عمودند، از نقطه‌ی ثابت دیگری نیز می‌گذرند. (A روی دایره واقع نیست) «حل این مسئله به‌راه‌های مختلف سبب می‌شود تا خاصیت محور اصلی دو دایره، خواص دایره‌های عمود برهم و خاصیت تقارن محوری در دانش‌آموز تقویت شود.»



روش اول. نقطهٔ A را به‌مرکز دایرهٔ C یعنی نقطه‌ی O وصل می‌کنیم. حال اگر نقطه‌ی A را دایره‌ای به‌شعاع صفر فرض کنیم و محور اصلی دو دایرهٔ C و A را رسم کنیم و آن را Δ بنامیم، ثابت می‌کنیم دایرهٔ مطلوب از نقطهٔ ثابتی که قرینه‌ی محوری نقطه‌ی A است می‌گذرد. برای این منظور اگر O' نقطه‌ای از Δ باشد دایره‌ای به‌مرکز O' و شعاع $O'A$ رسم می‌کنیم این دایره که آن را C' می‌نامیم بر دو دایرهٔ A و C عمود است. به‌بیان دیگر C' از A گذشته و بر C عمود است. محل تلاقی C' را با خط ثابت OA نقطه‌ی A' فرض می‌کنیم. در دایرهٔ C' خط Δ قطر عمود بر وتر AA' است پس وتر AA' را نصف می‌کند یعنی A' قرینه‌ی A نسبت به‌خط Δ است و چون نقطه‌ی A ثابت است پس A' نیز نقطه‌ی ثابتی است. و لذا دایره‌هایی که از A می‌گذرند و بر دایرهٔ C عمودند از قرینه‌ی محوری A نسبت به‌محور تقارن Δ که نقطه‌ای است ثابت می‌گذرند.



روش دوم. اگر فرض کنیم که C' دایره‌ای باشد که بر دایرهٔ C عمود باشد همواره داریم؛ $P_{C'}^{O} = R^2$ از طرفی $P_{C'}^{O} = \overline{OA'}.\overline{OA}$ لذا $\overline{OA'}.\overline{OA}=R^2$ یعنی $\overline{OA'}=\frac{R^2}{\overline{OA}}$ چون R و OA ثابت است پس OA' نیز ثابت می‌باشد و چون نقطه‌ی O ثابت است لذا نقطه‌ی A' نیز ثابت می‌باشد. پس تمام دایره‌هایی که از نقطه‌ی A می‌گذرند و بر دایرهٔ C عمود هستند از نقطه‌ی ثابت A' می‌گذرند.



روش سوم. اگر دایرهٔ C' دایره‌ای باشد که از A گذشته و بر C عمود باشد، با توجه به‌اینکه در دو دایرهٔ عمود برهم قطر یکی به‌وسیله‌ی دیگری به‌نسبت توافقی تقسیم می‌شود لذا می‌توان گفت A' مزدوج توافقی نقطه‌ی A نسبت به‌دو سر قطری از دایرهٔ C است که از نقطه‌ی A می‌گذرد. و چون نقطه‌ی A ثابت است پس نقطه‌ی A' نیز ثابت می‌باشد.

مراجع

۱) بیرشک، احمد، معیری، محمد طاهر، هندسهٔ سال سوم ریاضی‌فیزیک.

۲) غیور حسین، مجذوب حسین، هندسهٔ تحلیلی سال چهارم ریاضی‌فیزیک.

۳) جعفری علی‌اکبر، نصیری محمود، هندسهٔ تحلیلی و مسطحه.

نقد و معرفی کتاب

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده

فرهنگ علوم تجربی و ریاضی

انتشارات مدرسه
تهران ـ تابستان ۱۳۷۲
تیراژ ۱۱۰۰۰
تألیف: گروهی از کارشناسان و استادان دانشگاه

فرهنگ اصطلاحات رایج علمی در علوم تجربی و علوم ریاضی توسط عده‌ای از کارشناسان وزارت آموزش و پرورش و استادان دانشگاه منتشر شده است. هدف از انتشار این مرجع گردآوری اصطلاحات و مفاهیم علمی جهت استفاده دانش‌پژوهان، به‌ویژه دانش‌آموزان دبیرستانها، ذکر شده است به گونه‌ای که از مراجعه مکرر به کتابهای درسی و علمی گوناگون بی‌نیاز شوند.

این فرهنگ در واقع مجموعه‌ای است مشتمل بر تعریف واژه‌های علمی، خلاصه‌ای از زندگینامه دانشمندان معروف علوم تجربی و ریاضی، فرهنگ واژه‌های علمی از فارسی به انگلیسی، و پیوستهایی شامل معرفی ثابت‌ها و جداول علمی می‌باشد. مهمترین بخش این مجموعه تعریف واژه‌های مفهومی است که در ۷۹۴ صفحه ارائه شده است. واژه‌نامه فارسی به انگلیسی نیز در ۱۵۰ صفحه ارائه شده و مجموعهٔ بسیار جالبی را تشکیل می‌دهد.

صفحه آرایی کتاب در استاندارد فرهنگهای مهم بین‌المللی تنظیم شده است که در حاشیه متون اصلی، تصاویر مناسب، عناوین بخشها، و فرمولهای مربوط دیده می‌شود.

پدیدآورندگان شامل دبیران علوم و ریاضی و برخی از اعضای هیات علمی دانشگاهها می‌باشند. مؤلفین از چهار بخش عمده ریاضیات، زمین شناسی، شیمی و فیزیک انتخاب شده‌اند. در بخش فیزیک یک هیأت پنج نفره و در هر یک از بخشهای زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، و شیمی یک هیأت دو نفره و در بخش ریاضی تنها یک نفر مؤلف فعّالیت داشته است.

تهیه و تدوین این فرهنگ را باید در مجموع گامی مثبت در جهت آشنایی بیشتر معلمان، دبیران و دانش‌آموزان دبیرستانها با مفاهیم و واژه‌های رایج علمی به شمار آورد.

معهذا، در بررسی محتوایی مختصری که از بخش مفاهیم ریاضی آن به عمل آمد متأسفانه اشتباه‌ها و غلطهای علمی چندی ملاحظه گردید که برخی از آنها را در اینجا به نقد می‌گذاریم.

در صفحه ۱۰۵ کتاب مفهوم cardinal number چنین تعریف شده است: «اعداد اصلی، عددی که برای بیان تعداد اجزاء یا عناصر یک مجموعه یا اندازهٔ یک مقدار به کار می‌رود.» این تعریف نادرست و ابهام‌آور است. عدد اصلی فقط به یک مجموعه اطلاق می‌شود و آن به اصطلاح برابر است با عدهٔ عناصر آن مجموعه، خواه آن مجموعه متناهی باشد و خواه نامتناهی. به عددی که برای بیان اندازهٔ یک مقدار به‌کار می‌رود معمولاً عدد اصلی نمی‌گوییم. برای مثال گوییم که عدد اصلی یک مجموعه ۳ عنصری برابر ۳ است. در حالی که به‌اندازه یک پاره‌خط دو سانتی‌متری هیچ‌گاه عدد اصلی آن پاره‌خط نمی‌گوییم. ثابت می‌شود که عدد اصلی هر پاره خط وقتی که به عنوان مجموعه‌ای از نقاط تلقی می‌گردد، عددی است که به C نشان می‌دهیم و این عدد اصلی با عدد اصلی IR یعنی مجموعه همهٔ عددهای حقیقی یکی است. و از هر عدد طبیعی نیز بزرگتر است.

(*) در صفحه ۲۶۱ واژه fraction (کسر) چنین تعریف شده است: «صورتی نمایشی از اعداد یا مقادیر که از دو عدد و خط افقی بین آنها پدید می‌آید. اعداد مزبور صورت و مخرج (برخه‌شمار و برخه نام) و خط بین آنها خط کسری نامیده شده است. برای هر کسر به صورت $\frac{a}{b}$ مفاهیم گوناگون می‌توان تصور کرد. خارج‌قسمت تقسیم صورت بر مخرج با منظور داشتن اثر باقیمانده تقسیم در آن با هر درجه دقت و تقریب نسبت به دو عدد b و a.»

به دنبال آن اضافه می‌نماید:

«مفهوم مشخص کسر به معنی تعداد صحیح از اجزاء غیردهدهی یک چیز چنان که کسر $\frac{۳}{۸}$ به معنی سه جزء از اجزای واحد است که هر یک از آنها از تقسیم واحد به هشت حاصل شده است.»

این تعریف نیز بسیار نادرست و پر از ابهاماتی است که نه تنها کمکی به درک مفهوم به دانش‌آموز نمی‌کند بلکه آنچه را که وی در مورد کسر در طی تحصیل فراگرفته است دچار اختلال و بدفهمی می‌کند. ادّعا شده است که برای هر کسر مفاهیم گوناگون می‌توان تصور کرد! سپس مفهوم مشخص کسر به معنی تعداد صحیح از اجزاء غیر دهدهی یک چیز تعریف شده است. این تعریف نیز نارسا است. فی‌المثال کسرهایی نظیر $\frac{۳}{۱۰}$ و $\frac{۱}{۱۰}$ با این تعریف کسر به حساب نمی‌آیند. مثالی که از کسر $\frac{۳}{۸}$ نیز کمکی به بهترشدن وضع نکرده است. کسر $\frac{۳}{۸}$ به معنی ۳ قسمت از هشت قسمتهای مساوی یک چیز است. نه آنکه سه قسمت از یک چیز که از تقسیم آن به هشت جزء حاصل شده باشد. چه آنکه اگر قسمتهای تقسیم شده برابر نباشند چه بسا مقدار ۳ قسمت انتخاب شده برابر نیمی از کل آن چیز و یا حتی بیشتر از آن باشد. به‌علاوه اشاره شده است که تقسیم یک چیز باید به اجزاء غیر دهدهی باشد که لزوماً درست نیست چه آنکه کسرهای با مخرج ده نه تنها وجود دارند بلکه از جمله کسرهای مهّم نیز تلقی می‌شوند. که به کسرهای دهدهی یا کسرهای اعشاری نیز معروف‌اند. در کتابهای ریاضی ابتدایی کسر به درستی تعریف و تفهیم گردیده است. ای‌کاش مؤلف حداقل به کتابهای ریاضی رسمی وزارت آموزش و پرورش مراجعه می‌کرد.

(*) تعریف واژه‌ها و مفاهیمی مانند point (نقطه)، Line segment (پاره خط) و set (مجموعه) نیز بی‌اشکال نیست. در صفحه ۶۰۵ کتاب واژه set چنین تعریف شده است:

«به ساده‌ترین بیان، یک مجموعه گردآمده‌ای از اعداد یا اشیایی است که اجزاء یا اعضای مجموعه گفته می‌شوند. اعم از آنکه اجزای مزبور وجه مشترک یا ویژگی مشترکی داشته یا نداشته باشند...».

در حالی که واژه شیئی عام است نیازی به قید اعداد در این تعریف نیست. معمولاً به هر یک از این اشیاء عنصر یا عضو مجموعه اطلاق می‌گردد نه جزء آن. ضمناً در تعریف مجموعه باید قید گردد که این اشیاء باید مشخص باشند. به هر حال عبارتهایی نظیر اجزاء یا اعضاء ابهام‌آور و از جهت آموزشی آموزنده نمی‌باشد. به علاوه واژه‌های به کار رفته در فرهنگ فاقد هماهنگی لازم است. در جایی، مثلاً برای تعریف عدد اصلی، از اشیاء تشکیل‌دهنده یک مجموعه به عنوان عناصر آن مجموعه یادشده در حالی که در اینجا از این اشیاء به عنوان اعضای مجموعه ذکر شده است. به هر حال باید اذعان داشت که متأسفانه در تهیه و تنظیم تعریف مفاهیم ریاضی دبیرستانی دقّت کافی مبذول نشده است در حالی که یکی از ویژگیهای مفاهیم ریاضی آن است که هر یک دارای تعریفی دقیق و خالی از ابهام می‌باشند.

هدف ما در این مختصر، نقدی کوتاه بر این کتاب است و پیش از این وارد واژه‌ها و مفاهیم تعریف شده در آن و یا سایر شاخه‌های علمی آن نمی‌شویم و امیدواریم که در چاپهای بعدی اشکال علمی کتاب مرتفع گردد.

مسایل ویژه دانش آموزان

تهیه و تنظیم: ابراهیم دارایی

۱ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$|x-2|^{10x-1}=|x-2|^{3x}$$

(راهنمایی. با فرض $x\neq 2$ در پایه ۲ از طرفین معادله لگاریتم بگیرید.)

۲ـ مجموع زیر را حساب کنید.

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{(m-1)}m^2$$

(راهنمایی. اگر m زوج باشد، آنگاه، $S_m=-\frac{m(m+1)}{2}$ و اگر m فرد باشد آنگاه $S_m=\frac{m(m+1)}{2}$.)

۳ـ دو تصاعد عددی $a_1, a_2, \ldots, a_m$ هندسی $b_1, b_2, \ldots, b_m$ مفروضند که در آن $a_1=b_1$ و $a_2=b_2$ یکی از دو تصاعد صعودی‌اند و همه جملات آنها مثبت است.

ثابت کنید همهٔ جملات تصاعد عددی که با a_3 شروع می‌شوند، از جملات نظیر خود در تصاعد هندسی کوچکترند.

(راهنمایی. اگر q و d به ترتیب قدر نسبت تصاعد هندسی و حسابی و a جمله اول باشد، در این صورت $q=\frac{a+d}{a}$ پس از نامساوی $(1+x)^n\geqslant 1+nx$ با فرض $x>0$ و $1+x>1$ استفاده کنید.)

۴ـ اگر h_1 و h_2 و h_3 اندازه‌های سه ارتفاع مثلث باشند ثابت کنید S مساحت آن از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$S=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_3}\right)\left(\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}-\frac{1}{h_1}\right)\left(\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}\right)}}$$

۵ـ اگر m_1 و m_2 و m_3 اندازه‌های میانه‌های مثلث باشند، ثابت کنید، S مساحت آن از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$S=\frac{1}{3}\sqrt{(m_1+m_2+m_3)(m_1+m_2-m_3)(m_2+m_3-m_1)(m_3+m_1-m_2)}$$

۶ـ اگر H مرکز ارتفاعی چهاروجهی (با فرض اینکه ارتفاعات در نقطه H متقاربند) ABCD و O مرکز کره محیطی آن باشند، ثابت کنید

$$\overline{OH}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OD})$$

۷ـ اعداد دو رقمی تعین کنید که توان پنجم آنها به دو رقم مساوی ختم شود.

(راهنمایی. توان پنجم هر رقم، به خود آن رقم ختم می‌شود.) به جزء صفر اگر $\overline{xy}$ عدد مفروض باشد داریم.

$$(10x+y)^5=100A+50xy^4+y^5$$

(جواب: ۹۹ و ۷۹ و ۵۹ و ۳۹ و ۱۹ و تمام اعداد دورقمی که به صفر ختم می‌شوند.)

۸ـ جمع زیر را حساب کنید

$$1+\frac{1}{3}+\frac{3\times5}{4\times8}+\frac{3\times5\times7}{4\times8\times12}+\cdots$$

جواب: $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$

۹ـ a را طوری تعیین کنید که مجموع مربعات ریشه‌های معادله

$$\log_a|x-2a| + \log_a x = 2$$

برابر ۴ باشد.
(راهنمایی: معادله بالا هم‌ارز است با معادلهٔ

$$x|x-2a|=a^2$$

۱۰ـ مقادیر a را طوری تعیین کنید که به‌ازای هر یک از آنها در معادلهٔ

$$(x-a-1)^2-2)(x-a-1)^2=a^2-1$$

تعداد ریشه‌های مثبت، بیش از ریشه‌های منفی باشد.
(راهنمایی: معادله به صورت $f(x).g(x)=0$ بنویسید که در آن

که در آن $f(x)=x^2-2(a+1)x+a(a+1)$

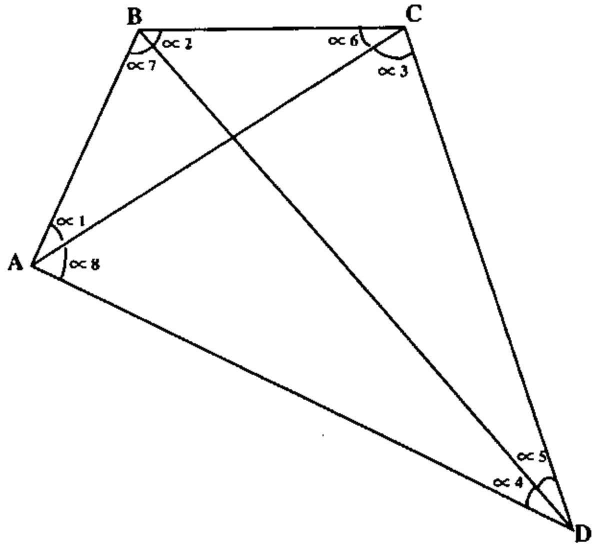
$$g(x)=x^2-2(a+1)x+a(a+3)$$

$f(x)$ به ازای $a\geqslant -1$ جواب دارد و به ازای $a>0$ ریشه‌های آن مثبت است و به ازای $-1<a<0$ ریشه‌های آن مختلف‌العلامه است)

۱۱ـ در یک چهارضلعی محدب قطرها با اضلاع ۸ زاویه تشکیل می‌دهند. ثابت کنید این زوایا را می‌توان طوری شماره‌گذاری کرد که در تساوی زیر صدق کند.

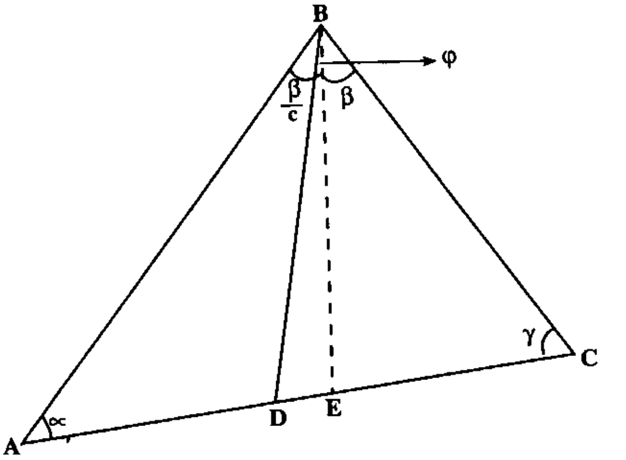
$$\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\sin\alpha_4=\sin\alpha_5\sin\alpha_6\sin\alpha_7\sin\alpha_8$$

(راهنمایی: از شکل زیر و قضیه سینوسها در مثلث استفاده کنید.)



۱۲ـ اگر مطابق شکل BE نیمساز و BD میانه مثلث ABC و φ زاویه بین میانه و نیمساز باشد، ثابت کنید

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{cotg}^2\frac{\alpha+\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}$$



۱۳ـ بر دایره‌ای به شعاع R ذوزنقه متساوی‌الساقینی محیط شده است. می‌نیمم سطح کل و حجم جسم حاصل از دوران ذوزنقه حول قاعده بزرگ آن چقدر است؟
(راهنمایی: جسم حاصل از ترکیب دو مخروط مساوی و یک استوانه تشکیل شده است. اگر $s(u)$ و $v(x)$ به ترتیب سطح کل و حجم باشند، داریم

$$s(x)=4\pi R^2\left(x+\frac{3}{x}\right)$$

$$v(x)=\frac{8}{3}\pi R^3\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

که در آن $x=\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$ و $\angle BAD=\varphi$

۱۴ـ مجموع دو عدد چهاررقمی زیر راکه در آن هر حرف نمایش یک رقم می‌باشد، چقدر است؟

$$
\begin{array}{l}
\text{T E T A +} \\
\text{B E T A} \\
\hline
\text{S Y M M A}
\end{array}
$$

(راهنمایی: $A=0$ و $S=1$ و جواب ۱۲۸۸۰)

۱۵ـ ثابت کنید:

$$\log 99 < \log^2 9 + \log^2 11 < 2$$

۱۶ـ اگر z و y و x و c و b و a در روابط زیر صدق کنند

$$a^x=bc \quad , \quad b^y=ca \quad , \quad c^z=ab$$

و a و b و c مثبت و مخالف ۱ باشند، ثابت کنید

$$xyz-x-y-z=2$$

۱۷ـ ثابت کنید کسر $\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{b_1+b_2+\cdots b_n}$ بین کمترین و بیشترین مقدار کسرهای زیر قرار دارد

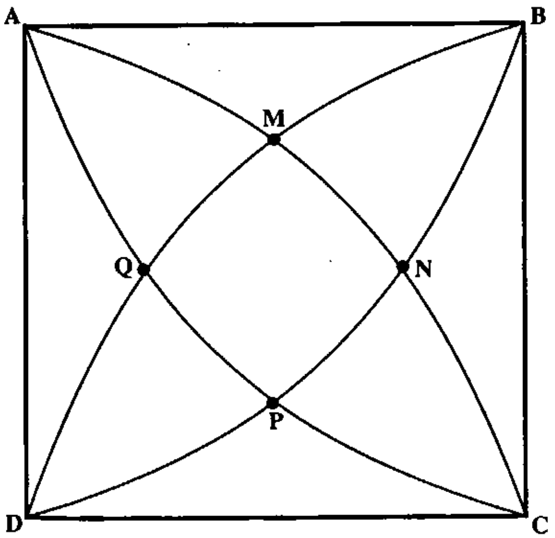
$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_n}{b_n}$$
$$(bk > 0 \, , \, k = 1, 2, \ldots, n)$$

(راهنمایی: فرض کنید m کمترین و M بیشترین مقدار کسرها باشند، پس می‌توان نوشت.

$$m \leqslant \frac{a_2}{b_2} \leqslant M, \; m \leqslant \frac{a_2}{b_2} \leqslant M, \ldots, m \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant M$$

و چون $b_1 > 0 \, , b_2 > 0 \, , \ldots , b_n > 0$ پس می‌توان نتایج لازم را به دست آورد.)

۱۸ـ در مربع ABCD به ضلع a، چهار دایره به مرکزهای رئوس مربع و به شعاع a رسم می‌کنیم.
مساحت چهارضلعی منحنی‌الخط MNPQ حاصل را بدون استفاده از انتگرال (به روش مقدماتی) پیدا کنید.



نمایش اعداد با ارقام

۱
۳ ۷
۳

علی‌اکبر جاویدمهر،
دبیر ریاضی منطقه ۲ قم

آقای علی‌اکبر جاویدمهر، با زحمات زیادی اعداد از یک تا ۱۰۰ را با ارقام ۱۳۷۳، به کمک اعمال جمع، ضرب تفریق و تقسیم و جزء صحیح (با نماد [ ]) ساخته‌اند و ما جهت جلوگیری از تطویل مطلب تنها اعدادی که مختوم به ۳اند را در اینجا می‌آوریم. (سردبیر)

در اینجا می‌خواهیم اعداد از یک تا ۱۰۰ را (تنها آن اعدادیکه مختوم به ۳ اند) به کمک ارقام ۱۳۷۳ با اعمال مقدماتی و تابع جزء صحیح نمایش دهیم

$۳=۱۳-(۷+۳)=۱+\sqrt{۳+۷-۳!}=$

$=\sqrt{۱+۳}+۷-۳!$

$۱۳=۱\times۳+۷+۳=۱^{۳}\times۷+۳!$

$۲۳=۱۳+۷+۳$

$۳۳=(۱+۳+۷)\times۳=-۱+۳۷-۳$

$۴۳=۱\times۳۷+۳!=(۱+۳!)\times۷-۳!$

$۵۳=۱+[\sqrt{۳^{۷}}]+۳!$

$۶۳=۱\times۳\times۷\times۳=-۱-(۳-۷)^{۳}$

$۷۳=۱^{۳}\times۷۳=۱+(-۳+۷)!\times۳$

$۸۳=۱۳+[\sqrt{۷!-۳!}]$

$۹۳=((۱+۳)!+۷)\times۳$

اینک می‌خواهیم با ارقام ۱۳۷۳ مربع جادویی بسازیم که مجموع اعداد هر سطر، هر ستون، و هر قطر برابر عدد ۱۴ شود

۱	۳	۳	۷
۳	۷	۱	۳
۷	۳	۳	۱
۳	۱	۷	۳

۷	۳	۱	۳
۱	۳	۷	۳
۳	۱	۳	۷
۳	۷	۳	۱

در رشد آموزش ریاضی، تابستان ۱۳۷۲، شماره ۳۸، در مقاله‌ای تحت عنوان «بازی با اعداد» که آقای غلامرضای صفری‌نژاد ارسال داشته‌اند اعداد ۵۱ تا ۱۰۰ را بجز عدد ۶۹ با ارقام ۱۹۹۲ نمایش داده‌اند و از خواننده خواسته بودند برای عدد ۶۹ رابطه‌ای نوشته شود که اینجانب به کمک جزء صحیح این عدد را با ارقام ۱۹۹۲ نوشته‌ام

$۶۹=-[\sqrt{-۱+\sqrt{۹}}]+[\sqrt{(۹-۲)!}]$

$=-۱+[۷۰/۹۹۲]=۶۳$

اولین زن ایرانی که موفق به اخذ مدرک دکترای ریاضی از دانشگاههای کشور شده است فارغ التحصیل دانشگاه تربیت معلم می‌باشد.

