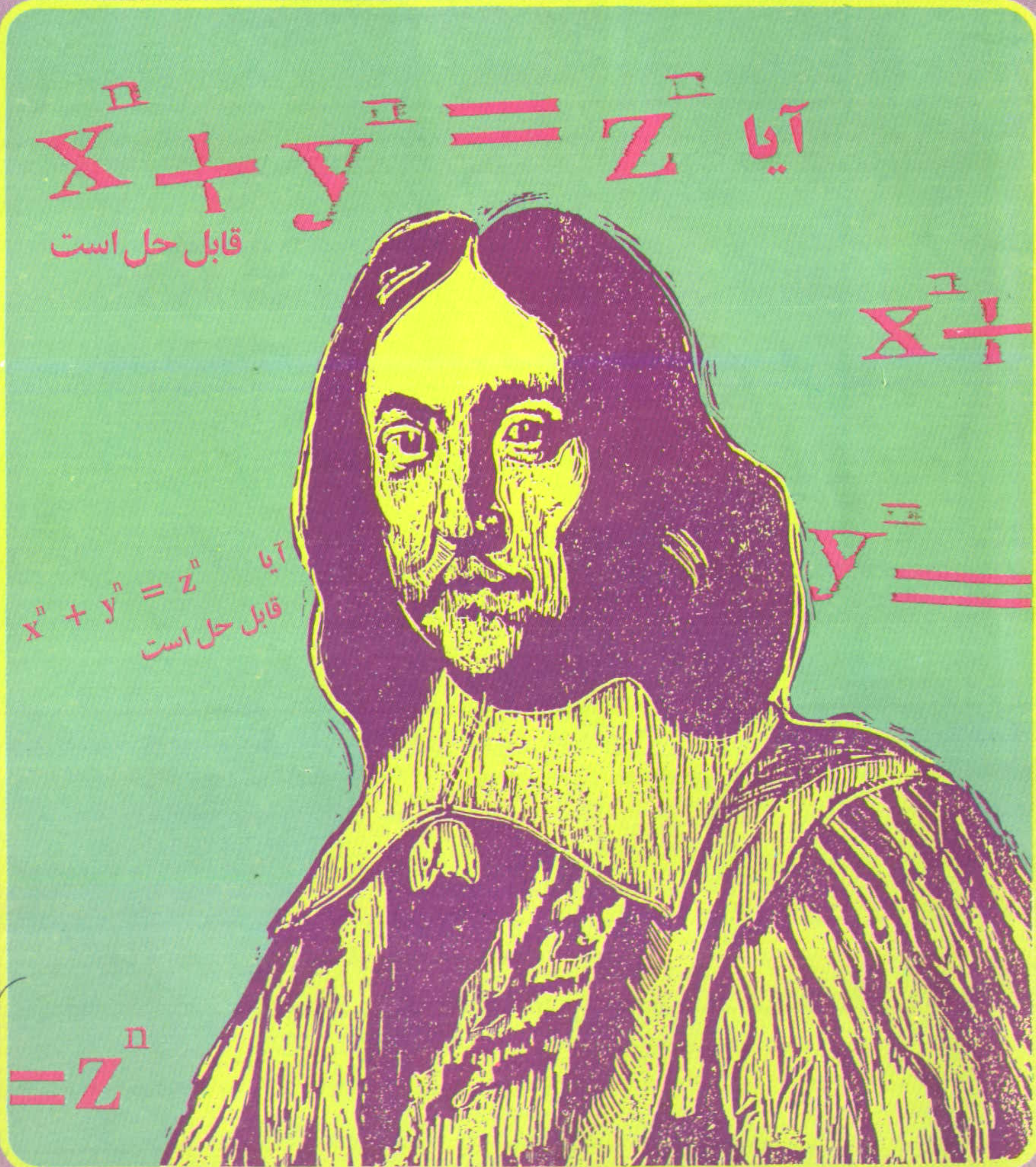
رشد آموزش ریاضی

سال دهم - پاییز ۱۳۷۲ - شمارهٔ مسلسل ۳۹

بها: ۳۵۰ ریال



بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر برنامه‌ریزی، به‌منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است.هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

رشد آموزش ریاضی

سال دهم ـ پاییز ۱۳۷۲ ـ شمارهٔ مسلسل ۳۹

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۴۹)

سردبیر: علیرضا مدقالچی

مدیر داخلی: میرزاجلیلی

مسؤول هماهنگی و تولید: فتح‌ا... فروغی

امور فنی، صفحه‌آرا و رسام: محمد پریسای

دستیار ناظر چاپ: محمد کشمیری

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ـ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

هیأت تحریریه رشد ریاضی مفتخر است که با همکاری گروه ریاضی و کارشناسان این گروه تألیف کتابهای هندسه و ریاضی عمومی دو سالهٔ اول تغییر نظام آموزشی را به عهده گرفت و اکنون کتابهای فوق در اختیار دانش‌آموزان و دبیران قرار گرفته است. به‌طوری که قبلاً هم گفته‌ایم یکی از اهداف عمدهٔ تغییر نظام آموزشی و نظام جدید آموزش متوسطه تدوین کتابهایی مشترک برای دو سالهٔ اوّل بود. مسلماً این هدف یکی از اهداف خوب نظام جدید می‌باشد که جنبهٔ انعطاف‌پذیری این نظام را نشان می‌دهد. امّا به همان اندازه هم تألیف و تدوین کتابهای جدید را مشکلتر می‌کرد. سال گذشته در فرصت اندکی کتابهای ریاضی ۱ و ۲ و کتاب هندسه تألیف و به‌صورت آزمایشی در اختیار محصلین قرار گرفت. به‌طوری‌که اشاره شد مشکل عمده در تدوین این کتابها مشترک بودن آنها برای کلیه رشته‌های سابق ریاضی فیزیک، تجربی، علوم‌انسانی و سایر رشته‌ها بود. از این‌رو هیأت مؤلفین در جلسات متعدد به این نتیجه رسیدند که به‌طور پیوسته از مباحث و مطالب دورهٔ راهنمایی شروع کنند و به‌تدریج مطالب و مباحث مشترک برای کلیه رشته‌ها را در این کتابها تدوین نماید. نخست کلیه موضوعات و سرفصلها به‌دقت مورد بررسی قرار گرفت. لازم به توضیح است که این سرفصلها در شورای

بقیه در صفحه ۱۷

آشنایی با منطق چند ارزشی

دکتر محمدحسن بیژن‌زاده
دانشیار دانشگاه تربیت‌معلم

بحث و بررسی بدیع ومدونی ازمنطق که در آن فقط اززبان عادی استفاده‌گردد امری مأیوس کننده‌است. یك زبان نمادی‌یا علامتی به‌جهت بررسی دقیق وعلمی این موضوع و نقشی که دارد ضروری است. به‌خاطر وجود چنین نمادگرایی، بررسی مطالعه حاصل، به‌منطق نمادی یا منطق ریاضی شهرت یافته است. در منطق نمادی، روابط متنوع بین احکام، مجموعه‌ها، رده‌ها ونظایر آنها، به‌وسیله فرمول‌هایی‌نمایش داده‌می‌شوند که معانی‌آنها عاری از سوء‌تفاهم‌هایی است‌که در زبان معمولی بسیارمشهوداست. بسط وتوسعه این‌موضوع، برپایه‌مجموعه‌ای ازفرمول‌های‌اولیه وبرطبق قواعد تعیین شده وتبدیلات‌صوری واضحی انجام می‌گیرد واین به‌بسط وتوسعهٔ جبرمقدماتی شباهتی بسیار دارد. همچنین، باز مانند جبر، برتری‌های زبان نمادی برزبان معمولی فشردگی وسهولت درك آن می‌باشد که این پدیده‌ای بسیارارزشمند است.

ازلایبنیتز[۱]، به‌عنوان اولین کسی که به‌طورجدی در پی منطق نمادی بوده است نام می‌برند. یکی ازاولین کارهای وی مقاله‌ای‌است تحت‌عنوان، هنرترکیبات که‌درسال ۱۶۶۶ میلادی منتشرشده است. لایبنیتز دراین مقاله اعتقادش را به‌امکان یك زبان علمی جهانشمول، که به‌صورتی اقتصادی برای راهنمایی امراستدلال نمادگرایی را به‌کار گرفته باشد، ابراز می‌دارد. پیرامون این افکار، لایبنیتز دربین سالهای ۱۶۷۹ و ۱۶۹۰ در راستای خلق یك منطق نمادی‌کارهای شایان‌توجهی انجام داد. وی مفاهیمی را فرمولبندی‌کردکه درمطالعات مدرن امروزی ازاهمیت فوق‌العاده برخوردارند.

وقتی‌که جرج‌بول[۲] رسالهٔ خود را تحت‌عنوان آنالیز

ریاضی منطق که در واقع مقاله‌ای است در باب حساب استنتاج منطقی منتشر کرد علایق جدیدی به منطق نمادی مجدداً شکل گرفت. وی درمقاله‌های دیگری که درسال‌های ۱۸۴۸ و ۱۸۵۴ منتشر کرد توصیف مهمی از افکارش را پیرامون این موضوع ارائه کرد. این مقاله‌ها تحت‌عنوان تحقیقی درقوانین فکر می‌باشند که در آن تئوری‌های ریاضی منطق احتمال پایه‌گذاری شده‌اند.

اگوست دمورگان[۳] که معاصر بول بود در سال ۱۸۴۷ رساله‌ای تحت‌عنوان منطق صوری منتشر کرد دربعضی جهات از کارهای بول پیشرفته‌تر بود. همچنین بول و پس از او، دمورگان، مطالعات گسترده‌ای را درباب منطق روابـط، که پیش از این نادیـده انگاشته شده بود، انجام دادند.

مفاهیم عرضه شده توسط بول بوسیله ارنست شرودر[۴] در کتاب قطوری تحت‌عنوان پیش‌درآمدی برجبر منطـق به‌کمال قابل‌ملاحظه‌ای ارتقاء یافت. این‌کتاب دربین سال‌های ۱۸۹۰ و ۱۸۹۵ منتشر شد. در واقع، منطـق‌دانان مدرن دراین راستا می‌اندیشند که منطق نمـادی را به سنت بـول یا اصطلاح جبر بول-شرودر پیوند دهند. هنوزهم کارهای قابل‌ملاحظه‌ای درجبر بول درشرف انجام است ومقاله‌های بسیاری را دراین‌موضوع درمجله‌های تحقیقی امروزی می‌توان یافت.

دربیـن سالهای ۱۸۷۹—۱۹۰۳ گرایش مدرن‌تری به منطق نمادی باکار منطـق‌دان آلمانـی به‌نام گوتلب‌فـرگه[۵] وپئانو ریاضیدان ایتالیایی آغاز گردید. کارپئانو با این انگیزه آغاز شد که بتوان‌کل علوم ریاضی را برحسب حسابان منطقی بیان کرد. درحالی‌که‌کارفرگه ازاینجا ناشی می‌شد که به‌پایهٔ مستحکم‌تری برای ریاضیات نیاز بود. رسالهٔ فرگه تحت‌عنوان Bergriffsschrift درسال ۱۸۷۹ ظاهر شد؛ همچنین کتـاب مهم تاریخی وی تحت‌عنوان Grandgesetze der Arithmetik دربین سالهای ۱۸۹۳—۱۹۰۳ منتشر گردید. کتاب پئانو که به یاری محققان همکارش در ۱۸۹۴ منتشر گردید فرمولبندی ریاضیات نام یافت. کاری که با فرگه وپئانـو آغازشده بود مستقیماً وایتهـد[۶] و راسل[۷] را رهنمون کرد تاکتاب مشهـور اصول ریاضیات را تدوین کنند.

ایدهٔ اساسی این‌کتـاب همانا یکسان‌سازی بخش اعظمـی از ریاضیات بامنطق بود، بدین‌معنی کـه دیگر شاخه‌های ریاضیات را می‌توان ازسیستم اعداد طبیعی نتیجه‌گیری کرده و درنهایت، ریاضیات، یا بخش اعظمی از آن، را می‌توان به روش بنداشتی کردن ازمجموعه‌ای از بنداشت‌های منطقـی به‌دست آورد. در سال‌های ۱۹۳۴—۱۹۳۹ کتاب جامـع مبانی ریاضیات دیوید هیلبرت[۸] و پاول برنایز[۹] منتشر شد. این‌کتاب که برپایه یك سری مقاله‌ها و دروس دانشگـاهی ارائـه شـده‌بود تـوسط هیلبرت تدوین گردید. کوشش هیلبرت براین بود تاریاضیات را با استفاده ازمنطق نمادی به‌روشی جدید سامان دهد که در آن سازگاری برقرار گردد.

درحال‌حاضـر مطالعات وپژوهش‌های تخصصـی چندی در حوزهٔ منطق نمادی‌توسط بسیاری از ریاضیدانان‌انجام‌می‌گیرد. به‌ویژه امر انتشارکتاب اصول ریاضیـات دراین راستا نقش اساسی دارد.

همچنین انتشار یك مجلـه ادواری تحت‌عنوان مجلهٔ منطق نمادی[۱۰] ازسال ۱۹۳۵ شروع گردیده است تا نتایج به‌دست آمده توسط این‌گروه از ریاضیدانان را منعکس کند.

دراین بخش کوشش می‌کنیم تا ایده‌ای مقدماتی از ماهیت منطق نمادی را ارائه دهیم و در این راستا خود را به حساب گزاره‌ای که بوسیله وایتهد و راسل تـوسعه یافته است محدود می‌کنیم. دراین بخش مفاهیم ونمادهای ضـروری را معرفی و دربخش بعدی روش‌بنداشتی کردن این مـوضـوع را به‌طور خلاصه شرح خواهیم داد.

هرجمله‌ی معنی‌دار که محتوای‌آن دارای اعتبار درستی یا نادرستی باشد گزاره نامیده می‌شود؛ صرفنظر ازآن که بدانیم کدامیك ازاین دواعتبار (درستی‌یانادرستی) درموردآن‌صادق است. به‌عنوان مثال ازگزاره‌ها، «بهار یك فصل است»، و «۸ یك عدد اول است»، «رقم ۹۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ام بسط اعشاری عدد π برابر۷است» رانام می‌بریم. اولین‌گزاره درست، دومی نادرست و درستی یا نـادرستی سومی تـاکنـون برما معلوم نیست[۱۱]. درمنطق نمادی، گزاره‌ها با حروف کـوچك n، m، p، q، r، ... نشان‌داده‌می‌شوند. همچنین، چنین‌قرارمی‌گذاریم که‌هرگاه‌ادعای، برقراری‌گزاره‌ای‌مانند p را بکنیم، مرادمان‌این است که بدون شایستگی درستی یا نادرستـی آن، p درست می‌باشد.

گزاره‌ها به‌راههای مختلف با هم ترکیب شده و گزاره‌های جدیدی به دست می‌آید. برای مثال، از دوگزارهٔ «سعدی یك شاعر است»، و «۸ یك‌عدد اول است» گزاره‌های جدید «سعدی یك شاعر است و ۸ یك عدد اول است» ونیز «سعدی‌یك شاعر است یا ۸ یك‌عدد اول است»، و «اگرسعدی شاعر است، آنگاه ۸ یك عدد اول است»، و «سعدی یك شاعر است اگروفقط اگر ۸ یك عدد اول است»، حاصل می‌شوند. همچنین ازیك گزاره چون «سعدی یك شاعر است» گزارهٔ جدید «سعدی یك شاعر نیست» را می‌توانیم بسازیم. یعنی، همواره می‌توانیم گزاره‌ای بسازیم که‌گزارهٔ اول را نفی کند.

ترکیبات گزاره‌ای فوق به‌طور شفاهی با استفاده از الفاظ، و، یا، اگر-آنگاه، اگروفقط اگر، نه، ارائه شده‌اند. این ترکیبات اساسی گزاره‌ها درمنطق نمادی با استفاده از نمادهای مناسب ارائه می‌گردند. بدین‌منظور، پنج نماد ذیل را معرفی می‌کنیم.

(۱) $p \wedge q$ (بخوانید «p و q») نمایشگر گزاره‌ای است که فقط وفقط وقتی درست است که هردوی p و q درست باشند. هرگزاره ازاین نوع را یك گزاره عطفی [۱۲] می‌نامیم.

(۲) $p \vee q$ (بخوانید «p یا q») نمایشگر گزاره‌ای است که فقط و فقط وقتی درست است که حداقل یکی از گزاره‌های p، q درست باشند. هرگزاره ازاین نوع را یك گزارهٔ فصلی [۱۳] (یك ترکیب فصلی) می‌نامیم.

(۳) $p \rightarrow q$ (بخوانید «اگر p آنگاه q») نمایشگر گزاره‌ای است که فقط وفقط وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد. هرگزاره ازاین نوع را یك گزارهٔ شرطی می‌نامیم.

(۴) $p \Longleftrightarrow q$ (بخوانید «p اگروفقط اگر q») نمایشگر گزاره‌ای است که فقط وفقط وقتی درست است که p و q هر دو درست یا هردونادرست باشند. هر گزاره ازاین نوع را یك هم‌ارزی می‌نامیم.

(۵) p' (بخوانید «چنین نیست که p») نمایشگر نفی یا نقض p است. لذا p' نمایشگر گزاره‌ای است که وقتی درست است که p نادرست و وقتی نادرست است که p درست باشد. هرگزاره ازاین نوع را یك نفی می‌نامیم.

ملاحظه می‌کنیم که $\wedge$، $\vee$، $\rightarrow$، و $\Longleftrightarrow$ نمادهایی هستند که نشانگر اعمال دوتایی بوده که بردوگزاره عمل می‌کنند، درحالی که «$'$» نمادی است که یك عمل یکتایی را نشان می‌دهد که برگزاره‌ها عمل می‌کند.

باید خاطرنشان کنیم که معانی و، یا، اگر-آنگاه، و اگروفقط اگرکمی با معانی معمولی این رابطها در زبان عادی متفاوت‌اند.

برای مثال، در زبان معمولی غالباً لفظ و برای عطف دو گزاره به‌کارمی‌رود که با یکدیگر به‌گونه‌ای در ارتباط هستند. همانند

اوسوار قطارشد و وارد تبریز گردید.

با اینحال درمنطق لفظ و برای عطف دوگزاره دلخواه، صرفنظر ازاینکه با هم درارتباط باشند یا نباشند، به‌کارمی‌رود. برای مثال گزاره ترکیبی ذیل را نقل می‌کنیم

فروردین یك ماه است و ۸ یك عدد اول است.

مشابهاً، در زبان معمولی، رابط گزاره‌ای یا به‌دو معنی ظاهر می‌شود. «یای مانع جمع» [۱۴] (p یا q ولی نه هردو) و «یای شمول» [۱۵] (p یا q یا هردو) فقط یای آخری درمنطق به‌کار می‌رود؛ یعنی یای منطقی همان یای شمول است و برهردوگزارهٔ دلخواه عمل می‌کند، صرفنظر ازاینکه این دوگزاره با هم در ارتباط با معنی باشند یا نباشند.

استفاده منطقی از رابط گزاره‌ای اگر-آنگاه نیزشایان توجه است. در زبان معمولی، گزاره مرکب، «اگر p، آنگاه q» نشانگر رابطه‌ای بین شرط وجواب شرط است ویا سبب و نتیجه آن می‌باشد. همانندگزاره‌های

اگر باران بیاید، نخواهیم رفت

ویا

اگرحسن بیاید، کتاب را می‌آورد

درمنطق، گزارهٔ شرطی $p \rightarrow q$ می‌تواند هردوگزارهٔ دلخواه p و q را بهم مرتبط سازدو برطبق تعریف(۳) فوق، این گزارهٔ شرطی فقط وقتی نادرست انگاشته می‌شود که p درست و q نادرست باشد. لذا ما این وضعیت جالب را داریم که وقتی p نادرست و q درست باشدگزارهٔ شرطی $p \rightarrow q$ درست‌خواهد بود. لذا هرسه‌گزارهٔ شرطی ذیل درست‌اند:

اگر ۷ یك عدد اول باشد، ۲ برابر ۲ می‌شود ۴،

اگر ۸ یك عدد اول باشد، ۲ برابر ۲ می‌شود ۴،

اگر ۸ یك عدد اول باشد، ۲ برابر ۲ می‌شود ۵.

گرچه اندکی غیر عادی می‌نماید، این نتایج غیرمنتظره نیستند، زیرا به‌خاطر داریم که آنچه که ما دراینجا با آن سروکار داریم، تنها معانی گزاره‌ها نیست، بلکه فقط ارزش‌های درستی آنها است.

همچنین درمنطق این ادعا که «p اگروفقط اگر q» یك گزارهٔ درست است بدین‌منظورنیست که p و q دارای یك معنی هستند یا ازیك درجه اهمیت برخوردارند بلکه این ترکیب گزاره‌ای فقط درحالتی درست انگاشته می‌شود که هردوی p و q درست ویا هردوی آنها نادرست باشند. لذا دوگزارهٔ

۷ یك عدد اول است اگر و فقط اگر ۲ برابر ۲ برابر ۴ است.

۸ یك عدد اول است اگر و فقط اگر ۲ برابر ۲ برابر ۵ است.

باید درست تلقی گردند.

شاید دقیقترین و فشرده‌ترین راه تلخیص معانی منطقی رابطهای‌گزاره‌ای عاطف، فاصل، شرطی، هم‌ارزی، ونفی با استفاده از جداول ارزش می‌باشد دراین‌جداول نماد T نشانگر آن است‌که‌گزارهٔ متناظر درست و نماد F نشانگر آن است که گزارهٔ مربوطه نادرست می‌باشد.

اکنون جدول‌ارزش عمل عاطف را تشکیل می‌دهیم

جدول ارزش عاطف

p	p	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

این جدول صرفاً بسط معنی ترکیب عطفی است که قبلا توضیح گردید این جدول مبین آن است که $p\wedge q$ وقتی درست است‌که هردوی p و q درست باشند و $p\wedge q$ در بقیهٔ حالات نادرست است. برای تشکیل چنین‌جدولی تمام ترکیبات‌ممکن T و F را برای‌گزاره‌های مولفه‌ای مربوطه (دراین مثال p و q) فهرست کرده‌ایم. سپس درستی یا نادرستی هر ترکیب در ستون‌آخر درج می‌گردد.

همچنین جداول فاصل، شرطی، هم‌ارزی، ونفی را مطابق ذیل می‌توان تشکیل داد.

جدول ارزش شرطی

p	q	$p\rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

جدول‌ارزش فاصل

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

جدول نفی

p	p'
T	F
F	T

جدول‌ارزش‌هم‌ارزی

p	q	$p\longleftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ممکن‌است‌گزاره‌های ترکیبی‌فوق‌الذکر درتشکیل‌گزاره‌های ترکیبی پیچیده‌تر همچون

$$[p\wedge(p\rightarrow q)]\rightarrow q$$

بکار روند. جدول ارزش ترکیبات جدید با ارزش‌دهی به گزاره‌های بنیادی p و q با استفاده از جداول ارزش عاطف، فاصل، شرطی، هم‌ارزی ونفی به‌دست می‌آید. لذا برای‌گزارهٔ اخیر داریم

p	q	$p\rightarrow q$	$p\wedge(p\rightarrow q)$	$[p\wedge(p\rightarrow q)]\rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

ستونهای اول، دوم، و آخر تشکیل جدول ارزش گزارهٔ ترکیبی موردبحث را می‌دهند، درحالی که ستونهای سوم و چهارم صرفاً به‌خاطر یافتن ستون‌آخر و به‌عنوان ستونهای کمکی عمل می‌کنند. این جدول ارزش چیزی جز T درستون آخر ندارد. این بدان معنی است‌که گزارهٔ موردبحث صرفنظر از ارزشهای درستی p و q همواره دارای ارزش درستی T می‌باشد.

اینگونه گزاره‌ها اتحاد منطقی یا قانون منطقی نامیده می‌شوند. اتحادهای منطقی نقش اساسی درمطالعه منطق دارند. دانشجویان به‌آسانی می‌توانند نشان دهند که همهٔ گزاره‌های ذیل اتحاد منطقی هستند.