خانم دکتر حکیمه ماهیار اولین فارغ التحصیل دوره دکترای ریاضی دانشگاه تربیت معلم تهران در بهمن ماه سال ۱۳۷۲ به اخذ درجه دکترای در رشته ریاضی نایل آمد، ایشان اولین زن ایرانی است که در رشتهٔ ریاضی از دانشگاههای کشور موفق به اخذ درجه دکترای شده است.

جلسه دفاعیه مشارالیها در ۷۲/۱۱/۵ در موسسه‌ی ریاضیات دانشگاه تربیت معلم تهران و با حضور هیات داوران و عده‌ای از استادان و دانشجویان ریاضی برگزار شد، در این جلسه خانم ماهیار طی سمیناری از کارهای پژوهشی خود دفاع نمود، عنوان رساله دکتری ایشان «تقریب در جبرهای لیپشیتس (Lipschits) و فضاهای ایده‌آل ماکسیمال آنها» است که تحت سرپرستی آقای دکتر طاهر قاسمی تدوین شده است.

هیات داوران پس از بحث و تبادل نظر و با توجه به اینکه یکی از مقالات مشارالیها (که مستخرج از رساله می‌باشد) برای چاپ در مجله معتبر Proceedings of Americanl PAMS پذیرفته شده است، صلاحیت نامبرده را برای احراز درجه دکتری در سطح عالی مورد تأیید قرار داد.

البته با توجه به ماهیت واژهای علمی در رشته ریاضی و در جهت استفاده بهتر توسط منابع خارجی، رساله ایشان به زبان انگلیسی تدوین شده است.

موسسه ریاضیات دانشگاه تربیت معلم از سال ۱۳۴۴ تاسیس شده است و مسئولیت تربیت مدرسین ریاضی دانشگاههای کشور را به عهده داشته است. در سال ۱۳۶۶ آزمون اولین دوره دکتری کشور در این دانشگاه برگزار شد و خانم ماهیار تحصیل خود را از سال ۱۳۶۷ در اولین دوره دکتری ریاضی آغاز نمود.

موسسه ریاضیات از سال ۱۳۶۷ تاکنون آزمونهای مختلفی را در سطح دکتری برگزار نموده است و هم اکنون شش دانشجوی دکتری ریاضی محض و کاربردی دارد.

نقش ریاضیات

نقش منطق نمادی در کامپیوتری کردن دانش بشر (هوش مصنوعی) III

توانا بود هر که دانا بود　　　به دانش دل پیر برنا بود

قرنها از این گفتهٔ بسیار عمیق فردوسی شاعر بزرگ ما می‌گذرد. در هیچ زمانی به اندازه‌ای که امروز این شعر مصداق پیدا کرده است اهمیت آن در جامعه روشن نبوده است.

برخلاف آنکه روزگاری ثروت ملی‌کشورها، خاک حاصلخیز، معادن غنی، کارگران ارزان و پرکار و سرمایه‌های پولی به حساب می‌آمد، امروزه ثروت ملی از **دانش، تخصص، نوآوری و سرمایه‌های هوشی** افراد آن حاصل می‌شود. پیشرفتهای اقتصادی کشورهای پیشرفتهٔ جهان به دلیل این واقعیت است که نیروی فکر (قدرت مغز) را جانشین نیروی بدنی کرده‌اند. در جوامع پیشرفته، بالا رفتن سطح زندگی افراد به دلیل آن است **که هوشمندانه کار می‌کنند و از نیروی اندیشه و دانش** خود کمک می‌گیرند و نه به دلیل پرکاری آنها. اگر تنها پرکاری عامل پیشرفت بود، مردم کشورهای جهان سوم که به مراتب از مردم کشورهای پیشرفته بیشتر کار می‌کنند از زندگی بهتری برخوردار بودند!

اگر سرمایه را آن چیزی بدانیم که یک رشته در آمد ایجاد می‌کند، می‌توان گفت که **دانش یک نوع سرمایه است**؛ سرمایه‌ای جدید که روز به روز ارزش آن بالا می‌رود. در این راستا، متخصصین **«کارگزاران دانش»**[1] هستند که ماشین ثروت (یا سرمایه) را به حرکت در می‌آورند.

کارگزاران دانش در همهٔ ادارات و کارخانه‌ها و تمام حرفه‌های اقتصادی امروز، در شغلهائی که به مهارت و دانش ویژه نیازمندند، حضور دارند. قابل رقابت بودن فرآورده‌های کارخانه‌ها از تخصص و باروری و کارائی این کارگزاران حاصل می‌شود.

در ایدهٔ اولیهٔ به‌کارگیری رباتها در کارخانه‌ها (در حدود ۱۵ سال قبل) تنها به ساخت رباتهایی فکر شده بود که بتوانند کارهای حسی (فیزیکی) از قبیل جابه‌جا کردن اشیاء و جوش دادن اجزاء و... انجام دهند، در نتیجه با هزینهٔ سرسام‌آور و غیر اقتصادی بودن فرآورده‌ها روبه رو شدند. این سؤال مطرح شد که چرا؟ دلیل آن، که بعد روشن شد، این بود که در کارخانه‌های تولیدی هزینهٔ کارهای فیزیکی (بدنی) تقریباً $\frac{1}{3}$ کل هزینه است و $\frac{2}{3}$ دیگر مربوط به کارهای غیر فیزیکی است، که می‌توان آنها را **هزینه‌های دانشپایه‌ای**[2] نامید، از قبیل هزینه‌های مربوط به تهیه مواد اولیه، طراحی، مهندسی، کیفیت، کنترل و هماهنگی مدیریت، تصمیم‌گیری و تبادل اطلاعات، همچنین هزینه‌های فروش، خدمات و مدیریت مالی است.

برای بالا بردن تولید در حد سودآوری، معلوم شد که طیف **خودکاری**[3] (اتوماسیون) کارخانه باید گسترده‌تر از فضای فیزیکی کارخانه باشد، و باید شامل برنامه ریزان، تصمیم‌گیران، گروهی که تبادل اطلاعات می‌کنند و آنهائی که در حل مسائل و مشکلات سهیم هستند گردد. به طور خلاصه، **لازم بود که قدرت خودکاری به کارگزاران** دانش نیز منتقل شود.

در انقلاب کشاورزی، موتورهای باروری ماشینهای کشاورزی بودند؛ در انقلاب صنعتی، موتورهای باروری ماشین آلات سنگین کارخانجات بودند؛ در انقلاب کارگزاران دانش، موتورهای باروری (یا موتورهای کار هوشمندانه) کامپیوترها هستند.

کامپیوتر جامعترین ماشینی است که تا کنون اختراع شده است. کامپیوتر یک نمادپرداز[4] جامع است که توانائی انجام هر نوع عملی را بر روی داده‌ها به هر طریقی که بخواهیم، دارد. جای بسی شگفتی است که در بیشتر دوران کامپیوتر، بشر جنبهٔ عمومی این‌ماشینهای جامع را برای نیازهای اطلاعات پردازی[5] از قبیل: محاسبات عددی، بایگانی و باز یافت[6] داده‌ها و در سنوات اخیر ساده‌کردن و سبک کردن بار سنگین ماشین‌نویسی (که به **کلمه‌پردازی**[7] معروف است) برگزیده است. با این وصف، حتی این حالت می‌تواند بسیار با ارزش باشد، باروری کارگزاران دانش را بهبود بخشد و صنعت اطلاعات پردازی را تا سرحد مقام اولی بین صنایع جهان به جلو برد.

کامپیوترها در مؤسسات اقتصادی و اجتماعی کشورهای پیشرفتهٔ جهان حضور دارند. وجود کامپیوترها در همه‌جا از مطب دکتر گرفته تا فروشگاههای بزرگ به چشم می‌خورد و در بسیاری از تصمیم‌گیری‌های علمی، فنی و اجتماعی نقش عمده‌ای دارند. در حالی که این صنعت و مشتریانش، یعنی بخشهای خصوصی و دولتی کشورهای جهان، تلاش می‌کنند نیاز کارهای تخصصی را برآورده کنند، **دانش پردازی**[8] به صورت **مکمل داده پردازی**[9] وارد صحنه می‌شود. این تکنولوژی زاییدهٔ

در زندگی بشر و شناخت طبیعت ۸

دکتر غلامرضا دانش نارونی

دههٔ ۱۹۵۰ است و در دههٔ ۱۹۸۰ عملی و فراگیر شد. در داده پردازی سنتی کامپیوتری، کامپیوتر از فرایندهای[10] حسابی در ضبط و باز یافت اعداد و نمادها استفاده می‌کند. در دانش پردازی، کامپیوتر از واقعیتها[11]، دستورهای منطقی، روندهای تصمیم گیری تخصصی، و منطق برای کشف راههای استدلالی که منجر به حل مسایل می‌شود بهره می‌گیرد. می‌توان گفت: **دانش‌پردازی بر استدلال با کامپیوتر** استوار است (استدلال نه محاسبه).

همان طور که قبلاً اشاره شد، کامپیوتر در انقلاب کارگزاران دانش نقش موتور را به عهده دارد، و این موتور در راندن ماشینهای نرم‌افزار یا «توان ابزار»هائی به کار می‌روند که **سیستمهای خبره**[12] نامیده می‌شوند.

به طور خلاصه می‌توان گفت که سیستمهای خبره **برنامه‌های کامپیوتری** هستند که داده‌ها را با روندی[13] که می‌توانند با بهره‌گیری از دانش داده شده استدلال کند توام می‌نماید. روند استدلال در یک دستگاه دانشپایه معمولاً بر صورتهای سادهٔ منطق بنا می‌شود که اجازه استخراج نتایج را به طریقه‌ای منظم به استفاده کننده می‌دهد (در آینده این سیستمها را مورد بررسی قرار خواهیم داد)

در سرتاسر طیف کارهای تخصصی انسان (کارهائی که نیاز به دانش ویژه دارند)، از دستگاههای خبره برای بالا بردن سطح باروری و مهارت کارگران دانش استفاده می‌شود. همان‌طور که ماشینهای عظیم میراث انقلاب صنعتی **کمک نیروی ماهیچه‌ای (بابدنی) انسان هستند، می‌توان دستگاههای خبره امروز و آینده را توان ابزارهای کارگزاران دانش دانست، ابزارهائی که کمک مغز هستند نه ماهیچه.**

این تکنولوژی ابتدا از آزمایشگاههای دانشگاهها که محققین در آنها مشغول تحقیق در هوش مصنوعی[14] بودند آغاز شد. در اواسط دههٔ ۱۹۵۰ این فکر که کامپیوترهای الکترونیکی تازه وارد بتوانند اعمال هوشمندانه، مانند استدلال، یادگیری، ادراک و فهم زبانهای معمولی انجام دهند مطرح شد و بلافاصله کار سخت تجربه و آزمایش با برنامه‌های کامپیوتری برای رسیدن به این هدف آغاز گردید. هدف از این برنامه‌ها گسترش مفاهیم بنیادی برای یک علم «ادراک کامپیوتری»[15] و شناخت بهتر اندیشهٔ انسانی بود.

وسیله‌ای که این بینش را به مرحلهٔ کاربرد عملی رسانید به شکل سیستمهای خبره، نرم‌افزار مسئله حل کنی که از دانش متخصصین انسانی که در حل مسایل مشکل و خاص مهارت دارند استفاده می‌کند، ظاهر شد. غالباً، ولی نه همیشه، دانش مورد نیاز از متخصص به کامپیوتر وسیلهٔ تکنولوژیستها[16] منتقل می‌شود. مهندسین دانش اطلاعات تخصصی، تجربه و دید مهارتی آنها را که با تجربه‌های سخت به دست آمده است به صورت نمادی در آورده است و به زبان قابل درک کامپیوتر ترجمه و وارد نرم‌افزار می‌کنند. طولی نکشید که در تمام کاربردها، دستگاههای خبره به عنوان دستیاران و توان ابزارهای هوشمند برای تصمیم‌گیران و گره گشایان حرفه‌ای به کار گرفته شدند. در هیچ جا تصور اینکه این سیستمها به تنهائی مسئول قرار گیرند یا جانشین مدیریت شوند دیده نشد. بلکه در نقش دستیار یا همکار یا گاهی خدمتکار ظاهر شدند. این سیستمها موجب صرفه‌جویی‌های بزرگی در هزینه‌های جاری کارخانه‌ها و شرکتها گردید. در بعضی جاها صرفه‌جویی‌ها تاحد دهها میلیون دلار در سال حاصل شد. به طور کلی **برگشت سرمایه‌ای**[17] برای **سیستمهای خبره کوچک و حتی اندازه متوسط به هزارها درصد رسید.**

علاوه بر برداشتهای مالی، تداوم و کیفیت کارها بهبود یافت. این نتیجهٔ مستقیم توانائی بیشتر این سیستمها در گرفتن و حفظ و کارگیری دانش و اطلاعات در حجم زیاد و به طور کامل و دقیق و پیوسته نسبت به افراد است. در بعضی از شرکتها کیفیت و پیوستگی دلیل اصلی برای گسترش این سیستمها بود؛ زیرا آنها معتقد بودند که در دنیای پر از رقابت، کیفیت یکی از ابعاد مهم مبارزهٔ بازرگانی است.

گفتیم که یک سیستم خبره از مجموعه‌ای از واقعیتها و دانشهای ویژه و دستورهای به‌کارگیری آنها تشکیل می‌شود. در یک شرکت، این مجموعه ممکن است حافظهٔ اطلاعاتی سازمان

دربارهٔ یک فرآورده یا یک فرایند معینی باشد. دانش یک سازمان بزرگترین سرمایهٔ آن محسوب می‌شود، با این حال آسیب‌پذیرترین قسمت نیز هست. زیرا، هر فردی در زمینه‌ای تخصص دارد و از آنجائی که افراد ممکن است شغل عوض کنند یا باز نشسته شوند ممکن است به کارآئی سازمان لطمه وارد گردد و در بعضی موارد ممکن است جانشین واجد شرط یا پیدا نشود یا به‌بهای سنگینی در دسترس قرار گیرد.

در بعضی موارد، تخصص یک شخص معین در زمینه‌ای ویژه برای موفقیت یک سازمان بسیار حساس است برای جلوگیری از چنین حالتی، شرکتهای بزرگ تمایل زیادی به کسب و حفظ بهترین تخصصهای شرکت و انتقال آن نه تنها به کارکنان حال بلکه (به منظور استفاده و آموزش) به نسل آیندهٔ کارکنان خود نشان دادند.

علاوه بر شرکتها و بخشهای خصوصی، دولتها نیز به‌منظور بالابردن منافع ملی خود در تکنولوژی دانش‌پردازی دست به کار شدند. برنامه‌ریزان صنعتی ژاپن، که دید استراتژیکی عالی آنها موجب شد ژاپن پیشرو فولاد سازی، کشتی سازی و ساخت نیمه‌هادیها در جهان شود، با اعلام پروژهٔ ده سالهٔ نسل پنجم کامپیوتر در سال ۱۹۸۱ باعث یک جنجال بین‌المللی شدند. برنامه جالب، جاه طلبانه وانقلابی بود. این برنامه طرح ساختن یک دانش صنعت[۱۸] نو بود که موجب به‌صدا در آوردن یک زنگ خطر رقابتی در اروپا و آمریکا گردید. هدف ژاپنی‌ها این بود که هوش مصنوعی مسیر اصلی اطلاعات پردازی آینده گردد.

کشمکش بین دولتها، و نیز بین شرکتها، غالباً برای کسب برگ برنده در رقابتها است؛ برگ **«هوشمندانه‌تر کارکردن، و نه سخت‌تر کارکردن.»** این برگ را چه چیزی به آنها هدیه می‌کند؟ منابع ملّی، **باروری و خلاّقیت مردم یک ملت!** سیستمهای خبره توان ابزارهای اندیشه‌اند. برگ برنده‌ای که آنها فراهم می‌کنند باروری و خلاقیت است.

پس از زمانی بسیار طولانی از ورود به صحنهٔ تجاری، بشر برای اولین بار ابزاری با چنین قدرت و اهمیت استراتژیکی می‌بیند.

سردبیر مجلهٔ «عصرآهن» تکنولوژیهای بزرگ آینده را پیش بینی و ارزیابی می‌کند. وی در این ارزیابی هوش مصنوعی را در صدر همه قرار می‌دهد و می‌گوید:

از بین تمام تکنولوژی‌هائی که انتظار می‌رود محیط کارخانه‌های آینده را شکل دهد، هیچ یک تأثیر بیشتری از هوش مصنوعی ندارد. هوش مصنوعی نرم‌افزاری خواهد بود که ابزارآلات تکنولوژی موجود را به هم پیوند می‌دهد. به صورت سیستم خُبره، هوش مصنوعی قادر خواهد بود مهارتهای افراد سالخورده راکه به‌سرعت در کارخانه‌ها روبه نابودی هستند کسب و حفظ کند و به‌نسلهای آینده منتقل نماید.

هوش مصنوعی چیست؟

هوش مصنوعی یک حوزهٔ نسبتاً جوانی است (زاییدهٔ نیمهٔ دوم قرن بیستم) که تعریف مشخصی ندارد. هنوز اتفاق نظر بین دانشمندان در تعریف آن نیست؛ اما به نظر می‌رسد که این عنوان **افتخار انسانی ما را در داشتن هوش واقعی به مبارزه می‌طلبد.** دلایل چندی وجود دارد مبنی بر این که محققین تلاش برای گسترش یک نوع هوش مصنوعی کرده‌اند. از جملهٔ دلایل یکی این است که از طریق مدلسازی کامپیوتری نوع هوش انسانی را بهتر بشناسند. دلیل دیگر آن است که نحوهٔ استفاده از کامپیوترها را، با مجبور ساختن آنها به این که مانند استفاده کنندگان انسانی خود عمل کنند، ساده‌تر نمایند. و بالاخره با تکنیکهای هوش مصنوعی بسیاری از مسائل پیچیده را می‌توان حل کرد که روشهای برنامه‌نویسی سنتی عاجز از حل آنها به طور مؤثر بوده‌اند یا اصلاً نتوانسته‌اند حل کنند.

علاوه براین، اخیراً دلایل دیگری برای علاقه‌مندی به‌این حوزه از علوم کامپیوتری وجود دارد. بعضی از دست‌اندرکاران کارهای تجاری هوش مصنوعی را یک اهرم برتری نسبت به رقبائی می‌بینند که کمتر از تکنولوژی پیشرفته استفاده می‌کنند. نزد اینها، هوش مصنوعی یعنی تکنولوژی و فرصتهای تجاری که می‌تواند امنیت و موقعیت رقابتی آنها را در جهان اقتصادی بالا برد. در بسیاری از زمینه‌ها، هم بخش دولتی و هم بخش خصوصی، توانائی دریافت و به کارگیری دانش به عنوان منبع کلیدی در برخورد با مسایل پیچیدهٔ جهان واقعی ذکر شده است و هوش مصنوعی روشهائی در جهت عملی ساختن این هدف ارائه می‌دهد. محققین هدفهایی را برای نیل به تکنولوژی هوش مصنوعی در دههٔ ۱۹۹۰ و بعد از آن مشخص کرده‌اند، اما هوش مصنوعی به هدفهائی تاکنون نیز رسیده است. کاربردهای موفقیت آمیز این تکنولوژی نشان داده است که روشهای هوش مصنوعی می‌توانند بسیاری از مسائل پیچیده را حل کنند.

مثلاً، سیستمهای هوش مصنوعی ساخته شده‌اند که:

الف- به استفاده کننده اجازه می‌دهد پرسشهای خود را به زبان روزمره ماشین کند (تابه صورت دستورات یک زبان برنامه نویسی)،

ب- اشیاء را با بینایی ماشین در مکانهای معمولی تشخیص دهد،

ج- از متن کامپیوتری یک نطق شبیه نطق انسان کاملاً مفهوم تولید نماید،

د- یک نطق انسانی در حال ایراد را تشخیص دهد و تعبیر نماید،

هـ- با استفاده از دانش متخصصین مسایل مطرح شده در حوزه‌های مختلفی را حل کند،

و- صدا را (در حد محدود) تشخیص دهد و طبق دستورهای شفاهی عمل کند (هلکوپتری است که اخیراً ژاپنی‌ها ساخته‌اند)

کاربردهای جاری تکنولوژی هوش مصنوعی مقدمتاً در چهار زمینهٔ زیر صورت می‌گیرد:

پردازش زبان معمولی- رباتها- بینائی و دستگاههای حسی سیستمهای خبره یا سیستمهای هوشمند.

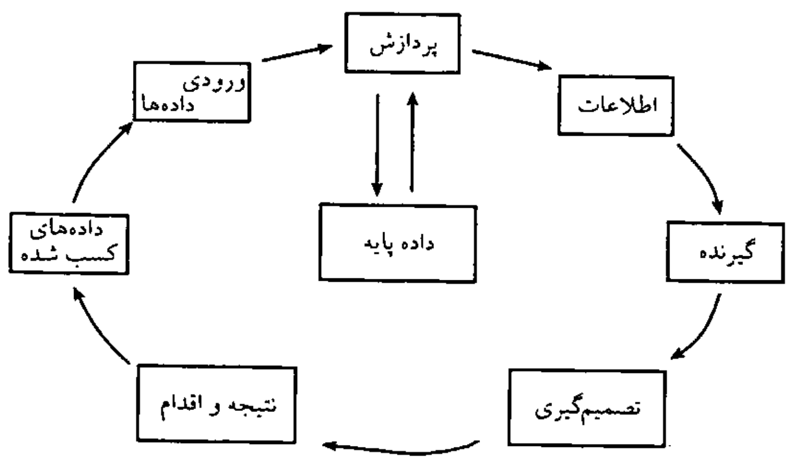
دربارهٔ هر یک از این زمینه‌ها، در شماره‌های آینده مجله، به تفصیل صحبت خواهیم کرد.

از آنجائی که اطلاعات نقش مهمی در همهٔ زمینه‌های مربوط به فعالیتهای انسانی بازی می‌کند و در واقع خوراک اصلی سیستمهای مورد بحث آیندهٔ ما خواهد بود، لازم است در آمدی برآن گفته شود.

اطلاعات یک منبع حساس و در حقیقت تیغ برندهٔ سازمانها است، تا آن حد که می‌توان گفت امروزه دست‌کم به اندازهٔ انرژی و ماشین آلات بنیادی و حیاتی است. اطلاعات یک وسیلهٔ پیوند ضعیف می‌نماید، به افراد اعتماد به نفس می‌دهد و علاقهٔ انجام کار به وجود می‌آورد؛ به ویژه در فعالیتهای اقتصادی و نظامی و سیاسی زنگ خطر را به موقع بهٔ صدا در می‌آورد و در پیش‌بینی آینده کمک مؤثر می‌کند.