بعضی قوانین منطقی

نام قانون	قانون
قانون طرد شق وسط[۱۶]	$p\vee p'$
قانون نقض	$(p\wedge p')'$
قانون تعدی‌شرطی	$[(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)]\rightarrow(p\rightarrow r)$
قانون نفی ثانی[۱۷]	$p\longleftrightarrow(p')'$
قانون عکس نقیض[۱۸]	$(p\rightarrow q)\longleftrightarrow(q'\rightarrow p')$

هرگاه جداول ارزش گزاره‌های $p\rightarrow q$ و $q'\rightarrow p'$ را تشکیل دهیم درمی‌یابیم که این دوجدول با یکدیگر از حیث درستی ونادرستی تطابق دارند. هر دوگزارهٔ m و n ازاین

نوع را هم‌ارزمنطقی می‌نامیم و درنتیجهٔ گزارهٔ $m\longleftrightarrow n$ یك قانون منطقی یا یك اتحاد منطقی است. لذا

$$(p\rightarrow q)\longleftrightarrow(q'\rightarrow p')$$

یك قانون منطقی است همچنان‌که درفهرست فوق از قوانین منطقی منظورشده است. اهمیت قوانین منطقی در این است که هرگاه بدانیم دوگزاره هم‌ارز منطقی هستند می‌توانیم ساختار یك‌گزاره را به‌ساختارگزارهٔ هم‌ارزآن تغییرداده ومطمئن‌باشیم که با این عمل تأثیری درارزش درستی‌گزارهٔ اولیه به وجود نمی‌آید. لذاگزارهٔ $q'\rightarrow p'$ را هرجاکه ظاهرشودمی‌توان‌با گزارهٔ $p\rightarrow q$ تعویض‌کرد. مشابهاً می‌توانیم $(p')'$ را درهر جاکه ظاهرشود با p تعویض‌کنیم.

به‌عنوان تمرین ثابت کنیدکه هر زوج ازگزاره‌ها (دریك سطر) هم‌ارزمنطقی یکدیگرمی‌باشند:

$p\vee q$	$(p'\wedge q')'$
$p\rightarrow q$	$(p\wedge q')'$
$p\longleftrightarrow q$	$(p\wedge q')'\wedge(q\wedge p')'$
$p\wedge q$	$(p'\wedge q')'$
$p\rightarrow q$	$p'\wedge q'$
$p\longleftrightarrow q$	$[(p'\vee q)'\vee(q'\vee p)]'$
$p\wedge q$	$(p\rightarrow q')'$
$p\vee q$	$p'\rightarrow q$
$p\longleftrightarrow q$	$[(p\rightarrow q)\rightarrow(q\rightarrow p)]'$

این هم‌ارزیها ازجمله هم‌ارزیهای منطقی‌جالبی می‌باشند، زیرا نشان‌دهندهٔ این‌واقعیت‌هستندکه رابطهای‌عاطف، فاصل،شرطی، هم‌ارزی ونفی به‌اعتباری قابل‌تعریف وتحویل به‌یکدیگرند.فلذا ملاحظه‌می‌کنیم که نخستین سه هم‌ارزی منطقی‌این جدول‌نشانگر آنندکه چگونه رابطهای فاصل، شرطی وهم‌ارزی را می‌توان برحسب رابطهای عاطف ونفی تعریف‌کرد. سه هم‌ارزی‌منطقی میانه جدول نشان می‌دهدکه چگونه رابطهای عاطف، شرطی وهم‌ارزی را می‌توان برحسب رابط فاصل ونفی تعریف کرد؛ بالاخره سه هم‌ارزی منطقی پایانِ جدول نشانگر آنندکه چگونه می‌توان رابطهای عاطف، فاصل و هم‌ارزی را برحسب رابط شرطی ونفی تحویل کرد.

این نکته قابل‌ذکراست که رابط فاصل را می‌توان تنها،بر حسب رابط شرطی بیان کـرد، زیرا $(p\rightarrow q)\rightarrow q$ و $p\vee q$ هم‌ارزی منطقی هستند. این کار را برای رابط عاطف نمی‌توان انجام داد.

زیرنویسها:

۱—Leibnitz
۲—Boole
۳—August De Morgan
۴—Scheroder
۵—Gotlob Frege
۶—Whitehead
۷—Russel
۸—Hilbert
۹—Paul Bernays
۱۰—Journal of Symbolic Logic
۱۱— با استفاده ازکامپیوترهای غول‌پیکراعشارعدد π را تا یك میلیون رقم محاسبه‌گردیده است.
۱۲—conjunction
۱۳—disjunction
۱۴—inclusive or
۱۵—inclusive or
۱۶—Excluded Middle Law
۱۷—Law of Double Negation
۱۸—Law of contraposition

خبر مهم

قضیهٔ آخر فرما حل شد!

توضیح بیشتر در شماره‌های بعدی

گزارشی از هفتمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی

قسمت اول

ازدوشنبه ۲۶ مرداد ماه تا یکشنبه اول شهریور ماه ۱۳۷۱

دانشگاه لاوال کبک-کانادا

سید محمدکاظم نائینی-عضوهیأت علمی دانشگاه تهران

مقدمه: هفتمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی باشرکت ۲۶۶۹ نفرازاستادان ومعلمان ریاضی وصاحبنظران آموزش ریاضی‌و اندیشمندان تعلیم وتربیت۸۸ کشورجهان از .ز دوشنبه ۲۶ مرداد تا یکشنبه اول شهریور ۱۳۷۱ (AUGUST ۱۹۹۲ ۲۳-۱۷) به‌مدت یك هفته دردانشگاه لاوال شهر کبك کانادا برگزارشددراین کنگره صدهاچهرهٔ معروف ریاضی‌ودانشمندان آموزشی وروانشناسی که درزمینه آموزش ریاضی‌شهرت‌دارند حضور داشتند. این دانشمندان باارائه سخنرانی‌های‌علمی و با ارزش، تازه‌ترین دست‌آوردهای جهانی‌را درزمینه آموزش ریاضی دراختیارشرکت کنندگان قراردادند.

محل برگزاری کنگره‌دانشگاه لاوال (LAVAL) بودکه‌یك دانشگاه قدیمی و فرانسه زبان و از بزرگترین و مهمترین دانشگاههای آمریکای شمالی است. این دانشگاه تمام امکانات خودرا دراختیارشرکت‌کنندگان درکنگره گذاشته بود.

محوطه دانشگاه ازلحاظ زیبائی طبیعی، وسعت فضا،سلامت محیط، مجهز بودن‌ساختمانها، نزدیکی‌سالن‌های‌مختلف‌سخنرانی ونمایشگاههای‌کتاب وکارگاههای علمی، سالن‌های مختلف ورزشی به‌یکدیگر ووجود هر نوع وسیله و امکانات رفاهی از هرنظرمطلوب ودلپسند شرکت‌کنندگان‌کنگره بود به‌طوری که موقعیت، وضعیت وکیفیت علمی واجرائی‌کنگره را نسبت به کنگره‌های قبل‌ممتازکرده بود.

اکثر شرکت‌کنندگان خانواده‌های خود را نیزهمراه‌داشتند ونمایشگاههای‌کتاب، فیلم‌ها ونرم افزارهای‌کامپیوتری به‌قدری جالب وجاذب بودکه همراهان‌را نیز به‌تماشا و بهره‌بری‌جلب میکرد.

دراین‌کنگره طی۷ روز بیش‌ازه ۱۸۵۰ مقاله درموضوعهای مختلف‌آموزشی به‌صورت سخنرانی، پوستر، فیلم، نمایش، ویدیو ونرم افزارهای‌کامپیوتری ارائه‌گردید. موضوعات‌ارائه شده آنقدرمتنوع، جاذب،تازه‌ومفید بودکه کمترشرکت‌کننده‌ای وجود داشت که موضوع مورد علاقه خودرا نیابد و باعلاقه به‌صورت فعال، درجلسات شرکت نکند.

این‌کنگره هر۴سال یکباردریکی ازکشورهای جهان‌تشکیل می‌شود وزیرنظرکمیسیون‌بین‌المللی آموزش ریاضی[1] وابسته به‌کنگره جهانی ریاضی‌دانان جهان برنامه‌ریزی و به‌مرحله اجرادرمی‌آیدویکی‌ازفعال‌ترین، مهمترین‌ومفیدترین کنگره‌های علمی‌جهان است.

هدف اصلی کنگره تبادل اطلاعات و تجربیات جدید پیرامون آموزش ریاضی در سطح بین‌المللی است که هر استاد یا محقق ریاضی ضمن کار تدریس و تحقیق چهارساله خود درزمینهٔ ریاضی هر دست آوردی، یا تحقیقی که دارد در این کنگره ارائه می‌دهد و در سطح جهانی از نظرات دیگران نیز بهره‌مند می‌گردد.

موضوعات مورد بحث در ۲۳ مقولهٔ از پیش تعیین شده تقسیم و در اختیار شرکت‌کنندگان قرار داشت و هر شرکت‌کننده‌ای مطابق کار و علاقه خود در یکی از گروههای ۲۳ گانه بنام گروه کار[2] ثبت نام می‌کرد و به کار و تحقیق می‌پرداخت. کلیه سخنرانی‌ها و مقالات تخصصی نیز در این ۲۳ گروه تقسیم و تحت سرپرستی واحد به مرحله اجرا درمی‌آید.

جلسه افتتاحیه

در جلسه افتتاحیه کنگره، که در ساعت ۹ صبح روز دوشنبه ۱۷ اوت در سالن بزرگ اجتماعات تشکیل شد، پس از اجرای سرود ملی کانادا و سرود ملی ایالت بزرگ کبک ابتدا آقای میشل گروایس[3] رئیس دانشگاه لاوال خیر مقدم گفت:

«از طرف دانشگاه لاوال این افتخار به من داده شد که به همهٔ شما مدعوین محترم کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی خیر مقدم بگویم. دانشگاه لاوال قدیمی‌ترین دانشگاه فرانسه زبان در آمریکای شمالی است و بیش از ۳۶۰۰۰ دانشجوی دوره‌های کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکترا و ۱۶۳۳ عضو هیأت علمی و ۲۴۷۰ کارمند دارد. ریاضی نه‌تنها علم پایه در تمام دوره‌های تحصیلی دانشگاه حتی علوم انسانی است بلکه یکی از علوم اصلی و پایه در جامعه امروزی ما است. ریاضیدانهای قدیم فیلسوف بودند و ریاضی‌دانهای امروز نیز باید فیلسوف باشند، آموزش و آموختن ریاضی امروز برای زندگی کردن یک اصل است و امروز بیش ازهمیشه برای بقاء انسان اهمیت ویژه‌ای دارد و در این زمینه مسئولیتی که به شما استادان و معلمان ریاضی واگذار شده است مسئولیت سنگینی است و اهمیت به سزائی دارد. و در ارتباط با این مسئولیت ما بسیار مفتخر هستیم که میزبان هفتمین کنگره آموزش ریاضی هستیم و امیدواریم کوشش‌های شما در زمینه آموزش ریاضی در این کنگره شکوفا شود و برای همه مثمر ثمر واقع گردد. دانشگاه لاوال خودش را در انجام این وظیفه مسئول می‌داند و همه امکانات خودرا در جهت موفقیت هرچه بهتر این کنگره به کار می‌گیرد و همهٔ توان خودرا مصروف آن می‌کند. امیدوارم در این دانشگاه اقامت خوش و خاطره‌انگیز و پربار داشته باشید.»

سپس شهردار کبک آقای جین پل آلیر[4] با سخنرانی کوتاهی حضور میهمانان را در شهر کبک خوش آمد گفت:

«رابطهٔ ریاضی با علم، مثل رابطه زبان با فرهنگ است از این رو مشکل نیست که اهمیت زیاد آن را در زندگانی روزمره خود دریابیم و این اهمیت با پیشرفت تکنولوژی روز به روز بیشتر می‌شود. بررسی عمیقتر ریاضی اثبات کرده است که این علم پیشنیاز گریزناپذیر پیشرفت علوم و درنتیجه پیشرفت ملت‌ها است به‌ویژه، اثر آن در پیشرفت تکنولوژی روشن است و به‌همین علت ما برای آموزش ریاضی و پیشرفت آن در تمام مقاطع تحصیلی اهمیت خاصی قائلیم و این علم در کشور ما از ارزش و اعتبار بالائی برخوردار است. شهر کبک، مهد تمدن فرانسوی در آمریکای شمالی است و من به‌نمایندگی از طرف مردم این شهر مفتخرم که حضور شما را در این کنگرهٔ بزرگ و تاریخی خیرمقدم بگویم و آرزوی موفقیت شما را در این کنگره دارم.»

بعد از سخنرانی شهردار کبک پیام نخست‌وزیر کانادا به‌شرح زیر قرائت شد:

«من بسیار خوشحالم که می‌توانم بهترین و گرم‌ترین آرزوی خودرا با شعف بسیار به‌همه گروهها و شرکت‌کنندگان هفتمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی صمیمانه ابراز کنم. در جهانی که هر روز در حال تغییر و تحول است، معلمان، پیشوایان واقعی جامعه هستند تا جوانان را جهت روبرو شدن با دنیای آینده مهیا و آماده سازند. این کنگره، فضای مناسب و آرمانی جهت مبادله افکار و تبادل نظریات و عقاید شما معلمان و استادان ریاضی را در رابطه با آموزش ریاضی از هرحیث فراهم می‌سازد مسلماً شما نیز از این که فرصت یافته‌اید در این کنگره شرکت کنید و با آخرین دست‌آوردها و پیشرفت‌های علمی درزمینه آموزش ریاضی آشنا شوید خوشحال هستید. من برای همه شما آرزوی موفقیت می‌کنم و بدینوسیله آغاز چنین کنگره عظیم را بهمه شما تبریک گفته و اقامت خوشی را برای همه شما در کبک آرزو می‌کنم.»

آخرین سخنران جلسه افتتاحیه نماینده دولت ایالت کبک بود که متن پیام رئیس دولت کبک را به‌شرح زیر قرائت کرد:

«من از طرف دولت ایالت کبک بهترین و صمیمانه‌ترین تبریکات خودرا بهمه میهمانان عزیز هفتمین کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی ابراز میدارم. امیدوارم که این کنفرانس برای همه شما مفید

واقع‌شود من برای همه شما آرزوی موفقیت می‌کنم وازمجریان و برنامه‌ریزان این کنگره صمیمانه سپاسگزارم و از آنان قدردانی می‌نمایم. امیداست دراین ویلای بزرگ شهر کبك اقامت خوشی داشته باشید و بادست پر و خاطره خوش اینجارا ترك کنید.»

سپس کنگره توسط رئیس کمیسیون تعلیم وتربیت ریاضی افتتاح وفعالیت علمی آن آغازشد. اولین سخنران کنگره آقای جفری‌هاسن[5] به‌صحنه آمد وسخنرانی او تحت عنوان «معلمین ریاضی» آغازگردید.

بعد ازسخنرانی آقای هاسن مراسم اعطای درجه دکترای افتخاری دانشگاه لاوال به‌دونفر ازاعضای کمیسیون تعلیم و تربیت ریاضی بنام هنری‌پولك[6] ازآمریکا و جین‌پیرکاهان[7] از فرانسه به‌عمل آمد و همچنین دراین جلسه از زحمات اعضاء کمیسیون وستاد اجرائی کمیته قدردانی شد و به‌تنی چند نیز جوایزی اعطاگردید.

برنامه‌های علمی کنگره

۱ــ سخنرانی‌های عمومی[8]

درطول کنفرانس، ۴ سخنرانی عمومی یکساعته توسط چهار دانشمند وصاحب‌نظر ریاضی ایرادگردیدکه تازه و جالب بود. هنگام اجرای سخنرانی عمومی هیچ برنامه دیگری اجرانمی‌شد تاهمه شرکت‌کنندگان بتوانند دراین سخنرانی‌ها شرکت کنند. سخنرانان به‌دوزبان (انگلیسی وفرانسه) معرفی می‌شدند ولی سخنرانی‌ها، به‌یکی ازدوزبان انگلیسی ویافرانسه ایرادمی‌شد. وقتی سخنرانی به‌زبان انگلیسی بود متن آن به‌زبان فرانسه و به‌صورت اسلاید در دوسوی سخنران به‌معرض خواندن ودید قرارمی‌گرفت وبه‌عکس. این‌کار این‌امکان را می‌دادکه همه بتوانندازسخنرانی‌ها به‌هردوزبان بهره‌گیرند وعلاوه بر آن گوشی ترجمه به۳ زبان نیزدراختیار شرکت کنندگان قرار می‌گرفت (انگلیسی، فرانسه، اسپانیولی) وژاپنی‌ها به‌دلیل کثرت شرکت کننده وبهره‌بری بیشتر ازسخنرانی‌ها باخودمترجم نیز آورده بودند ولی بهرحال زبان رسمی کنگره انگلیسی یافرانسه بود.

درهر سخنرانی یك متخصص زبان ناشنوایان نیز در سالن مقابل شرکت کنندگان می‌نشست و با حرکات دست ولب متن سخنرانی‌را برای ناشنوایان شرح می‌داد.

سخنرانان وموضوع سخنرانی‌های عمومی به‌شرح زیر بود:

آقای جفری‌هاسن استاد مطالعات و برنامه‌ریزی ریاضی دانشگاه ساتم‌تن[9] انگلستان. وی‌متخصص جبر است ودر سالهای ۱۹۶۰ به‌آموزش ریاضی روی آورده است واینك یکی از نویسندگان کتابهای‌درسی‌ریاضی‌درانگلستان‌است وعضو آژانس بین‌المللی تعلیمات ریاضی ورئیس گروه تحقیق معلمان‌ریاضی انگلستان درزمینه‌آموزش ریاضی است. وی دبیر کمیسیون بین‌المللی‌تعلیمات‌ریاضی(ICME) وصاحب تألیفات‌زیادی‌در زمینه ریاضی و آموزش ریاضی است. سخنرانی اوتحت‌عنوان معلمین ریاضیات[10] بعدازجلسه افتتاحیه باحضوراکثر شرکت کنندگان، فوق‌العاده مورد توجه قرارگرفت.

سخنران‌دوم خانم ماریاکلاو[11] رئیس دپارتمان‌علوم‌کامپیوتر دانشگاه انگلیسی زبان کلمبیا درونکاور[12] کانادا بود.

ایشان دارای درجهٔ دکترا درریاضیات ازدانشگاه البرتا[13] است. اوبعداً متمایل به‌استفاده ازکامپیوتردرآموزش ریاضی گردیده‌است ودراین زمینه‌تحقیقات زیادی‌دررابطه‌بین‌کامپیوتر وریاضیات دارد. موضوع سخنرانی وی عبارت بود از:

تحقیقات ریاضی را وارد زندگی‌کنید باآموزش‌آن در دوره متوسطه[14].

سخنرانی وی نیززیاد مورد توجه شرکت کنندگان قرار گرفت.

سخنران‌سوم خانم‌کولت لابورد[15] استاد انستیتوی‌دانشگاهی وابسته به‌دانشگاه گرنوبل[16] فرانسه بود. وی‌دردانشگاه‌گرنوبل ریاضیات‌وروش آموزش ریاضی‌را تدریس‌می‌کند وعضوگروه تحقیق درزمینه‌آموزش ریاضی‌شهرپاریس است ودراین زمینه تألیفات، مقالات وتحقیقات زیادی را درسطح بین‌المللی‌ارائه داده است. برنامه‌های آموزشی ریاضی در سطوح مختلف دانشگاهی دردانشگاه‌گرنوبل فرانسه‌به‌وسیلهٔ وی طراحی، تهیه وتدوین می‌شود وباگروه‌های تحقیق درزمینه‌آموزش ریاضی آلمان، ژاپن وکانادا همکاری ومسئولیت‌هدایت ورهبری آنها را برعهده دارد ودرزمینه پیشرفت‌آموزش ریاضی در فرانسه نقش ارزنده‌ای را ایفاکرده است. عنوان سخنرانی او عبارت بود از:

استمرار وتغییرات[17]

که محتوی نکات جالبی درزمینه‌آموزش هندسه بود.

سخنران چهارم آقای‌بنویت ماندل بروت[18]، یك فیزیکدان مرکز تحقیقات آی بی ام واتسن[19] و یك ریاضیدان دانشگاه ویل[20] بود وی درجات علمی خودرا از دانشگاههای‌پلی‌تکنیك

پاریس وانستیتوی تکنولوژی کالیفرنیا ودانشگاه پاریس کسب کرده است. وی علاوه بر آنکه عضو آکادمی علوم آمریکا است عضو آکادمی علوم اروپا نیزمی‌باشد ودردنیا به دانشمند هندسه شهرت دارد. وتحقیقات زیادی درزمینه ریاضی، آموزش ریاضی وفیزیك وتکنولوژی به جهان ارائه داده است.

عنوان سخنرانی وی عبارت بود از: هندسه تجربی وفرکتالها[21] (برای دانش‌آموزان وهمه) که درساعت ۱۰ روز ۲۳ اوت قبل از جلسه اختتامیه به عمل آمد، که فوق‌العاده مورد توجه قرار گرفت. اگرچه آخرین سخنران کنگره بود ولی شهرت او و موضوع سخنرانی اوطوری جاذب بود که اکثریت شرکت کنندگان را به خاطر شنیدن سخنرانی وی تا آخرین لحظات کنگره مشتاق و منتظر نگهداشته بود.

برخلاف کنفرانس‌های علمی داخلی که جلسات آخر آن کم جمعیت و بی‌رونق است جلسه آخر کنگره آموزش ریاضی بسیار پررونق وپرشنونده بود وهمه منتظر شنیدن سخنرانی آخر بودند که موضوع جالب و تازه‌ای را در جهان هندسه ارائه داد هندسه‌ای که به کمك کامپیوتر در خدمت هنر قرار گرفته است.

۲ـ گروههای کار

ازهمان روز اول، ۲۳ گروه کار تشکیل شد وهمهٔ شرکت کنندگان مطابق ذوق وعلاقه خود نسبت به موضوع مورد بحث هر گروه که از پیش تعیین شده بود به ۲۳ دسته تقسیم شدند. زمان کار گروهها موازی وطوری بود که هرکس فقط می‌توانست عضویت یکی ازاین گروهها را بپذیرد هر گروه یك مدیر و دو دستیار داشت که اسامی همه اعضاء گروه را دراختیار داشتند وبرنامه و چکیده موضوعات مورد بحث را دراختیار آنها قرار می‌دادند وخود آنها جلسات را اداره می‌کردند. جلسات صبحها ازساعت ۸/۵ تا ۱۰ تشکیل می‌شد ودرهر جلسه حداقل ۴ سخنران بودند که هرکدام حدود ۲۰ دقیقه پیرامون موضوع اصلی مورد بحث گروه مقاله وسخنرانی خودرا ارائه می‌دادند (۱۵ دقیقه سخنرانی و ۵ دقیقه پرسش وپاسخ) و سرانجام نیز ۱۰ دقیقه به نتیجه‌گیری وجمع‌بندی وارتباط موضوعات به یکدیگر وبه موضوع مورد بحث اختصاص می‌یافت وبه هیچ کس اجازه داده نمی‌شد که موضوع بحث را منحرف ویا خوددر بحث ازموضوع خارج شود. درمقایسه با کاردانشگاهی هر گروه به صورت یك کلاس درس فعال درآمده بود باارزش تقریبی ۸ واحد دانشگاهی که در آن بیش از ۳۰ استاد و محقق نتیجه کار ۴ ساله خود را پیرامون یك موضوع علمی ارائه می‌داد ونتایج آن به بحث وبررسی گذاشته می‌شد.

هرکس در هر گروه اگر فعال شرکت می‌کرد در پایان کنگره حداقل پیرامون موضوع مورد بحث آن گروه صاحب نظر بود.

تعداد شرکت کنندگان کنگره ازهر کشور اگر حداقل ۲۳ نفر وبابرنامه‌ریزی دقیق باشند به طوری که در هرگروه لااقل یك نفر شرکت کند بالاترین بهره را از کنگره خواهد برد وبسیاری از کشورها چنین برنامه‌ای داشتند وآنها از نتایج کنگره به این روش بهره فراوان بردند.

تعداد سخنرانی ومقالات دریك گروه اگرازحد ۴ سخنرانی درروز تجاوز می‌کرد آن گروه متناسب با تعداد مقالات به چند زیرگروه تقسیم می‌شد و افرادی که در آن گروه ثبت نام کرده بودند مطابق علاقه خود به یکی از این زیر گروهها هدایت می‌شدند.

گروههائی که بدین نحو دارای چند زیرگروه بودند یك یا دوجلسه عمومی ومشترك داشتند که دراین جلسات نظرات و موضوعات مورد بحث زیرگروهها در ارتباط باموضوع اصلی کارگروه هماهنگ می‌شد.

موضوعات کلی مورد بحث گروهها بشرح زیر است:

WG1: شکل‌گیری مفاهیم اولیه دردورهٔ ابتدائی
WG2: تصورات غلط وتناقضات فکری دانش‌آموزان
WG3: مشکلات دانش‌آموزان دریادگیری ریاضیات
WG4: نظریه‌های یادگیری درریاضیات
WG5: تکامل طرز تلقی وانگیزهٔ دانش‌آموز
WG6: آموزش قبل وضمن خدمت معلمان
WG7: زبان وارتباط درکلاس
WG8: نوآوری دانش‌آموزان در کلاس ریاضی
WG9: تغییر دادن برنامه‌های درسی ریاضی درکلاس و بین کلاسها
WG10: کلاسهای با چند فرهنگ وزبان
WG11: نقش هندسه درآموزش عمومی
WG12: احتمال وآمار برای شهروندان آینده
WG13: جایگاه جبردر دورهٔ متوسطه وپیش‌دانشگاهی

WG۱۴: مدلسازی ریاضی درکلاس درس

WG۱۵: ریاضیات دورهٔ کارشناسی برای گروههای مختلف دانشجویان

WG۱۶: تأثیرماشین حساب در برنامه‌های درسی مـدارس ابتدائی

WG۱۷: تکنولوژی درخدمت برنامه‌ریزی ریاضی

WG۱۸: روشهای اجرای تغییردربرنامهٔ درسی

WG۱۹: ریاضیات برای کسانی که‌مدرسه‌را ناتمام‌ترك کرده‌اند

WG۲۰: ریاضیات درآموزش ازراه دور

WG۲۱: برداشت مردم ازریاضی وریاضیدان

WG۲۲: آموزش ریاضی باکاهش ؟

WG۲۳: روشهای تحقیق درآموزش ریاضی

۲۳ گروه کاردرطول یك هفته (زمان کنگره) جمعـاً ۹۲ جلسه عمومی وحداقل ۱۷۶ جلسه اختصاصی، به‌صورت گروهی و زیر گروهی‌وتیمی، تشکیل‌دادند وغیر از بحث‌های مشترك‌وهماهنگی بین‌گروهی جمعاً ۱۰۷۲ مقاله وسخنرانی۲۰ دقیقه‌ای پیرامون موضوعات خاص‌آموزش ریاضی ارائه گردیـد. جمـع‌آوری مجموعه این‌مقالات که گنجینه‌ای ازاطلاعات علمی است برای کشورهائی که تعداد شرکت‌کنندگان فعال‌آن‌کمتر از ۲۵ نفـر باشد غیرممکن است آن‌هم به‌شرط این است که به‌طورگروهی و هماهنگ وبابرنامه‌ریزی قبلی باشند. کشورهائی نظیـرژاپن، آلمان، فرانسه، کانادا، استرالیا، آمریکا، انگلیس، اسپانیا که باجمعیتی بیش از ۱۰۰ نفربابرنامه مشخص و به‌خرج دانشگاه یا وزارت‌آموزش وپرورش دراین کنگره‌شرکت‌کرده بودند بیشترین اطلاعات راجمع‌آوری کردند وبالاترین بهره‌را از کنگره بردند.

۳ـ سخنرانی‌های ۴۵ دقیقه‌ای

درطول‌کنفرانس تعداد ۴۴ مقاله وسخنرانی۴۵ دقیقه هـر روز۸سخنرانی در۸ سالن به‌طورموازی ودر۶ زمان ازطرف استادان ریاضی‌کشورهای مختلف جهان در زمینه‌های‌گوناگون آموزش ریاضی ارائه‌گردید زمان اجرای سخنرانی‌ها طوری بودکه هرکس می‌توانست هرروز ازدوجلسه‌آن استفاده کند و تداخلی بادیگر برنامه‌های علمی‌کنگره نداشت. سخنرانی‌هافقط به‌یکی ازدوزبان انگلیسی وفرانسه ایرادمی‌شد ولی به‌سه زبان انگلیسی، فرانسه واسپانیائی ترجمه می‌گردید.

موضوع سخنرانی‌ها ونام سخنرانان‌درذیل معرفی می‌گردد بدیهی است‌که این‌سخنرانی‌ها یالااقل‌خلاصه‌آنها در گزارش نهائی‌کنگره چاپ خواهد شد ولی‌کسانی‌که مایل باشند به‌یکی ازاین‌مقالات دسترسی یابندمی‌توانند نشانی‌نویسنده یاسخنران را ازاینجانب درخواست نمایند.

۱ـ هندسه به‌عنوان یك عنصرفرهنگی

ALEXANDROV, A. D. (Russia)
"Geometry as an element of culture"

۲ـ سنت‌ها ونوآوری‌ها درآموزش ریاضی

ARBOLEDA, Luis carlos (Colombia)
"Tradition and innovation in the teaching of mathematicin Colombia, 1750-1920"

۳ـ آیا هندسه برای آموزش علوم به‌دانش‌آموزان‌سنین ۱۱تا ۱۸ ساله ضروری است؟

AUDIBERT, Gérard (France)
"Is geometry essential for the scientific educa tion of students between the ages of 11and18?"

۴ـ شناخت‌پروژه‌های‌آموزشی
مطالعات تجربی روی آموزش مباحث‌کلیدی‌ریاضیات

BELL, Alan (UK)
"The Diagnostic Teaching Project: experimetal studies of approaches to the teaching of key mathematicalopics"

۵ـ خواندن،نوشتن وریاضی، بازگشت‌به‌ریشه وروابط‌آنها

BORASI, Raffaella (USA)
"Reading, writing and mathematics: rethin king the "basics" and their relationships"

۶ـ اخلاق اجتماعی برای‌آموزش ریاضی

CHEVALLARD, YVes (France)
"A. social ethic for mathematics education"

۷ـ معلمینی که از ویدئو به‌عنـوان یك‌منبع آموزشی استفاده می‌کنند.

CLARK, John (Canada)
"Teachers using videotapes as reference points to assess their students"

۸ـ نقدی بر ریاضیات دوره متوسطه
CLARKE, David (Australia)
"The challange of secondary school mathematics"

۹ـ ریاضیدانها و آموزش ریاضی درجامعه باستانی مایا
CLOSS, Michael P. (Canada)
"Mathematicians and mathematical education in ancient Maya society"

۱۰ـ حل مسأله، یك بررسی فراگیر
DANTE, Luiz R. (Brazil)
"Problem solving: an inclusive approach"

۱۱ـ مارپیچ تئودروس
DAVIS, Phiiip J. (USA)
"The spiral of Theodorus"

۱۲ـ فرما، گلدباخ ووارینگ
DESHOUILLERS, Jean-Marc (France)
«Fermat, Goldbach, Waring»

۱۳ـ نگاهی به‌تحولات برنامه‌ریزی آموزشی آمریکا وآلمان
DELANGE, Jan (Netherlands) "Curriculum chang: an American-Dutch Perspective"

۱۴ـ ریاضی‌بازتابی ازفرهنگ‌جامعه درهر دوره تاریخی‌است: برداشت تاریخی و آموزشی
DHOMBRES, Jean (France)"Mathematics as the reflection of the culture of anepoch: historical and didactical considerations"

۱۵ـ تصور وتصدیق در تحقیق ویادگیری ریاضی
DREYFUS, Tommy (Israel) "Imagery and reasoning in mathematical learning and research"

۱۶ـ درهم‌آمیختن اعداد، اشکال وآمار و دنیای واقعی در مدرسه، معلم وآموزش در دوره ابتدائی
DUNKELS, Andrejs (Sweden) "interweaving numbers,shapes,statistics, and the realworld in primary school and primary teacher education"

۱۷ـ ازتقسیم تاکسر
GIMENEZ, Joaquin (Spain) "From sharing to fractions"

۱۸ـ کارهای هنس فرودنتال درآموزش ریاضی
GOFFREE, Fred (Netherlands) "Hans Freudenthal(1905-1990): working on mathematics education"

۱۹ـ حل مسأله وآموزش ریاضی برای ناشنوایان
GOODSTEIN, Harvey (USA) "Teaching mathematics and problem solving to deaf students"

۲۰ـ گرایش‌های جدید در آنالیز ترکیبی
GRAHAM, Ronald L. (USA) "Recent trends in combinatorics"

۲۱ـ ریشه‌ها و تکامل تدریجی نظریه‌های ریاضی بانگرش به آموزش ریاضی
GUZMAN, Miguel de (Spain) "The origin and evelution of mathematical theories: implications for mathematical education"

۲۲ـ حساب بی‌نهایت‌کوچك‌ها
HODGSON, Bernard R. (Canada) "Infinitesimal calculus"

۲۳ـ مبانی کامپیوتر درجهان‌های‌کوچك
HOYLES, Celia (UK) "Computer-based microworlds: a radical vision or a trojan Mouse?"

۲۴ـ راههای مختلف دانستن ومقایسه شیوه‌های استدلال‌ریاضی درهند وغرب
JOSEPH, George G. (UK) "Different ways of knowing: contrasting styles of mathematical argument in India and the West"

۲۵ـ آموزش ریاضی دردهکده‌های محصور
JURDAK, Murad (Lebanon) " Mathematics education in the global village:the Wedge and the Filter"

۲۶ـ درك، دریافت ریاضی
KIEREN, Thomas E. (Canada) "Understandig mathematical understanding"

۲۷ـ ریاضیات ودنیای اطراف ما
LANCASTER, Ronald (Canada) "Mathematics

and the world around us"

۲۸- تربیت معلم یا آموزش حرفه‌ای چگونه انجـام وچطور به‌نتیجه میرسد

LAPPAN, Glenda (USA) "Training teachers or educating professionals? What are the issues and how are they being resolved?"

۲۹- آئینه درونی یك تعمیم درنظریه فاصله

LEMAY, Fernand (Canada) "The inner mirror: a generation of the idea of distance"

۳۰- تکمیل حرفه معلمی بـاتشویق، دادن مـدرك و ارزیابی توان‌کاری آنها

LOVITT, Charles (Australla) "The professional development of teachers through recognizing, documenting, and sharing the Wisdom of practice"

۳۱- شعور ومنطق

OTTE, Michael(Germany)"intuition and logic"

۳۲- کودکان وارثی که ازفرهنگ ریاضی می‌برند

PAEZ, Lelis (Venezuela) "Children and their inherited mathematical culture"

۳۳- فردا را اسیر افکار دیروزنکنید ببینیدکه چگونه کامپیوتر درحضورشما به‌آموزش ریاضی می‌پردازد.

PAPERT, Seymour (USA) "Don't let tomorrow be the prisoner of the primitivity of yesterday; rethinking what the computer presence can offer math education"

۳۴- نگرشی به‌یك مبنا ازساختمان اعدادگویا

ROUCHE,Nicolas (Beigium)"Towards a realistic construction of numbers"

۳۵- ریاضیات یك زبان است

SCHWEIGER, Fritz (Austria) "Mathematics is a language"

۳۶- ریاضیات خوب یا نازیبا؟

SHELLEY, Nancy (Australia) "Mathematics–beyond good and evil?"

۳۷- فکرریاضی واندیشه استدلالی

SILVER, Edward A. (USA) " Mathematical thinking and reasoning for all students: movingfrom thetoric to reality"

۳۸- تحقیقی تازه درآموزش ریاضی

TREISMAN, Uri (USA)"New approaches to the mathematical education of minorities in the United States"

۳۹- یك بررسی نودرفلسفه ریاضی و کاربرد آن در آموزش ریاضی درآمریکا

TYMOCZKO, Thomas(USA)"New trends in the philosophy of mathematics and their impiications for mathematics education"

۴۰- ازریاضیات برای افراد خاص تاریاضیات برای همه

USISKIN, Zalman (USA) "From "mathematics for some' to mathematics for all"

۴۱- درباره درك‌واحساس‌قضایای‌ریاضی‌توسط دانش‌آموزان ومعلمان

VOLLRATH, Hans-Joachim (Germany) "About the appreciation of theorems by students and teachers"

۴۲- ریاضیات گسسته وچگونه باید به‌آن اندیشید

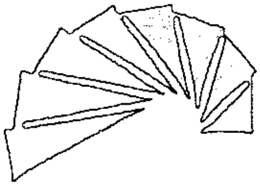
VANLINT, Jack (Netherlands)"What is discrete mathematics and how should it be taught?"

۴۳- تقویت قدرت حل‌مسأله دردانش‌آموزان از طریق کشف سؤال ازاشیاء وهرچیزی‌که هرروز اطراف آنها احاطه دارد

WALTER, Marion (USA) "Developing students' problem-posing abilities by deriving questions from their surroundings,everyday materials,and other thnigs"

۴۴- ساختارهمکاری برنامه‌ریزی ریـاضی در مسائل مـربوط به‌سازمان تربیت معلم

LAMPERT,Magdalene(USA)"The collaborative construction of the mathematics curriculum using teacher-constructed problems"



۴- گروههای بحث موضوعی[۲۲]

درارتباط بامسائل مربوط به‌آموزش‌ریاضی درهر دوره از کنگره، توسط ستاد اجرائی یاکمیسیون بین‌المللی آموزش ریاضی ICMI مسائل دسته بندی‌شده تحت یك عنوان به‌صورت موضوعی‌مشخص ودراطلاعیه دوم به‌اطلاع تمام‌کسانیکه تمایل خودرا به‌شرکت درکنگره اعلام کرده‌اند، میرسانند و هرکس که دریك زمینه اطلاع، تجربه یانظرخاص داشته باشد علاقه خود را درتکمیل تقاضانامهٔخود ابرازمی‌کند بدین‌ترتیب تمام شرکت‌کنندگان به‌چندین گروه تحت موضوعات مختلف تقسیم می‌شوند.

هرگروه برنامه‌ریزوسرپرستی داردکه توسط‌کمیته‌اجرائی مشخص وبه‌شرکت‌کنندگان معرفی‌می‌شود وهمه می‌توانندباوی مکاتبه‌کرده مطلب مورد نظرخودرا اعلام وبرای ارائه وبحث آن‌وقت بگیرند هرکس فقط‌می‌تواند داوطلب عضویت‌دریکی ازاین‌گروهها باشد.

درکنگره هفتم ۱۷ گروه در۱۷ موضوع تشکیل‌شده بود و هرگروه درطول یك هفته دوجلسه ۱/۵ ساعتی‌تشکیل‌داد و در هرجلسه حداقل۶ نفر، هرکدام به‌مدت ۱۰ تا ۱۵ دقیقه، در ارتباط باموضوع اصلی صحبت می‌کردند سپس در اطراف صحبت‌ها بحث‌کرده وسرانجام بوسیله مدیرجلسه مطالب گفته شده جمع‌بندی و نتیجه‌گیری می‌شد.

درگروههای موضوعی۱۷ گانه کنگرهٔ۷حداقل۲۰۴ سخنرانی ۱۰ تا ۱۵ دقیقه‌ای پیرامون ۱۷ موضوع خاص در زمینه آموزش ریاضی ارائه شد وبه‌جمع‌بندی ونتیجه‌گیری وتبادل اطلاعات انجامید.

موضوعات مورد بحث در گروههای موضوعی عبارت بودند از:

TG۱- مسابقات ریاضی
TG۲- ریاضی‌شناسی وآموزش ریاضی
TG۳- ریاضیات برای‌کار: آموزش حرفه‌ای
TG۴- مردم عادی (بومی) وآموزش ریاضی
TG۵- زمینه‌های اجتماعی‌آموزش ریاضی
TG۶- نظریه وکاربرد استدلال
TG۷- بازیها وجدول‌های ریاضی
TG۸- آموزش ریاضی باپروژه
TG۹- ریاضیات درقالب‌کلی برنامه‌ریزی‌آموزشی
TG۱۰- تعبیرسازمان‌دهندگان ازتعلیم وآموختن‌ریاضیات
TG۱۱- هنروریاضیات
TG۱۲- برنامه‌های دوره‌کارشناسی وشکل‌تحقیق در آموزش ریاضیات
TG۱۳- تلویزیون درکلاس درس‌ریاضی
TG۱۴- همراهی نظریه وتجربه در آموزش ریاضی
TG۱۵- آماردربرنامه درسی مدارس وآموزشکده‌ها
TG۱۶- فلسفه‌آموزش‌ریاضی
TG۱۸- ریاضی ادبیات حرفه‌ای برای معلمین

(ادامه‌دارد)

زیرنویسها

۱- INTERNATIONAL COMISSION ON MATHEMATICAL INSTRCUTION (ICMI)
۲- Working Groups
۳- Michel Gervais
۴- Jean paul L'Allier
۵- Geoffrey Howson
۶- Henry pollak
۷- Jean pierre kahane
۸- Plenary lectures
۹- Southampton
۱۰- Teachers of mathematics
۱۱- Maria klawe
۱۲- Vancourer
۱۳- Alberta
۱۴- Bringing mathematics to life in the interme diale grades
۱۵- Colette Laborde
۱۶- Grenoble
۱۷- Teaching geometry; permanences and revolutions
۱۸- Benoit Mandelbrot
۱۹- IBM. T. J. natson
۲۰- Yale
۲۱- Experimental geometry and fractals; for the students and for everyman
۲۲- Topic Groups

بقیه از صفحه ۲

ریاضی سابق تهیه و تدوین شده بود. این شورا مرکب از تعداد نسبتاً زیادی از اعضای هیأت علمی دانشگاهها و دبیران ریاضی و کارشناسان گروه ریاضی دفتر بود. کلیه سرفصلها در جلسات متعدد شورا تدوین گردید حتی سرفصل دروس سال سوم و دورهٔ پیش‌دانشگاهی هم آماده شده است. ریزمواد این دروس در شماره‌های قبلی رشد آموزش ریاضی به اطلاع خوانندگان عزیز رسیده است. در جلسات متعدد این شورا دیدگاههای مختلف بررسی شده و این سرفصلها باتوجه به اهداف تغییرنظام و نظام جدید و با استفاده از منابع و کتابهای مختلف دوره‌های متوسطه قبلی و کشورهای مختلف جهان تعدیل گردید و به‌صورت مجموعه‌ای منسجم درآمد. سال گذشته کتابهای ریاضی ۱ و ۲ و هندسه، به‌طور آزمایشی تألیف و در اختیار وزارت آموزش‌وپرورش قرار گرفت و تغییر نظام برای ده درصد عملی گردید. در کتابهای ریاضی عمومی تحول عمده‌ای صورت گرفته است جنبه‌های تئوری جای خود را به مباحث ملموس و کاربردی داده است. خوشبختانه امسال کتابهای ریاضی ۱ و ۲ و هندسه، بازسازی شده و باتوجه به نظریات و پیشنهادات همکاران محترم و دبیران ارجمند مجدداً تدوین شده است که هم‌اکنون توزیع شده است. اغلاط چاپی تصحیح شده است و فرمت کتابها به‌صورتی درآمده که مطالعهٔ آن برای محصلین خسته‌کننده نباشد. قصد ما در این مقاله بررسی کتابها و یا احیاناً دفاع از آنها نیست. این کتابها هم‌اکنون در دسترس دانش‌آموزان گرامی ودبیران محترم قرارگرفته است ، مسلماً همکاران ما در دوره‌های متوسطه در طول تدریس خود نظریات خود را به هیأت مؤلفین ارسال خواهند کرد تا دربازسازی مجدد مورد استفاده قرار گیرد. قضاوت آنها بیانگر واقعیتهاست و اینکه محتویات این کتابها چه میزان با واقعیتهای موجود متناسب است. همین‌جا از صاحبنظران آشنا به نظام جدید و متبحر در دانش ریاضی دورهٔ متوسطه دعوت می‌کنیم تا با دیدی نقادانه به مطالعهٔ عمیق این کتابها پرداخته و از هیچگونه راهنمایی و ارشاد دریغ ننمایند. بدیهی است هرگونه اظهارنظر و قضاوت مبتنی بر مطالعهٔ سطحی و غیرعمیق چه مثبت و چه منفی نه‌تنها معقولانه و راهگشا نیست بلکه گمراه‌کننده نیز هست. هیأت مؤلفین انتقادات و پیشنهادات سازندهٔ صاحبنظران را مفیدتر از تعریف و تمجیدهای تعارفی می‌داند، امّا مسلماً هرگونه انتقاد سطحی هم عجولانه و غیرمنصفانه است.

تحول عمیقتر در کتابهای هندسه رخ داده است. به‌گواه متخصصین یکی از روشهای آموزش مقدماتی هندسه، هندسهٔ به روش متریک است. مؤلفین هندسه کوشش نموده‌اند که به‌تدریج محصلین را با پیشرفتهای هندسه در جهان آشنا سازند و متقابلاً هندسه سنّتی هم که کشور ما اسم و رسمی از آن دارد و دبیران زبده محصلین ما را آموزش می‌دهند فراموش نشده است. تلفیق این دو محتوی کتابهای هندسهٔ ۱ و هندسهٔ ۲ است.

اما سخن آخر اینکه هیچ برنامهٔ درسی و هیچ کتابی بدون کتاب معلّم و بدون آموزش و بازآموزی موفق نخواهد بود. عده‌ای باید زیر نظر مستقیم مؤلفین تعلیم ببینند و علاوه بر یادگیری مباحث با اهداف رفتاری، نحوهٔ نگارش، شیوه عرضه مطالب، تسلسل منطقی آشنا شوند و خود به‌عنوان پیام‌آوران جدید راهی مناطق خود شده و عده‌ای دیگر را آموزش دهند. به عبارت دیگر، آن چنان در دوره‌های بازآموزی مباحث و مطالب اصلی و جنبی و شیوه‌های آموزش را فراگیرند که بتوانند از ایده‌های خود قاطعانه دفاع نمایند.

مسلماً نظام جدید آموزشی در چهارچوب اهداف تعیین شده و با تألیف کتابهای سالهای سوم و پیش‌دانشگاهی تحولی عظیم در نظام آموزشی ما ایجاد خواهد کرد. انشاءا... .

سردبیر رشد ریاضی

حل مسأله به روشهای مختلف

ی. م. کلمان
ترجمه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

حل مسایل از راه‌های مختلف امکانات زیادی را برای تکمیل آموزش ریاضی دانش‌آموزان فراهم می‌آورد.

درحل مسایل ازیك طریق، دانش‌آموز تنها یك‌هدف دارد: پیداکردن جواب درست مسأله. اما اگر ازآنها خواسته شود درحل مسأله از راه‌حل‌های گوناگون استفاده کنند، سعی می‌کنند راه‌حل‌های کاملا بکر، زیبا و کوتاه را جستجو و پیدا کنند. دراین کار روشها و کاربردهای زیادی را درذهن‌هایشان مرور می‌کنند و آنها را ازنقطه‌نظر کاربرد روی آن مسأله، تحلیل و بررسی می‌کنند و از تجربه این کار برای حل مسایل دیگر از راههای گوناگون استفاده می‌کنند.

این کارها، فعالیت‌های آموزشی دانش‌آموزان را تقویت و علاقه آنان را نسبت به‌درس موردنظر جلب می‌کند.

برای حل مسایل، از راه‌های گوناگون، دانش‌آموزان‌را باید از کلاسهای چهارم (ابتدایی .م) آماده کرد. دراینجا ما به دانش‌آموزان می‌آموزیم تا شرایط مسأله را تحلیل و بررسی کنند و تلاش کنند تا راه‌حل‌های گوناگون را با استفاده ازمهارت‌ها و روشها و کاربردهایی که‌در ذهن‌خود اندوخته‌اند، ارائه دهند. به‌عبارت دیگر دانش‌آموزان را برای حل مسایل به‌طور استراتژیك آماده می‌کنیم (برای دراز مدت .م). در این خصوص معلم باید، یافته‌های شخصی دانش‌آموزان را مورد تشویق قرار دهد و توجه کلاس را به‌آن جلب کند. معمولا در کلاس، مسأله ازیك و یا دو راه حل می‌شود و پیدا کردن سایر راه‌حل‌ها به‌خانه موکول می‌گردد و قضایایی که درحل مسایل کاربرد دارند مورد اشاره قرار می‌گیرد. به‌این ترتیب دانش‌آموزان با شیفتگی و علاقه مفرط مسایل را پذیرا می‌شوند، و در درسها و تمرینات دوره‌ای، و یا در بررسی‌های مشورتی به بحث‌های داغ و مناظره می‌پردازند و راه‌حل‌های پیشنهادی خود را ارائه می‌دهند. سرانجام مسایلی که دانش‌آموزان ازحل آنها عاجزمانده‌اند مورد بررسی و تحلیل قرارمی‌گیرد.