اطلاعات مرکب است از داده‌ها که به صورتهای تصویری، متن‌های نوشته شده، مدارک رسمی و صدا که غالباً در هم تنیده‌اند و به گونهٔ معنی داری متشکل شده‌اند. معمولاً داده‌ها از طریق یک مدل انتخاب شده پردازش[22] می‌شوند تا ایجاد اطلاعات کنند. گیرنده اطلاعات را دریافت و بر آن مبنا تصمیم می‌گیرد و اقدام لازم به عمل می‌آورد. این خود اقدامات یا پیش‌آمدهای دیگری می‌آفریند، که به نوبهٔ خود تعدادی داده‌های پراکنده ایجاد می‌کند. داده‌های پراکنده کسب و به عنوان داده‌های ورودی در مدل مورد استفاده قرار می‌گیرند و چرخهٔ عمل از نو آغاز می‌شود.

بسیاری از مورخین بر این عقیده‌اند که یکی از خصوصیات تمدنها توانائی آنها در گردآوری و به‌کار گیری مؤثر اطلاعات است. در اواخر قرن هیجدهم، فشار برای داده پردازی افزایش یافت. انقلاب صنعتی وسایل اصلی تولید را از خانه‌ها و کارگاهها حرکت داد و به کارخانه‌ها برد. گسترش فعالیتهای سازمانهای بزرگ منجر به گسترش صنایع خدماتی برای بازاریابی و حمل ونقل فرآورده‌ها گردید. حجم زیاد و پیچیدگی فعالیتهای این



چرخهٔ جریان اطلاعات

ضروری است که بخشهای مختلف یک سازمان یا یک واحد تولیدی را، به منظور عملیات بهتر و هماهنگی و پا برجائی در یک محیط رقابتی خصمانه، به هم جوش می‌دهد. در حقیقت، **امروز ادارهٔ شرکتها و سازمانها بر اطلاعات است.**

اطلاعات آگاهی و بینش می‌دهد، شگفتی می‌آفریند و انگیزه ایجاد می‌کند، شک و تردید را کم یا از بین می‌برد، راههای چاره اندیشی را روشن می‌سازد یا کمک به حذف راههای نامربوط و

سازمان‌ها و واحدها کسب اطلاعات را، برای ادارهٔ مؤثر و بدون کمکهای صنعت نوپای داده پردازی، برای یک فرد غیر ممکن نمود. به علاوه، با ورود سیستمهای گستردهٔ کارخانه‌ای و روشهای تولید انبوه، نیاز به کالاهای سرمایه‌ای پیشرفته موجب سرمایه گذاریهای وسیع گردید که این امر قهراً **سرمایه گذاری را از مدیریت جدا** کرد. جدا شدن سرمایه گذاری و مدیریت بر اهمیت اطلاعات افزود؛ زیرا، از یک طرف، مدیریت اطلاعات بیشتر و

دقیق‌تری برای تصمیم گیریهای داخلی لازم داشت و از طرف دیگر، سرمایه‌گذارها اطلاعات مطمئن دربارهٔ سازمان و نحوهٔ اجراء کارها از طریق مدیریت می‌خواستند.

در قرن بیستم، نیاز برای فراهم آوردن اطلاعات بیشتر، مطمئن‌تر و سریع‌تر در اختیار شبکهٔ وسیع‌تری از استفاده کنندگان قرار دادن، حتی فراتر از این می‌رود. سرمایه‌گذاران اقتصادی، نیاز به اطلاعات دربارهٔ اوضاع مالی و چشم اندازهای دراز مدت آن دارند. بانکها و وام دهندگان، اطلاعات می‌خواهند تا بتوانند عملی بودن، سودآوری و اعتبار یک واحد اقتصادی را ارزیابی کنند، پیش از آن که وامی به آن بدهند یا اعتبار مالی در اختیارش بگذارند. مأمورین دولت نیاز به اطلاعات دربارهٔ فعالیتهای مالی و اداری واحدهای اقتصادی و سازمانهای مختلف، به منظور اجرای درست مقررات و دریافت مالیاتها دارند. از این رو، مسئولین سازمانها و واحدهای اقتصادی مسئولیت بزرگی برای کسب و ضبط اطلاعات، چه مالی و چه اداری، دارند تا به موقع پاسخگوی سرمایه‌گذاران، هیأتهای مدیره ومأمورین دولتی باشند. روشن است در که جریان این همه فعالیتها بودن مستلزم اطلاعات دقیق و به موقع است.

برای اینکه اطلاعات مؤثر واقع شوند باید از کیفیت بالایی برخوردار باشند. اطلاعات به سه عامل بستگی دارد:

دقیق بودن، بهنگام بودن، مربوط بودن

دقیق بودن یعنی اطلاعات باید **عاری از خطا، اشتباه و ابهام باشند و صریح معنی مورد نظر رامنعکس کنند، تصویر دقیق و روشنی** به گیرنده بدهد و مهمتر از همه **از تعصب به دور باشد.** (متأسفانه در بعضی از سازمانها، مدیران سطح پایین تر (غالباً وسط) اطلاعات را به نحوی منتقل می‌کنند که نظرات و منافع شخصی آنها را در تصمیمگیریها تضمین کند!)

رساندن اطلاعات به دریافت کنندگان و استفاده کنندگان نهائی **در زمان معین و لازم** عامل مهم دیگری برای کیفیت است. زمان نقش مهمی در رساندن اطلاعات و تصمیمگیریها ایفا می‌کند (مثلاً در خرید و فروش اوراق بهادار، تصمیمگیریهای عملیات جنگی و...). در بعضی موارد، دیر رساندن اطلاعات یعنی: **نوشدارو پس از مرگ سهراب**

اطلاعات باید به‌موضوع مورد بحث و بررسی **مربوط** باشد. مثلاً این اطلاع که «فردی پول فراوانی دارد» به تنهایی برای یک ممیز مالیاتی مفید نیست. وی اطلاعاتی لازم دارد که به او بگوید این پول از کجا، چگونه و کی به‌دست آمده است. به طور کلی اطلاعات باید پاسخگوی روشن پرسشهای: چرا؟، چه؟، کجا؟، کی؟ و چگونه؟ باشد.

مؤلفه‌های اصلی هر سازمان و واحد اقتصادی را می‌توان: **نیروی انسانی** (کارکنان و کارمندان)، **فرهنگ سازمان** (رفتار و طرز تفکر افراد)، **سرمایه و حمایت کنندگان مالی** دانست. برای این که سازمان درست کار کند، این مؤلفه‌ها باید با یکدیگر هماهنگ گردند و به‌سمت یک هدف سوق داده شوند. اطلاعات عامل اصلی است که به سازمان توانائی می‌دهد تا حالت هماهنگی و اتحاد راکسب و حفظ نماید.

فعالیتهای یک سازمان برای رسیدن به هدفهای از پیش تعیین شده، طبق مهارتها و تخصصهای افراد، بین نیروی انسانی تقسیم می‌شود و سپس به منظور هماهنگی نهائی به هم مربوط می‌گردند. فعالیتهای یک سازمان را می‌توان **به دو دسته تقسیم کرد: الف- فعالیتهای عملی** (بدنی) **ب- فعالیتهای فکری** (اداری) افرادی را که کارهای عملی انجام می‌دهند می‌توان **کارکنان عملیاتی**[۲۳] و آنهائی راکه فعالیتهای فکری را انجام می‌دهند می‌توان «کارگزاران اطلاعات»[۲۴] نامید. کارکنان عملیاتی کسانی هستند که در ساخت و توزیع مشغولند و کارگزاران اطلاعات، که کار آنها **ایجادکردن، به جریان انداختن، توزیع، تعبیر و تحلیل اطلاعات** است، عبارتند از: حسابداران، منشیان، مهندسین، پزشکان، حقوقدانان، معلمان و استادان، برنامه نویسهای کامپیوتر، تحلیل کنندگان سیستمها، مدیران و غیره... این دسته با انواع پیامها، تلفنها و یادداشتها سروکار دارند. کار اینها مطالعه و تهیه‌گزارشات، تصمیمگیری اجرائی، شرکت در جلسات یا ادارهٔ جلسات و ایجاد فعالیت یا دنبال نمودن فعالیتها و غیره می‌باشد.

به طور کلی کارگزاران اطلاعات را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد:

الف- استفاده کنندگان اصلی اطلاعات، از قبیل مدیران که اطلاعات، را به منظور اداره کردن، برنامه‌ریزی و تصمیمگیری به‌کار می‌گیرند.

ب- فراهم آورندگان و استفاده کنندگان اولیهٔ اطلاعات، از قبیل حسابداران و...

ج- پرسنل پشتیبانی اطلاعات، از قبیل منشیها، برنامه‌نویسها و اپراتورهای کامپیوتر، متخصصین تکنولوژی اطلاعات‌رسانی، مسئولین داده پایه‌ها و تحلیل‌کنندگان سیستمها.

امروزه، قسمت اعظم فعالیت بیشترسازمانها درزمینهٔ فعالیت کارگزاران اطلاعات است. از این رو، دستگاههای اطلاع‌رسانی، که گرفتاریها وسردرگمی‌های کاغذبازی را از میان بردارد و به کاربرهای متعدد دسترسی فوری به اطلاعات بدهد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. جای هیچ شکی نیست که در آینده هزینه‌های لازم برای تکنولوژی اطلاع رسانی و تربیت کارگزاران

اطلاعات به‌طور چشمگیری افزایش خواهد یافت.

اینک می‌پردازیم به بررسی **فرهنگ سازمانی** که یکی دیگر از عوامل مهم در پیروزی یاشکست سازمانها است. تعریف مختصر ولی گویای **فرهنگ سازمانی** عبارتست از:

«رفتار و طرز تفکر افراد در نحوهٔ انجام کارها در محیط سازمان»

خوب یا بد، فرهنگ سازمانی عامل مهمی است که می‌تواند یکپارچگی سازمان را حفظ کند و یا آن را از هم بپاشد. این فرهنگ در هیچ‌جا نوشته نمی‌شود و در شرح وظائف شغلی نمی‌آید، بلکه در حقیقت طریقهٔ رفتار واقعی مردم و آنچه در سازمان می‌گذرد می‌باشد. با این حال، این فرهنگ است که به هر تشکیلاتی شخصیت، نام و اعتبار خاص می‌دهد و آنها را از هم متمایز می‌کند. این فرهنگ غالباً از یک قدرت مطلق برخوردار است که نمی‌توان آن را نادیده گرفت. بدون پشتیبانی این فرهنگ، بیشتر تلاشهای مدیران و برنامه ریزان از همان آغاز محکوم به شکست است.

بعضی فرهنگها تغییرات و اصلاحات را می‌پذیرند و از نوآوری و خطرات احتمالی ناشی از آن گریزان نیستند. بعضی دیگر از نوآوری و شک و تردید بیم دارند و نمی‌خواهند حرکت متفاوتی از آنچه روال و معمول است انجام دهند یا ایده‌های آزمایش نشده را عمل کنند (البته این گروه غافل از این گفته‌اند: **هرکس از کوهنوردی بترسد جایش ته درّه است).**

مؤلفهٔ سوم یک سازمان سرمایه است. می‌توان گفت، سرمایه از دو بخش تشکیل میشود: **مالی، عملیاتی.** در هر دو بخش، اطلاعات برای پیگیری فعالیتها و نحوهٔ به‌کارگیری سرمایه و چگونگی بهتر استفاده کردن از آن نقش بسیار مهمی دارد. در واقع، قابلیت به‌کارگیری و کارآئی استفاده از سرمایه یک عامل کلیدی در پیروزی هر سازمانی است.

سازمانهای مختلف، نیازهای متفاوت برای انواع معینی از اطلاعات دارند. ولی صرفنظر از نوع و ماهیت آنها، همگی به اطلاعات جامع دربارهٔ سرمایه و دارائی خود نیازمندند. مثلاً، همه سازمانها اطلاعات اساسی حسابداری می‌خواهند؛ که شامل صورت حسابها، صورت هزینه‌ها، لیستهای حقوقی، حسابهای دریافتی و پرداختی و گزارشات گوناگون مالی و حسابرسی می‌شود. همه نیاز به اطلاعات بازاریابی دارند که بدان وسیله فروش فرآورده‌ها یا خدمات را، به‌کمک تحقیقات بازاریابی، تحلیل کنند و برنامه‌های تبلیغاتی و موفقیت خود را در اجتماع و زمان‌های آینده پیش‌بینی کنند. اطلاعات مربوط به پرسنل، شامل پرونده‌های کارکنان و امتیازات، گزارشهای مربوط به اقدامهای مثبت، ثبت و نگهداری مهارتها، ردیفهای خالی استخدامی، توصیف شغلها، دستورهای مربوط به سیاست کاری و آموزش، چیزی است که هر سازمانی نیاز دارد. همهٔ این اطلاعات برای تحکیم و ازدیاد سرمایه ضروری است.

در یک جمع‌بندی اجمالی از آنچه در بالا گفته شد، می‌بینیم که کسب اطلاعات با کیفیت بالا و اطلاعات پردازی و اطلاعات رسانی با وسیله‌های سنتی، با توجه به بافت پیچیدهٔ سازمانها و اجتماعات، کاری بسیار مشکل و در بعضی موارد شاید غیر عملی است.

پیدایش و به‌خدمت در آمدن کامپیوترها این کار سخت را ساده کرده است و بسیاری از کارهای ناممکن را، از دید تکنولوژی سنتی، عملی ساخته است (خارج شدن بشر از حوزهٔ جاذبهٔ زمین و فرستادن سفینه‌های فضائی به نقاط دور دست، جهت کسب اطلاعات، از این گونه است). همان‌طور که در مقالات گذشته اشاره شد، از نظر تکنولوژی و سخت‌افزار این کامپیوترها به گونه‌ای ساخته شدند که کار با آنها برای هر کسی عملی نبود و نیاز به آموزش مفصلی داشت؛ زیرا بار اصلی به دوش برنامه‌نویس یا دستور دهندهٔ کامپیوتر بود. اما خوشبختانه امروز، با پیشرفتهای تحقیقاتی در زمینهٔ هوش مصنوعی، تلاش بر این است که از کودنی کامپیوتر بکاهند و آن را تبدیل به شیء باهوش بکنند؛ به گونه‌ای که بار سنگین از دوش استفاده کنندهٔ کامپیوتر برداشته و بر دوش کامپیوتر گذاشته شود. به طور اختصار می‌توان گفت دانشمندان براین عقیده‌اند که افراد نباید مجبور شوند **سواد کامپیوتری پیدا کنند بلکه کامپیوترها باید سواد انسانی پیدا نمایند.** بدین معنی که سیستمهای کامپیوتری باید طوری ساخته شوند که به سادگی قابل استفاده برای افراد غیر متخصص باشند و به عنوان یک شریک واقعی و راهنمای با صلاحیت آنها در حل مسایل و انجام کارها عمل نمایند. در عین حال، مردم را هم نباید گول زد طوری که باور کنند کار با سیستمهای کامپیوتری مثل آب خوردن است! باید آنها را از منحنی یادگیری که با آن روبه رو هستند آگاه نمود. باید به آنها یادآوری کرد که برای تفهیم موضوعی به یک بچه یا درک منظور او باید زبان بچه را دانست و به زبان او سخن گفت و با حوصله به حرفهای او گوش داد، کار با کامپیوتر نیز احتیاج به چنین روانشناسی دارد!

در طول تاریخ، تحولات تکنولوژی همواره تغییرات بزرگی را در بین جوامع بشری همراه داشته است؛ از نیزه تا جنگهای ستاره‌ای، از علامتهای نوشته شده در کتیبه‌های قدیمی ایران و مصر و ملتهای دیگر تا هولوگراف (Holograph) و از چاپارهای انسانی تا اقمار مصنوعی. باید دید که به‌کارگیری تکنولوژی

نوپای اطلاع رسانی در فرهنگ سازمانی چه تغییراتی را در پی خواهد داشت!

همزمان با این پدیده که ابزار ارتباطهای کامپیوتری جای خود را در سازمانها و واحدهای اقتصادی باز می‌کنند، نه تنها الگوهای جاری تغییر می‌نمایند بلکه بافت سازمانها و طرز تفکر بنیادی را نیز عوض می‌کنند. اتصال کامپیوترهای شخصی به کامپیوترهای غول پیکر، کنترل و ادارهٔ قدرت اطلاعات رسانی را از حالت تمرکز خارج ساخته‌اند و در نتیجه دید مدیران و کارکنان را دربارهٔ نقش آنها در سازمان دگرگون کرده است. از رده‌های بالا تا پایین، دست کم از نظر تئوری، هر کس امکان این را دارد که دسترسی به یک جور اطلاعات پیدا کند.

ارتباط کامپیوتر برداشت و دیدگاه ما را از **دانش و به کارگیری آن عوض می‌کند. فرهنگ سازمانی**، که از آن یاد شد، **در نتیجهٔ همین تحول تغییر می‌کند.** مدیران اجرائی می‌توانند گزارشات خود یا دستور جلسات را، بدون این که مجبور شوند صبر کنند تا دیگران برای آنها حاضر یا تعبیر نمایند، آماده نمایند. فرهنگ سازمانی، با پیدایش کامپیوترهای کیفی قابل حمل و نقل و دسترسی به کامپیوترهایی اصلی از راه دور (مثلاً از خانه)، بیشتر از مسیر اصلی خود خارج خواهد شد.

گفتیم که سیستمهای خبره یا سیستمهای هوشمند یکی از زمینه‌های مطالعه در حوزهٔ هوش مصنوعی است با این که عمر این سیستمها نسبتاً کوتاه است، با استقبال گرمی از طرف مدیران و صاحبان واحدهای اقتصادی و سازمانها روبه‌رو شده‌اند. دلایل علاقمندی مؤسسات و سازمان را به سیستمهای خبره می‌توان اجمالاً چنین بیان کرد:

گرفتن و در دسترس قرار دادن تخصصها

الف) راهنمائیهای لحظه به‌لحظهٔ مطمئن و مداوم

زیرا، این دستگاهها مریض نمی‌شوند، **خستگی ندارند، از فشار روحی بدورند، غیبت نمی‌کنند،** و از همه مهمتر **از زدوبند و پایمال کردن حقوق دیگران به خاطر منافع شخصی بدورند!** به راحتی تغییرات را می‌پذیرند.

ب) **تفویض اختیار، کنترل شده و مداوم**

به بسیاری از استفاده کنندگان کمک تخصصی می‌کنند، به طور سیستماتیک تمام راه حلها را در نظر می‌گیرند، متخصصین انسانی را از درگیری با مسائل کوچک و ساده رهائی می‌بخشند، **با کم کردن دخالتهای ادارات مرکزی، سطح خدماتی را بالا می‌برند،** باروری، کیفیت و سطح مهارتهای حرفه‌ای را بهبود می‌بخشند. به طور خلاصه، موجب می‌شوند **سیستم عدم تمرکز (که در سازندگی لازم است) پیاده شود.**

ج) با برنامه‌های تخصصی ضبط شده در کامپیوتر و کارگیری آنها، به افراد آموزش می‌دهند.

د) جزئیات راهنمائی داده شده را در تمام موارد ضبط می‌کنند.

صرفه جوئی پولی:

الف) این سیستمها به استفاده کنندگان کمک می‌کنند تا **بدون اضافه کردن کارمندان و کارکنان به کارها سرعت بخشند و کارآئی را بالا برند.**

ب) این سیستمها به افراد **کم صلاحیت و آموزش** ندیده کمک می‌کنند تا **اعتماد به نفس پیدا کنند** و بتوانند کارهای جدیدی را که به آنها واگذار می‌شود خوب انجام دهند (می‌دانیم که باز آموزی و آموزش هزینه زیادی لازم دارد و انتقال مهارتها مشکل است).

ج) از استخدام متخصصهای انسانی بیشتر، به منظور پشتیبانی از رشد یک امر تجاری، که معمولاً بسیارگران وکمیابند، جلوگیری می‌کنند.

یکی از مزایای متعدد این سیستمها که قابل ذکر است: سیستم خبرهٔ اصلی شرکت دیجیتال، با این که هنوز در دوران جوانی است، **در قلب انقلاب هوش مصنوعی آینده قرار دارد.** ضمن این که روندهای تخصصی کشف، و به صورت نمادی نمایش داده و ماهرانه به کارگرفته می‌شوند، بافت تشکیلاتی **«طرز کار شرکت» کشف گردید.** ماهیت راستین «سازمان» در ابعاد زیادی، برای اولین بار، آشکارشد و موجب‌گردید که اصلاحات اساسی در شیوه‌های اداری صورت گیرد. **حقایق تکان دهنده، که غالباً خلاف ادراک شهودی بودند، در نحوهٔ همکاری افراد، ارزشیابی اطلاعات، و انجام کارها** در شرکت آی. بی. ام. و بعضی جاهای دیگر نیز ظاهر شدند. **این همان چیزی است** که به آن اشاره شد و **سرانجام هوش مصنوعی به آن توجه اصلی‌اش را معطوف خواهد ساخت.**

گسترش:

الف) به‌کارگیری این سیستمها کمک به **پیش‌بینی بازار و راهنمائی** در ایجاد زمینه‌های **خدماتی و یا تولیدی** جدید می‌کنند.

ب) کمک در حسن استفاده از **موقعیتها و فرصتهای** جدید می‌نمایند.

ج) کمک می‌کنند تا از عهدهٔ انجام موقعیتهای ویژه ولی سودآور به خوبی بر آیند.

گرچه تا حدودی به صورت نامنظم به تخصصها و دانشهائی که در این سیستمها مورد استفاده قرار می‌گیرند صحبت شد، ولی

برای روشن شدن بیشتر موضوع آنها را در زیر می‌آوریم:

دانشها و تخصص‌هائی که در سیستمهای خبره یا سیستمهای هوشمند به کار گرفته می‌شوند.

به طور کلی می‌توان گفت: هر نوع دانش و تخصصی که در زمینه‌های:

الف) **تشخیص یک مسئله** (یامشکل) **به کمک عوارض ظاهری** آن

ب) تجزیه و تحلیل یک دسته پیشامد (یاموقعیت)

ج) تعبیر روشها

منجر به دادن آگاهی و یا راهنمائی گردد مورد استفاده سیستمهای خبره قرار می‌گیرند.

فواند سیستمهای خبره: این سیستمها:

الف) دانش و تخصص را یک سرمایهٔ سازمان یا واحد اقتصادی قرار می‌دهند زیرا سرمایه‌گذاری تخصص سازمان را حفظ می‌کنند حس اعتماد به نفس را بالا می‌برد. ارزش داده‌های جاری را بالا می‌برد.

ب) **باروری را افزایش می‌دهد**

زیرا، تخصص را اشاعه می‌دهد ودر اختیار افراد بیشتری در هر جا لازم باشد می‌گذارد:

کارآئی و اجراپذیری تصمیمهای گرفته شده را زیاد می‌کنند.

سازگاری و پیوستگی تصمیم‌گیری را بهبود می‌بخشند.

متخصصین را آزاد می‌کند تا وقت خود را صرف کارهای خلاقهٔ سطوح بالا بکنند.

ج) **گسترش کاربردی را بهتر می‌کنند،**

مدلسازی[۲۵] و گسترش را سرعت می‌بخشند.

نگهداری و توسعه را ساده‌تر می‌کنند.

کاربردهای ابتدا به ساکن را عملی می‌کنند.

د) اجازه می‌دهند استفاده‌کننده نهائی در فعالیتها سهیم باشد.

زیرا دستورهای شبه زبان معمولی دارد

به استفاده‌کننده فرصت می‌دهد تا از نزدیک در گسترش کاربردی فعال شود.

به استفاده‌کننده توانائی می‌دهد بهتر از دانش در اختیار گذاشته استفاده کند.

از جمله مواردی که تاکنون سیستمهای خبره با موفقیت در برخورد با آنها روبرو شده‌اند عبارتند از:

الف) به عنوان راهنمای **نقص‌یابی**[۲۶] برای ماشین آلات حفر چاهنهای نفتی عمل کرده‌اند.

ب) راهنمای پزشکان در معالجهٔ منتزیت‌های مشکوک و سایر عفونتهای باکتری در خون بوده‌اند.

ج) دریافتن مکان رسوبات وسیعی مالیبدنوم[۲۷] موثر بوده‌اند.