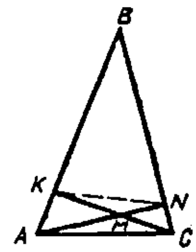
گاه، راه‌حل‌هایی که دانش‌آموزان برای این و یا آن مسأله، پیدا کرده‌اند، مشکل و پیچیده است. اما ازنظراهداف تربیتی و آموزشی، این کارها فوق‌العاده مهم و با ارزش هستند: دانش‌آموزان با شیفتگی بسیار، علاقه مفرط، جستجوی مدام، یادآوری کاربرد قضایای زیاد و روشهای‌معین، به‌چنین‌راه‌حل‌هایی دست یافته‌اند.

به‌این ترتیب ملاحظه می‌شود که درمجموع، تکرار همه‌جانبه بخشی ازبرنامه و استفاده ازحل مسایل به روشهای گوناگون، حاوی مطالب تئوریك زیاد برای‌دانش‌آموزان است. با تنظیم، برنامه‌ریزی و پیگیری معلم برای جلب دانش‌آموزان و عادت دادن آنان به‌جستجوی راه‌حل‌های گوناگون در حل مسائل، مصالح و یافته‌های منطقی دانش‌آموزان افزایش می‌یابد و به قابلیت‌های پژوهشی دانش‌آموزان کمك می‌کند.

اکنون راه‌حل‌های گوناگون چند مسأله از کتاب هندسه مسطحه آ. و. پوگارلووا، را تحت عنوان «هندسه کلاسهای ۱۰-۶» دراینجا موردبررسی قرارمی‌دهیم.

مسأله ۱. ارتفاعات نظیر رئوس A و C ازمثلث ABC یکدیگر را درنقطهٔ M قطع می‌کنند. اگر $\hat{A}=70^\circ$ و $\hat{C}=80^\circ$، آنگاه $A\hat{M}C$ را پیدا کنید شکل (۱)

حل این مسأله امکان می‌دهد تا معلومات دانش‌آموزان درباره زوایا تکرار و تقویت شود: خاصیت زوایای متقابل بر‌أس، زوایای‌مجاور، مجموع زوایای‌مثلث، زوایای‌مثلث‌قائم‌الزاویه، زوایای داخلی مثلث، مجموع زوایای داخلی چهارضلعی‌های محدب.



شکل ۱

روش اول

ازمثلث‌های قائم‌الزاویه AKC و ANC نتیجه می‌شود

$N\hat{A}C = ۹۰^\circ - ۸۰^\circ = ۱۰^\circ$،

$K\hat{C}A = ۹۰^\circ - ۷۰^\circ = ۲۰^\circ$

ازآنجا

$$A\hat{M}C = ۱۸۰^\circ - (۲۰^\circ + ۱۰^\circ) = ۱۵۰^\circ$$

روش دوم

با محاسبه $A\hat{B}C = ۱۸۰^\circ - (۸۰^\circ + ۷۰^\circ) = ۳۰^\circ$ اندازه $K\hat{C}B = ۹۰^\circ - ۳۰^\circ = ۶۰^\circ$ راتعیین می‌کنیم. سپس

$N\hat{M}C = ۹۰^\circ - ۶۰^\circ = ۳۰^\circ$

راکه با زاویه مطلوب AMC مجانب است به‌دست‌می‌آوریم.

درحل این مسئله می‌توان ازمثلث‌های BAN و AKM هم استفاده کرد.

روش سوم

بعضی‌دانش‌آموزان‌سعی‌کرده‌اند بامحاسبه $A\hat{B}C = ۳۰^\circ$ درچهارضلعی BKMN زاویه KMN راکه بازاویه‌مطلوب مسأله متقابل به رأس است، پیدا کنند. اما این راه‌حل به معلومات تکمیلی نیاز دارد. یعنی با توجه به‌این موضوع که این راه حل به‌رشد اندوخته‌های دانش‌آموزان کمک می‌کند پیشنهاد می‌کنیم که ابتدا خود قضیه: «درهر چهارضلعی محدب مجموع زوایای داخلی ۳۶۰° است» را ثابت‌کنند.

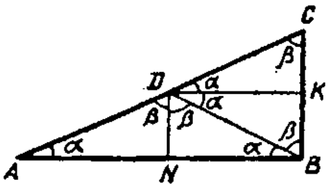
با رسم قطر KN درچهارضلعی BKMN معلوم می‌شود که مجموع زوایای داخلی چهارضلعی برابراست با مجموع زوایای داخلی دومثلث حاصل BKN و MKN.

با استفاده از این قضیه که $B\hat{K}M = B\hat{N}M = ۹۰^\circ$ دانش‌آموزان $K\hat{M}N = ۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ = ۱۵۰^\circ$ را پیدا می‌کنند.

به این ترتیب با حل مسأله از راه‌های مختلف، نه تنها معلومات دانش‌آموزان تقویت وتوسعه می‌یابد، بلکه با روشها وبرهانهای مختلف ریاضی هم آشنا می‌شوند.

مسأله ۲. درمثلث ABC، میانه BD با نصف ضلع AC برابراست. اندازه زاویه B را حساب‌کنید.

شکل (۲)



شکل ۲

روش اول

قرارمی‌دهیم $D\hat{C}B = \beta$, $D\hat{A}B = \alpha$

چون به‌فرض $BD = AD = DC$ پس $D\hat{B}A = \alpha$ و $D\hat{B}C = \beta$. ازآنجا درمثلث ABC داریم

$۲\alpha + ۲\beta = ۱۸۰^\circ$ پس $A\hat{B}C = ۹۰^\circ$

به‌جا خواهد بود وقتی دانش‌آموزان به‌داشتن معلومات اضافی علاقه نشان می‌دهند، مسایلی را که بررسی شده‌اند پیش بکشیم وبراساس مطالب تازه‌آنها را حل‌کنیم.

روش دوم

دایره‌ای برمثلث ABC محیط می‌کنیم که مرکزآن D وشعاع آن DB باشد. چون $A\hat{B}C$ زاویه محاطی و رو به‌رو به‌قطر است پس $A\hat{B}C = ۹۰^\circ$

روش سوم

قرارمی‌دهیم $\hat{A} = \alpha$ و $\hat{C} = \beta$.

درمثلث ABC ازنقطه D خطوط میانگین DN و DK را

رسم می‌کنیم (خط میانگین به‌خطی گفته می‌شود که وسط دوضلع مثلث را به‌هم وصل کند. م) داریم

$$\triangle ADN=\triangle DCK=\triangle BDN=\triangle DBK$$

برای زاویه نیم‌صفحه به‌رأس D می‌توان نوشت:

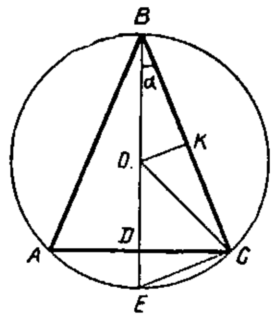
$$۲\alpha+۲\beta=۱۸۰^\circ$$

پس

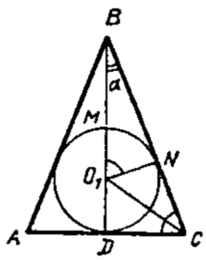
$$A\hat{B}C=۹۰^\circ$$

مسأله ۳. شعاعهای دایره‌های محاطی و محیطی مثلث متساوی‌الساقینی را پیداکنیدکـه قاعده‌آن ۱۰ وساق‌آن ۱۳ سانتیمتر باشد.

در درس پیش، به دانش‌آموزان معلـوماتـی درباره تعیین مراکز دایره‌های محاطی و محیطی داده شده است و آنهـا در خانه‌هایشان ازطریق رسم، مراکز دایره‌های محاطی ومحیطی مثلث غیرمشخص‌را پیداکرده‌اند. برای تعیین R و r شعاعهای دایره‌های محیطی ومحاطی، به‌ترتیب از شکل‌های (۳) و (۴) استفاده می‌کنیم.



شکل ۳



شکل ۴

روش اول

بنابرقضیه فیثاغورث ازمثلث BDC داریم

$$BD=\sqrt{۱۳^۲-۵^۲}=۱۲$$

O مرکز دایره محیطی، $OK\perp BC$ و $BK=KC$

بنابرقضیه فیثاغورث ازمثلث ODC نتیجه می‌شود

$$OD=\sqrt{OC^۲-DC^۲}=\sqrt{R^۲-۵^۲}$$

و

$$OD+OB=BD$$

پس

$$\sqrt{R^۲-۵^۲}+R=۱۲$$

از آنجا

$$R=\frac{۱۶۹}{۲۴}\,Cm$$

$O_۱$ مرکز دایره محاطی و $O_۱D=O_۱N=r$ و

$$BN=۱۳-۵=۸\,cm ، BO_۱=۱۲-r$$

بنابرقضیه فیثاغورث درمثلث $BO_۱N$ داریم

$$O_۱N^۲=BO_۱^۲-BN^۲$$

ویا

$$r^۲=(۱۲-r)^۲-۸^۲$$

ازآنجا

$$r=\frac{۱۰}{۳}\,Cm$$

روش دوم

اگر $D\hat{B}C=\alpha$، آنگاه

$$\cos\alpha=\frac{۱۲}{۱۳}$$

ازمثلث OBK نتیجه می‌شود

$$R=OB=\frac{BK}{\cos\alpha}=\frac{۱۶۹}{۲۴}$$

ازمثلث DBC داریم:

$$\sin\alpha=\frac{DC}{BC}=\frac{۵}{۱۳}$$

درنتیجه ازمثلث $BO_۱N$ نتیجه می‌شود

$$O_۱N=BO_۱\cdot\sin\alpha$$

یا

$$r=(۱۲-r)\cdot\frac{۵}{۱۳} ، r=\frac{۱۰}{۳}\,Cm$$

روش سوم

(با استفاده ازتشابه)

ازتشابه مثلث‌های OBK و CBD داریم

$$\frac{OB}{BC}=\frac{BK}{BD}،$$

ویا

$$\frac{R}{۱۳}=\frac{۱۳}{۲\times۱۲}،$$

ازآنجا

$$R=\frac{۱۶۹}{۲۴}\,Cm$$

چون $\triangle O_۱BN\sim\triangle CBD$

پس

$$\frac{BO_۱}{BC}=\frac{BN}{BD}$$

یا

$$\frac{۱۲-r}{۱۳}=\frac{۸}{۱۲}\ ،r=\frac{۱۰}{۳}\,Cm$$

روش چهارم

برای‌تعیین r دراین‌روش،قبلاً دانش‌آموزان‌را با«تبدیلات تشابه» وخاصیت‌آن درارتباط با رسم مماس و قاطع از یك نقطه بردایره (قوت نقطه) آشناکرده‌ایم. داریم:

$$BN^۲=BM\cdot BD$$

یا

$$۸^۲=(۱۲-۲r)\cdot۱۲$$

ازآنجا

$r=\frac{۱۰}{۳}$ سانتیمتر

روش پنجم

اگر $D\hat{B}C=\alpha$، آنگاه $D\hat{O}C=۲\alpha$ زیرا زاویه‌خارجی مثلث متساوی‌الساقین $C\hat{O}B$ می‌باشد (یا چون نقطه B بامرکز O نسبت به خط EC دریك طرف قرار دارند پس بنابر خاصیت زاویه محاطی داریم

$$E\hat{B}C=\frac{۱}{۲}E\hat{O}C)$$

درمثلث DOC داریم

$$R=OC=\frac{DC}{\sin ۲\alpha}=\frac{۵}{۲\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$\frac{۵}{۲\times\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۱۲}{۱۳}}=\frac{۱۶۹}{۲۴}\,Cm$$

ازمثلث $BO_۱N$ داریم

$$r=O_۱N=BN\operatorname{tg}\alpha$$

چون

$$\cos\alpha=\frac{۱۲}{۱۳}\ ,\ \sin\alpha=\frac{۵}{۱۳}$$

پس

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۵}{۱۲}$$

و

$$r=۸\times\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱۰}{۳}\,Om$$

روش ششم

با استفاده ازقوت نقطه در دایره می‌توان نوشت

$$AD\cdot DC=BD\cdot DE$$

یا

$$۵^۲=۱۲\,(۲R-۱۲)$$

ازآنجا

$R=\frac{۱۶۹}{۲۴}$ سانتیمتر

با استفاده ازخاصیت نیمساز $CO_۱$ درمثلث BDC داریم

$$\frac{CD}{CB}=\frac{DO_۱}{BO_۱}\ ،\ \frac{۵}{۱۳}=\frac{r}{۱۲-r}$$

ازآنجا

$r=\frac{۱۰}{۱۳}$ سانتیمتر

روش هفتم

با محاسبهٔ $BD=\sqrt{۱۳^۲-۵^۲}=۱۲$ و

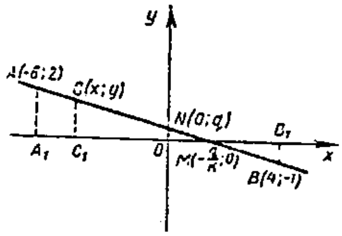
$$S=\frac{۱۰\times۱۲}{۲}=۶۰$$

R و r را پیدا می‌کنیم:

$$R=\frac{abc}{۴S} \text{ ،} r=\frac{۲S}{a+b+c}$$

که درآن a و b و c اضلاع مثلث و S مساحت آن است.

مسالهٔ ۴. معادله خطی را بنویسید که از نقاط $(۴, -۱)$ و $(-۶, ۲)$ می‌گذرد. شکل (۵)



شکل ۵

روش اول

(دراین روش نوشته شده است که مطابق آنچه که درکتاب درسی خوانده‌اید عمل کنید. چون ازاین راه‌حل بی‌اطلاع هستیم. دراینجا روش کتاب خودمان را به‌کارمی‌بریم. م.)

$$y-y_۱=m(x-x_۱) \Longrightarrow y-y_۱=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}(x-x_۱)$$

ویا

$$y+۱=\frac{۲+۱}{-۶-۴}(x-۴)$$

ویا

$$۳x+۱۰y=۲$$

روش دوم

مختصات نقاط مفروض را درمعادله‌کلی خط به‌صورت

$$y=Kx+q$$

قرارمی‌دهیم و به‌دستگاه زیرمی‌رسیم

$$\begin{cases}-۱=۴K+q\\ ۲=-۶K+q\end{cases}$$

ازآنجا

$$q=\frac{۲}{۱۰} \text{ و } K=-\frac{۳}{۱۰}$$

معادله خط موردنظرچنین خواهد بود:

$$۳x+۱۰y=۲$$

روش سوم

به‌دانش‌آموزان‌پیشنهاد می‌کنیم خطی‌راکه ازنقاط $A(-۶,۲)$ و $B(۴, -۱)$ می‌گذرد رسم‌کنند. ومعادله خط را به‌صورت $y=Kx+q$ نوشته ومختصات‌محل برخوردآنرابامحورهای مختصات پیداکنند:

$$M\left(\frac{-q}{K}, ۰\right), N(۰, q)$$

روی‌خط رسم شده نقطه دلخواه $C(x, y)$ را اختیارمی‌کنیم. با یك نگاه، دانش‌آموزان متوجه می‌شوندکه درشکل (۵)

$$q>۰ \text{ و } K<۰ \text{ و } \frac{-q}{K}>۰$$

چون

$$\triangle AA_۱M\approx\triangle BB_۱M$$

ازآنجا

$$\frac{AA_۱}{BB_۱}=\frac{A_۱M}{B_۱M}$$

یا

$$\frac{۲}{۱}=\frac{۶-\frac{q}{K}}{۴+\frac{q}{K}} \Longrightarrow \frac{q}{K}=-\frac{۲}{۳}$$

ازتشابه مثلث‌های $AA_۱M$ و $CC_۱M$ داریم

$$\frac{AA_۱}{CC_۱}=\frac{A_۱M}{C_۱M}$$

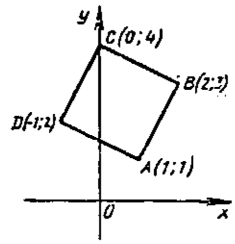
یا

$$\frac{۲}{y}=\frac{۶+\frac{۲}{۳}}{-x+\frac{۲}{۳}}$$

ویا $۳x+۱۰y=۲$

اگرچه این راه‌حل‌کمی طولانی است، اما برای ایجاد مهارت دراستفاده ازصفحه محورهای مختصات مفید است.

مسأله ۵. چهار نقطه A (۱ , ۱)، B (۲ , ۳)، C(۰ , ۴) و D (−۱ , ۲) داده شده‌اند. ثابت‌کنید چهارضلعی ABCD مستطیل است. شکل (۶)



شکل ٦

روش اول

با نشان دادن این نقاط روی‌صفحه محورهای مختصات،تساوی دوبردار را نتیجه می‌گیریم:

$\overline{AB}(۱ , ۲)=\overline{DC}(۱ , ۲)$ پس ABCD متوازی‌الاضلاع است زیرا $\overline{AB}\|\overline{DC}$ و $|\overline{AB}|=|\overline{DC}|$ و نقطه A بر D منطبق نیست.

با محاسبه مختصات بردار $\overline{AD}(-۲ , ۱)$، نتیجه می‌شود

$$\overline{AB}\cdot\overline{AD}=-۲\times۱+۱\times۲=۰$$

$AB\perp AD$ و ABCD مستطیل است.

روش دوم

پس‌ازآنکه ثابت شد ABCD متوازی‌الاضلاع است،طولهای اقطارآن را حساب می‌کنیم:

$$AC=\sqrt{(۰-۱)^۲+(۴-۱)^۲}=\sqrt{۱۰}$$

$$BD=\sqrt{(۲+۱)^۲+(۳-۲)^۲}=\sqrt{۱۰}$$

به‌این‌ترتیب ثابت می‌شود ABCD مستطیل است.

روش‌سوم

طولهای اقطار را حساب می‌کنیم $AC=BD=\sqrt{۱۰}$. مختصات اوساط AC و BD را هم حساب می‌کنیم

$$x_۱=\frac{۱+۰}{۲}=\frac{۱}{۲}\quad ،y_۱=\frac{۴+۱}{۲}=۲/۵$$

$$x_۲=\frac{-۱+۲}{۲}=\frac{۱}{۲}\quad ،y_۲=\frac{۲+۳}{۲}=۲/۵$$

نتیجه می‌شود ABCD مستطیل است وچون

$$|AB|=|BC|=|\overline{CD}|=|AD|=\sqrt{۵}$$

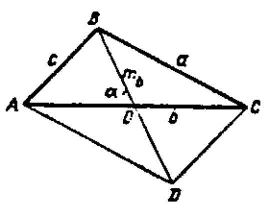
پس ABCD مربع هم است.

حل این مسأله از راههای مختلف، به‌دانش‌آموزان امکان می‌دهد تا طرز تشخیص و خاصیت متوازی‌الاضلاع، مستطیل، مربع را مرور کنند، بردارها را به‌کارگیرند، طول پاره‌خطها را برحسب مختصات آنها حساب‌کنند ومختصات وسط آنها را به‌دست‌آورند.

مسأله ۶. a و b و c طولهای اضلاع یك ثلث هستند. مطلوبست m_a و m_b و m_c، طولهای میانه‌های وارد بر این اضلاع.

روش‌اول

با استفاده ازقضیه‌کوسینوسها درمثلث‌های ABO و BOC داریم: [شکل (۷)]



شکل ۷

$$c^۲=\frac{b^۲}{۴}+m_b^۲-bm_b\cos\alpha,$$

$$a^۲=\frac{b^۲}{۴}+m_b^۲=bm_b\cos\alpha$$

ازجمع دوتساوی داریم

$$m_b=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲a^۲+۲c^۲-b^۲}$$

روش دوم

مثلث ABC را به متوازی‌الاضلاع ABCD تبدیل می‌کنیم وسپس با استفاده ازخاصیت متوازی‌الاضلاع در باره مجموع مربعات اقطار:

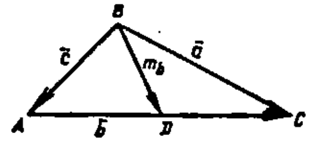
$$(۲m_b)^۲+b^۲=۲a^۲+۲c^۲$$

نتیجه می‌گیریم:

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$$

روش سوم

قرار می‌دهیم (شکل ۸).



شکل ۸

$\overline{BA}=\overline{c}$ ، $\overline{BC}=\overline{a}$ ، $\overline{BD}=m_b$

با استفاده از خاصیت بردارها می‌نویسیم

$$\begin{cases}\overline{a}+\overline{c}=2\overline{m_b}\\ \overline{a}-\overline{c}=\overline{b}\end{cases}$$

طرفین تساوی‌ها را مجذور می‌کنیم:

$$\begin{cases}a^2+2\overline{a}\,\overline{c}+c^2=4m_b^2\\ a^2-2\overline{a}\,\overline{c}+c^2=b^2\end{cases}$$

با جمع طرفین دو تساوی داریم

$$2a^2+2c^2=4m_b^2+b^2$$

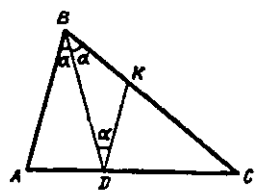
و از آنجا

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$$

مسألهٔ ۷. ثابت کنید نیمساز هر زاویه مثلث، ضلع روبروی آن را به پاره‌خط‌هایی متناسب با اضلاع تقسیم می‌کنند.

روش اول

با رسم $DK\|AB$ (شکل (۹))، مثلث BDK به‌دست می‌آید



شکل ۹

که متساوی‌الساقین است زیرا

$$D\hat{B}K=B\hat{D}K$$

از تشابه مثلث‌های ABC و DKC نتیجه می‌شود

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DK}{KC}=\frac{BK}{KC}$$

اما

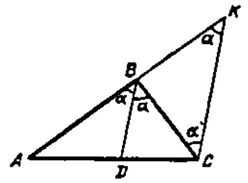
$$\frac{BK}{KC}=\frac{AD}{DC}$$

پس

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$$

روش دوم

$CK\|BD$ را رسم می‌کنیم و AB را امتداد می‌دهیم تا CK را قطع کند (شکل (۱۰)). با استفاده از خاصیت زوایای خطی



شکل ۱۰

که دوخط موازی را قطع می‌کند، ثابت می‌کنیم مثلث BKC متساوی‌الساقین است. چون اضلاع زاویه KAC دوخط موازی BD و KC را قطع کرده‌اند. پس،

$$\frac{AB}{BK}=\frac{AD}{DC}$$

یا

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$$

با حل مسأله ازاین دو روش، مطالب زیر تکرار می‌گردد: خاصیت زوایای حاصل از تقاطع یك خط با دوخط موازی (زوایای متبادل و متقابل م.) خاصیت مثلث متساوی‌الساقین خاصیت تشابه وقضیه تالس.

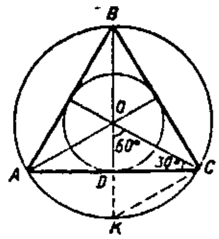
مسأله ۸. درمثلث متساوی‌الاضلاع شعاع دایره محاطی نصف شعاع دایره محیطی است. این موضوع را اثبات کنید.

روش اول

چون درمثلث متساوی‌الاضلاع نیمسازها، میانه و عمود منصف هستند پس مرکز دایره محیطی بـر محل تقاطع میانه‌ها منطبق و به‌نسبت ۲ : ۱ تقسیم می‌شوند. یعنی: $R=۲r$

روش دوم

درمثلث متساوی‌الساقین AOC، شکل (۱۱) $A\hat{O}C=۱۲۰°$



شکل ۱۱

زیرا زاویه مرکزی و روبرو به‌کمان ۱۲۰° است. ارتفاع OD درعین‌حال نیمسازهم است. پس

$$D\hat{O}C=۶۰° \text{ ، } O\hat{C}D=۳۰°$$

وازآنجا:

$$OC=۲OD \text{ ، } R=۲r$$

روش سوم

اگرامتداد OD دایره محیطی را درK قطع‌کند، مثلث OKC متساوی‌الساقین به‌ساق R است و درآن ارتفاع CD میانه هم است. پس $OK=۲OD$ ویا

$$R=۲r$$

روش چهارم

درمثلث BDC نیمساز CO ضلع BD را به‌نسبت

$$\frac{BO}{OD}=\frac{BC}{DC}=\frac{۱}{۲}$$

تقسیم می‌کند پس $R=۲r$

مسایلی‌که برای حل درخانه به دانش‌آموزان می‌دهیـم تقریباً باید شبیه مسایلی باشدکه درکلاس حل‌کرده‌ایم.

مسأله ۸. مساحت ذوزنقه‌ای را پیدا کنیدکه اضلاع موازی‌آن ۶۰ و ۲۰ سانتیمتر واضلاع غیرموازی‌آن ۱۳ و۳۷ سانتیمتر باشد. شکل (۱۲)

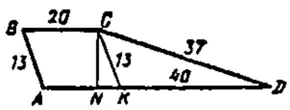
با شرایط مسأله، ذوزنقه دیگری می‌کشیم شکل (۱۳)که در در آن $\hat{A}$ منفـرجه باشد. اگـر $CK\|AB$ و $CN\perp AD$ آنگاه درمثلث CKD باید داشته باشیم

$$۳۷^۲>۱۳^۲+۴۰^۲$$

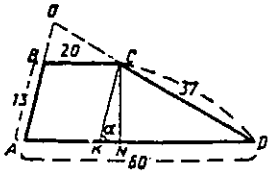
اما این‌چنین نیست. پس زوایای

$$C\hat{K}D=B\hat{A}C$$

باید حاده باشند و N متعلق به‌پاره‌خط KD. می‌توان‌آن را به طریق دیگر بر اساس روابط بین اضلاع و زوایای متقابل در مثلث CKD هم به‌اثبات رساند.



شکل ۱۳



شکل ۱۲

روش اول

با رسم $CK\|AB$ مساحت مثلث CKD را از فرمول هرون حساب می‌کنیم وسپس ارتفاع

$$CN=\frac{۲S_{\Delta CKD}}{KD}$$

را به‌دست می‌آوریم.

روش دوم

قرارمی‌دهیم، $C\hat{K}D=\alpha$ وبا استفاده ازقضیه کوسینـوس‌ها درمثلث CKD اندازه α را پیدا می‌کنیم

$$CN=CK\sin\alpha$$

روش سوم

درمثلث CKN قرار می‌دهیم $KN=x$ ازآنجا

$$ND=۴۰-x$$

ازمعادله

$$۱۳^۲-x^۲=۳۷^۲-(۴۰-x)^۲$$

ابتدا x وسپس CN را پیدا می‌کنیم.

روش چهارم

AB و CD را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را قطع کنند مثلث‌های AOD و BOC متشابه‌اند.

چون

$$\frac{BC}{AD}=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$$

پس

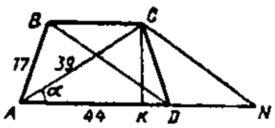
$$OD=\frac{3}{2}\times 37=55/5 \text{ ،} OA=\frac{3}{2}\times 13=19/5$$

ازفرمول هرون $S_{\Delta AOD}$ را پیدا می‌کنیم وسپس

$$S_{ABCD}=\frac{8}{9}S_{\Delta AOD}$$

را به‌دست می‌آوریم.

مساله ۹. در ذوزنقه متساوی‌الساقین قاعده بزرگتر ۴۴ سانتیمتر واندازه ساق آن ۱۷ سانتیمتر وطول قطر ۳۹ سانتیمتر است. مساحت ذوزنقه را پیداکنید شکل (۱۴)



شکل ۱۴

روش اول

با استفاده از فرمول هرون مساحت مثلث ACD را پیدا می‌کنیم وسپس ارتفاع CK را به‌دست می‌آوریم. بنابرقضیه فیثاغورث درمثلث ACK طول AK راکه برابر با طول‌خط میانگین ذوزنقه است به‌دست می‌آوریم.

(خط میانگین در ذوزنقه خطی است‌که اوساط دوساق را به‌هم وصل می‌کند. م)

روش دوم

اگر $\hat{CAD}=\alpha$ آنگاه با استفاده ازقضیه‌کوسینوسها درمثلث ACD اندازه $\cos\alpha$ و $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ راحساب می‌کنیم وسپس ازمثلث ACK اندازه AK و CK رابدست می‌آوریم.

روش سوم

اگر $AK=x$ آنگاه $KD=44-x$ بنابرقضیه فیثاغورث ازمثلث‌های ACK و CKD نتیجه می‌شود

$$AC^2-AK^2=CD^2-KD^2$$

یا

$$39^2-x^2=17^2-(44-x)^2$$

که درآن $x=AK$ برابر است با خط میانگین ذوزنقه. با استفاده ازقضیه فیثاغورث ارتفاع CK به‌آسانی پیدامی‌شود.

روش چهارم

اگر $BC=x$، قطر BD را با بردار $\overline{BC}$ وموازی‌آن انتقال می‌دهیم دراین صورت ازمثلث CNK نتیجه می‌شود

$$CK^2=CN^2-KN^2$$

وازمثلث CKD داریم:

$$CK^2=CD^2-KD^2$$

پس

$$CN^2-NK^2=CD^2-KD^2$$

ویا

$$39^2-\left(\frac{44+x}{2}\right)^2=17^2-\left(\frac{44-x}{2}\right)^2$$

ازاینجا BC وسپس CK را حساب می‌کنیم.

روش پنجم

قرار می‌دهیم $\hat{CAD}=\alpha$. با استفاده ازقضیه کوسینوسها در مثلث ACD، ابتدا $\cos\alpha$ و سپس $\sin\alpha$ را حساب می‌کنیم وثابت می‌کنیم

$$S_{ABCD}=S_{\Delta ACN} \text{ ،} S_{\Delta ACN}=\frac{1}{2}AC^2\sin 2\alpha=$$

$$\frac{1}{2}\times 39^2\sin 2\alpha=39^2\sin\alpha\cos\alpha$$

منبع:

از کتاب هندسه مسطحه آ. و. پوگارلووا. مندرج در مجله ریاضیات درمدرسه شماره ۶ سال ۱۹۸۷.

دربارهٔ یک الگوی عددی

اسماعیل بابلیان
عضوهیأت علمی دانشگاه تربیت‌معلم

درصفحهٔ ۳۴ از رشدآموزش ریاضی شمارهٔ ۲۸ برای $۳^{۰}$ تا $۳^{۸}$ تساویهای زیرنوشته شده وخواسته شده بودکه برای $۳^{۹}$ و $۳^{۱۰}$ تساویهای مربوطه نوشته شود و فرمولی عمومی برای نوشتن هرتساوی ارائه‌گردد.

$$۱=۳^{۰}$$

$$۱+۲=۳^{۱}$$

$$۲+۳+۴=۳^{۲}$$

$$۲+۳+۴+۵+۶+۷=۳^{۳}$$

$$\vdots$$

$$۱۴+۱۵+\cdots+۴۰=۳^{۶}$$

$$۴۱+۴۲+\cdots+۱۲۱=۳^{۸}$$

با توجه به‌روابط بالا به‌سادگی ملاحظه می‌شودکه تعداد اعداد سمت چپ تساوی برای $۳^{۲k}$، که k صفریا طبیعی است، برابر است با ۳^{k}. ضمناً، جملـه اول درتساویهای مربـوط به $۳^{۲k}$ و $۳^{۲k+۱}$ برابراست و تعداد جملات سمت چپ تساوی مربوط به $۳^{۲k+۱}$ برابر ۲×۳^{k} است

بنابراین، آنچه باقی می‌ماندآن است کـه جملهٔ اول سمت چپ‌تساوی مربوط به $۳^{۲k}$ حساب شود. برای این منظورجملهٔ اول را a می‌نامیم، باید داشته باشیم

$$a+\underbrace{(a+۱)+\cdots+(a}_{\text{تعداد عوامل } ۳^{k} \text{ است}}+۳^{k}-۱)=۳^{۲k}$$

که ازآن نتیجه می‌شود

$$۳^{k}a+(۱+۲+\cdots+(۳^{k}-۱))=۳^{۲k}$$

ویا

$$۳^{k}a+\frac{۳^{k}(۳^{k}-۱)}{۲}=۳^{۲k}$$

که درنتیجه

$$۳^{k}a=\frac{۲\times ۳^{۲k}-۳^{k}(۳^{k}-۱)}{۲}=\frac{۳^{۲k}+۳^{k}}{۲}$$

یعنی،

$$a=\frac{۳^{k}+۱}{۲}$$

مثلا برای نوشتن تساوی مربوط به $۳^{۸}$ داریم $k=۴$ پس

$$a=\frac{۳^{۴}+۱}{۲}=۴۱$$

درنتیجه تساوی مربوط به $۳^{۹}$ نیزاز ۴۱ شروع می‌شود وباید ۲×۳^{۴} یعنی ۱۶۲ جمله بنویسیم. به‌عبارت دیگر

$$۴۱+۴۲+۴۳+\cdots+۲۰۲=۳^{۹}$$

برای $۳^{۱۰}$ داریم $k=۵$ پس

$$a=\frac{۳^{۵}+۱}{۲}=۱۲۲$$

وباید $۳^{۵}$ جمله بنویسیم

$$۱۲۲+۱۲۳+\cdots+۳۶۴=۳^{۱۰}$$

بهمین‌ترتیب می‌توان تساویهای بیشتری نوشت.

قانون، بله یا نه

ترجمهٔ احمد قرائی

دریک آزمون هوش به‌سؤال زیر برمی‌خوریم:

۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵,?

عدد بعدی را پیداکنید.

برای یافتن این عدد احتیاج به‌فکر زیاد نیست. هرعدد برابر است با مجموع دوعدد قبلی‌اش. بنابراین، عدد خواسته شده ۸۹ است وچنین ادامه می‌یابد

۸۹, ۱۴۴, ۲۳۳, ۳۷۷, ۶۱۰, ۹۸۷, ۱۵۹۷, ...

آنهایی‌که با ریاضیات آشنایی دارند می‌دانندکه صحبت‌از چیست. این دنباله معروف فیبوناتچی است که ویژگی‌های مبهوت‌کننده آن ازهمان زمان‌که لئوناردوپیزا[1] (۱۱۷۰ تا ۱۲۵۰)- معروف به فیبوناتچی- عددهای خود را تعریف کرد تا امروز ریاضیدانان را به‌خود مشغول‌کرده است.

دراین‌جا قصد ما پرداختن به‌دنباله فیبوناتچی نیست بلکه می‌خواهیم این سؤال را پاسخ دهیم،آیا ده عدد بالا الزاماً با ۸۹ کامل می‌شوند؟

فرمول زیر را درنظربگیرید:

$$\sqrt{e}\,\frac{n}{e}$$

که درآن ... $e = ۲/۷۱۸۲۸$ عدد معروف اویلر است. این عدد در ریاضیات تقریباً همان اندازه اهمیت داردکه عدد π. (با ماشین‌حساب می‌توان اولین رقمهای اعشاری e را با فشردن به‌ترتیب دگمه‌های ۱، INV، LN به‌دست‌آورد.) هر گاه دراین فرمول به‌جای n مقادیر ۱ تا ۱۱ را قرار دهیم لیست زیر بدست می‌آید:

۰/۶۰...

۱

۱/۶۴...

۲/۷۱...

۴/۴۸...

۷/۳۸...

۱۲/۱۸...

۲۰/۰۸...

۳۳/۱۱...

۵۴/۵۹...

۹۰/۰۱...

حال اگرکوچکترین‌عدد صحیح بزرگتریا مساوی این‌عددها را بنویسیم دوباره به‌دنباله اول می‌رسیم

۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,۳۴,۵۵,

اما برای $n = ۱۱$ به‌جای۸۹ عدد ۹۱ ظاهر می‌شود. نتیجه: درآزمون هوش ۹۱ هم باید پاسخ قابل‌قبول تلقی شود.

ریچارد ك. گای[2] مجموعه‌ای‌ازمثالهای‌آموزنده‌گردآوری کرده است‌که نشان می‌دهند چقدرباید محتاط باشیم وقتی‌گمان می‌کنیم برخی از ویژگی‌های دنباله‌های عددی را کشف نموده‌ایم. اینک سه نمونه از ۸۰ موردی‌که این پروفسور ریاضی جمع‌آوری‌کرده است:

مثال ۱

عددهای فرد را از ۴۳ شروع کرده روی کاغذ می‌نویسیم. دور ۴۳ دایره می‌کشیم وعدد بعدی را خط می‌زنیم، دور ۴۷ دایره می‌کشیم و دوعدد بعدی راخط می‌زنیم، دور ۵۳ دایره‌می‌کشیم وسه عدد بعدی را خط می‌زنیم والی‌آخر (نگاه‌کنید به‌شکل ۱)

43 ~~45~~ 47 ~~49~~ ~~51~~ 53 ~~55~~ ~~57~~ ~~59~~ 61 ~~63~~
~~65~~ ~~67~~ ~~69~~ 71 ~~73~~ ~~75~~ ~~77~~ ~~79~~ ~~81~~ 83 ~~85~~
~~87~~ ~~89~~ ~~91~~ ~~93~~ ~~95~~ 97 ~~99~~ ...

شکل-۱

به‌نظر می‌رسد عـددهای داخل دایره همه اول هستند، یعنی فقط بر ۱ وخودشان بخش‌پذیرند. آیا این یك قانون است؟

عددهای داخل دایره‌را می‌توان ازفرمول زیر به‌دست آورد

$n^{۲}+n+۴۱,$

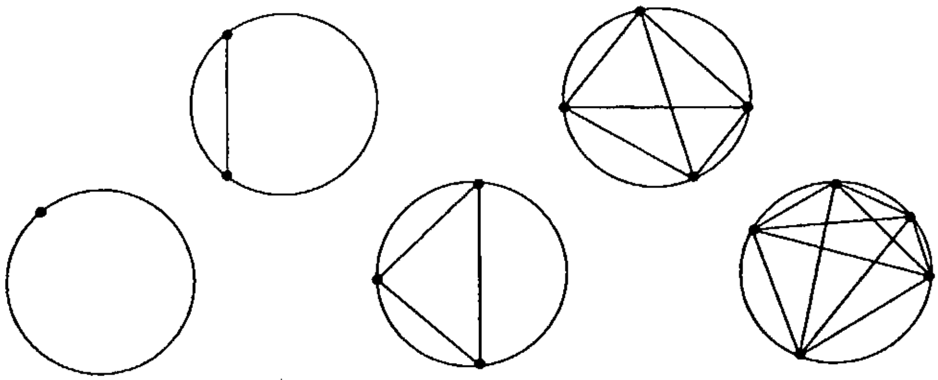
وقتی به‌جای n مقادیرمتوالی ۱ ,۲ ,۳ ,... را قراردهیم. این روش را اولین بارلئـونهـارد اویلـر[۳] (۱۷۰۷ تا ۱۷۸۳) ارائه‌کرد. او هم‌چنین موفق شد بدون محاسبات زیاد ثابت‌کند تا $n=۳۹$ همه‌عددها اول هستند.اما برای $n=۴۰$ داریم $۴۱^{۲}=۱۶۸۱$ که‌حدس اولیه را نقض می‌کند.

با این وجودکشف اویلر بسیـار قابل‌توجه است. اخیـراً مشابه‌آن، فرمولی‌ساده ارائه شده است‌که برای مقادیربزرگتر از $n=۳۹$ نیزقابل‌استفاده است.

عبارت $۴۷n^{۲}-۱۷۰۱n+۱۰۱۸۱$ ازگیلبرت‌فانگ[۴] تا $n=۴۲$ عدد اول تولید می‌کند.

مثال ۲

شکل ۲، پنج نوع تجزیهٔ دایره را نشان می‌دهد که به‌صورت زیر به‌وجودآمده‌اند:



شکل-۲

برمحیط دایره به‌ترتیب یـك، دو، سه، چهار وپنـج نقطـه انتخاب می‌کنیم،آنگاه هر نقطه را به‌نقاط دیگر متصل می‌کنیم. برای اجتناب از حالت‌های خاص، نقطـه‌ها را طوری در نظر می‌گیـریم کـه درهیـچ نقطـه‌ای درون دایره بیش از دوخط برخورد نکنند.

تعداد قسمت‌هایی‌که به‌این‌ترتیب در دایره به‌وجودمی‌آیند از دنبالهٔ زیر به‌دست می‌آید

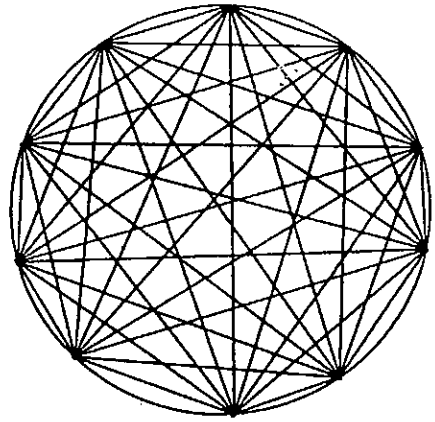
۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶

دراینجا حدس می‌زنیم‌کـه دنباله با دوبرابرکردن جمله‌ها ادامه پیدامی‌کند:

۳۲,۶۴,۱۲۸,۲۵۶,۵۱۲, ...

بنابراین برای ده نقطه باید ۵۱۲ قسمت به‌وجود آید. اما

در واقع فقط ۲۵۶ قسمت داریم (نگاه‌کنید به‌شکل ۳) یعنی تعدادی‌که برای ۹ نقطه انتظار داشتیم.



شکل-۳

ادامه صحیح دنباله ۱,۲,۴,۸,۱۶ در این‌حالت‌چنین‌است: (تحقیق‌کنید)

۳۱,۵۷,۹۹,۱۶۳,۲۵۶,۳۸۶,۵۶۲,۷۹۴, ...

(جمله عمومی‌آن عبارت است از

$$\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{1}{2}n(n-1)+1$$

که n تعداد نقاط واقع برمحیط دایره است.)

مثال ۳

عددهای اول را دریك سطر روی کاغذ می‌نویسیم. زیر آن تفاضل آنها و درسطر سوم قدرمطلق تفاضل عددهای سطر دوم‌را یادداشت می‌کنیم والی آخر (نگاه‌کنید به‌شکل ۴)

ظاهراً تمام دنباله‌های نامتناهی‌که به‌این‌ترتیب به‌وجود می‌آیند با عدد ۱ شروع می‌شوند. یا اینکه مانند مثالهای قبلی

```
2   3   5   7   11  13  17  19  23  29  31  37 ...
  1   2   2   4   2   4   2   4   6   2   6  ...
    1   0   2   2   2   2   2   4   4  ...
      1   2   0   0   0   0   2   0  ...
        1   2   0   0   0   2   2  ...
          1   2   0   0   2   0  ...
            1   2   0   2   2  ...
              1   2   2   0  ...
```

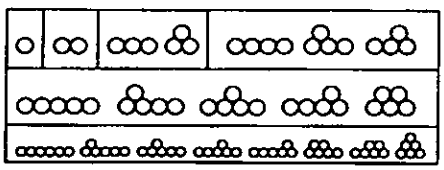
شکل-۴

درانتظاریك حالت غیرمترقبه هستیم؟ حقیقت این است‌که تا به امروز هیچ‌کس جواب این سؤال را پیدا نکرده است.

به‌خوانندگانی که می‌خواهند دراین زمینه آزمایش کنند یادآورمی‌شویم‌که چنین حالتی می‌تواند حداقل بعد ازسطر ده میلیاردم! ظاهرشود. به‌عبارت دیگر، عدد ۱، اگرنه همیشه، تا مدتها باقی می‌ماند. این پدیده‌آشکارا از یك قانون عمومی حکایت می‌کندکه آن را نمی‌توان به‌شیوهٔ تجربی نتیجه‌گرفت بلکه باید از یك نظریه مناسب به‌دست‌آورد. چه به‌گفته‌گای، گردآورنده این مجموعه، «هرگز به‌اندازه‌کافی عدد وجود ندارد تا تمام خواصی راکه ازآن‌ها انتظارمی‌رود برآورده کنند.»

مسئله

تعدادی سکه یکسان داده شده‌اند. آن‌ها را چسبیده به‌هم و در ردیف‌های روی هم طوری قرارمی‌دهیم‌که هرسکه با دوسکه در ردیف زیر خود در تماس باشد شکل۵ حالتهای ممکن را برای یك‌تا شش سکه نشان می‌دهد.



شکل-۵

تعداد این حالتها ۱,۱,۲,۳,۵,۸ است. به‌نظر می‌رسد دنبالهٔ فیبوناتچی را پیش‌رو داریم. یا اینکه این نتیجه‌گیری عجولانه است؟

زیرنویسها

۱ـ Leonardo Pisa
۲ـ Richard K. Guy
۳ـ Leonhard Euler
۴ـ Gilbert Fung

مرجع

IBM NACHRICHTEN 41 (1991) HEFT 307

اسامی خوانندگانی که
حل مسائل شماره ۳۳
را برای ما ارسال داشته‌اند

آقای مهدی اسدی، گروه ریاضی دانشگاه تبریز.

۳، ۴، ۵

آقایان عباس باباجانی و ابوالقاسم گرجی، دانشجو، تهران.

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۱۰.

آقای یوسف قلانی، دانش‌آموز سال سوم ریاضی، میاندوآب.

۵، ۸

آقای مهدی عسکریه، دانش‌آموز دبیرستان، اصفهان.

۵

خانم سهیلا زارعیان، جهرم.

۱، ۴، ۵

آقای رضا قاسم‌پور، دانش‌آموز دبیرستان، مازندران.

۱، ۳، ۴

خانم مریم میرزاخانی، دانش‌آموز تهران.

۱، ۴، ۵، ۸، ۱۰

آقای رامین دانشی، دانش‌آموز تهران.

۵

آقای محسن سالاری، دانشجوی علم و صنعت، تهران.

۱، ۴، ۵، ۸، ۱۰

آقای حسین رحامی، دانش‌آموز سال سوم ریاضی، اراک.

۳، ۴، ۵، ۸

آقای داریوش دیدبان، دانش‌آموز سال دوم ریاضی، کاشان.

۱

آقای عیسی عباسی، دانش‌آموز، تبریز.

۵، ۱۰

آقای اکبر اصفهانی، دانشجوی دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران.

۴، ۵

آقای لطیف ابراهیم‌نژاد، دانش‌آموز سال دوم ریاضی، تبریز.

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۷، ۸

آقای کیوان آقابابایی سامانی، دانشجو استان چهارمحال بختیاری.

۱، ۴، ۵، ۸

خانم پروانه نوکندی، دانش‌آموز، گوهردشت کرج.

۵

آقای قربانعلی حقیقت‌دوست، دانشجوی ریاضی دانشگاه تبریز.

۱، ۴، ۵

آقای ملکی، دانش‌آموز دبیرستان، تهران

۴، ۵، ۸

آقای احسان ممتحن، دانشجوی ریاضی، شیراز.

۴

آقای امیر صادقی، تهران.

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۸، ۱۰

آقای حامد صلواتی، دانش‌آموز سال سوم ریاضی، اصفهان.

۱، ۲، ۴، ۸

آقای محمد اسماعیل خسروی، دانشجو برق صنعتی امیرکبیر، تهران.

۳، ۵، ۱۰

آقای محمدرضا ملک، مشهد مقدس.

۱

خانم فدرا اعدتانی، دانش‌آموز سال چهارم ریاضی.

۱، ۴، ۵، ۸

آقای محمد جواد حبیبی خراسانی، سال سوم ریاضی، مشهد.