د) سیستمهای کامپیوتری پیچیده را در زمان بسیار کوتاهتر از آنکه به وسیلهٔ یک مهندس با تجربه مورد نیاز است روی هم سوار می‌کنند.

در شماره‌های آینده سیستمهای خبره را مورد بررسی قرار می‌دهیم و موارد کاربردی و طرز استفاده از آنها را مشروح‌تر بیان خواهیم کرد.

زیرنویسها:

۱_ knowledge workers
۲_ knowledge- based
۳_ automation
۴_ symbol processor
۵_ Information processing
۶_ data retrieve
۷_ word processing
۸_ knowledge processing
۹_ data processing
۱۰_ processes
۱۱_ facts
۱۲_ export systems
یا knowledge-based systems.
۱۳_ procedure
۱۴_ Artificial Intelligence
۱۵_ computer cognition
۱۶_ knowledge engineers
۱۷_ return - on - investment
۱۸_ knowledge Industry
۱۹_ ESPRIT (European strategic Program for Research in Information Technology)
۲۰_ Alvey
۲۱_ Intelligent knowledge based systems
۲۲_ Process
۲۳_ operational workers
۲۴_ Information workers
۲۵_ prototype
۲۶_ trouble- shooting
۲۷_ Holybdenum

فلز سخت نقره‌ای رنگی است که در آلیاژهای مورد استفاده در ساخت قطعات و ابزار به کار گرفته در سرعتهای بالا از آن استفاده می‌شود.

ترجمه: مهدی نیلچیانی
عضو هیأت علمی دانشگاه
تربیت معلم تبریز

اثبات سادهٔ قضیهٔ شش ضلعی پاسکال

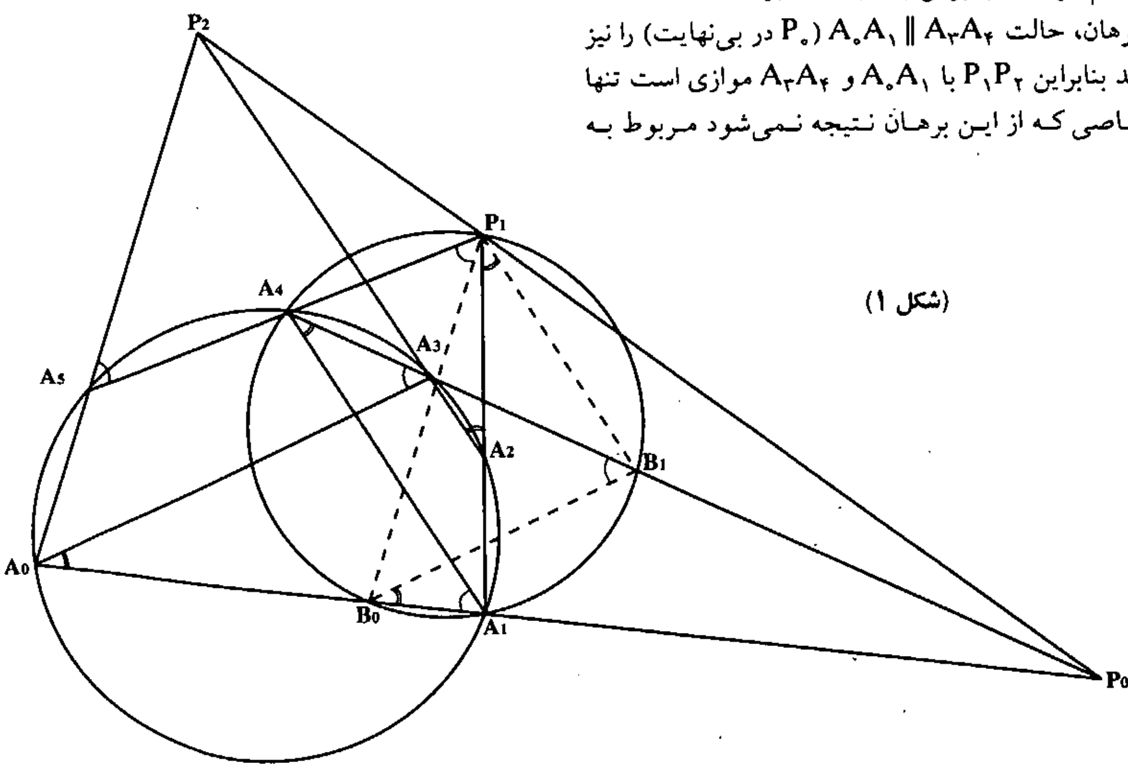
قضیهٔ پاسکال. اگر رئوس یک شش ضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند و سه جفت از اضلاع روبروی آن متقاطع باشند آنگاه سه نقطهٔ تقاطع بر یک استقامتند.

این قضیه در سال ۱۶۴۰ میلادی توسط پاسکال شانزده ساله منتشر شد. برهان او از بین رفته است و گاهی انسان نمی‌داند که کدامیک از این برهانهای شناخته شده اثبات اصلی پاسکال می‌باشد. ذیلاً اثبات ساده‌ای را می‌آوریم: با شش ضلعی A_i، $i = 0,\ldots,5$ شکل ۱ شروع می‌کنیم و دایره‌ای که از دو رأس متقابل A_1 و A_4 و نقطهٔ P_1 می‌گذرد را در نظر می‌گیریم. این دایره A_0A_1 و A_3A_4 را به‌ترتیب در B_0 و B_1 قطع می‌کند. می‌توانید برای پیدا کردن زوایای محاطی مساوی از کمانهای روبروی دوایر فوق (یا زوایای محاطی مکمّل از کمانهای روبرو) استفاده نمائید. در نتیجه اضلاع مثلثهای $P_1B_0B_1$ و $P_2A_0A_3$ دو به‌دو باهم موازیند. بنابراین P_2، P_1، P_0 بر یک استقامتند.

این برهان، حالت $A_0A_1 \parallel A_3A_4$ (P_0 در بی‌نهایت) را نیز می‌پوشاند بنابراین P_1P_2 با A_0A_1 و A_3A_4 موازی است تنها حالت خاصی که از این برهان نتیجه نمی‌شود مربوط به شش‌ضلعی‌های محاطی با اضلاع روبروی موازی است این حالت نیز همچنین به‌آسانی از کمانهای مناسب نتیجه میشود.

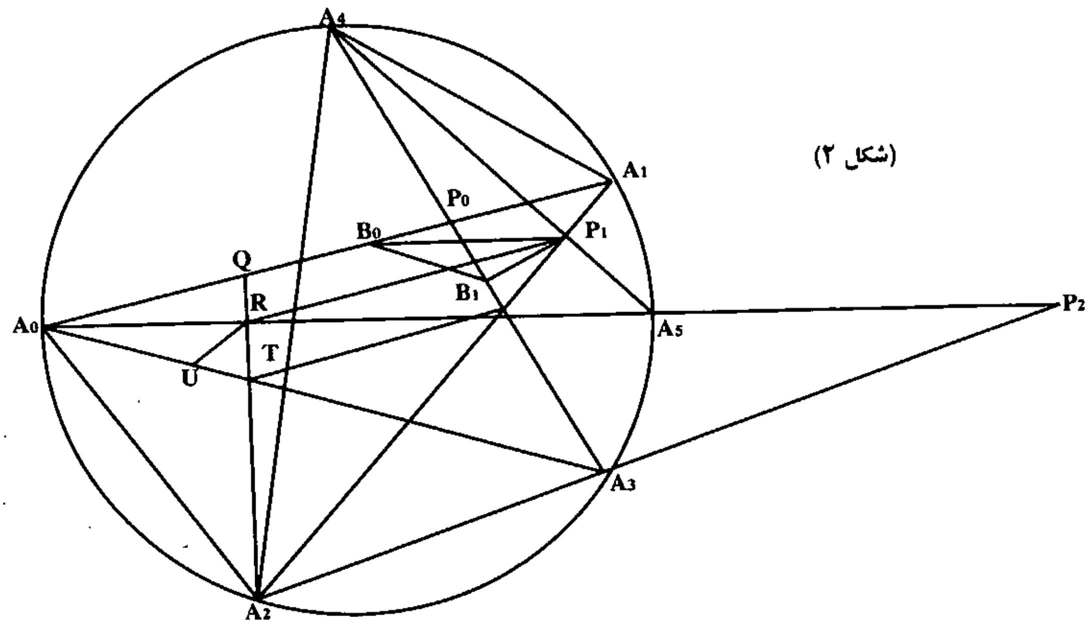
اینکه پاسکال این اثبات را ارائه کرده است جای بحث دارد اما چنین به‌نظر می‌رسد که این اثبات به‌مدت ۳۵۰ سال از دید ریاضیدانان به‌دور مانده است در این باره پروفسور کاکستر(۱) چنین اظهار نموده است که: «واقعاً قابل توجه است که این برهان زیبا در عرض ۳۵۰ سال ارائه نگردیده است و همچنین تا اندازه‌ای قابل توجه است که کوکنهایمر(۲) در سال ۱۹۶۷ به‌این مسئله نزدیک شد و سپس دریافت که مجبور است لم خاصی را بیان نماید».

در هر صورت این تأخیر تاریخی مقداری از توجه خاص مبذول شده به‌کشف این اثبات ساده را توجیه می‌کند.



(شکل ۱)

شکل اصلی شامل دو دستهٔ چهارتائی از خطوطی است که نقاط A_0 و A_4 را به‌ترتیب به A_1، A_2، A_3 و A_5 مطابق شکل ۲ وصل می‌کند.



(شکل ۲)

بدیهی است که این دو دسته خطوط قابل انطباق‌اند زیرا زوایای بین خطوط متناظر مساویند. بنابراین اگر مثلث A_0A_2Q متشابه با مثلث $A_4A_2A_1$ ساخته شود پاره‌خطهای A_2Q و A_2A_1 به‌تناسب تقسیم می‌شوند و $ST \parallel P_1R \parallel A_1A_0$. حال هدف اساسی آن است که این شکل اصلی را به‌طریق معکوس بسازیم. یعنی از دومثلث متشابه مفروض A_0A_2Q و $A_4A_2A_1$ شروع می‌کنیم. بنابراین P_1 و R را به‌ترتیب روی A_1A_2 و QA_2 چنان انتخاب می‌کنیم که $P_1R \parallel A_1A_0$. به‌طریق متشابه S و T را انتخاب می‌کنیم. از این‌رو نقاط زیر چنین تعریف می‌شوند:

$$A_5 = A_4P_1 \cap A_0R \text{،} \quad A_3 = A_4S \cap A_0T \text{،}$$

$$P_0 = A_4S \cap A_0A_1 \text{ و } P_2 = A_0R \cap A_2A_3 .$$

برای اثبات اینکه P_0، P_1 و P_2 بر یک استقامتند.

مثلث RA_0u، رابطهٔ $Ru \parallel P_2A_3$ و تصویر انتقالی آن یعنی مثلث $P_1B_0B_1$ را در نظر بگیرید، چون $P_1R \parallel P_0A_0$ در نتیجه B_0 روی P_0A_0 قرار دارد و B_1 روی P_0A_3 قرار دارد زیرا

$$P_1B_1 = RU = A_2A_3 \cdot \frac{RT}{A_2T} = A_2A_3 \cdot \frac{P_1S}{A_2S}$$

بنابراین مثلثهای $P_1B_0B_1$ و $P_2A_0A_3$ از نقطهٔ P_0 هم منظر (پرسپکتیو)اند. در نتیجه P_0، P_1 و P_2 بر یک استقامتند.

بعد از آن نقاط تقاطع B_0 و B_1 مستقیماً قابل یافتن هستند.

در حقیقت آنها روی دایرهٔ محیطی مثلث $P_1A_1A_4$ قرار دارند زیرا

$$\angle P_1B_0A_1 = \angle A_5A_0A_1 = \angle A_5A_4A_1 = \angle P_1A_4A_1$$

و

$$\angle A_4B_1B_0 = \angle A_4A_3A_0 = \angle A_4A_1A_0 = \angle A_4A_1B_0$$

رسم دایرهٔ محیطی مثلث $P_1A_1A_4$ در واقع اساس اثبات جدید است.

پشتوانهٔ این کشف این حقیقت است که متریک صفحهٔ اقلیدسی می‌تواند از طریق ارائهٔ یک جفت از مثلثهای متشابه تعریف شود. سپس سایر خواص متریک باید از طریق توازی‌ها و تناسب‌ها (ابزار مستوی) به‌دست آیند.

زیرنویسها:

1- B. Pascal
2- Coxeter
3- Guggenheimer

مرجع:

jan van yzeren A simple Proof of Pascal's Hexagon Theorem, Vol 100, No.10, 1993.

چهارده توصیه به

«تجربهٔ حاصل از چهارده سال همکاری با دبیران ریاضی استان اصفهان و مطالعات و تجربیات تدریسی، نویسنده را بر آن داشت تا با الهام از مقاله ده توصیهٔ پولیا(۱)، چهارده پیشنهاد و توصیه را به همکاران خود ارائه نماید. اظهار نظر همکاران عزیز در جهت تکمیل مقاله حاضر جای سپاس دارد.»

مسئلهٔ نیاز فراوان جامعه به متخصصین آگاه به ریاضی از یک طرف و وابستگی شدید آموزش ریاضی به معلم، در آستانهٔ تأثیر مثبت برگزاری مسابقات ریاضی و شرکت دانش‌آموزان موفق ایران در المپیادهای بین‌المللی ریاضی، در روند آموزش ریاضی کشور لزوم تربیت دبیران دلسوز و آگاه ریاضی را بیش از پیش آشکار می‌سازد. نویسنده اعتقاد دارد که جامعه به این منظور باید سرمایه‌گذاریهای وسیعی را جهت جذب و تربیت نیروهای کارآ، برای تدریس ریاضی بکارگیرد تا در دراز مدت بتواند از ثمرات این کار مفید بهره گیرد. علاوه بر آن، آماده نگهداشتن معلمان شاغل هم یکی دیگر از ضروریات آموزش و پرورش است که بر این اساس «طرح آموزش مستمر» به‌جای برخی از بازآموزیهای فعلی پیشنهاد و توصیه گردیده است.

اما به‌هر حال، علاوه بر وظائف جامعه و نظام آموزش و پرورش، ما معلمان ریاضی هم باید با آگاهی از وظایف خود، شغل مقدسی را که انتخاب نموده‌ایم، به‌نحو شایسته ارائه کنیم. نویسنده سعی دارد در این مقاله، آموخته‌های خود را که در اثر مجالست با دبیران زبده و با تجربه اصفهان، تدریس در دانشگاههای شیراز و صنعتی اصفهان و مطالعه در زمینه‌های مختلف آموزش ریاضی، شرکت در کنگره‌های آموزش ریاضی و بالاخره مشاهدهٔ کارهای آموزشی دانشکده‌های علوم تربیتی دانشگاه هاروارد آمریکا و دانشگاه کانبرای استرالیا(۲) بدست آورده در اختیار سایر همکاران قرار دهد.

باز هم ذکر این نکته ضروری است که حل مشکلات اجتماعی ـ اقتصادی معلمان از اهم مسایل آموزشی کشور است ولی شما معلمان هم به‌مقتضای شغلی باید

توصیه‌ها:

۱ـ به شغل و حرفه مقدس خود علاقمند باشید.

۲ـ به علم ریاضی، موضوعی که تدریس می‌کنید علاقه و آگاهی داشته باشید.

۳ـ برای تدریس خود را آماده سازید.

۴ـ همواره با مطالعه، اطلاعات خود را بهنگام نگهدارید.

۵ـ با مشورت با همکاران، از تجارب آنها استفاده نموده و جهت هماهنگی در امر تدریس و رفع اشکالات علمی و آموزشی خود با آنان به بحث بنشینید.

۶ـ در ارائه مطالب، صادق باشید. از بدآموزی وآموزش غلط مفاهیم اجتناب کنید.

۷ـ به دانش‌آموزان جرأت دهید و با تشویق آنها را علاقمند سازید.

۸ـ سعی کنید دانش‌آموزان خود را درک نموده و خود را در جای آنان قرار دهید.

۹ـ به دانش‌آموزان روشها، فکر ریاضی و عادت نمودن به انجام کارهای فکری را هدیه نمائید. مغز آنان را پر از محفوظات ننمائید.

۱۰ـ به آنها توان حدس زدن را بیاموزید.

۱۱ـ به آنها روشهای «درست خواندن» و «حل مسئله» را«توأما» بیاموزید.

۱۲ـ به دانش‌آموزان امکان کشف مطالب جدید را بدهید و در آموزش و حل مسئله، بیشتر آنها را راهنمایی کنید. (به‌آنها اجازه دهید خود بیاموزند!)

۱۳ـ در کلاس به دانش‌آموزان اجازه و فرصت فعالیت دهید.

۱۴ـ به دانش‌آموزان درکلاس انگیزهٔ لازم جهت یادگیری مطالب را ایجاد نمائید.

دبیران ریاضی

علی رجالی
دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

توضیحات:

۱ـ علاقه به شغل، نه تنها می‌تواند در مؤثر و مفید بودن کار کمک نماید، بلکه حداقل نشاط و رضایت خاطر فرد را در زندگی فراهم می‌آورد. بهر دلیل، در حال حاضر، ما معلمان، این شغل را انتخاب نموده‌ایم، اگر از آن راضی نباشیم، لحظات کار خسته‌کننده و زجرآور می‌شود و این نه‌تنها در دانش‌آموزان ما تأثیر منفی دارد، بلکه زندگی ما را هم پوچ و بیهوده می‌سازد.

تأثیر مثبت معلمانی که با علاقه و دلسوختگی خاص به تدریس عشق می‌ورزیده‌اند را هرگز نمی‌توانید فراموش کنید، و این حداقل نقش مفید معلم در شاگردانش می‌باشد!

معلمی که به کار خود علاقمند باشد، با تمام توان در جهت حل مشکلات آموزشی خود می‌کوشد و این باعث می‌شود که روز به‌روز کیفیت کار خود را بالا برده و از زندگی لذت برد.

بهترین ثمرهٔ کار معلم، آموزش حداقل یک دانش‌آموز است. اگر معلمی بتواند حداقل یک نفر را به‌طور صحیح آموزش دهد، در اثر مشاهدهٔ پیشرفتهای او لذت خواهد برد. اندیشیدن به این مسایل و درک رسالتی که به‌دوش یک معلم می‌باشد، در ایجاد علاقمندی مؤثر خواهد بود.

معلمی که بدون علاقه تدریس کند، دانش‌آموزان را از مطالعه و یادگیری دلسرد می‌نماید و نقش بسیار مخربی در آیندهٔ دانش‌آموزان خود دارد.

(البته جامعه هم باید به این شغل مهم توجه کند، به نظر نویسنده تنها جوامعی در مسایل اجتماعی خود موفق هستند و آینده خوبی را می‌توان برای آنهاپیش‌بینی نمود که به مسایل آموزشی توجه خاص مبذول دارند. مثال زندهٔ این ادعا، کشورهایی چون ژاپن، چین و تا حدودی آلمان می‌باشند. از طرف دیگر کشورهایی که مسئله آموزش را به عنوان یک کار تولیدی مفید مورد توجه قرار نمی‌دهند، آیندهٔ اجتماعی خوبی هم نخواهند داشت!)

۲ـ عدم تسلط به‌مطلب و موضوعی که تدریس می‌شود، باعث اتلاف وقت دانش‌آموزان و بدآموزی از یک طرف و از بین رفتن شخصیت و حیثیت معلم از طرف دیگر می‌شود. با توجه به تسلسل مطالب در ریاضی، یک دوره بدآموزی ریاضی، آینده دانش‌آموز را دچار اختلال می‌نماید و به‌طور عملی مشکل آموزشی به‌وجود آمده از این طریق، غیرقابل جبران است. اما برای آگاهی به یک موضوع خاص، فقط مطالعهٔ کتب درسی دبیرستانی در این زمینه کافی نیست. معلم علاوه بر مطالعات قبلی در این زمینه و مدل ریاضی محیط بر آن، باید خود را برای تدریس آن موضوع آماده سازد. به‌طور مثال آگاهی کامل معلم به مفاهیم «حد و پیوستگی» در سطح آنالیز ریاضی و حتی توپولوژی، برای تدریس این موضوع در دبیرستان هم لازم و هم بسیار مفید است.

ولی نکته مهم این است که معلم نباید انتظار داشته باشد، دانش‌آموزان همهٔ مطالبی را که او می‌داند بدانند! و حتی ضرورتی ندارد همهٔ مفاهیمی که او می‌داند در کلاس مطرح شوند. باید از دانش‌آموزان در سطح کتب درسی انتظار داشت، ولی آگاهی معلم به مطالب عالیتر، باعث می‌شود که تسلط در امر تدریس و راحتی ارائه مطالب در او به‌وجود آید.

علاقه به ریاضی، باعث می‌شود که معلم بتواند از فرصتهای مختلف، به مطالعات ریاضی خود ادامه دهد و یا به‌طور مستمر در تهیه و حل مسایل جالب ریاضی اقدام نماید که این هر دو، در آموزش ریاضی و تدریس بهتر معلم مؤثر می‌باشد.

پولیا در مقالهٔ «ده توصیهٔ» خود می‌نویسد، «شما اگر از موضوعی خسته و کسل باشید، شنوندگان خود را نیز کسل می‌کنید.»

پس یکی از توصیه‌های مهم، علاقمندی و آگاهی به علوم ریاضی می‌باشد، علاقمندی تنها هم کافی نیست، چون همان‌طوری که پولیا اشاره نموده «هیچ مقدار علاقه یا روش تدریس، شما را به توضیح نکته‌ای که خودتان آن را به‌طور واضح نفهمیده‌اید، قادر نمی‌سازد.»

۳ـ اگر یک نفر به علمی آگاه باشد ولی خود را برای ارائه آن آماده نسازد، در هنگام ارائه حتماً دچار اشکال می‌شود. معلم ریاضی خوب کسی است که علاوه بر تسلط بر موضوع مورد تدریس، مثالهای مناسب و سؤالات جالب[۳] و به‌طور کلی

طرح درس خود را از قبل آماده کرده باشد.
حتی در اداره یک خانواده کوچک، برنامه‌ریزی و آماده‌سازی امکانات بسیار ضروری‌است، پس چگونه یک‌معلم بدون آمادگی و برنامه‌ریزی روی مسایل و مطالبی که قصد ارائه آنها را دارد، به کلاس درس می‌رود!

توصیهٔ نویسنده این نیست که برای هر ساعت تدریس، یک طرح درس کامل نوشته شود، اگر چه آن کار هم مفید است، بلکه حداقل برنامه‌ریزی برای ادامه تسلسل مطالب، آماده‌سازی مثالهای جالب برای یاددادن مطلب، تهیه سؤالات مختلفی که برای در جریان قراردادن دانش‌آموزان در سطوح مختلف از نظر توانائیها و خلاقیتهای ریاضی مفید می‌باشند، قبل از شروع کلاس ضروری است. اگر بدون برنامه‌ریزی و تفکر سؤالاتی مطرح شوندگاهی مضر خواهند بود. حتی تهیه و طرح سؤالات و مسایلی جالب برای مطلب جلسه بعد که دانش‌آموزان را به فکر بیاندازد و نیز فرصت کافی برای اندیشیدن به آنها را داشته باشند برای آموزش بهتر مطالب ریاضی بسیار مفید است.

اگر معلمی بدون آمادگی، مثالی را مطرح نماید، بعضاً این نوع مثالها نه تنها کمک به درک بهتر مطلب نمی‌کنند، بلکه نظر دانش‌آموز را از موضوع درس به‌مطلب دیگری که ممکن است در مثال اهمیت بیشتری داشته باشد می‌کشاند. به‌طور مثال نویسنده در مقاله دیگری(۴) اشاره نموده است که اگر در تدریس حد، مثالهای مناسب انتخاب نشوند، نظر دانش‌آموز از مفهوم حد به‌نکات مشکل و بعضاً بی‌فایدهٔ رابطهٔ بین ε و δ جلب می‌شود.