۵

گزارشی

از المپیاد ریاضی ترکیه

عمران احمدی‌درویشوند

برندهٔ مدال نقره

تدوین گزارش: از واحد المپیاد

تیم ٦ نفرهٔ المپیاد ریاضی ایران به سرپرستی آقایان دکتر رضوی، دکتر کرّمزاده و دکتر محمودیان به عنوان ناظر در تاریخ دوشنبه ٧٢/۴/٢١ عازم ترکیه شدند تا در مسابقات جهانی سی‌وچهارمین المپیاد ریاضی در استانبول شرکت نمایند. مطابق برنامه، روزهای ٢٧ و ٢٨ تیرماه روزهای برگزاری مسابقات بود و در اول مردادماه مراسم اختتامیه و اعلام نتایج صورت پذیرفت. با هماهنگی قبلی با سفارت جمهوری اسلامی ایران در ترکیه و سرپرستی مدارس ایرانی در استانبول، دانش‌آموزان و سرپرستان از نظر جا و امکانات مشکلی نداشتند و توانستند با موفقیت این مسابقات را پشت سر بگذارند. در این پیکار، ایران با پشت سر گذاشتن امریکا و بسیاری دیگر از کشورهای جهان به مقام ششم در میان ٧٣ کشور دست یافت و در رشتهٔ جبرِ این مسابقات نیز به مقام اول جهان رسید. کلیهٔ دانش‌آموزان شرکت‌کنندهٔ ایرانی در این پیکار صاحب مدال شدند. آقایان: محمد مهدیان و مهرداد عباسپور مدال طلا، آقایان افشین عبداللهی از سنندج، محمدرضا رزوان، عمران احمدی درویشوند مدال نقره و آقای حسین مواساتی از تبریز به مدال برنز دست یافتند. ما امید آن داریم که دانش‌آموزان ایرانی با استعدادهای درخشان خدادادی، همت خودشان و تلاش استادانِ آنها، بتوانند زمینهٔ مناسبی را برای رشد و ترقی کشور خود فراهم نمایند.

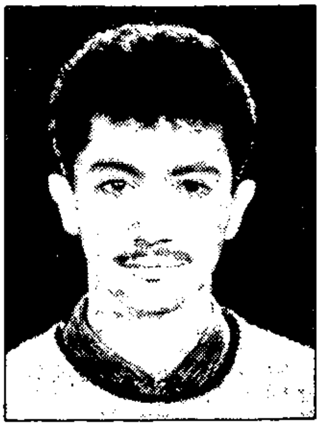
تیم ملی المپیاد ریاضی ایران در تاریخ دوشنبه ٧٢/۵/۴ با استقبال رسمی وارد تهران شدند و مورد تشویق مسئولین آموزش‌وپرورش، خانواده‌ها و دانش‌آموزان دیگر قرار گرفتند.

حسین مواساتی

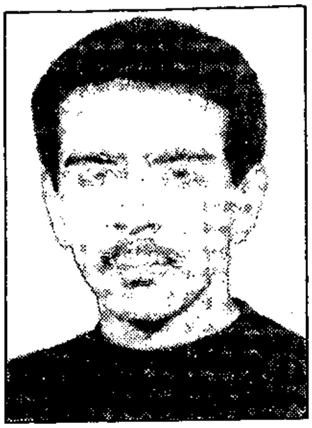
برندهٔ مدال برنز

محمد مهدیان

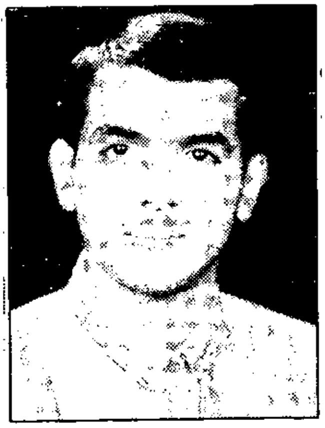
برندهٔ مدال طلا



مهرداد عباسپور
برندهٔ مدال طلا



افشین عبداللهی
برندهٔ مدال نقره



محمدرضا رزوان
برندهٔ مدال طلا

مسائل ویژه دانش آموزان

تهیه و تنظیم : محمود نصیری

۱ـ تمام اعداد صحیح و مثبت (x,y,z) را پیدا کنید که در معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$x^4+y^4+z^4+3=2(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)$$

۲ـ اگر a و b و c اندازه‌های اضلاع یک‌مثلث باشند، ثابت کنید $a^2+b^2>\frac{c^2}{2}$.

۳ـ اگر k عددی طبیعی باشد ثابت کنید

$$\sqrt[k+1]{(k+1)!}-\sqrt[k]{k!}<\frac{k^k}{(k+1)^k}$$

(راهنمائی: نامساوی واسطهٔ حسابی و هندسی‌را برای جمله $\frac{k^k}{(k+1)^k}$، و k جمله $\frac{\sqrt[k]{k!}}{k}$ به‌کار ببرید.)

۴ـ اگر $xyz=1$، نشان‌دهید:

$$\frac{x+1}{xy+x+1}+\frac{y+1}{yz+y+1}+\frac{z+1}{xz+z+1}=2$$

۵ـ ثابت کنید $\left[\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}\right]=0$ (کروشه به‌معنی جزء صحیح است.)

۶ـ درمثلث متساوی‌الساقین ABC، $AB=AC$ اندازهٔ $\angle A$ برابر 80° است. اگر M نقطه‌ای دردرون مثلث باشد به‌طوری‌که $m\angle MBC=30^\circ$ و $m\angle MCB=10^\circ$ ثابت کنید $m\angle AMC=70^\circ$.

۷ـ اگر A و B و C سه نقطه‌روی‌یک‌خط به‌ترتیب به‌طولهای x و y و z باشند. ثابت کنید $AB+BC=AC$ اگر و فقط اگر $x<y<z$ یا $z<y<x$.

۸ـ درمثلث قائم‌الزاویه ABC، زاویهٔ A قائمه‌است. اگر اندازه میانه وارد بر وتر a و اندازه نیمساز زاویه قائمه b باشند، ثابت کنید مساحت این‌مثلث برابر است با:

$$\frac{1}{4}\left(a^2+a\sqrt{a^2+8b^2}\right).$$

۹- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-4=0$ باشند و $x_1>x_2$. حاصل $\frac{7}{3}x_1^2+\frac{25}{2}x_1^2$ را پیدا کنید.

۱۰- f تابعی متناوب بادورهٔ تناوب $T=2$ است. اگر ضابطهٔ تابع درفاصله $[0,2)$ به‌صورت $f(x)=x+\frac{1}{x}$ باشد، ضابطهٔ تابع‌را درفاصله $[4,6)$ پیدا کنید.

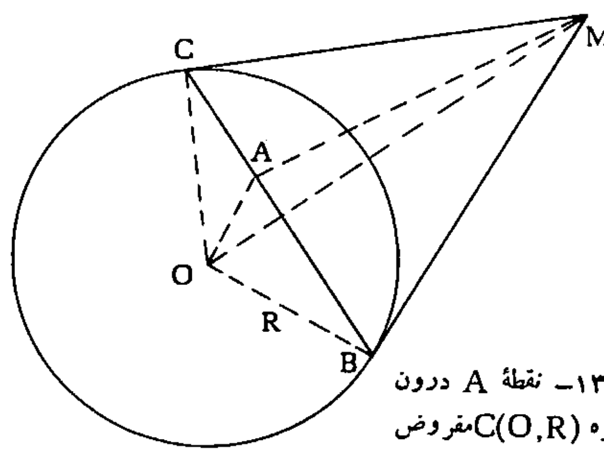
۱۱- عددهای طبیعی x و y را چنان پیدا کنید که

$$N=\frac{x^2+x+1}{xy-1}$$

طبیعی باشد.

(جواب: $N=1$ یا $N=3$ یا $N=7$.)

۱۲- تعداد ریشه‌های حقیقی معادله $x^{37}+x^8+1=0$ را تعیین کنید.



۱۳- نقطهٔ A درون دایره $C(O,R)$ مفروض است. وتر متغیر BC را که همواره از A می‌گذرد درنظر می‌گیریم. اگر مماس‌های دایره درنقاط B و C یکدیگر را در M قطع کنند مکان هندسی M را وقتی BC تغییر می‌کند پیدا کنید.

(راهنمائی: ثابت کنید MO^2-MA^2 مقدار ثابتی است. ولذا مکان یک‌خط است.)

۱۴- تابع $y=[x]+\sqrt{x-[x]}$ مفروض است. پیوستگی و مشتق‌پذیری تابع را بررسی کرده ونمودار آن‌را رسم کنید.

۱۵- فرض کنید

$$S=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1 \text{ و } y\geqslant x \text{ و } y\leqslant x+1\}$$

مساحت ناحیه S را پیدا کنید.

۱۶- ثابت کنید معادله خط راستی که درمختصات قطبی از دونقطه $A(a,\alpha)$ و $B(b,\beta)$ می‌گذرد به‌صورت زیر است.

$$\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\rho}=\frac{\sin(\beta-\theta)}{a}+\frac{\sin(\theta-\alpha)}{b}$$

(راهنمائی: فرض کنید $M(\rho,\theta)$ نقطهٔ دلخواهی روی خط AB باشد، مساحتهای مثلثهای AOB، AOM، BOM را به‌وسیلهٔ فرمول $\frac{1}{2}ab\sin c$ درنظر بگیرید.)

۱۷- ثابت کنید

$$A=\int_0^\pi x\sin^2 x\,dx=\frac{\pi^2}{4}$$

(راهنمائی: ازتغییرمتغیر $x=\pi-t$ استفاده کنید.)

۱۸- اگر p نصف محیط r و R شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی ومحیطی یک‌مثلث باشند. ثابت کنید، $2p\geqslant 3\sqrt{6Rr}$.

(راهنمائی: ازواسطهٔ حسابی وهندسی استفاده کنید.)

۱۹- ثابت کنید

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)}=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p!}-\frac{n!}{(n+p)!}\right)$$

(راهنمائی: ازقاعده ادغام استفاده کنید.)

(فرستنده: عیسی عباسی ازتبریز)

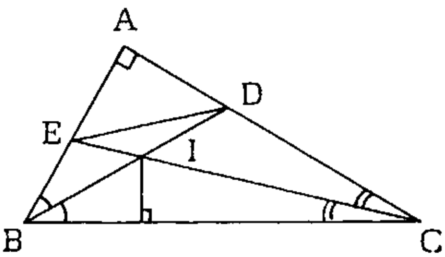
۲۰- بدون محاسبهٔ دترمینان نشان‌دهید که یکی‌از ریشه‌های معادلهٔ زیر صفر است.

$$\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix}$$

دهمین دورهٔ
المپیاد ریاضی
آزمون مرحلهٔ نهایی

هرمسأله ۷ نمره دارد

۱) درمثلث قائم‌الزاویه ABC ($\widehat{A}=90^\circ$) نیمسازهای درونی زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ یکدیگر را درنقطه I وضلعهای روبرو را به‌ترتیب در D و E قطع می‌کنند. ثابت‌کنید مساحت چهارضلعی BCDE دوبرابر مساحت مثلث BIC است.



۲) دنبالهٔ

$$a_{n+1}=a_n+\frac{a_{n-1}}{1+(a_{n-1})^2} \qquad (n\geqslant 1)$$

به‌طوری‌که $a_0=1$ و $a_1=2$ داده شده است. ثابت‌کنید:

$$52<a_{1371}<65$$

۳) در طرفین رودخانه‌ای چند شهر وجود دارد. چند خط قایقرانی بین این شهرها دایراست. هرخط قایقرانی دقیقاً بین یك شهرازیك سمت رودخانه به یك شهر درسمت دیگر دایر می‌باشد. ازهرشهر دقیقاً به k شهردرطرف دیگرخط قایقرانی دایراست. اگربین هردوشهر بتوان به‌وسیله این قایقها رفت‌وآمدکرد، ثابت‌کنید باحذف یکی ازاین خطهای قایقرانی باز هم می‌توان بین هردوشهربا استفاده ازاین خطوط قایقرانی، رفت وآمدکرد.

۴) ثابت کنید برای هرعدد طبیعی t عدد

$$A=1^t+2^t+\dots+9^t-3(1+6^t+8^t)$$

بر ۱۸ بخش‌پذیر است.

۵) درمثلث ABC داریم:

$$\hat{B}=2\hat{C} \ \text{و}\ \hat{A}\leqslant 90^\circ$$

اگر نیمساز درونی زاویه $\hat{C}$ میانه AM (M وسط BC است) را در نقطه D قطع کند آنگاه ثابت کنید: $M\hat{D}C\leqslant 45^\circ$. تحت چه شرطی $M\hat{D}C=45^\circ$ است؟

۶) فرض می‌کنیم $X\neq\varnothing$ یك مجموعهٔ متناهی و $f: X\rightarrow X$ تابعی باشد که به‌ازای هر $x\in X$، $f^p(x)=x$ که در آن p عددی است اول و ثابت و

$$f^p(x)=\underbrace{f\circ f\circ f\circ \dots \circ f}_{\text{مرتبه } p}(x)$$

اگر $Y=\{x\in X: f(x)\neq x\}$ باشد، آنگاه ثابت کنید که تعداد اعضای مجموعه y بر p بخش‌پذیر است.

حل مسئلهٔ ۱.

$$S(BCDE)=S(ABC)-S(ADE)$$

$$=\frac{1}{2}b\cdot c-\frac{1}{2}AD\cdot AE=\frac{1}{2}\,b\cdot c-\frac{1}{2}\cdot\frac{c\cdot b}{a+b}\cdot$$

$$\frac{b\cdot c}{a+c}=\frac{1}{2}bc-\frac{b^2c^2}{2(a+b)(a+c)}$$

$$2(a+b)(a+c)=2(a^2+ac+ab+bc)=$$

$$2a^2+2ab+2ac+2bc=a^2+(b^2+c^2)+$$

$$2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$$

$$S(BCDE)=\frac{1}{2}bc-\frac{b^2c^2}{(a+b+c)^2}=$$

$$\frac{bc(a+b+c)^2-2b^2c^2}{2(a+b+c)}=$$

$$\frac{bc[(a+b+c)^2-2bc]}{2(a+b+c)^2}=$$

$$\frac{bc(a^2+\overbrace{b^2+c^2}^{a^2}+2ab+2ac)}{2(a+b+c)^2}=$$

$$\frac{2abc\,(a+b+c)}{2(a+b+c)^2}=\frac{abc}{a+b+c}=$$

$$\frac{4RS\,(ABC)}{2P}$$

$$S(BCDE)=\frac{2R.S}{P}=a\cdot r=2\ S(BIC)$$

حل مسئله ۲. داریم:

$$a_{n+1}=a_n+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_{n-1}}}$$

قرار می‌دهیم

$$b_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}$$

ادعا می‌کنیم که به‌جای هر $n\geqslant 1$، $a_n=b_n$. زیرا $a_1=2=b_1$ فرض می‌کنیم که $a_n=b_n$ با استقراء خواهیم داشت

$$b_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n},\quad a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$$

پس

$$a_{n+1}=b_{n+1}$$

پس

$$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}$$

و

$$a_n^2=a_{n-1}^2+2+\frac{1}{a_{n-1}^2}>a_{n-1}^2+2$$

حال به‌استقراء ثابت می‌کنیم که

$$(n\geqslant 1)\ \sqrt{2n+1}\leqslant a_n<\sqrt{3n+2}$$

داریم

$$\sqrt{3}<a_1<\sqrt{5}$$

و

$$a_{n+1}^2>a_n^2+2>2n+3$$

پس

$$a_{n+1}>\sqrt{2n+3}$$

همچنین

$$(n\geqslant 1)\ a_n^2\leqslant a_{n-1}^2+3$$

پس

$$(\text{باستقراء})\ a_n^2<3n-1+3=3n+2$$

پس

$$a_n<\sqrt{3n+2}$$

درنتیجه،

$$\sqrt{2n+1}<a_n<\sqrt{3n+2}$$

بنابراین:

$$52<a_{1371}<65$$

حل مسئلهٔ ۴. فرض‌کنیدکه با حذف خط قایقرانی مثلا بین‌شهر A با شهر B (که لزوماً در دوطرف رودخانه واقعند) ارتباط بین این‌شهرها قطع شود. تمام شهرهائی‌که بتوان به‌آنها از A با قایق رفت وآمدکرد را با مجموعه S نشان می‌دهیم.

فرض‌کنید تعداد n_1 عضواز S درآن سمت از رودخانه‌که A قرار دارد (مثلا سمت چپ) باشند و n_2 عضو درسمت دیگر. دقت می‌کنیم‌که $B\notin S$.

تعدادکل خطوط قایقرانی‌که از شهرهای سمت چپ از S دایرهستند مساوی $(n_1-1)k+(k-1)$ وتعدادکل خطوط قایقرانی‌که ازشهرهای سمت راست از S دایرهستند مساوی $n_2 k$ است پس داریم:

$$(n_1-1)k+(k-1)=n_2k$$

ملاحظه می‌کنیم‌که k طرف راست را می‌شمارد ولی طرف‌چپ را نمی‌شمارد. واین یك تناقض است.

حل مسئلهٔ ۵. درمثلث ADC داریم:

$$M\hat{D}C=\hat{A}_1+\frac{\hat{C}}{2}$$

در نتیجه

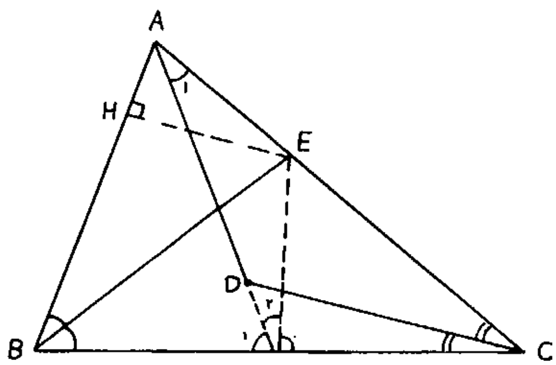
$$2M\hat{D}C=2\hat{A}_1+\hat{C}$$

وچون

$$\hat{M}_1=\hat{A}_1+\hat{C}$$

پس

$$2M\hat{D}C=\hat{A}_1+\hat{M}_1$$



حال نقطه برخورد نیمساز درونی $\hat{B}$ را با AC نقطه E می‌نامیم بدیهی است که مثلث BEC متساوی‌الساقین است. درنتیجه EM ارتفاع واردبر BC است و از E عمود EH را بر AB فرودمی‌آوریم‌وداریم: $EH=EM$. درمثلث‌قائم‌الزاویه AEH می‌توان نوشت. $EA\geqslant EH$ پس. درمثلث AEM داریم:

$$\hat{M}_2\geqslant\hat{A}_1$$

بنابراین،

$$90^\circ\geqslant\hat{M}_1+\hat{A}_1=2M\hat{D}C \quad \text{و} \quad 90^\circ-\hat{M}_1\geqslant\hat{A}_1$$

پس

$$M\hat{D}C \leqslant ۴۵^\circ.$$

تساوی $M\hat{D}C = ۴۵^\circ$ هنگامی برقرار است که $EH = EA$ یعنی $\hat{A} = ۹۰^\circ$. که در این‌صورت، $\hat{B} = ۶۰^\circ$ و $\hat{C} = ۳۰^\circ$ خواهد بود.

حل مسئله ۴. به‌ازای $t = ۱$ برقرار است. و به‌ازای $t > ۱$ داریم:

$$(۱)\ ۱^t + ۲^t + \dots + ۹^t - ۳(۱ + ۶^t + ۸^t) =$$

$$۲^t + ۳^t + ۴^t + ۵^t + ۷^t + ۹^t - ۲ - ۲ \times ۶^t - ۲ \times ۸^t$$

که‌واضح است بر ۲ بخشپذیر است.

کافی است نشان دهیم که

$$۲^t + ۴^t + ۵^t + ۷^t - ۲ - ۲ \times ۸^t$$

بر ۹ بخشپذیر است.

$$۲^t + ۴^t + ۵^t + ۷^t - ۲ - ۲ \times ۸^t$$

$$= (۷^t + ۲^t) + (۵^t + ۴^t) - ۲(۱ + ۸^t)$$

اگر t فرد باشد حکم برقرار است.

اگر t زوج باشد.

$$(۱) \equiv ۷(۷^{t-۱} + ۲^{t-۱}) - ۵ \times ۲^{t-۱} +$$

$$۵(۵^{t-۱} + ۴^{t-۱}) - ۴^{t-۱} - ۱۶(۸^{t-۱} + ۱) + ۱۴$$

$t - ۱$ فرد است پس هرعبارت (پرانتز) بر ۹ بخشپذیر است.

$$۵ \times ۲^{t-۱} + ۴^{t-۱} - ۱۴ = (۲^{t-۱} + ۷)(۲^{t-۱} - ۲)$$

$$= ۲(۲^{t-۱} + ۱ + ۶)(۲^{t-۱} - ۱)$$

هرعبارت بر ۳ بخشپذیر است.

حل مسئله ۶. رابطهٔ ~ را روی مجموعهٔ X تعریف می‌کنیم بدین‌صورت که $a \sim b$ اگر وتنها اگر iی وجود داشته باشد که $f^i(a) = b$. ثابت می‌کنیم رابطهٔ فوق یک رابطهٔ هم‌ارزی می‌باشد.

i) برای هر a داریم $a \sim a$ زیرا $f^p(a) = a$

ii) اگر $a \sim b$ آنگاه‌وجوددارد iی به‌صورتی‌که $f^i(a) = b$ روشن‌است که می‌توان‌فرض‌کرد $۱ \leqslant i \leqslant p$ حال‌داریم $i < p$

$$f^{p-i}(b) = f^{p-i}(f^i(a)) = f^p(a) = a$$

به‌سهولت ثابت می‌شود که این رابطه متقارن‌است.

iii) اگـر $b \sim c$ و $a \sim b$ آنگـاه وجـود دارد $i_۱$ و $i_۲$ بطوری‌که،

$$\left.\begin{array}{l} b = f^{i_۱}(a) \\ c = f^{i_۲}(b) \end{array}\right. \Longrightarrow c = f^{i_۲}(f^{i_۱}(a)) = f^{i_۱ + i_۲}(a)$$

$$\Longrightarrow a \sim c$$

پس رابطهٔ فوق تراگذری است.

پس مجموعهٔ X به‌دسته‌های هم‌ارزی افرازمی‌شود.

حال ثابت می‌کنیـم اگر دسته هم‌ارزی بیش از یـک عضو داشته باشد، حتماً دارای P عضومی‌باشد دسته هم‌ارزی

$$a \neq f(a) \quad \{a, f(a), f^۲(a), \dots, f^p(a)\}$$

را درنظرمی‌گیریم. باید ثابت‌کنیـم هردوعضومجمـوعهٔ فوق متمایزند. فرض می‌کنیم (فرض خلف) i و j وجود دارد:

$$f^i(a) = f^j(a)$$

(می‌توان فرض‌کرد $۱ \leqslant i < j$, $۱ \leqslant j \leqslant p$).

که i و j متمایزند. پس $۱ \leqslant j - i < p$. پس r و s وجود دارندکه

$$rp + s(j - i) = ۱$$

ازطرفی چون $f^i(a) = f^j(a)$ پس $f^{j-i}(a) = a$

$$f(a) = f^{rp + s(j-i)}(a) = a$$

که یک تناقض است

$$Y = \bigcup_{a \in y} X_a \qquad (X_a \text{ دسته هم‌ارزی } a \text{ می‌باشد})$$

$$|y| = \sum_{a \in y} |X_a|$$

پس

$$p \,\|\, y|$$

مسائل شمارهٔ ۳۹

تهیه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱ــ n عدد حقیقی و نامنفی‌و x_1، …، x_n مفروضند. ثابت کنید اگر $x_1+\dots+x_n=n$ آنگاه

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\dots+\frac{x_n}{1+x_n^2}\leqslant\frac{1}{1+x_1}+\dots+\frac{1}{1+x_n}$$

۲ــ دایره‌ای به مرکز $(1\,,\,0)$ بر روی صفحه محورهای مختصات، سهمی به‌معادلهٔ $y=x^2$ را درچهار نقطه A و B و C و D قطع می‌کند

آ) ثابت‌کنید $S_{ABCD}<\sqrt{2}$ (S مساحت چهارضلعی است)،

ب) این‌سطح چه‌وقت‌ماکسیمم می‌شود وماکسیمم آن‌چقدر است؟

۳ــ دنبالهٔ $\{a_n\}$ به‌صورت زیرساخته شده است:

$a_1=2$ و برای هر $n\geqslant 2$ عدد a_n برابر است با بزرگترین مقسوم‌علیه اول عدد $a_1\, a_2\, \dots\, a_{n-1}+1$.

ثابت‌کنید دربین اعضای این دنباله عدد ۵ موجود نیست.

۴ــ درجدول 89×19 بیشترین تعداد خانه کـه می‌توان سیاه‌کرد به‌قسمی‌که، درهر مربع 2×2 بیش از ۲ خانـه سیاه نباشد، چندتا است؟

۵ــ دایره‌ای به شعاع مفروض درحال مماس بروجوه یك کنج سه‌وجهی قائمه، جابه‌جا می‌شود. مکان هندسی مرکز این دایره راپیداکنید.

۶ــ برروی سطح زمین نقاطی‌وجود داردکه طول وعرض جغرافیائی آنها با هم برابرند. مکان هندسی تصاویراین نقاط را روی صفحه استوا پیداکنید.

۷ــ تابع $f(x)=A\cos x+B\sin x$ که در آن A و B مقادیرثابتی هستند مفروض است. اگر

$$x_1-x_2\neq k\pi,\ f(x_1)=f(x_2)=0$$

که درآن k عدد صحیح است ثابت‌کنید $f(x)=0$

۸ــ ریشه‌های‌طبیعی‌معادله $7^x-3\times 2^y=1$ را پیداکنید.

۹ــ ثابت‌کنید

$$89(\sin 1^\circ \sin 2^\circ \dots \sin 89^\circ)^{1992}<(\sin^{89}1^\circ)^{1992}+$$
$$(\sin^{89}2^\circ)^{1992}+\dots+(\sin^{89}89^\circ)^{1992}$$

(فرستنده فرشید ارجمندی، دانش‌آموز. اهواز)

۱۰ــ اگر a و b و c طولهای اضلاع مثلث باشند، ثابت کنید

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{a+c-b}+\frac{1}{b+c-a}\geqslant$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

(فرستنده قاسم سلیمانی اسپار، دانش‌آموزتبریز)

سؤالات امتحانی
نوزدهمین مسابقهٔ دانشجویی انجمن ریاضی ایران
(دانشگاه شهید بهشتی)

فرستنده: دکتر محمد رضا درفشه

(بارم هر سوال ۲۵ امتیاز)

سؤالات آنالیز ریاضی

۱ـ فرض کنید تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و بر بازهٔ (a,b) مشتقپذیر است. همچنین فرض کنید نمودار f یك خط راست نیست نشان دهید در فاصلهٔ (a,b) حداقل یك c وجود دارد به طوری که:

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$

۲ـ اگر $p_1(x)$ و $p_2(x)$ و $p_3(x)$ و $p_4(x)$ چند جمله ایهایی برحسب x باشند. ثابت کنید:

$$\int_{-1}^{x} p_1(t)p_2(t)dt \int_{-1}^{x} p_3(t)p_4(t)dt - \int_{-1}^{x} p_1(t)p_4(t)dt \int_{-1}^{x} p_2(t)p_3(t)dt$$

بر $(x+1)^4$ بخشپذیر است.

۳ـ تابع پیوستهٔ f از فضای متریك X به مجموعهٔ اعداد حقیقی $\mathbf{R}$ مفروض است نشان دهید مجموعهٔ $\{x \in X | f(x)=0\}$ باز اگر و تنها اگر تابع پیوستهٔ $g:X \to \mathbf{R}$ موجود باشد به قسمی که $f=gf^2$.

۴ـ فرض کنید تابع $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ پیوسته است و $f(1)=f(0)$. نشان دهید دو نقطهٔ a و b با شرایط $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$ و $b-a=\frac{1}{2}$ و $f(a)=f(b)$ موجودند.

سؤالات جبر

۱ـ فرض کنید G یك گروه متناهی است و $H \leqslant G$ به طوری که:

$$\forall_x (x \notin H \Longrightarrow H \cap x^{-1}Hx = \{e_G\})$$

ثابت کنید که $|H|$ و $[G:H]$ نسبت به هم اولند. «۳۵ امتیاز»

۲ـ R حلقهٔ ماتریسهای $n \times n$ روی یك میدان F و $R[x,y]$ حلقهٔ چند جمله ایهای دو متغیره با ضرایب در R است:

(توجه: $xy=yx$; $(ax=xa; ay=ya) \Longrightarrow a\in R$)

هرگاه f و g دو عضو در حلقهٔ $R[x,y]$ باشند به طوری که $fg=1$ در این صورت مطلوب است تعیین gf. (۴۰ امتیاز)

۳ـ V یك فضای برداری با بعد متناهی روی یك میدان F و $T:V \to V$ یك عملگر خطی است. مطلوب است تعیین بُعد زیر فضای $\ker T \cap T(V)$ برحسب رتبهٔ توانهای T. (۲۵ امتیاز)

حل مسائل

حل مسائل آنالیز ریاضی

مسئلهٔ ۱. اگر این طور نباشد، آن گاه، به ازای هر x از (a,b)

$$|f'(x)| \leqslant \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$$

الف) فرض کنید $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant 0$ آنگاه به‌ازای هر x از (a,b)

$$f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant 0 \qquad *$$

تابع g را باضابطهٔ $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ درنظرمی‌گیریم. داریم:

$$(1)\ g(a)=f(a)=g(b)$$

با توجه به X ومشتقپذیری f در(a,b) داریم

$$(2)\ g'(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant 0$$

حال از رابطهٔ ۱، ۲ نتیجه می‌گیریم که g، بر$[a,b]$ ثابت است پس:

$$g(x)=f(a)\Longrightarrow f(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

که f خطی است راست واین یك تناقض است. (با توجه به‌فرض مسأله)

ب) اگر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$، قرارمی‌دهیم $F=-f$ و استدلال را برای F ادامه می‌دهیم ومجدداً تناقض حاصل می‌گردد.

مسأله ۲. عبارت‌داده شده را با $F(x)$ نشان می‌دهیم. بدیهی است که $F(x)$ یك‌چند جمله‌ای است و $F(-1)=0$ پس F فاکتور $x+1$ را دارد. امامی‌دانیم که:

$$F'(x)=p_1p_3\int_{-1}^{x} p_1p_4+p_2p_4\int_{-1}^{x} p_1p_3-p_1p_4\int_{-1}^{x} p_2p_3-p_2p_3\int_{-1}^{x} p_1p_4$$

درنتیجه $F'(-1)=0$ پس F فاکتور $(x+1)^2$ را دارد. مشتقات مرتبهٔ دوم وسوم F نیز هردوفاکتور $x+1$ رادارد وداریم: $F''(-1)=0$ ودقیقاً به‌همین‌شکل‌داریم:

$$F''(-1)=(p_1p_3)'p_2p_4+(p_2p_4)'p_1p_3-$$
$$x=-1(p_1p_4)'p_2p_3-(p_2p_3)'p_1p_4|=0$$

پس $F(x)$ چندجمله‌ای‌است که بر $(x+1)^4$ بخش‌پذیراست.

مسأله ۳. اگر $f=gf^2$ دراین صورت برای هر $x\in Z(f)^c$ داریم: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ فرض‌می‌کنیم $Z(f)-Z(f)^\circ\neq\varnothing$ و گیریم $x_0\in Z(f)-z(f)^\circ$. چون $A=f^{-1}\left(\left(\frac{-1}{n},\frac{1}{n}\right)\right)$ یك مجموعهٔ بازشامل x_0 است، برای‌هرهمسایگی‌دیگر x_0، مانند B، $A\cap B$ نیز یك‌مجموعهٔ بازشامل x_0است. چون $x_0\notin z(f)^\circ$، پس $A\cap B\cap Z(f)^c\neq\phi$. اگر $y\in A\cap B\cap z(f)^c$، آنگاه:

$$|g(y)|=\left|\frac{1}{f(g)}\right|>n$$

یعنی g روی هیچ همسایگی x_0 کراندارنیست که ناپیوستگی g در x_0 تناقض دارد. به‌عکس فرض‌می‌کنیم $Z(f)$ بازاست، در آن‌صورت $Z(f)$ هم بازاست وهم‌بسته ودرنتیجهٔ $Z(f)^c$ نیز هم بازاست وهم‌بسته. چون $X=Z(f)\bigcup Z(f)^c$ درنتیجه، X ازاجتماع دومجموعهٔ باز(بسته) جداازهم تشکیل‌شده‌وبنا براین تابع $g:X\to\mathbf{R}$ که به‌صورت:

$$g(x)=\begin{cases}1/f(x) & x\in Z(f)^c\\ c & x\in Z(f)\end{cases}$$

تعریف‌شده پیوسته است و $f=gf^2$. ■

مسألهٔ ۴. تابـع $g:\left[0, \frac{1}{2}\right]\to\mathbf{R}$ را باضابطهٔ

$$g(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f(x)$$

تعریف می‌کنیم داریم:

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)\\ g\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)\end{array}\right\}\Longrightarrow g(0)+g\left(\frac{1}{2}\right)=0\Longrightarrow$$

$$g(0)g\left(\frac{1}{2}\right)=-\left[g\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2<0$$

پس درنتیجه داریم:

$$g(0)g\left(\frac{1}{2}\right)<0$$

پس طبق قضیهٔ مقدار میانی وجود دارد $c\in\left(\circ , \frac{1}{2}\right)$ بطوری‌که $g(c)=0$.

$$g(c)=0=f\left(c+\frac{1}{2}\right)-f(c)\Longrightarrow f\left(c+\frac{1}{2}\right)=f(c)$$

حال فرض می‌کنیم

$$x=c \text{ و } y=c+\frac{1}{2} \text{ یا } \left(y=c \text{ و } x=c+\frac{1}{2}\right)$$

بنابراین داریم:

$$f_0(x)=f(y) \text{ و } |x-y|=\frac{1}{2}$$

حل مسائل جبر

مسألهٔ ۱. فرض کنید $\{x_1=1, x_2, \dots, x_n\}$ مجموعهٔ نماینده‌های همردهای مضاعف HxH باشد. داریم

$$G=\bigcup_{i=1}^{n} Hx_iH$$

و در نتیجه:

$$|G|=\sum_{i=1}^{n}\frac{|H|\,|x_i^{-1}Hx_i|}{|H\cap x_i^{-1}Hx_i|}=\sum_{i=1}^{n}\frac{|H|^2}{|H\cap x_i^{-1}Hx_i|}$$

با استفاده از فرض مسأله نتیجه می‌شود که:

$$|G|=|H|+\sum_{i=2}^{n}|H_0|^2=|H|+(x-1)|H|^2$$

$$\Longrightarrow [G:H]=1+(n-1)|H| \Longrightarrow$$

$$[G:H]-(n-1)|H|=1$$

که از آن نتیجه می‌شود که

$$(|H|, [G:H])=1$$

■

مسألهٔ ۲. مقدار gf نیز برابر ۱ است و این از حالت کلی‌که در زیر بیان می‌کنیم نتیجه می‌شود. اگر در حلقهٔ یکه‌دار R این خاصیت برقرار باشد که $ab=1$ نتیجه بدهد $ba=1$ آنگاه این خاصیت در حلقهٔ چندجمله‌ایهای $R[x]$ با ضرایب در R نیز برقرار است. زیرا در حلقهٔ ماتریسهای R روی میدان F اگر $AB=I$ آنگاه $BA=I$ نیز برقرار است.

پس فرض می‌کنیم

$$f(x)\,g(x)=1,\ f(x), g(x)\in R[x]$$

آنگاه:

$$(g(x)\,f(x))^2 g(x)\,f(x)\cdot g(x)f(x)=$$

$$g(x)\cdot 1\, f(x)=g(x)\cdot f(x)$$

حال فرض کنید

$$g(x)=b_0+b_1x+\dots+b_mx^m,$$

$$f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$$

چون $f(x)\cdot g(x)=1$ نتیجه می‌شود که $a_0b_0=1$. اگر

$$g(x)\cdot f(x)\neq 1$$

باشد آنگاه:

$$g(x)\,f(x)=b_0a_0+cx^k+\dots.$$

جاییکه k کوچکترین توان x است که $c\neq 0$ باشد. چون

$$a_0b_0=1$$

پس بنا به فرض $b_0a_0=1$ و درنتیجه

$$g(x)\,f(x)=1+cx^k+\dots$$

حال از رابطهٔ: $(g(x)\,f(x))^2=g(x)\,f(x)$ نتیجه می‌شود:

$$(1+cx^k+\dots.)^2=1+cx^k+\dots. \Longrightarrow$$

$$2c=c\Longrightarrow c=0$$

که یك تناقض است.

مسألهٔ ۳. چون $T^2(v)=T(v)$ پس $T^*:T(v)\to T(v)$ یك تبدیل خطی با ضابطهٔ $T(v)\to T^2(v)$ است و درنتیجه داریم:

$$\dim(T(v))=\dim T^*(T(v))+\dim \ker T^*$$

که چون

$$\operatorname{Ker} T^*=\operatorname{Ker} T\cap T(v)$$

نتیجه می‌شود که:

$$\dim(\operatorname{Ker} T\cap T(v))=r(T)-r(T^2)$$

■

نگرشی به ساختار عدد ۱۳۷۲

محمدرضا رهبر
دانشجوی عمران دانشگاه صنعتی امیرکبیر

بازی با اعداد و علائم ریاضی و بدست آوردن ترکیبات زیبا از آنها از جالبترین ورزشهای فکری است که از زمانهای قدیم مرسوم بوده است.

می‌خواهیم با استفاده ازارقام عدد سال ۱۳۷۲ چند ترکیب را پدید آوریم.

$-۱-۳+۷-۲=۱$

$۱-۳+۷-۲=۳ \qquad ۱+۳+۷+۲=۱۳$

$۱-۳+۷+۲=۷ \qquad (-۱+۳۷)\times ۲=۷۲$

$-۱-۳!+۷+۲=۲$

با استفاده ازارقام متوالی ۱ تا ۹ خواهیم داشت.

$۱۲۳۴+(۵\times۶\times۷)-(۸\times۹)=۱۳۷۲$

$۱+۲۳+۴+۵۶(۷+۸+۹)=۱۳۷۲$

$۱۲+(۳\times۴۵۶)-۷+۸-۹=۱۳۷۲$

$(۱۲+۳۴)(۵\times۶)-۷+۸-۹=۱۳۷۲$

و باارقام ۹ تا ۱ چند ترکیب دیگر داریم:

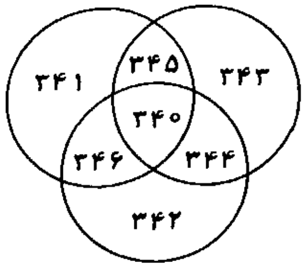
$(۹-۸)۷۶+۵۴(۳+۲۱)=۱۳۷۲$

$۹۸\times۷\times((۶۵+۴)\div۳-۲۱)=۱۳۷۲$

$(۹-۸+۷)(۶+۵)+(۴\times۳۲۱)=۱۳۷۲$

$۹۸\times(۷+۶+۵-۴+۳-۲-۱)=۱۳۷۲$

وحلقه جادویی سال ۱۳۷۲ بااعداد متوالی ۳۴۰ تا ۳۴۶ به طوریکه مجموع اعداد هر دایره عدد ۱۳۷۲ را بدست می‌دهد.



بدست آوردن عدد سال جدید با استفاده ازارقام یکسان

$۱۱(۱۱۱+۱۱)+(۱۱\div۱)(۱+۱+۱)=۱۳۷۲$

$(۲+۲+۲)۲۲۲+(۲۲\times۲)-(۲\times۲)=۱۳۷۲$

$(۳۳۳۳\div۳)+(۳۳\times۳\times۳)-۳۳-۳=۱۳۷۲$

$(۴\times۴۴۴)-۴۴۴+۴۴-۴=۱۳۷۲$

$$۵۵\times۵\times۵-\frac{۵+۵+۵}{۵}=۱۳۷۲$$

$$(۶\times۶\times۶\times۶)+۶۶+۶+۶-\frac{۶+۶}{۶}=۱۳۷۲$$

$$۷\times۷\times۷\left(\frac{۷+۷+۷+۷}{۷}\right)=۱۳۷۲$$

$$۸۸(۸+۸)-\frac{(۸\times۸\times۸)+(۸\times۸)}{۸+۸}=۱۳۷۲$$

$$(۹\times۹)(۹+۹)-۹۹+\frac{۹+۹+۹۹}{۹}=۱۳۷۲$$

مطمئناً خواننده می‌تواند باکمی دقت ترکیبات زیباتری باتعداد ارقام کمتر بسازد.

واین هم مربع جادویی ۱۳۷۲ باارقام ۱۷۲ تا ۲۲۰

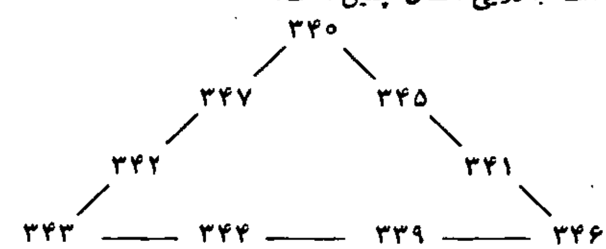
۱۹۳	۲۱۸	۱۸۷	۲۱۲	۱۸۱	۲۰۶	۱۷۵
۱۷۶	۱۹۴	۲۱۹	۱۸۸	۲۱۳	۱۸۲	۲۰۰
۲۰۱	۱۷۷	۱۹۵	۲۲۰	۱۸۹	۲۰۷	۱۸۳
۱۸۴	۲۰۲	۱۷۸	۱۹۶	۲۱۴	۱۹۰	۲۰۸
۲۰۹	۱۸۵	۲۰۳	۱۷۲	۱۹۷	۲۱۵	۱۹۱
۱۹۲	۲۱۰	۱۷۹	۲۰۴	۱۷۳	۱۹۸	۲۱۶
۲۱۷	۱۸۶	۲۱۱	۱۸۰	۲۰۵	۱۷۴	۱۹۹

یك مربع جادویی ۸×۸ نیزوجود داردکه بدست‌آوردن آن را به‌عهده علاقمندان می‌گذاریم. اعداد این‌مربع‌وفقی از ۱۴۰ تا ۲۰۳ می‌باشند.

۱۳۷۲ را به‌دوطریق می‌توان به‌صورت مجموع اعداد متوالی نوشت

$$۱۳۷۲=۱۹۳+۱۹۴+۱۹۵+\dots+۱۹۹=$$
$$۴+۵+۶+\dots+۵۲$$

ومثلث جادویی امسال چنین است:



بدست‌آوردن عدد ۱۳۷۲ بااستفاده ازارقام خودش

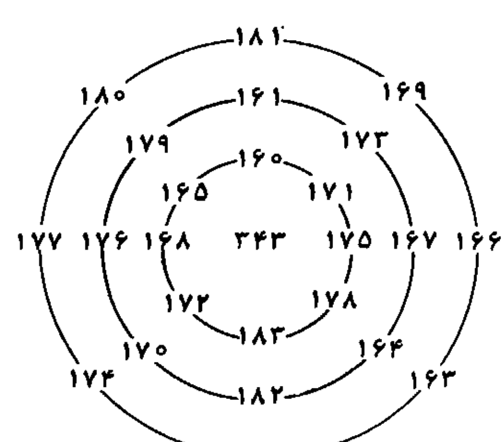
$$(۱\times۳\times۷\times۲)^۲-(۱^۳+۳^۳+۷^۳+۲^۳)-(۱+۳+۷+۲)=۱۳۷۲$$

$$(۱۳\times۷۲)+(۱۳۷+۲)+(۱۳۷\times۲)+(۱\times۳\times۷+۲)=۱۳۷۲$$

$$(۱۳\times۷^۲)+(۱۳\times۷^۲)+((-۱+۳)\times۷^۲)=۱۳۷۲$$

$$۱^۳\times۷^۲\times(۲+۳\times(۷+۲))=۱۳۷۲$$

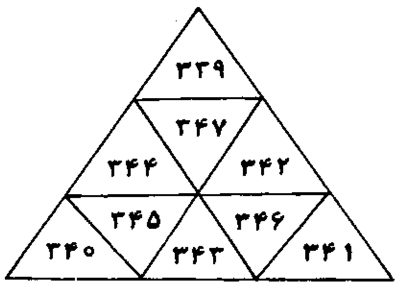
دردایره جادویی‌زیرمجموع‌اعدادروی هرقطرومحیط هردایره برابر ۱۳۷۲ است.



$$\begin{vmatrix}۱&۳\\۷&۲\end{vmatrix}=-(۱\times۳\times۷)+۲$$

عدد ۱۳۷۲ دارای $۱\times۳+۷+۲$ مقسوم‌علیه است.

نوعی دیگر ازمثلث جادویی‌که در آن مجموع اعداد هر ۳مثلث داخلی برابر ۱۳۷۲است. ضمناً مجموع اعداد سه‌ذوزنقه‌داخلی نیز باهم برابرند.



تمرین وسرگرمی

۱ـ درجدول زیر یك عدد را به‌دلخواه انتخاب کنید و روی اعدادی‌که درسطر وستون مربوط به‌آن قراردارند باتکه کاغذی بپوشانید. ازاعداد باقی‌مانده یك عدددرا انتخاب کرده وهمان‌کاررا ادامه دهید تاپنج عدددرجدول باقی‌بماند.مجموع ۵عدددرا بدست‌آورید. چه عددی به‌دست می‌آید؟ باکمی فکر ودقت به‌سادگی می‌توانید رازاین جدول‌را بیابید.

۲۷۰	۲۸۸	۲۷۴	۲۷۱	۲۸۲
۲۶۳	۲۸۱	۲۶۷	۲۶۴	۲۷۵
۲۶۷	۲۸۵	۲۷۱	۲۶۸	۲۷۹
۲۷۲	۲۹۰	۲۷۶	۲۷۳	۲۸۴
۲۶۵	۲۸۳	۲۶۹	۲۶۶	۲۷۷

۲ـ بااستفاده ازعلائم ریاضی ونقط ۴رقم ۲ و ۷ و۳ و ۱ (بترتیب) اعداد ۱ تا ۱۰۰را بسازید. (چند تا از این اعداد ساخته شده است).

$(۱\div۳)\times۷۲=۲۴$ .... $۱+۳!+۷+۲=۱۶$ .... $۱^۳+۷^۲=۵۰$ .....

$۱\times(۳+۷)^۲=۱۰۰$ ..... $(۱+۳!)(۷+۲)=۶۳$ ..

گزارشی از برگزاری مرحله دوم آزمون المپیادهای ریاضی و کامپیوتر ـ دهه فجر ۷۱

تدوین از: منصور ملک‌عباسی

روزهای ۱۷ تا ۲۱ بهمن ماه ۱۳۷۱ برای همه دانش آموزان ممتازی که در اصفهان حضور یافته بودند تا در یک رقابت و مسابقه فشردهٔ علمی شرکت کنند یادآور یک همایش بزرگ علمی بود.

۲۸۵ نفر دانش‌آموز که ۲۹ نفر آنها از خواهران ممتاز کشور ما بودند با فرهنگ های‌گوناگون و با یک دنیا امید خود را برای انجام دومین مرحله آزمون المپیاد ریاضی و کامپیوتر آماده کرده بودند یکشنبه نیمه شعبان که مصادف با ولادت باسعادت حضرت ولی‌عصر(عج) بود مراسم افتتاح این مسابقات درسالن ورزشی بزرگ با تلاوتی از کلام‌ا... مجید در آموزشکدهٔ شهید محسن مهاجر مجاور دانشگاه اصفهان باشکوه بسیار آغاز گشت. حضور معاون محترم پژوهشی، استاندار محترم اصفهان، مدیر کل آموزش و پرورش و دهها نفر از اساتید دانشگاهها به‌عظمت این مراسم افزوده بود. رژه دانش آموزان ممتاز از هر استان زینت بخش این مجلس بود.

پس از اتمام مراسم، بعد از صرف غذا وانجام نماز در بعدازظهر یکشنبه ۱۸ بهمن ماه درسالن امتحانات این آموزشکده ۱۹۵ نفر دانش آموز دختر و پسر برگزیده از ۲۵ استان حضور یافتند و برای پاسخ‌گویی به ۳ مسئله ریاضی به‌مدت ۴ ساعت خود را آماده نمودند. بعداز تلاوت قرآن کریم، نیم ساعت اول فرصت بررسی مسایل و سوال از اساتید بود که پاسخ دانش آموزان را اساتید حاضر در جلسه بیان می‌داشتند. تقریباً تمامی دانش آموزان از تمامی وقت تعیین شده استفاده کردند بعد از پایان آزمون، کار رمزگذاری اوراق، جداسازی سر برگ‌ها و تفکیک اوراق (پاسخ) دانش آموز شروع و بلافاصله امر تصحیح اوراق آغاز شد.