۴ـ به روز بودن اطلاعات معلم در علوم ریاضی، یکی دیگر از ضروریات تدریس است. اگر معلم موضوعات جدید را نداند و یا مطالبی که در دوران تحصیل خوانده، فراموش کند، در مواجهه با سؤالات دانش‌آموزان ناتوان خواهد بود.

برای بهنگام نمودن اطلاعات، مطالعات شخصی، بحث و گفتگو با همکاران و بالاخره شرکت مستمر در برنامه‌های آموزش ضمن خدمت مفید است.

۵ـ بسیاری از معلمان جوان، به‌مطالب ریاضی آگاهی دارند، ولی بدلیل عدم شناخت محیط، در کار خود موفق نیستند. استفاده از تجارب معلمان آزموده و بحث و گفتگو پیرامون مشکلات پدیده آمده در کلاس درس به‌رفع این مشکل کمک می‌کند.

روشهای جالبی از تدریس که توسط معلمان باتجربه مطرح می‌شوند می‌توانند برای ادامهٔ کار مطلوب معلم مفید و آموزنده باشند. قدرت ابتکار و ارائه راه‌حلهای جدید تدریس مطالب ریاضی که از ضروریات تدریس این علم می‌باشد معمولاً در اثر آگاهی از تجربه سایر همکاران به دست می‌آید.

در این رابطه هم استفاده از جلسات آموزش‌مستمردبیران ریاضی وبرنامه‌ریزی صحیح برای ارائه این برنامه می‌توانند بسیار مفید باشد.

۶ـ یکی از سنتهای غلط در جامعه ما این است که معلم قدرت این را ندارد که به دانش‌آموز خود بگوید «من در حال حاضر جواب این سؤال رانمی‌دانم!» ولی در عوض یکی از شیرینیهای معلمی این است که شخص جواب سؤالی نداند، مطالعه کند، مشورت نماید و با فکرکردن به جواب دست یابد! چرا ما به‌خود اجازه ندهیم از این شیرینی لذت ببریم؟

معلم می‌تواند به‌طور صریح، به دانش‌آموز بگوید من جواب این سؤال را نمی‌دانم، فکر می‌کنم و جلسه بعد جواب می‌دهم و حتی اگر جرأت ندارد، می‌تواند از همه خواهش کند به این سؤال فکر کنند، چون به نظر او سؤال جالبی است و یا به هر شکل دیگری که ممکن باشد، می‌تواند خود را از مهلکه نجات دهد!، ولی نباید هرگز جواب غلط یا بدون صددرصد اطمینان ارائه دهد. اگر معلم جواب غلطی مطرح کند، ذهن دانش‌آموز این جواب غلط را می‌گیرد و پاک کردن آن کار بسیار مشکلی است. این کار بدآموزی، به‌خطا کشاندن و سرانجام دلسرد ساختن از یادگیری ریاضی را به‌همراه خواهد داشت که برای آینده آموزش ریاضی هم بسیار خطرناک است.

اگر خدای نکرده جواب غلطی هم مطرح شود و معلم به اشتباه خود پی‌برد، باید به هر طریق ممکن موضوع را به‌طور آشکار به مخاطب یا مخاطبین خود بفهماند که اشتباه کرده و جواب صحیح کدام است. این کار نه تنها به حیثیت معلم لطمه نمی‌زند، بلکه شخصیت او را بیشتر جلوه می‌دهد.

۷ـ دانش‌آموزان ما جرأت حل مسایل جدید و ارائه نظریات ابتکاری خود را ندارند(۵) نویسنده حتی به این نتیجه رسیده است که بسیاری از دانش‌آموزان شرکت‌کننده در مسابقات ریاضی جرأت لازم برای حل مسایل جدید و یا حداقل اندیشیدن روی آنها راندارند.(۶)

فرهنگ جرأت نداشتن و متکی بودن از خانواده شروع و در مدرسه تشدید می‌گردد. یکی از وظایف معلمان ریاضی مبارزه با این فرهنگ غلط است. باید به دانش‌آموزان جرأت ارائه مطالب جدید، بیان عقاید خود و اندیشیدن به‌موضوعات تازه و استفاده از خلاقیتهای ریاضی خود را آموزش داد.

با دخالت دادن دانش‌آموزان در ارائه

مثالهای حل شده کتاب در قدم اول و سپس ارائه حل مسایل جدید و حتی کمک گرفتن از آنها در امر تدریس، می‌توان این جرات را در آنان به‌وجود آورد. با تشویق به موقع و گوش دادن به نظریات دانش‌آموزان و به آنها فهماندن که می‌توانند اگر سعی کنند، می‌توان جرأت را در آنها بوجود آورد.

۸ـ گیگ(۷) در تعریف معلمی می‌نویسد: «یک تأثیر بین شخصیتی، با هدف تغییر مسیر رفتار دیگران را معلمی می‌نامند و لذا در تئوری تدریس سه نکته مهم باید منظور شود، چگونه معلمان رفتار می‌کنند، چرا چنین عمل می‌کنند و عمل آنها چه تأثیراتی دارد؟» پس معلمی که بخواهد در شاگردان خود تأثیر بگذارد و در حقیقت وظیفه خود را به خوبی عمل نماید باید با دانش‌آموزانش روابط نزدیکی برقرارنماید، خود را درکنار آنها قرار دهد و معلومات خود را به‌ظاهر در سطح آنان پائین آورده و دست آنها را گرفته با خود بالا ببرد. پولیا می‌گوید «حتی با مقداری آگاهی و علاقه شما ممکن است معلم بد یا متوسطی باشید، خیلی از ما معلمانی را می‌شناسیم که بر موضوع درس تسلط دارند ولی نمی‌توانند با دانش‌آموزان خود ارتباط برقرارنمایند.»

برای یاد دادن، ارتباط نزدیک ضروری است. معلم باید جایگاه دانش‌آموزان را درک کرده و درد آنها را بداند. پس سعی کنید چهرهٔ دانش‌آموزان را بخوانید، انتظارات و مشکلات آنها را درک کرده و سرانجام خود را در جای آنها قرار دهید.

تدریس مطالب به صورت پیچیده و مبهم در سطح بالاتر به طوری که هیچ کس نفهمد و در نتیجه سؤالی هم مطرح نشود، کار بسیار ساده و بیهوده‌ای است. این موضوع جالب است که انسان دانشمندی با مجموعه اطلاعات وسیع بتواند انتظارات شنوندگان را درک و به آنها و با همکاری آنها آموزش دهد.

۹ـ متأسفانه نظام فعلی آموزش ریاضی در دبیرستانها،فقط ارائه حجم وسیعی از اطلاعات و محفوظات به دانش‌آموزان است. به دانش‌آموزان فرصت کافی برای اندیشیدن روی مسایل ریاضی داده نمی‌شود و مغز آنها با مجموعه‌ای از تعاریف که برخی از آنها نیز دقیق نیستند پر می‌شود. خوشبختانه با برگزاری مسابقات ریاضی، دانش‌آموزان تا حدودی به حل مسایل روی آورده‌اند، ولی همانطوری که در مقالهٔ چگونه ریاضی بخوانیم(۵) آمده است، حتی در بسیاری از موارد روش حل مسئله هم صحیح نیست. دانش‌آموزان در بعضی مواقع حتی به صورت مسئله توجه نمی‌کنند وبا مشاهده صورت مسئله سعی در ارائه راه حل می‌نمایند و یا با مراجعه به حل المسائلها، حل‌ها را از حفظ می‌کنند. در این رابطه معلمان ریاضی رسالت عمده دارند. آنها باید با بیان مثالهای جالب و بسیار ساده(۴)، مفاهیم را برای دانش‌آموزان تشریح نمایند، به طوری که دانش‌آموز پس از درک مطلب و دریافت ایده‌ها به حل مسایل بپردازد و با تکرار مسایل متنوع مطلب را در ذهن خودجای دهد.

مطرح کردن سؤالات جدید، فرصت دادن به دانش‌آموزان جهت فکرکردن روی مطالب و حل مسایل، تشویق نمودن دانش‌آموزانی که روی مسایل وقت می‌گذارند و امید دادن به آنها که توان حل مسایل را دارند، در این زمینه بسیار مؤثر خواهد بود.

فکر ریاضی معمولاً با مدلسازی و جامعیت دادن به مطالب ریاضی در دانش‌آموزان پدید می‌آید و سپس با درک مطالب و حل مسایل این فکر جای خود را در ذهن باز می‌کند. با انباشتن به محفوظات، نه تنها فکر ریاضی به وجود نمی‌آید بلکه علاقه به ریاضی هم نابود می‌شود حل مسایل هندسه، نظریه اعداد و ریاضیات ترکیبیاتی و مشابه آنها در ایجاد تفکر ریاضی بسیار مؤثر است.

۱۰ـ قدرت حدس‌زدن و ایجاد ذهنیت در دانش‌آموز، یکی از نکات مهم آموزش ریاضی است. پولیا در مقاله‌ای(۸) می‌نویسد «کشف ریاضی معمولاً بر روی مشاهده و نوعی تجربه بنا نهاده شده است. به‌طور مثال کشفیات به‌وسیلهٔ استقراء، در تاریخ نظریه اعداد فراوان یافت می‌شوند، اما قانون استقراء چگونه به‌دست می‌آید؟» پولیا با ذکر مثالی ریشه کار را در حدس زدن صحیح می‌داند. معلم خوب باید بتواند این قدرت را در دانش‌آموزان خود ایجاد نماید. ذهنیت دادن به دانش‌آموز، جرأت دادن به اندیشیدن روی مطلب و تسلط روی موضوعات ارائه شده معمولاً در حدس زدن مؤثر هستند.

به طور مثال اگر در استقراء ریاضی، پله‌ها برای دانش‌آموز مشخص باشد و قدم به‌قدم این پله‌ها را طی کند، زمانی می‌رسد که به قانون کلی دسترسی پیدا می‌کند و یا درحقیقت می‌تواند حدس‌بزند، یا درمسایل هندسه روش حل را حدس خواهد زد که این توان با تکرار مسایل مختلف و آموزنده و تسلط به مطلب برای دانش‌آموز به وجود می‌آید. همان طوری که پولیا اشاره نموده است(۸)، اما باید دانش‌آموز تفاوت اثبات و حدس را درک کند. فکر نکند هر حدسی یک اثبات است و نیز حدسهای غیرقابل قبول را بتواند فوراً رد نماید. دلیل قوی برای حدس جزء مواردی است که معمولاً معلم باید از دانش‌آموز خود بخواهد و به او ردکردن حدسهای غلط را بیاموزد.

باز هم تکرار می‌کنم، آموزش صحیح،

حل مسایل توسط خود دانش‌آموزان، جرأت اندیشیدن و اظهار نمودن و وجود تفکر ریاضی به حدس زدن صحیح دانش‌آموزان کمک می‌نماید.

۱۱- در این رابطه نویسنده روشهای درست خواندن و حل مسئله را در مقاله چگونه ریاضی بخوانیم(۵) به‌طور مفصل بیان داشته و فقط نظر معلمان را به این نکته جلب می‌نماید که حل مسئله در صورتی مفید خواهد بود که توسط خود دانش‌آموز انجام شود.

۱۲- به نظر نویسنده، معلمی خوب است که بیشتر نقش راهنما را داشته باشد و کمتر دانش‌آموزان را بخودش متکی نماید. بیان مفاهیم و مطالب درس در شروع با کمک دانش‌آموزان توسط معلم ضروری است ولی باید معلم به دانش‌آموزان هم اجازه دهد خود فکر کنند، مطالعه نمایند و با بیان اشکالات خود، مطالب را بهتر یاد بگیرند. باز در فرهنگ ما این نقطه ضعف وجود دارد که افراد از انجام امور بدون نظارت بزرگترها ترس دارند. در کارخانه اگر چه متخصص بهتر از مدیر مشکل را درک می‌کند ولی بخود اجازه نمی‌دهد بدون اجازه او مشکل را رفع کند و باز این هم از خانه شروع و در مدرسه تشدید می‌شود. دانش‌آموزان انتظار دارند همه مسایل توسط معلم حل شود و بخود اجازه نمی‌دهند که بدون نظر معلم به درک و کشف مطالب جدید بپردازند و آنها هم که چنین می‌کنند توسط معلمان تشویق نمی‌شوند.

بردی(۹) می‌گوید، «خیلی از آموزشها بدون معلم هم انجام می‌پذیرد و یادگیری یک محصل صد در صد وابسته به معلم نیست». پس معلم باید به دانش‌آموزان اجازه دهد خود نیز به یادگیری بپردازند. اجازه دادن به دانش‌آموزان برای همکاری در امر تدریس در این رابطه، بسیار مفید و مؤثر می‌باشد.

۱۳- دانش‌آموز باید در امر تدریس مشارکت کند. نویسنده در جلساتی که با معلمان ریاضی داشته، گاهی با طرح مسئله «نبودن وقت و فرصت کافی در کلاس برای فعال نمودن دانش‌آموزان» از طرف معلمان روبرو شده است. اما متأسفانه ما در کلاسهای خود عادت داریم، وقت را روی حل مسایل تکراری و مشابه بگذرانیم. اگر از حل مسایل تکراری صرفنظر شود، امکان و فرصت بحث و گفتگو با دانش‌آموزان و طرح سؤالهای آموزنده(۳) به وجود خواهد آمد. مدل مذاکره‌ای تدریس که مورد تائید بسیاری از آموزشگران منجمله بردی(۹) می‌باشد، معلم را به عنوان یک راهنما مطرح می‌سازد ولی نقش معلم در این روش بسیار حساس است. معلم نباید محصل را رها کند تا به بیراهه رود. محیط آزاد، ایجاد رقابتهای صحیح، دراختیار بودن و نظارت دائمی معلم، منابع فراوان، برنامه‌ریزی صحیح و مشخص بودن روشهای ارزیابی در ارائه صحیح این مدل بسیار مؤثر است.

۱۴- وجود انگیزه در دانش‌آموزان، باعث می‌شود که آنها بهتر بتوانند به درس توجه کرده و اوقات فراغت خود را نیز به این درس اختصاص دهند. معلمان دلسوز با داشتن ابزارهای لازم در ایجاد این انگیزه می‌توانند کمک نمایند.

اما ابزارهای لازم چیست؟ خوشبختانه ریاضی بدلیل زیبائی و تأثیر متقابل عناصر آن دارای انگیزه‌های داخلی است، مثلاً بسیاری از مطالب ریاضی مثل هندسه، نظریه اعداد و ریاضیات ترکیبیاتی به‌دلیل زیبائیهای خاص خود جاذبه‌هایی را به‌وجود می‌آورند. اگر معلمی بتواند این زیبائیها رابرای دانش‌آموزان به‌نمایش بگذارد و به‌آنها اجازه دهد که خود نیز این زیبائیها را درک نمایند قدم مثبتی در این جهت برداشته است.

از طرف دیگر اندیشیدن صحیح و منطقی با بیان قضایا و مسایل ریاضی تشابه ویژه دارد و معلم خوب کسی است که این تشابهات را برای دانش‌آموزان به نمایش بگذارد.

کاربردهای ریاضی در علوم مختلف، تاریخ دستاوردها و دانشمندان ریاضی و نقشی که ریاضی در پیشرفت و گسترش سایر علوم داشته همه از ابزارهایی هستند که در صورت آشنایی دانش‌آموزان، انگیزه لازم هم در آنان به‌وجود خواهد آمد.

معلم خوب کسی است که با مطالعه و آشنایی با این موارد بتواند نظر دانش‌آموزان را به نکات مثبت و اثرات مفید آموزش ریاضی جلب کرده و در آنها انگیزه لازم را به‌وجود آورد.

روشهای ساده تدریس ریاضی(۴) و بیان مطالب به زبان ساده و قابل فهم و بیان انگیزه‌های لازم برای اثبات یک قضیه یا بیان یک موضوع ریاضی معمولاً در ایجاد این انگیزه مؤثر خواهند بود.

منابع:

1- Polya, G., Ten commandments for teachers, Journal of Education of the Faculty and College of Education of the University of British Columbia; (3), 1959, 61-69.

2- Schools of Education, Harvard University and University of Canberra.

۳- سؤال کردن در کلاس، مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۳۱ سال ۱۳۷۰، صفحات ۱۲ تا ۱۵.

۴- روشی ساده برای تدریس ریاضی، مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۱۷ سال ۱۳۶۷، صفحات ۱۴ تا ۱۶.

۵- چگونه ریاضی بخوانیم، مجله رشد آموزش ریاضی شماره ۱۵، سال ۱۳۶۶، صفحات ۱۰ تا ۱۲.

گزارش برگزاری دومین مرحله مسابقات المپیادهای ریاضی و کامپیوتر در شیراز ـ دههٔ فجر سال ۱۳۷۲

تهیه و تدوین: منصور ملک‌عباسی

روزهای شانزدهم تا بیست ویکم بهمن ماه سال ۷۲ شهر زیبای شیراز میزبان صدها دانش‌آموز دختر و پسر ممتاز در المپیادهای ریاضی و کامپیوتر بود در پایان این رویداد بزرگ علمی و برگزاری آزمونهای این دو المپیاد مجموعاً ۱۸ نفر از برترین‌های ریاضی و کامپیوتر به مرحله نهایی این مسابقات راه یافتند. در حال حاضر این گروه در یک دورهٔ آموزشی ویژه در تهران شرکت جسته‌اند تا در تابستان سال ۷۲ جهت شرکت در مسابقات جهانی المپیادهای ریاضی و کامپیوتر به کشورهای هنگ‌گنگ و سوئد عزیمت نمایند.

در اوایل آذر ماه سال جاری طی دو روز به طور هماهنگ در سراسر کشور با شرکت ۵۶۰۸ نفر دانش‌آموز واجد شرایط در رشته کامپیوتر و ۶۵۵۵ نفر در رشته ریاضی مرحله اول آزمون این دو المپیاد را برگزار نمودند. پس از این دو امتحان کلیه اوراق دانش‌آموزان شرکت‌کننده در المپیاد کامپیوتر و ۱۰٪ از بهترین اوراق دانش‌آموزان المپیاد ریاضی که در مراکز استانها تصحیح شده بود، به تهران ـ مرکز المپیاد علمی ارسال گردید تا امر تصحیح و تجدیدنظر صورت گیرد.

در این مرکز اوراق نهایی شرکت‌کنندگان در کامپیوتر تصحیح گردید و ۱۰٪ اوراق ریاضی نیز مجدداً مورد بررسی و تجدیدنظر قرار گرفت اطلاعات نهائی به کامپیوتر داده شد و در نهایت با توجه به نمرات کسب شده لیست مرتب شدهٔ کامپیوتری دانش‌آموزان در این دو آزمون به‌دست آمد.

اعضای کمیته المپیادهای ریاضی و کامپیوتر در نشست مشترکی که با مسولین مرکز المپیاد داشتند اسامی ۱۸۳ نفر را در رشته ریاضی و ۱۴۹ نفر را در رشته کامپیوتر مشخص نمودند. بلافاصله اسامی برگزیدگان این مرحله در هر دو رشته از طریق اعلام به ادارات کل آموزش و پرورش استانها به مدارس و دانش‌آموزان ذینفع اطلاع داده شد تا این گروه جهت حضور در شیراز (در دههٔ فجر سال ۷۲) و آمادگی بیشتر علمی در مرحله دوم این مسابقات شرکت نمایند.

با هماهنگی با کلیه استانها مجموعاً قریب ۳۰۰ نفر دانش‌آموز دختر و پسر تا ظهر روز شنبه ۱۶ بهمن ماه خود را به اداره کل آموزش و پرورش فارس، به همراه سرپرستانشان، معرفی نمودند. با اقدامات وسیعی که از سوی آموزش و پرورش میزبان صورت گرفته بود مرکز تربیت معلم شهید باهنر شیراز محل اسکان پسران، و مرکز آموزش ضمن خدمت محل سکونت خواهران شرکت‌کننده تعیین شده بود.

بعد از ظهر شنبه ۱۶ بهمن ماه با حضور نزدیک به ۱۳۰۰ نفر در محل سالن سینمای امور تربیتی شیراز مراسم افتتاحیه آغاز گردید. در آغاز برنامه کلیه دانش‌آموزان شرکت‌کننده با انیفورم مشخص به تفکیک استانی از مقابل حضار رژه با شکوهی را انجام دادند که مورد توجه بسیار قرار گرفت. خوشامدگویی مدیرکل آموزش و پرورش استان، آقای روزی‌طلب، دومین قسمت از این برنامه بود.

پیام آقای دکتر نجفی وزیر آموزش و پرورش توسط برادر عسگری‌راد مسئول مرکز المپیاد علمی قرائت شد و سپس حجت‌الاسلام حائری امام جمعه شیراز در زمینه اهمیت علم و فراگیری آن سخنان کوتاهی ایراد کردند، آنگاه آقای دکتر حداد عادل که خود از بنیانگذاران این حرکت علمی است بیانات مبسوطی در باب انجام المپیادهای علمی و تأثیرات آن در جامعه علمی ایراد نمودند. گزارش مختصری از فرایند آزمون مرحله اول این دو المپیاد و چگونگی انتخاب و اعلام نتایج در انتهای این مراسم از سوی آقای منصور ملک‌عباسی، قائم مقام مرکز المپیاد علمی، ارائه گردید. در بینابین این برنامه‌ها، چند سرود انقلابی نیز از سوی گروه سرود امور تربیتی اجرا شد که مورد توجه قرارگرفت.

صبح روز بعد، یکشنبه هفدهم بهمن، اولین روز برگزاری آزمون نوبت اول المپیاد ریاضی بود. از قبل سؤالات توسط کمیته المپیاد ریاضی طراحی و تصویب شده بود و در آخرین ساعات امر تکثیر بکمک اداره امتحانات اداره کل بخوبی صورت

گرفت مدت این امتحان ۴ ساعت تعیین شده بود که دانش‌آموزان می‌بایست به سه سؤال ریاضی پاسخ می‌دادند.

در نیم ساعت اولیه به سؤالات دانش‌آموزان از سوی اساتید پاسخ گفته می‌شد و سپس دانش‌آموزان به امر حل مسائل می‌پرداختند. پس از انجام این آزمون، امر رمزگذاری، جداسازی سربرگها و تفکیک سؤالات جهت امر تصحیح صورت گرفت. در این دور از مسابقات بهمراه اساتید عضو کمیته المپیاد ریاضی و کامپیوتر حدود بیست نفر از دانشجویان المپیادی سالهای گذشته به شیراز آمده بودند که در امر تصحیح اوراق اساتید را یاری دهند که حضورشان بسیار مغتنم بود و دقت و سرعت عمل تصحیح بسیار بالا بود.

بعدازظهر همان روز اولین آزمون المپیاد کامپیوتر با طرح سه مسأله و فردای آن روز (دوشنبه ۷۲/۱۱/۱۸) مجدداً نوبت دوم آزمونهای کامپیوتر و ریاضی طی دو نوبت برگزار گردید.

روزهای سه‌شنبه و چهارشنبه طی ساعتها از روز و شب در هتل محل اقامت اساتید کار تصحیح پیگیری می‌شد. و هر مسئله از هر دانش‌آموز حداقل ۳ تا ۴ بار مورد بررسی قرار می‌گرفت و نمرات به کامپیوتر داده می‌شد، دانش‌آموزان به همراه سرپرستانشان با برنامه‌ریزیهای صورت گرفتهٔ قبلی از محلهای مختلفی در شهر شیراز بازدید بعمل می‌آوردند.

زیارت حضرت شاهچراغ (ع) و گلزار شهداء، حافظیه، سعدی، باغ ارم، موزه تاریخ طبیعی، مرکز علوم و تکنولوژی و کتابخانه دانشگاه شیراز مورد بازدید دانش‌آموزان قرار گرفت.

تخت جمشید و آثار تاریخی آن نیز از دید دانش‌آموزان و شرکت کنندگان دور نماند.

صبح روز پنج‌شنبه ۲۱ بهمن ماه در همان محل مراسم افتتاحیه، برنامه اختتامیه باشکوه خاصی برگزار گردید. رژه تیمهای شرکت‌کننده به‌صورت زیبائی انجام شد. گزارشی از چگونگی انجام مسابقه علمی ریاضی و کامپیوتر، و تصحیح اوراق از سوی مسئولین کمیته المپیاد ریاضی و کامپیوتر ارائه گردید.

آقای دکتر عالمی، معاون وزیر و رئیس سازمان پژوهش که در روزهای آخر این مسابقه به شیراز آمده بودند نیز در این مراسم بهمراه استاندار و مدیر کل آموزش و پرورش استان حضور داشتند.

آقای دکتر حداد نیز در این مراسم ضمن تشکر از میزبانی خوب و گرم اداره کل آموزش و پرورش فارس، استادان، و کلیه دست‌اندرکاران المپیاد پیروزی دانش‌آموزان برگزیده این مرحله از مسابقات را تبریک گفتند و نقش آنان را در پیشبرد اهداف علمی و صنعتی کشور بر شمردند. در پایان این مراسم نتیجه کار کمیته المپیاد ریاضی و کامپیوتر در ساعات آخر روز چهارشنبه که همان مشخص نمودن اسامی دانش‌آموزان برگزیده این دوره از مسابقات بود توسط برادر منصور ملک‌عباسی قرائت گردید.

بر خلاف سالهای گذشته در هر یک از دو رشته ریاضی و کامپیوتر توسط نمایندگان استانها، و آقای عسگری‌راد به ۲۷ نفر از منتخبین مسابقات مدال برنز و به ۱۸ نفر مدال نقره اهدا شد.

این ابتکار و تهیه مدال و توزیع آن در این مسابقات که به همت مرکز المپیاد علمی صورت می‌گرفت امسال شور و هیجان خاصی به این مراسم داده بود.

در پایان در میان ابراز احساسات شدید دانش‌آموزان، اساتید، مقامات و کلیه مدعوین، اسامی ۸ نفر برگزیده نهائی المپیاد کامپیوتر و ۱۰ نفر برگزیده المپیاد ریاضی اعلام گردید که از سوی آقایان دکتر عالمی، دکتر حداد عادل و روزی‌طلب مدیرکل آموزش و پرورش استان فارس مدال طلای این عزیزان به یکایک آقایان اهدا گردید.

این دو گروه از شرکت در کنکور دانشگاه معاف بوده و از میان آنها جمعاً ۱۰ نفر به مسابقات جهانی ریاضی و کامپیوتر در هنگ‌کنگ و سوئد اعزام خواهند شد.

نکته بسیار جالب و غیرمنتظره در این مسابقات انتخاب مجموعاً ۶ نفر از دختران ممتاز دانش‌آموز بود که برای نخستین بار به مرحله نهایی آزمون این مسابقات راه یافته بودند که امید است حضور این خواهران در صحنه‌های بین‌المللی تبلیغات سوء دشمنان ما را بتواند بخوبی خنثی کند.

در پایان این مراسم آقای روزی‌طلب مدیرکل استان ضمن قدردانی از همکارانشان در اجرای برگزاری این مسابقات در شیراز خواستار موفقیت عزیزان دانش‌آموز شدند.

در حاشیه این برگزاری باید به میزگرد اساتید در شب سوم در شیراز با حضور کلیه دانش‌آموزان اشاره نمود که اساتید به سؤالات دانش‌آموزان پاسخ می‌دادند.

با توجه به شرکت دانش‌آموزان ممتاز و برگزیده المپیادهای فیزیک و شیمی در مرحله دوم این مسابقات در شیراز یک برنامه بازدید از رصدخانه ابوریحان دانشگاه شیراز ترتیب داده شده بود که مورد توجه بسیار آنان قرار گرفت. گفتنی است که در مراسم اختتامیه به این دانش‌آموزان برگزیده نیز مدال طلا اهداء گردید. در پایان روز پنج‌شنبه ۲۱ بهمن ماه تیمهای شرکت‌کننده از سراسر کشور با خداحافظی از یکدیگر و اظهار امیدواری برای دیدارهای بعدی، شهر شیراز را بسوی شهرستانهای خود ترک نمودند.

نظری به حلقه‌های بولی

نوشتهٔ: دزموند مک‌هیل
ترجمهٔ: سعید هاشم‌زاده

فرض می‌کنیم S یک مجموعهٔ غیر خالی باشد و P مجموعهٔ توان آن، یعنی مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های S دو عمل دوتایی روی P، که با + و ∘ مشخص می‌شوند، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
برای $A, B \in P$ فرض‌می‌کنیم $A+B=(A\cup B)-(A\cap B)$
$A\cdot B=A\cap B$.
عمل + اغلب تفاضل متقارن نامیده می‌شود. این یک تمرین ساده است که نشان دهیم عمل + روی P بسته و شرکت‌پذیر است و خاصیت جابجایی دارد و مجموعهٔ ϕ عضو خنثی برای $\{P, +\}$ می‌باشد بعلاوه، از آنجایی که برای هر A، $A+A=\phi$، A معکوس خودش تحت عمل + می‌باشد. حال می‌توانیم ثابت کنیم که $\{P, \circ\}$ بسته و شرکت‌پذیر است و خاصیت جابجایی دارد و بالاخره نسبت به + توزیع‌پذیر است.
یعنی، برای هر A و B و C از P:

$$A\cdot(B+C)=(A\cdot B)+(A\cdot C)$$

برقرار است. بنابراین $\{P, +, \circ\}$ یک حلقه جابجایی است و توجه داریم که مجموعهٔ S خودش عضو خنثی برای $\{P, \circ\}$ است.
یک حلقه $\{R, +, \circ\}$ که در آن برای تمام xها، $x^2=x$ است بولی نامیده می‌شود. در چنین حلقه‌ای $x=x^2=(-x)^2=-x$ بنابراین، برای تمام xها داریم $x+x=0$.
بعلاوه برای تمام x و yها $(x+y)^2=x+y$ و بنابراین با حذف به‌دست می‌آوریم: $xy+yx=0$ و حال با استفاده از $xy+xy=0$ به‌دست می‌آوریم: $xy=yx$. بنابراین، یک حلقهٔ بولی یک حلقه جابجایی است. توجه کنید که ما برای حلقهٔ بولی نیازی به‌داشتن عضو خنثای ضرب نداریم. درحلقهٔ $\{R, +, \circ\}$ می‌بینم که همواره $A.A=A$ بنابراین $\{R, +, \circ\}$ یک حلفه بولی است. هدف از این مقاله تحقیق در شرایط جبری دیگری است که منجر به حلقهٔ بولی می‌شوند.
قضیه. فرض کنید R یک حلقه‌ای باشد که برای هر $x\in R$، $2x=0$ و برای عدد ثابت $n>1$، $x^{2^n+1}=x$ در این صورت R حلقهٔ بولی است.
ما به نتیجهٔ زیر، که قابل استخراج از مثلث پاسکال است، نیاز داریم.
لم: فرض کنیم k توانی از دو باشد، آنگاه ضریب دوجمله‌ای $\binom{k}{r}$ به ازای $k>r>1$ زوج است.
این نتیجه به استقراء و با استفاده از تساوی زیر اثبات می‌شود:

$$(1+x)^{2^m}\times(1+x)^{2^m}=(1+x)^{2^{m+1}}.$$

حال می‌توانیم قضیهٔ ذکر شده را ثابت کنیم. برای راحتی قرار میدهیم $k=2^n$. برای هر $x\in R$ با استفاده از لم بالا:

$$(x^2+x)=(x^2+x)^{k+1}=(x^2+x)^k(x^2+x)=(x^{2k}+x^k)(x^2+x)$$

پس از حذف و ساده کردن به‌دست می‌آوریم: $x^{2k+1}=x^{k+2}$

بنابراین: $x^2=x^{2k+2}=x^{k+3}=(x^{k+1})(x^2)=x^3$

پس، $x^2=x^3=x^4=\cdots=x^{k+1}=x$

و لذا R بولی است. بالاخره توجه می‌کنیم که در حالت کلّی این درست نیست که شرط $2x=0$ و $x^m=x$ برای هر x و یک عدد صحیح فرد ثابت مانند $m>1$ این نتیجه را بدهد که یک حلقه بولی باشد. کوچکترین عدد صحیح فردی که این حکم را رد می‌کند عدد هفت است. در ادامه مسائلی را برای خواننده مطرح می‌کنیم:
I) یک حلقهٔ غیر بولی R پیدا کنید که به ازای هر x در اتحادهای $2x=0$ و $x^7=x$ صدق کند البته بنابر قضیهٔ معروف Jacobson، R باید جابجایی باشد [1].
II) برای کدام اعداد صحیح فرد T که به شکل 2^n+1 نیستند برقراری شرایط $x^7=x$ و $2x=0$ برای هر $x\in R$ نتیجه می‌دهد که حلقهٔ R بولی است؟

منابع:

1- I. N. Herstein, Non – commutative Rings carus Mathematical Monographs, MAA 1968.
2- Desmond Mac Hale, A Remark on Boolean Rings. The American Mathematical Montly, Vol. 63, No 4 – October 1990.

توابع معکوس و انتگرالگیری

دانش‌پژوهان اغلب در مبحث توابع معکوس مشکل دارند، تعدادی تمرین غیربدیهی با توابع معکوس ممکن است یاری‌دهنده باشد. در اینجا فرمولی برای انتگرالگیری جزء به جزء برحسب توابع معکوس ارائه می‌دهیم که در حالت خاص محاسبهٔ انتگرالهای مقدماتی را آسانتر می‌کند. این بهیچ‌وجه جدید نیست گرچه آنرا در کتابهای استاندارد حساب دیفرانسیل و انتگرال پیدا نکرده‌ایم. به‌عنوان یک کاربرد اثباتی خیلی کوتاه برنامساوی یانگ ارائه می‌دهیم.

فرض کنید f یک تابع اکیداً صعودی با مشتق پیوسته باشد. طبق انتگرالگیری جزء به جزء داریم:

$$(1)\quad \int_a^b f(x)dx = bf(b)-af(a)-\int_a^b xf'(x)dx$$

قرار می‌دهیم: $y=f(x)$ و $x=f^{-1}(y)$، لذا (۱) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$(2)\quad \int_a^b f(x)dx = bf(b)-af(a)-\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)dy$$

حال اگر $u=f(a)$ و $v=f(b)$، آنگاه از (۲) داریم:

$$\int_{f^{-1}(u)}^{f^{-1}(v)} f(x)dx = vf^{-1}(v)-uf^{-1}(u)-\int_u^v f^{-1}(y)dy$$

پس همیشه می‌توانیم $\int f^{-1}(y)dy$ را برحسب $\int f(x)dx$ بیان کنیم.

به‌عنوان مثال، فرض کنید $f(x)=\sin x$ و $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

(۳) نتیجه می‌دهد که

$$\int_{\sin^{-1}u}^{\sin^{-1}v} \sin x\,dx = v\sin^{-1}v-u\sin^{-1}u-\int_u^v \sin^{-1}y\,dy$$

با فرض $u=0$ داریم:

$$\int_0^v \sin^{-1}y\,dy = v\sin^{-1}v+(1-v^2)^{\frac{1}{2}}-1$$

کسانی که با انتگرالهای استیل - یس آشنائی دارند مشاهده خواهند کرد که اگر (۱) را به‌صورت زیر

$$\int_a^b f(x)dx = bf(b)-af(a)-\int_a^b x\,df(x)$$

بگیریم این تساوی فقط با شرط اکیداً صعودی و پیوسته بودن f برقرار است در این حالت (۲) نیز درست است ([V] صفحه ۱۲۴]) نامساوی یانگ (در شکل معمولی‌اش) بیان می‌کند که وقتی f یک تابع پیوستهٔ اکیداً صعودی باشد با $f(0)=0$ و $b>0$ و $t>0$ آنگاه:

نوشتهٔ: بوآسن و مارکوس
ترجمهٔ: یحیی ملائی کشاورز

جزء به جزء

$$(۴)\quad bt < \int_0^b f(u)du + \int_0^t f^{-1}(y)dy .$$

این از جنبهٔ هندسی بدیهی است؛ اخیراً بعضی مقاله‌ها به اثباتهائی تحلیلی از آن (یا تعمیم‌هایش) پرداخته‌اند. نامساوی فوق برقرار است ـ احتمالاً با مساوی ضعیف ـ اگر f به‌طور ضعیف یکنوا یا ناپیوسته باشد، به شرط آنکه f^{-1} به‌طور مناسب تعبیر شود. مراجعه کنید به [۴]، [۳]، [۲]).

کاربردهای (۴) در [۵] صفحهٔ ۱۱۱ و در [۶] صفحهٔ ۴۹ داده شده است. حال اثبات بسیار کوتاه (۴) را ارائه می‌دهیم، البته این اثبات مبتنی بر دانستن (۲) می‌باشد. به ازای $0 < r < b$ بدیهی است که

$$(b-r)f(r) < \int_r^b f(u)du$$

یا

$$bf(r) - \int_0^b f(u)du < rf(r) - \int_0^r f(u)du$$

و با استفاده از (۲) برای انتگرال سمت راست، داریم:

$$bf(r) - \int_0^b f(u)du < \int_0^{f(r)} f^{-1}(y)dy$$

اگر $0 < t < f(b)$، می‌توانیم داشته باشیم $r = f^{-1}(t)$ و (۴) حاصل می‌شود.

مراجع:

1 - R. P. Boas and M. B. Marcus, Inequalities involving a function and its inverse, SIAM J. Math. Analysis, 4 (1973) 585 - 591.

2 - ____ , and ____ , Generalizations of Young's inequality, J. Math. Analysis Appl., 46 (1974) 36 - 40.

3 - F. Cuninggham, Jr., and N. Grossman, On Young's inequality, this MONTHLY, 78 (1971) 781 - 783.

4 - J. B. Diaz and F. T. Metcalf, An analytic proof of Young's incquality this MONTHLY, 77 (1970) 603 - 609.

5 - G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, Inequalities, Cambridge University Press, 1934.

6 - D. S. MItrinovic, Analytic Inequalities. Springer - Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1970.

7 - F. Riesz and B. Sz. Nagy, Functional Analysis, Unger, New York, 1955.

مثلث خیام ـ پاسکال و گونه‌ای تعمیم آن

علی ثابتیان

در این مقاله $N_0 = N \cup \{0\}$
به آرایه‌های مثلثی شکل ۱ نگاه کنید

(الف)

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

....

(ب)

۱

۱ ۱ ۱

۱ ۲ ۳ ۲ ۱

۱ ۳ ۶ ۷ ۶ ۳ ۱

....

(پ)

۱

۱ ۱ ۱ ۱

۱ ۲ ۳ ۴ ۳ ۲ ۱

۱ ۳ ۶ ۱۰ ۱۲ ۱۲ ۱۰ ۶ ۳ ۱

....

شکل ۱

در هریک از این سه آرایه، نخستین سطر تنها از یک عدد «۱» تشکیل شده است. فرض کنید در تمامی سطرهای هر آرایه بینهایت عدد قرار دارد و جاهایی راکه چیزی ننوشته‌ایم، عدد صفر قلمداد کنید. در آرایهٔ (الف) از سطر دوم به بعد، هر عدد برابر است با مجموع دو عدد بالای آن، یعنی دو عدد از سطر قبل که به آن عدد نزدیکترند. این آرایه را به‌خوبی می‌شناسیم، همان مثلث خیام ـ پاسکال است و اما در آرایهٔ (ب) از سطر دوم به بعد، هر عدد برابر است با مجموع سه عدد از سطر قبل که به آن نزدیکترند و در آرایهٔ (پ) هر عدد در سطرهای دوم به بعد، برابر است با مجموع چهار عدد از سطر قبل که به آن نزدیکترند.

در واقع می‌خواهیم مثلث خیام ـ پاسکال را به گونه‌ای تعمیم دهیم.

هدف از این نوشته، تعریف دقیق چنین آرایه‌ها و یافتن چند رابطهٔ مشابه با رابطه‌های مثلث خیام ـ پاسکال در این گونه آرایه‌هاست. پیش از تعریف دقیق به چند مشاهده از روی شکل ۱ می‌پردازیم.

در آرایهٔ (ب) مجموع اعداد سطر سوم برابر است با 3^2 و مجموع اعداد سطر چهارم برابر است با 3^3 یعنی

$$1+2+3+2+1 = 3^2$$

$$1+3+6+7+6+3+1 = 3^3$$

به‌طورکلی، در آرایهٔ (ب) مجموع اعداد سطر iاُم مساوی 3^i است. دربارهٔ آرایهٔ (پ) هم می‌توان دید که

$$1+2+3+4+3+2+1 = 4^2$$

$$1+3+6+10+12+12+10+6+3+1 = 4^3$$

و به‌طور کلی، در این آرایه مجموع اعداد سطر iاُم مساوی 4^i است.

درضمن این آرایه‌ها نسبت به خط گذرنده از اعداد میانی، متقارنند. منظور از یک عدد میانی، عددی است که دقیقاً در وسط یک سطر که تعداد اعداد آن فرد است، قرار گرفته باشد.

تعریف: مقدار $\binom{m}{n}_3$ را به ازای هر $m \in N_\circ$ و $n \in Z$ چنین تعریف می‌کنیم:

$$\binom{0}{n}_3 = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

حال فرض‌کنید $m \in N_\circ$ و به‌ازای هر $n \in Z$، $\binom{m}{n}_3$ تعریف شده باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\binom{m+1}{n}_3 = \binom{m}{n}_3 + \binom{m}{n-1}_3 + \binom{m}{n-2}_3$$

در اینجا آرایهٔ (ب) را با نامگذاری جدید در شکل ۲ نشان داده‌ایم.

$$\binom{0}{0}_3$$

$$\binom{1}{0}_3 \binom{1}{1}_3 \binom{1}{2}_3$$

$$\binom{2}{0}_3 \binom{2}{1}_3 \binom{2}{2}_3 \binom{2}{3}_3 \binom{2}{4}_3$$

$$\binom{3}{0}_3 \binom{3}{1}_3 \binom{3}{2}_3 \binom{3}{3}_3 \binom{3}{4}_3 \binom{3}{5}_3 \binom{3}{6}_3$$

شکل ۲

قضیهٔ ۱: به ازای $n \in N_\circ$ و $m \in Z$ اگر $m < 0$ یا $m > 2n$ آن‌گاه $\binom{n}{m}_3 = 0$.

برهان: حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n=0$ حکم برقرار است.

فرض استقراء:

$$\forall m\in Z(m<0 \text{ یا } m>2n \Rightarrow \binom{n}{m}_3 = 0)$$

حکم استقراء:

$$\forall m\in Z(m<0 \text{ یا } m>2(n+1) \Rightarrow \binom{n+1}{m}_3 = 0)$$

$$\binom{n+1}{m} \overset{\text{تعریف}}{=} \binom{n}{m}_3 + \binom{n}{m-1}_3 + \binom{n}{m-2}_3$$

اگر $m<0$ آن‌گاه $m-2 < m-1 < m < 0$ و در نتیجه، با توجه به فرض استقراء،

$$\binom{n}{m}_3 = \binom{n}{m-1}_3 = \binom{n}{m-2}_3 = 0 \Rightarrow \binom{n+1}{m} = 0$$

اگر $m>2(n+1)$ آن‌گاه $m > m-1 > m-2 > 2n$ و بنابر فرض استقراء داریم:

$$\binom{n}{m}_3 = \binom{n}{m-1}_3 = \binom{n}{m-2}_3 = 0$$

قضیه ۲: به ازای هر $n \in N_\circ$، $\sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}_3 = 3^n$

برهان: حکم را به استقراء روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n=0$ داریم:

$$\sum_{i=0}^{2\times 0}\binom{0}{i}_3 = \binom{0}{0}_3 = 1 = 3^0$$

فرض استقرا: $$\sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}_3 = 3^n$$

حکم استقرا: $$\sum_{i=0}^{2(n+1)}\binom{n+1}{i}_3 = 3^{n+1}$$

$$\sum_{i=0}^{2(n+1)}\binom{n+1}{i}_3 =$$

$$= \sum_{i=0}^{2n+2}\left[\binom{n}{i}_3+\binom{n}{i-1}_3+\binom{n}{i-2}_3\right] =$$

$$= \sum_{i=0}^{2n+2}\binom{n}{i}_3+\sum_{i=0}^{2n+2}\binom{n}{i-1}_3+\sum_{i=0}^{2n+2}\binom{n}{i-2}_3 =$$

$$= \sum_{i=0}^{2n+2}\binom{n}{i}_3+\sum_{i=-1}^{2n+1}\binom{n}{i}_3+\sum_{i=-2}^{2n}\binom{n}{i}_3 =$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}_3+\binom{n}{2n+1}_3+\binom{n}{2n+2}_3\right) +$$

$$\left(\sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}_3+\binom{n}{-1}_3+\binom{n}{2n+1}_3\right) +$$

$$+\left(\sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}_3+\binom{n}{-2}_3+\binom{n}{-1}_3\right) =$$

$$\underset{\text{طبق قضیه ۱}}{=}\ 3\times\sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}_3 \underset{\text{طبق فرض استقرا}}{=} 3\times 3^n = 3^{n+1}$$

قضیه ۳: به ازای هر $n\in N_0$، $\binom{n}{0}_3 = 1$.

برهان را به خواننده وامی‌گذاریم.

قضیه۴: به‌ازای‌هر $n\in N_0$ و $m\in Z$ $\binom{n}{m}_3=\binom{n}{2n-m}_3$

برهان: حکم را به استقراء روی n ثابت می‌کنیم. حکم بـه ازای $n=0$ برقرار است (ثابت کنید.)

فرض استقراء: $\forall m\in Z: \binom{n}{m}_3=\binom{n}{2n-m}_3$

حکم استقراء: $\forall m\in Z: \binom{n+1}{m}_3=\binom{n+1}{2(n+1)-m}_3$

$$\binom{n+1}{m}_3=\binom{n}{m}_3+\binom{n}{m-1}_3+\binom{n}{m-2}_3 =$$

طبق فرض استقراء

$$=\binom{n}{2n-m}_3+\binom{n}{2n-m+1}_3+\binom{n}{2n-m+2}_3 =$$

بنا بر تعریف

$$=\binom{n+1}{2n-m+2}_3=\binom{n+1}{2(n+1)-m}_3.$$

قضیه ۵: به‌ازای‌هر $n\in N_0$ و $\binom{n}{2n}_3=1$

برهان: بنا به دو قضیه ۳ و ۴ حکم برقرار است.

قضیه ٦: در هر حلقهٔ جابجایی یکدار R داریم:

$$\forall x\in R,\ \forall n\in N_0 \left[(1+x+x^2)^n=\sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}_3 x^i\right]$$

برهان: حکم را به استقراء روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n=0$ آن‌گاه

$$(1+x+x^2)^0=1$$

$$\sum_{i=0}^{2\times 0}\binom{0}{i}_3 x^i=\binom{0}{0}_3 x^0=1$$

فرض استقراء:

$$\forall x\in R\left[(1+x+x^2)^n=\sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}_3 x^i\right]$$

حکم استقراء:

$$\forall x\in R\left[(1+x+x^2)^{n+1}=\sum_{i=0}^{2(n+1)}\binom{n+1}{i}_3 x^i\right]$$

$$(1+x+x^2)^{n+1}=(1+x+x^2)(1+x+x^2)^n$$

$$=[\text{بنابرفرض استقراء}]\ (1+x+x^2)\sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}_3 x^i=$$

$$=\sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}_3 x^i+\sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}_3 x^{i+1}+\sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}_3 x^{i+2}=$$

$$=\sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}_{3}x^{i}+\sum_{i=1}^{2n+1}\binom{n}{i-1}_{3}x^{i}+\sum_{i=2}^{2n+2}\binom{n}{i-2}_{3}x^{i}=$$

$$=\left[\sum_{i=0}^{2(n+1)}\binom{n}{i}_{3}x^{i}-\binom{n}{2n+1}_{3}x^{2n+1}-\binom{n}{2n+2}_{3}x^{2n+2}\right]$$

$$+\left[\sum_{i=0}^{2(n+1)}\binom{n}{i-1}_{3}x^{i}-\binom{n}{-1}_{3}x^{0}-\binom{n}{2n+2}_{3}x^{2n+2}\right]$$

طبق قضیه ۱

$$+\left[\sum_{i=0}^{2(n+1)}\binom{n}{i-2}_{3}x^{i}-\binom{n}{-2}_{3}x^{0}-\binom{n}{-1}_{3}x^{1}\right]=$$

طبق تعریف

$$=\sum_{i=0}^{2(n+1)}\left[\binom{n}{i}_{3}+\binom{n}{i-1}_{3}+\binom{n}{i-2}_{3}\right]x^{i}=$$

$$=\sum_{i=0}^{2(n+1)}\binom{n+1}{i}_{3}x^{i}$$

تعریف:
$$\binom{0}{n}_{4}=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

فرض کنید $m\in N_0$ و به ازای هر $n\in Z$، $\binom{m}{n}_{4}$ تعریف شده باشد. حال به استقراء، $\binom{m+1}{n}_{4}$ را تعریف می‌کنیم.

$$\binom{m+1}{n}_{4}=\binom{m}{n}_{4}+\binom{m}{n-1}_{4}+\binom{m}{n-2}_{4}+\binom{m}{n-3}_{4}$$

در اینجا صورت قضیه‌های ′۱ تا ′۶ را می‌آوریم که اثبات آنها تمرین خوبی برای خوانندهٔ علاقمند است. به ازای هر $n\in N_0$ و $m\in Z$:

قضیه ′۱: $m<0$ یا $m>3n\Rightarrow\binom{n}{m}_{4}=0$

قضیه ′۲: $\sum_{i=0}^{3n}\binom{n}{i}_{4}=4^{n}$

قضیه ′۳: $\binom{n}{0}_{4}=1$

قضیه ′۴: $\binom{n}{m}_{4}=\binom{n}{3n-m}_{4}$

قضیه ′۵: $\binom{n}{3n}_{4}=1$

قضیه ′۶: در هر حلقهٔ جابجایی یکدار R داریم، به ازای هر $x\in R$،

$$(1+x+x^{2}+x^{3})^{n}=\sum_{i=0}^{3n}\binom{n}{i}_{4}x^{i}.$$

حال کلیترین حالت را بررسی می‌کنیم.
در حالیکه $m\in N_0$ و $n\in Z$ و $k\in N$، می‌خواهیم $\binom{m}{n}_{k}$ را تعریف کنیم.
به استقراء این کار را انجام می‌دهیم.

تعریف:
$$\binom{0}{n}_{k}=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$

$$\binom{m+1}{n}_{k}=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{m}{n-1}_{k}$$

اثبات قضیه‌های ″۱ تا ″۶ که در زیر می‌آیند، تمرین دشوارتری است که خوانندهٔ جدی‌تری را به خود جلب می‌کند.
به ازای هر $m\in Z$ و هر $n\in N_0$ داریم:

قضیه ″۱: $m<0$ یا $m>(k-1)n\Rightarrow\binom{n}{m}_{k}=0$

قضیه ″۲: $\sum_{i=0}^{(k-1)n}\binom{n}{i}_{k}=k^{n}$

قضیه ″۳: $\binom{n}{0}_{k}=1$

قضیه ″۴: $\binom{n}{m}_{k}=\binom{n}{(k-1)n-m}_{k}$

قضیه ″۵: $\binom{n}{(k-1)n}_{k}=1$

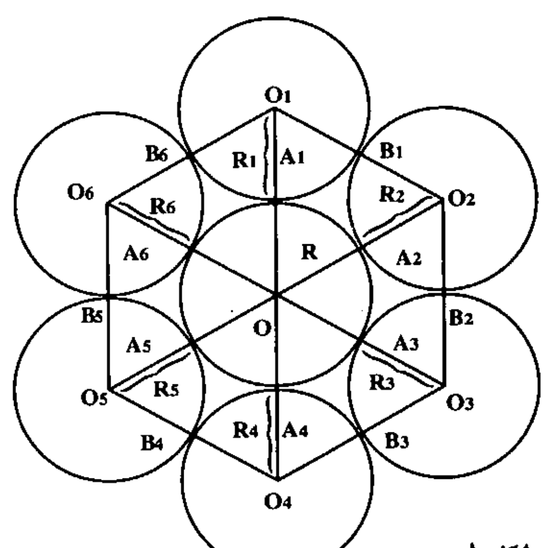
قضیه ″۶: در دو حلقهٔ جابجایی یکدار R داریم.

$$(1+x+\cdots+x^{k-1})^{n}=\sum_{i=0}^{(k-1)n}\binom{n}{i}_{k}x^{i}$$

حل چند مسئلهٔ هندسه

سید محمد فواد ابراهیمی

۱ـ چند دایرهٔ متساوی می‌توان بیرون دایره‌ای با همان شعاع رسم کرد به‌طوری که همگی بر آن دایره مماس بوده و خودشان نیز دوبدو (مجاورها) برهم مماس باشند؟



شکل ۱

پاسخ: تعداد دوایر موردنظر شش‌تاست. برای اثبات این ادعا با توجه به شکل ۱ می‌توان نوشت:

$$R=R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=R_6$$

$$\begin{cases} R+R_1=R+R_2=R+R_3=R+R_4=R+R_5=R+R_6 \\ R_1+R_2=R_2+R_3=R_3+R_4=R_4+R_5=R_5+R_6=R_6+R_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} OO_1=OO_2=OO_3=OO_4=OO_5=OO_6 \\ O_1O_2=O_2O_3=O_3O_4=O_4O_5=O_5O_6=O_6O_1 \end{cases}$$

$$\overset{\triangle}{OO_1O_2}=\overset{\triangle}{OO_2O_3}=\overset{\triangle}{OO_3O_4}=\overset{\triangle}{OO_4O_5}=\overset{\triangle}{OO_5O_6}=\overset{\triangle}{OO_6O_1}$$

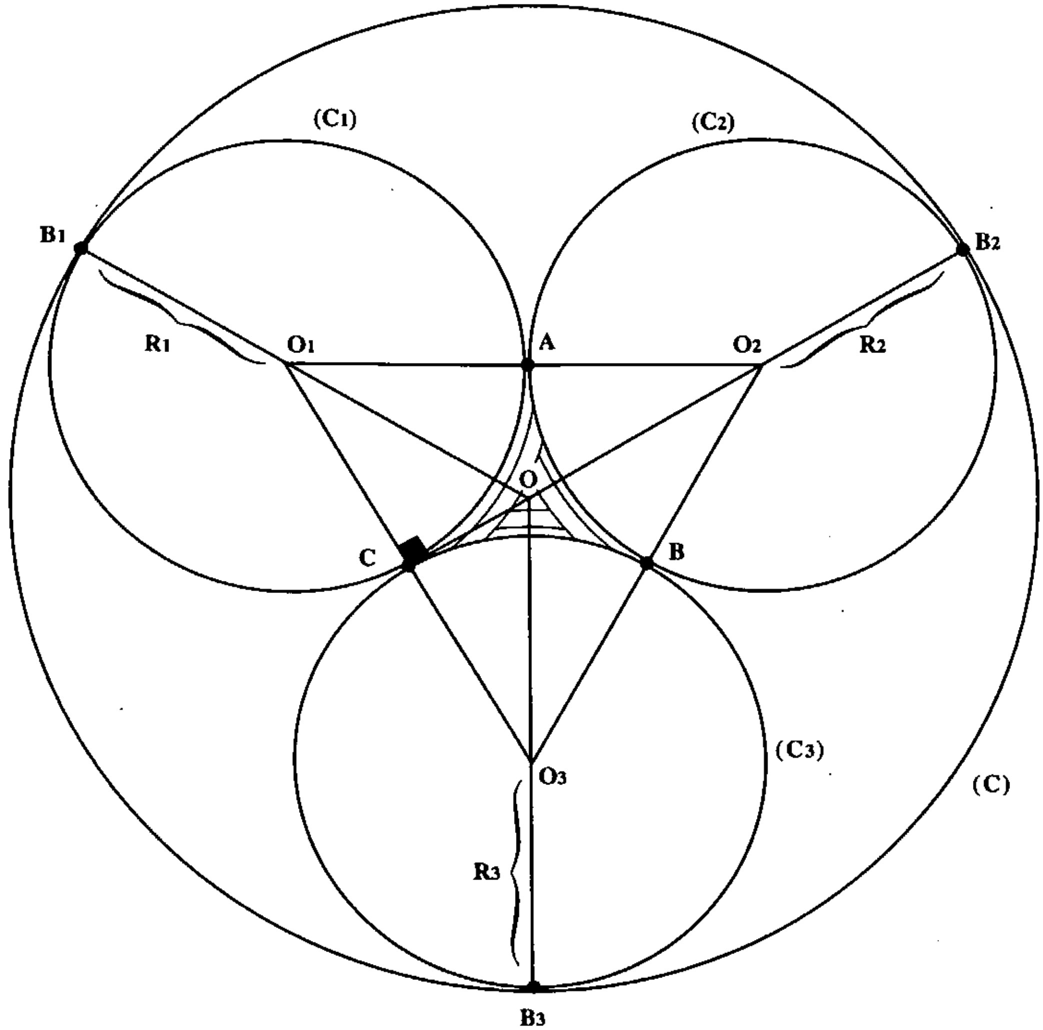
این مثلثها متساوی‌الاضلاع بوده و در نتیجه شش‌ضلعی $O_1O_2O_3O_4O_5O_6$ یک شش‌ضلعی منتظم می‌باشد، بنابراین، اگر به مرکز O و شعاع ۲R یک شش‌ضلعی منتظم رسم کنیم و سپس به مرکز هر رأس شش‌ضلعی و به شعاع R دایره‌ای رسم کنیم، دوایر حاصل همان شش دایرهٔ مورد نظر مسئله

می‌باشد.

۲ـ در درون دایره‌ای به شعاع R سه دایرهٔ مساوی و مماس بر دایرهٔ اول و دوبدو مماس برهم رسم می‌کنیم. مطلوبست محاسبهٔ مساحت مثلث منحنی‌الخطی که بین سه دایرهٔ مزبور ایجاد می‌شود.

$$O_{۱}A = O_{۲}B = O_{۳}C \Rightarrow O_{۱}A+AO_{۲} =$$
$$O_{۲}B+BO_{۳} = O_{۳}C+CO_{۱} \Rightarrow O_{۱}O_{۲} = O_{۲}O_{۳} = O_{۳}O_{۱}$$

یعنی مثلث $\triangle O_{۱}O_{۲}O_{۳}$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع است و از آنجا داریم:



شکل ۲

حل. با اطلاع از مطالب درسی هندسه و با توجه به شکل ۲ اگر مساحت قطاعهای $\triangle O_{۱}AC$ و $\triangle O_{۲}AB$ و $\triangle O_{۳}BC$ را محاسبه و مجموع آنها را از مساحت مثلث $\triangle O_{۱}O_{۲}O_{۳}$ کم کنیم به مطلوب مسئله خواهیم رسید برای این‌کار داریم:

$$OB_{۱} = OB_{۲} = OB_{۳} = R$$

$$O_{۱}B_{۱} = O_{۲}B_{۲} = O_{۳}B_{۳}\ ,\ \ R_{۱} = R_{۲} = R_{۳}\ ,$$

$$\hat{O}_{۱} = \hat{O}_{۲} = \hat{O}_{۳} = ۶۰ \Rightarrow AC = AB = BC = ۶۰^\circ$$

$O_{۳}C$ ارتفاع و عمودمنصف و نیمساز و میانه در رأس $O_{۳}$ می‌باشد. پس درمثلث $\triangle O_{۱}O_{۳}C$ زاویهٔ C قائمه بوده و در نتیجه می‌توان نوشت:

$$(O_{۳}C)^{۲} = (O_{۱}O_{۳})^{۲}-(O_{۱}C)^{۲}\ ,$$

$$(O_{۳}C)^{۲} = (۲R_{۱})^{۲}-R_{۱}^{۲} = ۴R_{۱}^{۲}-R_{۱}^{۲} = ۳R_{۱}^{۲}$$

$(O_2C)^2 = 3R_1^2$ $\boxed{O_2C = R_1\sqrt{3}}$

$S\Delta_{O_1O_2O_3} = \frac{1}{2}(O_1O_3)\times(O_2C)$

$=\frac{1}{2}(2R_1)\times(R_1\sqrt{3})$ $\boxed{S\Delta_{O_1O_2O_3}=R_1^2\sqrt{3}}$

از طرف دیگر مساحت دایره‌های C_1 و C_2 و C_3 برابر و در نتیجه مساحت قطاعهای O_1AC△ و O_2AB△ و O_3BC△ برابر می‌باشد چون که زاویهٔ هر سه قطاع برابر ۶۰ درجه است.

$$S\Delta_{O_1AC} = \frac{60}{360}\times S(C_1) = \frac{1}{6}\times\pi R_1^2$$

$$\boxed{S\Delta_{O_1AC} = \frac{\pi R_1^2}{6}}$$

$$S\Delta_{O_1AC} + S\Delta_{O_2AB} + S\Delta_{O_3BC} = 3S\Delta_{O_1AC} =$$

$$= 3\times\frac{\pi R_1^2}{6} \quad \boxed{3S\Delta_{O_1AC} = \frac{\pi R_1^2}{2}}$$

در خاتمه با استفاده از یافته‌های بالا خواهیم داشت:

$$S\Delta_{ABC}=S\Delta_{O_1O_2O_3}-S\Delta_{O_1AC} = R_1^2\sqrt{3}-\frac{\pi R_1^2}{2}$$

$$S\Delta_{ABC}=\frac{2R_1^2\sqrt{3}-\pi R_1^2}{2}=\frac{R_1^2(2\sqrt{3}-\pi)}{2}$$

$$=(\frac{2\sqrt{3}-\pi}{2})R_1^2$$

$S\Delta_{ABC} =(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})R_1^2$ واحد مربع

۳ـ در درون دایره‌ای به شعاع R چهار دایرهٔ مساوی و مماس بر دایرهٔ اول و دوبدو (مجاورها) برهم مماس رسم می‌کنیم، مطلوبست محاسبهٔ مساحت چهارضلعی منحنی‌الخطی که بین چهار دایرهٔ مزبور ایجاد می‌گردد.

حل: با آگاهی از مطالب هندسه و ملاحظهٔ شکل ۳ اگر مساحت قطاعهای $O_1A_1A_4$ △ و $O_2A_1A_2$ △ و $O_3A_2A_3$ △ و $O_4A_3A_4$ △ را محاسبه و مجموع آنها را از مساحت مربع $O_1O_2O_3O_4$ کم کنیم به مطلوب مسئله خواهیم رسید برای این‌کار داریم:

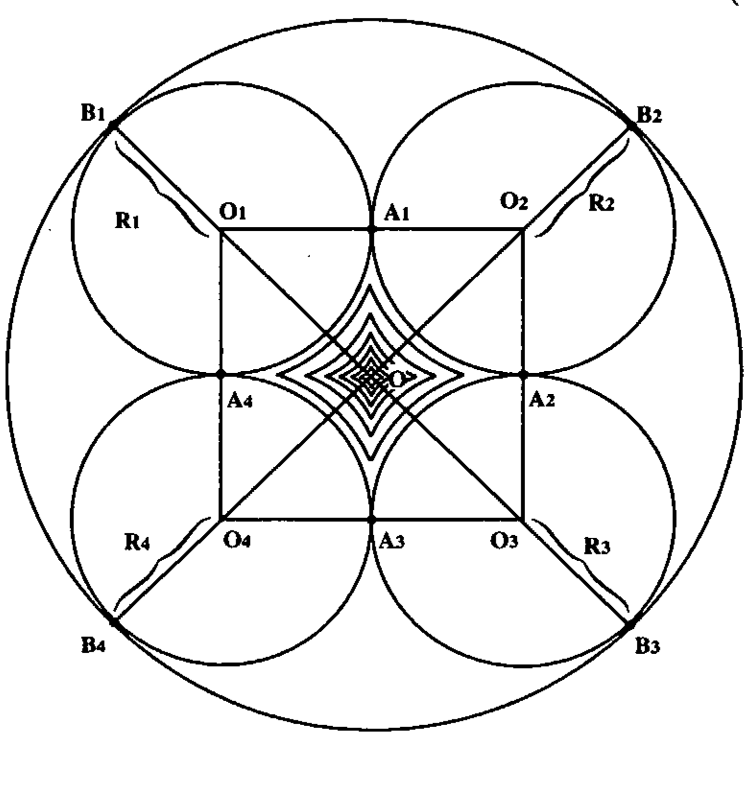
$$OB_1 = OB_2 = OB_3 = OB_4 = R$$

$$O_1A_1 = O_2A_1 = O_2A_2 = O_3A_2 = O_3A_3 = O_4A_3 =$$
$$= O_4A_4 = O_1A_4 = R'$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R'$$

$$O_1A_1+O_2A_1 = O_2A_2+O_3A_2 = O_3A_3+O_4A_3 =$$
$$= O_4A_4+O_1A_4$$

$$O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1 = 2R'$$



شکل ۳

$$OO_1 = OB_1 - O_1B_1 = R - R' ,$$

$$OO_2 = OB_2 - O_2B_2 = R - R'$$

$$OO_3 = OB_3 - O_3B_3 = R - R' ,$$

$$OO_4 = OB_4 - O_4B_4 = R - R'$$

$$OO_1 = OO_2 = OO_3 = OO_4 = R - R'$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$\left|\begin{array}{l} O_1O = OO_3 \\ OO_2 = OO_2 \\ O_1O_2 = O_2O_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta\, O_1OO_2 = \Delta\, O_2OO_3 \Rightarrow \\ \angle\, O_1OO_2 = \angle\, O_2OO_3 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} O_2O = OO_4 \\ OO_3 = OO_3 \\ O_2O_3 = O_3O_4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta\, O_2OO_3 = \Delta\, O_3OO_4 \Rightarrow \\ \angle\, O_2OO_3 = \angle\, O_3OO_4 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} O_3O = OO_1 \\ OO_4 = OO_4 \\ O_3O_4 = O_4O_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta\, O_3OO_4 = \Delta\, O_4OO_1 \Rightarrow \\ \angle\, O_3OO_4 = \angle\, O_4OO_1 \end{array}$$

$$O_1\hat{O}O_2 = O_2\hat{O}O_3 = O_3\hat{O}O_4 = O_4\hat{O}O_1 = 90^\circ$$

چون‌که اگر مجموع چهار زاویهٔ مساوی برابر یک زاویهٔ تمام صفحه باشد همهٔ آنها قائمه خواهند بود و از آنجا نتیجه می‌شود که قطرهای چهارضلعی $O_1O_2O_3O_4$ با هم برابر و برهم عمودند و می‌توان گفت که $O_1O_2O_3O_4$ مربع است.

$$S_{O_1O_2O_3O_4} = (O_1O_3)^2 = (2R')^2 = 4R'^2$$

$$\boxed{S_{O_1O_2O_3O_4} = 4R'^2}$$

درضمن آشکارا قطاعهای $O_1A_1A_4$ و $O_2A_1A_2$ و $O_3A_2A_3$ و $O_4A_3A_4$ با هم برابر و زاویه هر کدام یک زاویهٔ قائمه است بنابراین داریم

$$S\Delta\, O_1A_1A_4 = \frac{90}{360} \times S(O_1, R_1) = \frac{1}{4} \times \pi R'^2$$

$$S\Delta\, O_1A_1A_4 = \frac{\pi R'^2}{4}$$

$$S\overset{\Delta}{O_1A_1A_4} + S\overset{\Delta}{O_2A_1A_2} + S\overset{\Delta}{O_3A_2A_3} + S\overset{\Delta}{O_4A_3A_4} = 4S\overset{\Delta}{O_1A_1A_4}$$

$$= 4S\overset{\Delta}{O_1A_1A_4} = 4 \times \frac{\pi R'^2}{4} \qquad \boxed{4S\overset{\Delta}{O_1A_1A_4} = \pi R'^2}$$

در خاتمه با استفاده از یافته‌ها خواهیم داشت:

$$S\overset{\square}{A_1A_2A_3A_4} = S_{O_1O_2O_3O_4} - 4S\overset{\Delta}{O_1A_1A_4}$$

$$S_{A_1A_2A_3A_4} = 4R'^2 - \pi R'^2 = (4-\pi)R'^2$$

$$\boxed{S_{A_1A_2A_3A_4} = (4-\pi)R'^2 \text{ واحد مربع}}$$

باید توجه داشت که در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\Delta\, O_1OO_2$ بسادگی مقدار R' برحسب R محاسبه می‌شود که برابر است با $R' = (2-\sqrt{2})R$ که با جاگذاری، مساحت موردنظر برابر $(4-\pi)(6-4\sqrt{2})R^2$ می‌شود.

علاقمندان می‌توانند مسئلهٔ فوق را برای ۵، ۶، ۷، ...، n دایره حل کرده و نتیجهٔ بسیار جالبی بگیرند.

مثالی از یک تابع پیوستهٔ هیچ‌جا مشتق‌پذیر

ترجمه و اقتباس: خدیجهٔ جاهدی،
عضو هیأت علمی دانشگاه پیام نور شیراز

دراین مقاله فضای توابع حقیقی - پیوسته بر $[a_1, b]$ همراه با $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$ را با $C([a,b])$ نمایش می‌دهیم. اولین مثال تابع پیوستهٔ هیچ‌جا مشتق‌پذیر در سال ۱۸۷۵ توسط وایرشتراس بیان گردید [۳]، اگرچه سالها قبل از آن بولزانو نیز نظریاتی راجع به‌ساختار چنین توابعی ارائه کرده بود. این مطلب تا سال ۱۹۳۱ فقط به چند مثال اندک وابسته بود تا آنکه باناخ مازورکویچ[۱] با استفاده از قضایای مهم و عمیق آنالیز، نه تنها وجود این توابع بلکه پراکندگی آن را در فضای توابع پیوسته حقیقی مقدار اثبات کردند. به عبارت دیگر توابع پیوسته هیچ‌جا مشتق‌پذیر قسمت بزرگی از توابع حقیقی پیوسته را شامل می‌شود که آن را یک زیرمجموعهٔ مانده از $C([a,b])$ می‌نامند.

در زیر مثالی ساده از یک تابع حقیقی پیوستهٔ هیچ‌جا مشتق‌پذیر با استفاده از مفاهیم اولیه توپولوژیکی بر صفحه که به‌طور معمول در دروس آنالیز و توپولوژی مقدماتی ارائه می‌شود، می‌آوریم.[۲] بعلاوه در این مثال بدون استفاده از قضایای عمیق آنالیز نشان می‌دهیم که این دسته از توابع در فضای توابع حقیقی پیوسته چگال است.

تعریف. فرض کنید X زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. نقاط و مجموعه‌های یادشده در زیر، اعضاء و زیر مجموعه‌های X فرض می‌شوند.

الف) یک همسایگی نقطه P مجموعه‌ای است مثل $N_r(P)$ مرکب از تمام نقاطی چون Q که در آن $|P-Q| < r$. عدد r شعاع $N_r(P)$ نامیده می‌شود.

ب) اگر هر همسایگی P شامل نقطه‌ای چون $Q \in E$ $(P \neq Q)$ باشد آنگاه P را یک نقطه حدی مجموعه E می‌گوئیم. مجموعه نقاط حدی E را با E' نمایش می‌دهیم.

ج) گوییم E بسته است هرگاه هر نقطه حدی E یک نقطه از E باشد.

د) گوییم نقطه P یک نقطه درونی E است هرگاه یک همسایگی از P مانند N باشد که $N \subseteq E$.

ه) گوییم E باز است هرگاه هرنقطه E، یک‌نقطه درونی‌اش باشد.

و) بستار E را با $\bar{E}$ نمایش می‌دهیم و با $\bar{E} = E \cup E'$ تعریف می‌کنیم.

ز) گوییم E در X چگال است هرگاه هر نقطه X یک نقطه حدی E یا یک نقطه E باشد.

ح) فرض کنید S مجموعه تمام اعداد حقیقی $|P-Q|$ باشد که $P \in E$ و $Q \in E$. سوپریمم S را قطر E (diameter) می‌نامیم و با $\mathrm{diam}(E)$ نمایش می‌دهیم.

ط) منظور از یک پوشش باز برای زیرمجموعهٔ E از فضای X، گردایه‌ای‌ازمجموعه‌های‌باز X مانند $\{G_\alpha\}_\alpha$ است‌که $E \subseteq \bigcup_\alpha G_\alpha$.

ی) زیرمجموعهٔ K از X را **فشرده** نامیم هرگاه هر پوشش باز K حاوی زیر پوشش متناهی باشد به عبارت دیگر هرگاه $\{G_\alpha\}$ پوشش بازی از K باشد آنگاه تعداد متناهی اندیس $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ موجود باشد که $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$.

قبل از ساختن مثال موردنظر، دو قضیهٔ زیر راکه در فهم این مطالب لازم است، بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۱. اشتراک هر دنباله از مجموعه‌های تو در توی فشردهٔ غیرتهی، یک مجموعه فشردهٔ غیرتهی است.

قضیه ۲. تابع $f : [a,b] \to R$ پیوسته است اگر و فقط اگر نمودار آن فشرده باشد.

مثال. تابع $\Pi : R \times R \to R$ را تابع تصویر $\Pi(x,y) = x$ درنظر بگیرید و برای $A \subseteq R \times R$ و $x \in R$، قرار دهید:

$$A[x] = \{y : (\ , y) \in A\}.$$

دنبالهٔ نوارهای تو در توی $C_n \supseteq C_{n+1}$ از $R \times R$ با خواص زیر در نظر بگیرید.

۱) برای هر $n \in N$، $\Pi(C_n) = [0,1]$؛

۲) به ازای هر x از $[0,1]$ و هر عدد طبیعی n، $\mathrm{diam}(C_n[x]) < \frac{1}{n}$؛

۳) به ازای هر $x \in [0,1]$، $y \in [0,1]$ی با خاصیت $0 < |x-y| < \frac{1}{n}$ وجود دارد که اگر $p \in C_n[x]$ و $q \in C_n[y]$

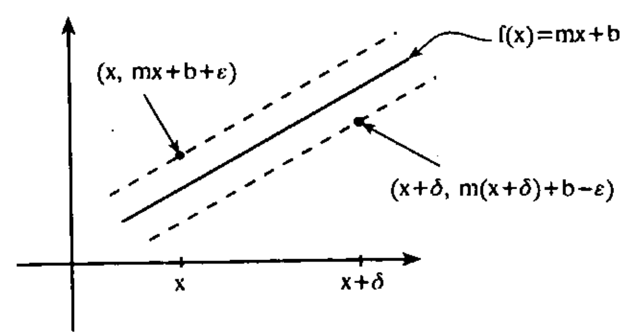
آن‌گاه $\left|\frac{p-q}{x-y}\right| > n$.

C_nها به‌صورت بستار همسایگی‌های نواری از قوسهای چندضلعی تعریف شده بر $[0,1]$، تعریف می‌گردند (برای دیدن دو مرحله از ساختار این تابع به نمودار ۲ توجه کنید). قبل از ساختن C_nها به بحث در مورد همسایگی‌های نواری بستهٔ قطعه خط مستقیم با خاصیت (۳) در بالا، می‌پردازیم.

لم ۳. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد $f(x) = mx + b$ $(m>n)$. به ازای هر $\delta > 0$، ε ـ همسایگی $N\varepsilon(f)$ از نمودار f چنان یافت می‌شود که برای هر $x \in [0,1]$ ی $y \in [0,1]$ با خاصیت $|x-y| < \delta$ موجود باشد که اگر $p \in N_\varepsilon(f)[x]$ و $q \in N_\varepsilon(f)[y]$ آنگاه $\left|\frac{p-q}{x-y}\right| > n$.

اثبات. به نمودار ۱ توجه کنید. از آنجا که $m > n$، می‌توان ε را به‌اندازهٔ کافی کوچک اختیار کرد که:

$$|\{[m(x+\delta)+b-\varepsilon]-[mx+b+\varepsilon]\}/\{(x+\delta)-x\}|$$
$$= \left|m-\frac{2\varepsilon}{\delta}\right| > n$$



نمودار (۱)

بنابراین اگر $p \in N_\varepsilon(f)[x]$ و $q \in N_\varepsilon(f)[y]$ آنگاه $\left|\frac{p-q}{x-y}\right| > n$. قرار دهید $y = x+\delta$. برای ساخت C_n با خاصیتهای ۱ تا ۳، فرض کنید C_1 تا C_{n-1} تعریف شده باشند. P را یک قوس چندضلعی که زیرمجموعهٔ درون C_{n-1} (C_{n-1}) است درنظر بگیرید به‌طوری که هر قطعهٔ آن به‌اسامی $P_1, P_2, \ldots, P_k$ دارای شیبی با قدرمطلق بزرگتر از n باشد. برای هر $i = 1, 2, \ldots, k$، فرض‌کنید $0 < \delta_i < \min\{l(\frac{\Pi(P_i)}{2}), \frac{1}{n}\}$ که در آن $l(\frac{\Pi(P_i)}{2})$ طول فاصله $(\frac{\Pi(P_i)}{2})$ است. از آنجا که $\delta_i < l(\frac{\Pi(P_i)}{2})$ و با استفاده از لم ۳ برای δ_i و قطعه‌های P_i تعریف شده بر $\Pi(P_i)$ به ε_iـ همسایگی مطلوب از P می‌رسیم (برای هر $x \in \Pi(P_i)$ معمولا می‌توان y را در $\Pi(P_i)$ انتخاب کرد). حال قرار دهید $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : i = 1, \ldots, k\}$، بنابراین $\bar{N}_\varepsilon(P)$ یک همسایگی بسته از P می‌باشدکه درشرط (C) صدق می‌کند. بدیهی است که می‌توان ε را به‌قدر کافی کوچک انتخاب کرد که $\bar{N}_\varepsilon(P)$ در شرط (ب) صدق کند و $\bar{N}_\varepsilon(P) \subseteq C_{n-1}$. فرض کنید $C_n = \bar{N}_\varepsilon(P)$.

حال با تعریف C_n، به تعریف تابع پیوستهٔ هیچ‌جا مشتقپذیر مورد نظر خواهیم پرداخت. فرض کنید $C = \bigcap_n C_n$، بنابر (۲) برای هر $x \in [0,1]$، $\operatorname{diam}(C[x]) = 0$. C را نمودار تابع $f : [0,1] \to R$ بگیرید. طبق قضیه ۱، C فشرده است و چون C نمودار f است، f پیوسته می‌باشد. (بنابر قضیهٔ ۲)

قضیه ۴. تابع f با تعریف فوق، هیچ‌جا مشتقپذیر است.

اثبات. فرض کنید $x \in [0,1]$ و $\delta > 0$. n را چنان انتخاب کنید که $\delta > \frac{1}{n}$. بنابر خاصیت ۳)، $y \in [0,1]$ با خاصیت $0 < |x-y| < \frac{1}{n}$ موجود است که اگر $P \in C_n[x]$ و $q \in C_n[y]$ آنگاه $\left|\frac{p-q}{x-y}\right| > n$. ازآنجاکه $f(x) \in C_n[x]$ و $f(y) \in C_n[y]$ داریم:

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| > n .$$

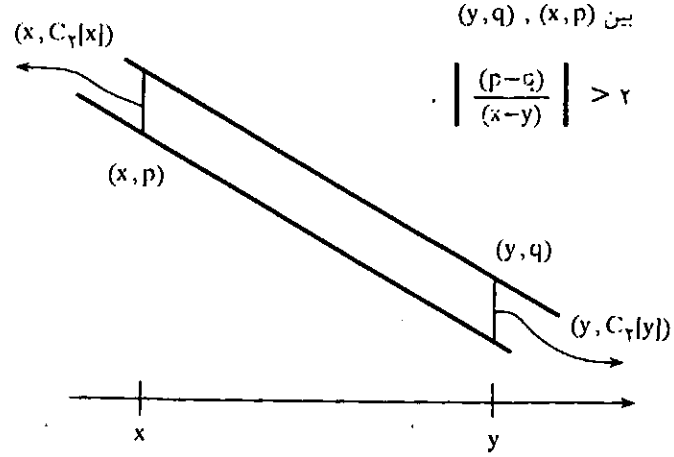
بنابراین f در نقطه x مشتقپذیر نیست.

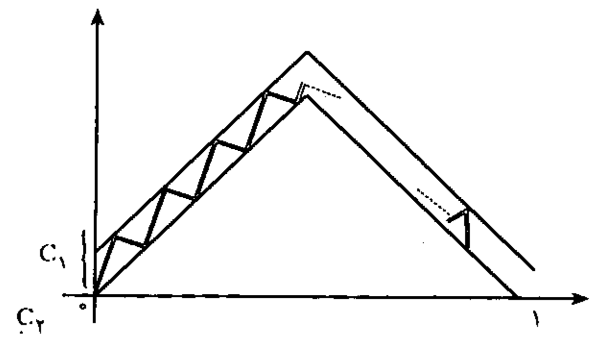
نتیجه. با استفاده از این ساختار می‌توان نشان داد که چنین توابعی از مجموعه توابع حقیقی پیوسته بر $[0,1]$، چگالند.

اثبات. فرض کنید تابع $g : [0,1] \to R$ پیوسته باشد و عدد حقیقی مثبت δ، مفروض باشد. P را قوس چندضلعی تابع g درنظر گیرید. نوارهای C_n را که $C_n \subseteq N_{\delta/2}(P)$ در خواص (الف) تا (ج) صدق می‌کند، بسازید. (توجه کنید که $N_{\delta/2}(P)$ یک همسایگی نواری از P است). بنابراین $\cap C_n$، یک تابع پیوسته هیچ‌جا مشتقپذیر در همسایگی به شعاع $\frac{\delta}{2}$ از g را به‌دست می‌دهد. در نتیجه توابع پیوسته هیچ‌جا مشتقپذیر در $C[0,1]$ چگالند.

شمائی از C_2
قدر مطلق ضریب زاویه
بین (y,q) , (x,p)

$$\left|\frac{(p-q)}{(x-y)}\right| > 2\,.$$





نمودار (۲)

مراجع:

1- A. M. BRUCKNER, Differentiation of real functions, Lecture Notes in Math 59, springer 1978.

2- M. LYNCH, Nowhere Differentiable Function, American Mathematical Monthly Vol. 99, N. 1, 1992 (8–9).

3- W. RUDIN, Principles of Mathematical Analysis 3d. ed, McGrawHill Book Company, New York 1976 (141–144)

پاسخ به نامه ها

آقای محمد رمضانی طرخورانی، دانشجو، گیلان

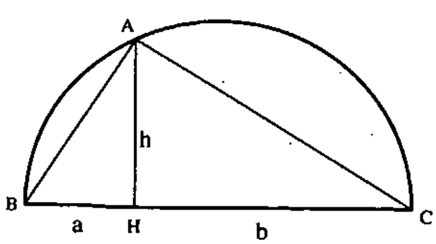
با تشکر از نامه محبت‌آمیز شما، به اطلاع می‌رسانیم که مجله از همکاری بعضی استادان در دانشگاه‌های دیگر هم بهره می‌گیرد و همکاری آنان را ارج می‌نهد. امّا اینکه پیشنهاد می‌کنید از هر دانشگاهی یک نفر استاد با مجله همکاری کند بسیار پیشنهاد جالبی است و ما هم استقبال می‌کنیم اما باید خاطرنشان کنیم که مجله رشد از طرف آموزش‌پرورش و با اهداف معین و بیشتر دبیران، دانش‌آموزان و دانشجویان انتشار می‌یابد.

آقای غلامرضا قیامت، دانشجو، اصفهان

مطلبی که ارسال کرده‌اید درست است و به سادگی می‌توان آن را ثابت کرد. برهان آن را بفرستید تا در مجله درج شود. آنچه ارسال کرده‌اید، برهان نیست، بلکه تنها یک حدس است.

آقای ناصر مظاهری، دبیر، اصفهان

در مورد رسم دقیق $5\sqrt{\frac{12}{11}}$ می‌توان چنین گفت که در این نوع مسایل با رسم ریشه دوّم یک عدد سروکار داریم. برای رسم آن از رابطه فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنیم به این ترتیب که می‌دانیم ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی بین قطعاتی است که همین ارتفاع بر روی وتر پدید می‌آورد. بنابراین اگر منظور رسم $\sqrt{ab}$ باشد، مطابق شکل $BH=a$ و $HC=b$ را



رسم می‌کنیم. دایره (یا نیمدایره) به قطر BC رسم می‌کنیم. از نقطه H عمودی بر BC اخراج می‌کنیم تا دایره را در نقطه A قطع کند.

$$AH=\sqrt{ab}$$

اکنون در مساله مورد نظر شما کافیست $a=۲۵$ و $b=\frac{۱۳}{۱۱}$ قرار دهید. در مورد سؤال اول شما، به مقاله آقای دکتر جمالی در مجله رشد شماره مراجعه کنید؟

آقای زین‌العابدین زارعان، دانشجو، تبریز

ضمن تشکر از نامهٔ محبت‌آمیز شما نسبت به اعضای هیأت تحریریه، مجله از همکاری شما با مجله استقبال می‌کند. اما درمورد مطلب ارسالی شما در مورد نوشتن ۱۳۷۳ با ارقام آن به طریق مختلف، به اطلاع شما می‌رساند که قبلاً مطالبی زیاد نظیر این نوع مطالب در مجله درج شده است.

منتظر مقاله جالب دیگری از طرف شما هستیم.

آقای کیوان علی‌پور، دانش‌آموز، شیراز

اشکال راه حل ارسالی شما در مورد مساله ۵ المپیاد، آن است که اگر به صورت مساله توجه کنید، زوایا در یک جهت در نظر گرفته شده است یعنی منظور یکی از زوایای $\angle PAC$، $\angle PAB$، $\angle PCB$ است.

آقای محمدعلی گلدرون، دانشجو

جواب سؤال خود را در مورد حدس تایِنامار با مطالعه مقاله آقای دکتر زارع نهندی که در خبرنامه انجمن ریاضی ایران به چاپ رسیده دریافت کنید.

آقای کیوان علیزاده

مطلب شما در مورد حل معادله $x+y+xy=۲^n$ رسید. راه حلی که ارائه کرده‌اید، خیلی هم میان‌بر نیست!. چون بدون مقدمات زیاد می‌توان دید که x و y باید زوج باشند. معمولاً آزمایش تعیین جواب بعد از محدود کردن اعدادی مورد آزمایش صورت می‌گیرد و این اعداد تعدادشان بسیار کم است ولی راه شما تعداد زیادی از اعداد را برای تست باقی می‌گذارد.

آقا محمد قربانی بیشکسا، دانش‌آموز، تبریز

می‌پرسید اگر x و y و z طولهای اضلاع مثلث قائم‌الزاویه باشند آیا غیر از $x^۲+y^۲=z^۲$ (z طول وتر است) رابطهٔ دیگری هم بین x و y و z وجود دارد یا خیر، مسلماً سایر روابط فیثاغورث همچنین تمام روابطی که در هر مثلث بین اضلاع موجود باشد، در اینجا هم موجود است. اما اینکه گفته‌اید اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه x و kx و $k'x$ باشد آنگاه $K'^۲-K^۲=۱$ و از آنجا گفته‌اید مکان ضرایب (؟!) یک هذلولی است.

چه نتیجه‌ای می‌خواهید بگیرید.

آقای سیف‌الله طاهری، دانش‌آموز، کهگیلویه

مساله شما در شماره‌های قبلی رشد حل شده است.

آقای محمد رضاماهر، دبیر، زنجان

در مثلث قائم‌الزاویه اگر چند ضلعی‌های منتظم به ضلع وتر و دو ضلع دیگر بر روی آنها بنا شوند، مساحت چند ضلعی‌ای که روی وتر بنا می‌شود، با مجموع مساحت‌های دو n ضلعی منتظم دیگر (ممکن است این چند ضلعی‌ها در حالت خاص دایره شوند) برابر است. بنابراین مطلبی که در مورد مستطیلی‌ها نوشته‌اید، درست نیست.

آقای محمد شیخلو، دانش‌آموز، تبریز

فرمول ارسالی شما برای محاسبه دقیق محیط بیضی درست نیست. بهتر است از ثبت این فرمول به نام خودتان صرفنظر کنید.!

آقای محمد زاهدی، اردبیل

اگر بنا باشد جواب تقریبی دستگاه $\begin{cases} x+\sqrt{y}=۱۰ \\ y+\sqrt{x}=۵ \end{cases}$ را پیدا کنیم، راه ساده‌تر آن به طریق ترسیم است که دو سهمی به‌معادلات دستگاه را رسم کنیم و مختصات نقاط برخورد آنها به تقریب به‌دست آوریم.

آقای سعید علیخانی، دانشجو، یزد

در مورد مقاله ورشکستگی قهارباز، حق با شماست در حالت $p=q$ باید $u=\frac{b}{a+b}$. از بذل توجه و دقت شما صمیمانه متشکریم.

آقای عباس مقدسی، دانشجو، اصفهان

چون دربارهٔ نوشتن اعداد نظیر ۱۹۹۴ و ۱۳۷۳ و غیره مطلب زیاد نوشته شده است، مجله از درج آنها معذور است.

آقای اکبر جبرائیل‌زاده، دانش‌آموز، پارس آباد

از مسایل ارسالی‌تان متشکریم. راه حلی که ارائه داده‌اید، خالی از اشکال نیست، منتظر مسایل بهتر با حل دقیق از شما هستیم.

آقای مجید یحیی‌پور، دانش آموز، رودسر

در مورد سؤال اول شما لازم است بازهٔ $[\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۹}]$ را به بازه‌هایی تقسیم کنید که در آنها $[\frac{۱}{x}]$ جز در یک نقطه ثابت باشد و سپس انتگرالها را با هم جمع کنید.

در مورد سؤال دوم و سوم شما معلوم نیست $\lim\limits_{x\to a}\frac{u'v^2}{uv'}$ و $\lim\limits_{x\to a}\frac{u'}{v'}$ که موجود باشند تا بتوان از قاعدهٔ هوپتیال استفاده کرد. اگر $\mu=e^{-n}$ و $v=\frac{1}{n}$ و $\lim\limits_{x\to\infty}u=\lim\limits_{x\to\infty}v=0$ ولی $(u)=e^{\frac{-n}{n}}=e^{-1}$ که $\lim\limits_{x\to\infty}u^v=e^{-1}=\frac{1}{e}$ در مورد سؤال پنجم شما که $e^{i\pi}=-1$ و نمای مختلط را مطرح کرده‌اید، بد نیست بدانید که در نماهای مختلط با توابع چند مقداری سروکار پیدا می‌کند

$$(-1)^{-i}=e^{-i[i\pi+2k\pi i]}=e^{(2k+1)\pi}\ (k=0,\pm1,\pm2,\dots)$$

که یکی از مقادیر آن e^{π} (به‌ازای $k=0$) می‌باشد.

در مورد سؤال ششم می‌توان گفت که نپرلگاریتم را با استفاده از سرعت تعریف کرد و چون دستگاه شمار ما دهدهی است جداول لگاریتم را در مبنای ده نوشته‌اند.

در مورد سؤال ۴ شما و سؤالات نظیر آن به کتابهای جبر یا کتاب Transcendenlal Numbers یا کتاب I.Niuen با عنوان Trratianal Numbers مراجعه کنید.

آقای علی اکبر جاویدمهر از همکاری با مجله و ارسال حل مسائل صمیمانه سپاسگزاری می‌نمائیم. ذیلاً مطلب ارسالی شما درج می‌شود:

۱۳۷۳=۱۳۶۱+۷+۵ , ۱۳۷۳=۱۳۲۷+۴۳+۳

۱۳۷۳=۱۳۲۱+۴۷+۵ , ۱۳۷۳=۱۳۱۹+۴۱+۱۱۳

۱۳۷۳=۱۳۰۷+۳۷+۲۹ , ۱۳۷۳=۱۳۰۳+۲۹+۴۱

۱۳۷۳=۱۳۰۱+۵۹+۱۳ , ۱۳۷۳=۱۳۰۱+۶۱+۱۱

۱۳۷۳=۱۲۹۷+۵۹+۱۷ , ۱۳۷۳=۱۲۹۱+۷۱+۱۱

۱۳۷۳=۱۲۸۹+۶۷+۱۷ , ۱۳۷۳=۱۲۸۳+۷۹+۱۱

۱۳۷۳=۱۲۸۹+۸۳+۱۱ , ۱۳۷۳=۱۲۷۷+۸۳+۱۳

۱۳۷۳=۱۲۵۹+۱۰۱+۱۳ , ۱۳۷۳=۱۲۵۹+۹۷+۱۷

۱۳۷۳=۴۳۱+۴۲۱+۵۲۱ , ۱۳۷۳=۱۱+۶۶۱+۷۰۱

آقای کیوان علیزاده، زنجان. اگر مقالات مناسبی دریافت کنیم، سعی می‌کنیم در اختیار شما قرار دهیم. ارائه اطلاعات جامع تا حدودی درباره هندسه در مجله رشد شروع شده است، امید داریم در سایر رشته‌ها هم نظر شما تأمین شود. اینکه می‌نویسید شما را همکار دور فرض کنیم، ما مایلیم که شما با فرستادن مقاله و یا مسایل بکر و تازه، همکار نزدیک ما شوید.

خانم زهرا عبدی، دانش آموز، تهران

مطلب ارسالی شما را به‌خاطر اینکه در محاسبات به‌صورت ذهنی کاربرد دارد، توسط یک مثال ارائه می‌دهیم. برای به‌دست آوردن حاصلضرب ۱۳۲۵×۵ کافیست سه رقم سمت چپ را بر ۲ تقسیم کرده و ۲۵ را به سمت راست آن اضافه کنیم. بنابراین حاصلضرب فوق ۶۶۲۵ است علت آن به‌خاطر محاسبات زیر است:

$$1325\times5=\left(\frac{1320+5}{2}\right)\times10=6600+25$$

البته این قاعده وقتی درست است که سه رقم سمت راست آن عدد بر ۲ بخشپذیر باشد.

آقای فرهاد سمندری، دیپلم تجربی

۱ـ در مورد محاسبه محیط بیضی وقت خود را تلف نکنید. در این‌باره بارها نوشته‌ایم که فقط به‌طور تقریب می‌توان آن را محاسبه کرد.

۲ـ اینکه سعی کرده‌اید ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه ABC همواره $\frac{a+b}{c}=\sqrt{2}$ است (C وتر مثلث است) باید گفت اگر فرمول بالا درست باشد، باید داشته باشیم.

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)^2=2\Rightarrow\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2}=2$$

$$\Rightarrow(a-b)^2=0\Rightarrow a=b$$

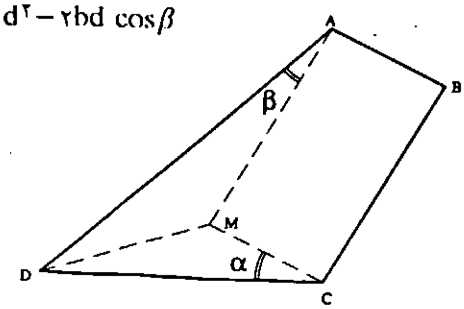
یعنی اگر مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین باشد، فرمول درست است و گرنه درست نیست. شما در تمام محاسباتی که انجام داده‌اید، a و b را دو عدد صحیح متوالی در نظر گرفته‌اید که تا حدودی به هم نزدیکند در نتیجه گمان برده‌اید که فرمول همواره صحیح است.

آقای بهزاد خورشیدی، دانش آموز، تبریز

مسأله‌ای که فرستاده‌اید، نیاز به چنین راه حل طولانی ندارد. از A به موازات BC و از C به‌موازات AB خط رسم کنید تا یکدیگر را در نقطه M قطع کنند. حال قانون کسینوسها را در دو مثلث MAD و MCD بنویسید نتیجه چنین خواهد بود:

$$MD^2=a^2+c^2-2ac\cos\alpha$$

$$MD^2=b^2+d^2-2bd\cos\beta$$



دبیرستان