دوشنبه ۱۹ بهمن در دو نوبت صبح و بعد ازظهر مجموعاً ۱۲۵ نفر دانش آموز دختر و پسر درالمپیاد کامپیوتر آزمون خود

را برگزارنمودند البته‌گفتنی است حدود ۴۰ نفردرهر دورشته ریاضی و کامپیوتر شرکت‌کرده بودند.

سه شنبه صبح ۲۰ بهمن نوبت دوم آزمون المپیاد ریاضی باارائهٔ ۳ مسئله، مدت ۴ ساعت همانند نوبت اول شروع شد وپس از آن آزمون بودکه‌کلیه شرکت کنندگان بعداز ۲ روزمسابقه یك نفس‌راحتی می‌کشیدند. ناهار ظهر سه‌شنبه‌درهتل‌عباسی که همه دانش‌آموزان، اساتید، برگزار کنندگان حضورداشتند تاحدی از خستگی دانش‌آموزان کاست ولی بیم وامید در چهرهٔ همه به‌چشم می‌خوردکه فردا روز چهارشنبه‌که نتایج اعلام می‌شود بالاخره اسامی چه‌کسانی بعنوان دانش آموزان ممتازمشخص خواهد شد.

روزچهارشنبه ۲۱ بهمن ماه مراسم اختتامیه درحضور اساتیدی‌که شب‌گذشته تا دیروقت به‌امر تصحیح اوراق مشغول بودند، جمعی از مقامات استان اصفهان‌و دانش‌آموزان شرکت‌کننده درمرحله دوم نیزحضورداشتند.

مخبرین کمیته‌های المپیاد ریاضی و کامپیوتر درزمینهٔ چگونگی انتخاب سؤالات وتصحیح آنها گزارش دادند.

درپایان این‌مراسم اسامی ۹ نفر دانش آموز برگزیدگان آزمون‌مرحله دوم‌المپیاد ریاضی و۶نفر برگزیدگان المپیادکامپیوتر درمیان شوروشعف‌کلیه حاضران اعلام‌شد که ازسوی‌آقای دکتر حنداد عادل معاون وزیرورئیس‌سازمان‌پژوهش‌و برنامه‌ریزی آموزشی و نیز آقای علوی مدیر کل آموزش‌وپرورش استان‌اصفهان، حلقه‌های گل، لوحه‌های تقدیر به این عزیزان اهدا شد. وبه‌این ترتیب ۱۵ دانش‌آموزازشرکت درآزمون‌کنکوردانشگاه معاف شدند.

سپس مسؤل واحد المپیاد برنامه دوره آموزشی این‌عزیزان را دردانشگاه‌صنعتی شریف و فهرست موضوعات درس و طول دوره را اعلام نمود و مقرر شدکه ۹ نفر دانش‌آموز برگزیده المپیاد ریاضی ازاول اسفندماه۷۱درتهران دوره آموزشی خودراآغازنمایند ازمیان این عده ۶نفر بعد از طی این دوره مشخص می‌شودتابه‌کشورترکیه جهت شرکت در سی‌وچهارمین المپیاد جهانی‌ریاضی‌اعزام شوند.

لازم به‌ذکراست‌که مجموع بارم ۶ مسئله ریاضی ۴۲ بوده‌که بیشترین نمره کسب شده در آن آزمون ۳۴/۵ بوده است.

ضمن آرزوی‌موفقیت‌برای همه دانش آموزان پیروزی عزیزان برگزیده‌را در میدان‌های جهانی المپیاد ریاضی را از خداوند مسئلت داریم

برگزیدگان المپیاد ریاضی

نام ونام خانوادگی	شهرستان	مدرسه-کلاس
۱-آقای عمران احمدی درویشوند	تهران	رشد-چهارم
۲- « محمدرضا رزوان	تهران	علامه‌حلی-چهارم
۳- « محمود رضایی	شیراز	اندیشه-چهارم
۴- « مهردادعباسپور	تهران	کمال-چهارم
۵- « افشین عبداللهی	سنندج	نمونه‌شیخ‌شلتوت-چهارم
۶- « سید محمد غلامزاده‌محمودی	شیراز	نمونه‌اندیشه-چهارم
۷- « محمد مهدیان	تهران	مفید-چهارم
۸- « حسین مواساتی	تبریز	سعدی-چهارم
۹- « جاویدولیدشتی	رشت	دکتر بهشتی-چهارم

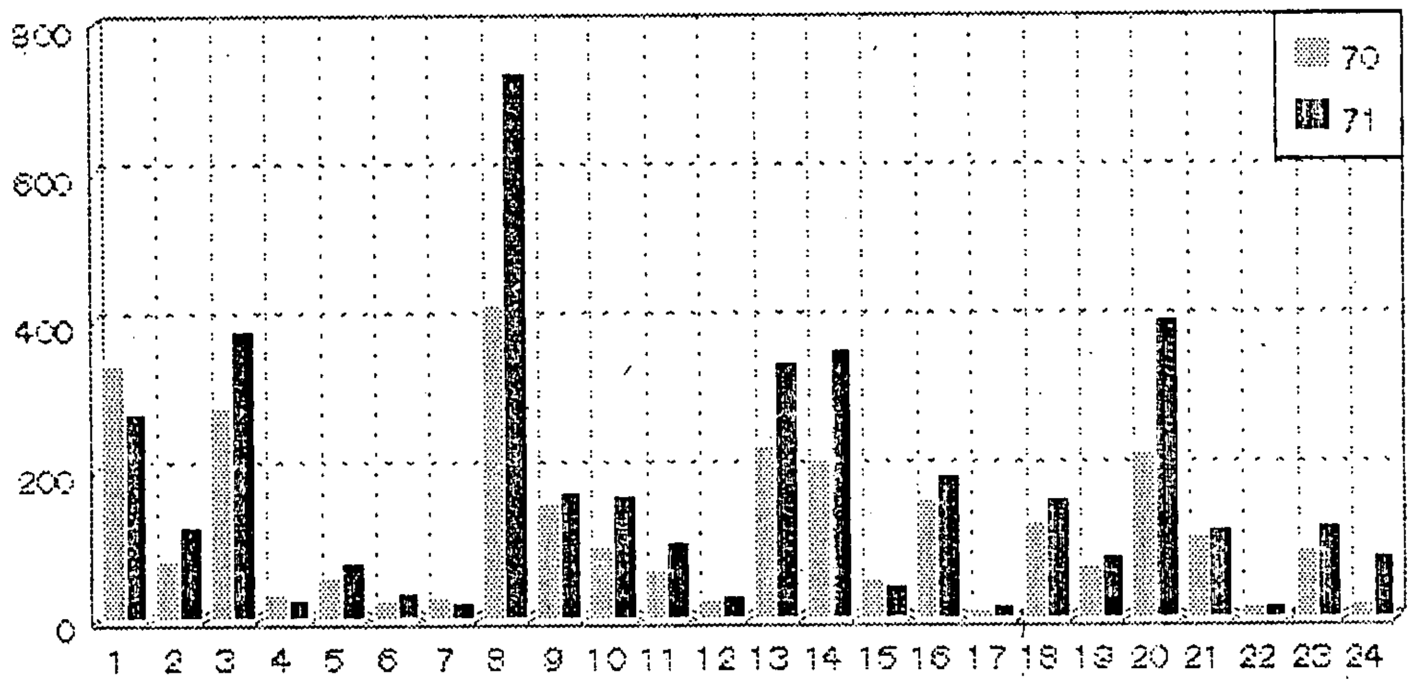
برگزیدگان المپیاد کامپیوتر

نام ونام خانوادگی	شهرستان	مدرسه	کلاس
۱-آقای علی ایرانلی	تهران	علامه حلی	سوم
۲- « سعید بهزادی‌پور	تهران	علامه حلی	سوم
۳- « سینا سوهانگیر	تهران	البرز	چهارم
۴- « محمدرضا صلواتی‌پور	تهران	علامه حلی	سوم
۵- « مهدی فولادگر	اصفهان	شهید اژه‌ای	سوم
۶- « محمد قبله	یزد	باقرالعلوم	چهارم
۷- « محمد مهدیان	تهران	مفید	چهارم

از نظر رتبه‌بندی استانی در هریك از المپیادها ۳ استان برتر بشرح زیر مشخص شدند.

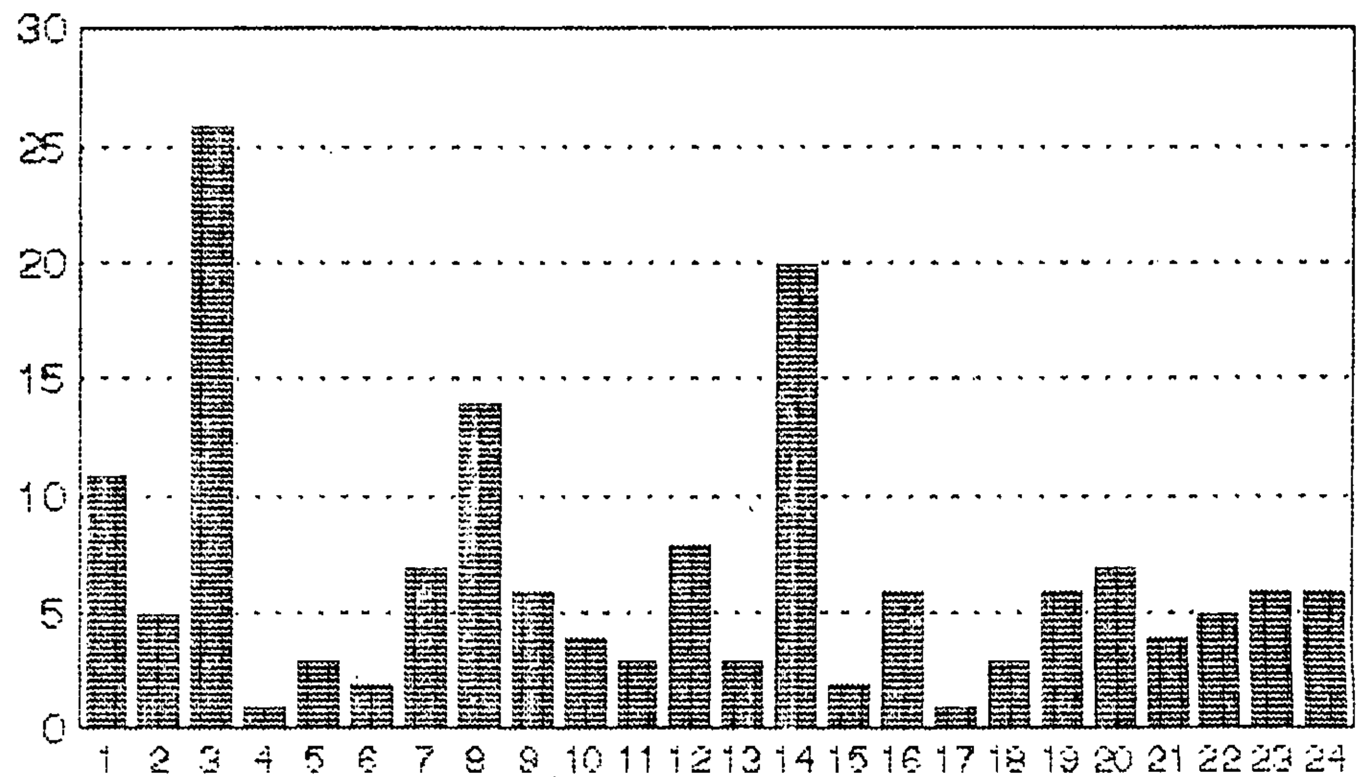
المپیاد کامپیوتر	المپیاد ریاضی
۱- استان خراسان	۱- استان کردستان
۲- استان مرکزی	۲- استان آذربایجان‌شرقی
۳- استان‌کرمان	۳- استان زنجان

نمودار شرکت کنندگان درمرحله اول آزمون المپیاد ریاضی هر استان‌درسالهای ۷۱-۷۰ (به‌جز تهران)



۱ــ آذربایجانشرقی
۲ــ آذربایجانغربی
۳ــ اصفهان
۴ــ ایلام
۵ــ باختران
۶ــ بوشهر
۷ــ چهارمحال وبختیاری
۸ــ خراسان
۹ــ خوزستان
۱۰ــ زنجان
۱۱ــ سمنان
۱۲ــ سیستان‌و بلوچستان
۱۳ــ شهرستانهای تهران
۱۴ــ فارس
۱۵ــ کردستان
۱۶ــ کرمان
۱۷ــ کهکیلویه وبویراحمد
۱۸ــ گیلان
۱۹ــ لرستان
۲۰ــ مازندران
۲۱ــ مرکزی
۲۲ــ هرمزگان
۲۳ــ همدان
۲۴ــ یزد

مجموع پذیرفته شدگان مرحله اول المپیادهای ریاضی و کامپیوتر سالهای ۷۱-۷۰ به‌جز تهران (به‌تفکیک استان)



۱ــ آذربایجانشرقی
۲ــ آذربایجانغربی
۳ــ اصفهان
۴ــ ایلام
۵ــ کرمانشاهان
۶ــ بوشهر
۷ــ چهارمحال وبختیاری
۸ــ خراسان
۹ــ خوزستان
۱۰ــ زنجان
۱۱ــ سمنان
۱۲ــ شهرستانهای تهران
۱۳ــ سیستان وبلوچستان
۱۴ــ فارس
۱۵ــ کردستان
۱۶ــ کرمان
۱۷ــ کهکیلویه و بویر احمد
۱۸ــ گیلان
۱۹ــ لرستان
۲۰ــ مازندران
۲۱ــ هرمزگان
۲۲ــ مرکزی
۲۳ــ همدان
۲۴ــ یزد

حل مسائل هفدهمین دورهٔ مسابقات ریاضی دانشجوئی

(بیست‌وسومین کنفرانس ریاضی کشور، دانشگاه رازی کرمانشاه ۱۹ فروردین ۱۳۷۱)

فرستنده: دکتر درفشه
گروه ریاضی- دانشگاه تهران

الف) آنالیز

۱- اگر $g:[0,1]\to R$ پیوسته باشد و $g(1)=0$ و $f_n(x)=x^n g(x)$.

نشان دهید که دنبالهٔ f_n به‌طوریکنواخت همگراست.

حل. چون g در $[0,1]$ پیوسته است و $[0,1]$ بسته می‌باشد پس g در $[0,1]$ کراندار است یعنی، $M>0$ی وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x\in[0,1]$ داریم: $|g(x)|<M$. حال چون g در $x=1$ پیوسته است پس برای $\varepsilon>0$ داده شده $0<\delta<1$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\forall x.(x\in[0,1], 1-x<\delta \Rightarrow |g(x)|<\varepsilon)$$

اکنون برای $\varepsilon>0$ عدد n_0 وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $n>n_0$ داریم $(1-\delta)^n M<\varepsilon$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\forall x\in[0,1] \Rightarrow |f_n(x)-0|=|x^n||g(x)| \le \begin{cases}(1-\delta)^n M \\ |g(x)|\end{cases} <\varepsilon$$

وحکم ثابت است.

۲- تابع $f: R\to\{0,1,2,\dots,9\}$ را با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}a_2 & \text{اگر } x\neq[x]\\ 9 & \text{اگر } x=[x]\end{cases}$$

که در آن $[x]$ جزء صحیح x و a_2 دومین رقم بسط اعشاری نامختوم $x-[x]$ است.

الف. ثابت کنید f متناوب است و دورهٔ تناوب آن را تعیین کنید.

ب. اگر C دورهٔ تناوب f باشد مطلوبست محاسبهٔ

$$\int_0^C x\,df(x)$$

(اگر بسط اعشاری عددی به‌صفر ختم شود آخرین رقم مخالف صفر را یکی کم کرده همهٔ صفرهای سمت راست آن‌را به ۹ تبدیل می‌کنیم.)

حل(الف). فرض کنیم

$$x=[x]+0/a_1a_2a_3\dots$$

دراین‌صورت

$$x+0/1=[x]+\epsilon/ba_2a_3\dots$$

که در آن ϵ صفر یا یك است و

$$b\in\{0,1,\dots,9\}$$

درنتیجه

$$f(x)=f(x+0/1)=a_2$$

پس f متناوب‌است. اینك ثابت می‌کنیم دورهٔ تناوب آن $0/1$ است. درغیراین‌صورت فرض‌کنید $0<\alpha<0/1$ دورهٔ تناوب

f باشد. دراین‌صورت

$$x_۱ = ۰/۱-(۰/۱)\alpha \in (۰/۰۹,\ ۰/۱)$$

و درنتیجه

$$x_۱ > ۰/۰۸۹۹\ldots$$

پس بسط نامختوم $x_۱$ به‌صورت

$$x_۱ = ۰/۰۹\alpha_۱\alpha_۲\ldots$$

است که تمام αها برابر ۹ نیستند. درنتیجه $f(x_۱)=۹$. از طرف دیگر:

$$۰/۰۹۹\ldots = ۰/۱ < x_۲ = \alpha + x_۱ = ۰/۱ + ۰/۹\alpha < ۰/۱۹ = ۰/۱۸۹۹\ldots$$

ازنامساوی‌های

$$۰/۰۹۹\ldots < x_۲ < ۰/۱۸۹۹\ldots$$

معلوم می‌شود که بسط نامختوم $x_۲$ به‌صورت زیراست

$$x_۲ = ۰/۱\beta_۱\beta_۲\ldots$$

که در آن $\beta_۱ \leqslant ۸$. درنتیجه

$$f(x_۲)=\beta_۲ \leqslant ۸$$

ملاحظه می‌شود که

$$x_۲ - x_۱ = \alpha$$

ولی

$$f(x_۱) \neq f(x_۲)$$

پس α نمی‌تواند دورهٔ تناوب f باشد.

(ب)

$$\int_۰^c x\,df(x) = cf(c) - \int_۰^c f(x)\,dx =$$

$$۰/۱(۹) - \sum_{k=۰}^{۹} k\cdot\frac{۱}{۱۰۰} = ۰/۹ - \frac{۹\times ۱۹}{۱۰۰\times ۲} =$$

$$۰/۹ - \frac{۱}{۲}\times\frac{۹}{۱۰} = ۹/۲۹ = ۹/۴۵$$

۳ـ تابع $f:R \to R$ پیوسته یکنواخت است. نشان دهید اعداد مثبت a و b وجود دارند به‌طوری‌که

$$|f(x)| \leqslant a|(x)| + b$$

حل. چون f پیوسته یکنواخت است پس:

$$\forall\epsilon>۰\,\exists\delta>۰\,\forall x,\ y\,(|x-y|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon)$$

به‌ویژه $\delta>۰$ وجود دارد بقسمی‌که به‌ازای تمام $x,\ y\in R$ نامساوی $|x-y|<\delta$ نامساوی $|f(x)-f(y)|<۱$ را نتیجه می‌دهد. اگر قرار دهیم

$$b=|f(۰)|+۱>۰,\quad a=۲/\delta>۰$$

نشان خواهیم داد که به‌ازای هرعدد حقیقی x داریم:

$$(*)\quad |f(x)| \leqslant a|x|+b$$

به‌ازای $x=۰$ داریم:

$$|f(۰)| \leqslant b = |f(۰)|+۱$$

ونامساوی (*) برقراراست حال نامساوی (*) رابرای $x>۰$ ثابت می‌کنیم که برای $x<۰$ مشابهاً ثابت خواهد شد.

کوچکترین عدد صحیح ناکمتراز $\frac{۲}{\delta}x$ را درنظر بگیرید ونامش را N بگذارید. با استفاده ازنامساوی مثلث خواهیم داشت:

$$|f(x)-f(۰)| \leqslant |f(۰)-f(\delta/۲)|+\ldots+|$$

$$f(k\delta/۲)-f\left(\frac{k+۱}{۲}\delta\right)|+\ldots+$$

$$|f\left(\frac{N-۱}{۲}\delta\right)-f(x)| \leqslant N-۱+$$

$$|f\left(\frac{N-۱}{۲}\delta\right)-f(x)|$$

چون با انتخاب N داریم

$$N-۱<\frac{۲}{\delta}x\leqslant N$$

پس

$$|x-\frac{N-۱}{۲}\delta|<\delta$$

و درنتیجه

$$|f\left(\frac{N-۱}{۲}\delta\right)-f(x)|<۱$$

ولذا خواهیم داشت:

$$|f(x)-f(0)|\leqslant N$$

که چون ازطرفی داریم

$$N<1+\frac{2}{\delta}x$$

به‌دست خواهد آمد:

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-f(9)|+|f(9)|\leqslant N+$$
$$|f(0)|<1+\frac{2}{\delta}x+|f(0)|=a|x|+b$$

حل مسائل جبر

۱ـ فرض‌کنیم G یك گروه غیر آبلی متناهی باشد و A و B دو زیرگروه‌آبلی متمایز G باشند به‌طوری‌که

$$[G:A]=[G:B]=p$$

که درآن p کوچکترین عدد اولی‌است‌که $|G|$ را عادمی‌کند. ثابت‌کنید

$$I_{nn}(G)\cong Z_p\times Z_p$$

حل. ازشرط $[G:A]=[G:B]=p$ نتیجه می‌شود که $|A|=|B|$ وازاینکه p کوچکترین عدد اولی است‌که مرتبهٔ G را عاد می‌کند بایستی داشته باشیم $A\trianglelefteq B$ و $B\trianglelefteq G$. بنابراین AB زیرگروهی از G بوده و:

$$[G:AB]=\frac{|G|}{|AB|}=\frac{[G:A]}{[B:A\cap B]}=\frac{p}{[B:A\cap B]}$$

اگر $[B:A\cap B]=1$ آنگاه تناقض نسبت به‌متمایز بودن A و B داریم. پس بایستی داشته باشیم $[B:A\cap B]=p$ و در نتیجه $G=AB$. حال ثابت می‌کنیم $A\cap B=Z(G)$ مرکز گروه G. است. اگر $x\in A\cap B$ آنگاه ازآنجا که A و B آبلی فرض شده‌اند خواهیم داشت $A, B\leqslant C_G^{(x)}$. از تساوی‌های

$$p=[G:A]=[G:C_G^{(x)}][C_G^{(x)}:A],$$

$$p=[G:B]=[G:C_G^{(x)}][C_G^{(x)}:B]$$

نتیجه می‌شودکه $C_G^{(x)}=G$ و درنتیجه $x\in Z(G)$ ولذا

$$A\cap B\leqslant Z(G)$$

حال چون

$$[G:A\cap B]=p^2$$

پس

$[G:Z(G)]=1$ و p یا p^2.

ازآنجاکه G غیرآبلی فرض شده حالتهای

$[G:Z(G)]=1$ و p

غیرممکن هستند ولذا

$$[G:Z(G)]=p^2$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$A\cap B=Z(G)$$

حال داریم:

$$I_{nn}(G)\simeq\frac{G}{Z(G)}\cong Z_{p^2} \text{ یا } Z_p\oplus Z_p$$

از $G/Z(G)\cong Z_{p^2}$، نتیجه می‌شودکه G آبلی‌است که‌غیرممکن است. پس

$$I_{nn}(G)\simeq Z_p\oplus Z_p$$

۲ـ فرض‌کنیم R یك حلقه، $r\in R$ و $r-r^2$ پوچ توان باشد. ثابت‌کنید هرگاه r پوچ‌توان نباشدآنگاه R دارای عضو خود توان ناصفراست.

حل. چون $r-r^2$ پوچ توان فرض شده پس $n\in N$ی وجود دارد بقسمی‌که $(r-r^2)^n=0$ لذا می‌توان نوشت:

$$0=(r-r^2)^n=r^n-r^{n+1}g(r),\ g(x)\in Z[x]$$

ولذا

$$r^n=r^{n+1}g(r)$$

حال اگر قرار دهیم

$$f(x)=x^n g(x)^n$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$f(r)^2=(r^n g(r)^n)^2=r^{2n}g(r)^{2n}$$

ولذا می‌توان نوشت:

$$r^n=r^{n+1}g(r)=rg(r)\,r^n=rg(r)\,r^{n+1}g(r)=$$

$$r^2g(r)^2r^n=r^{n+2}g(r)^2=r^2g(r)^2r^{n+1}g(r)=$$
$$r^{n+3}g(r)^3=\dots=r^{n+n}g(r)^n=r^{2n}g(r)^n$$

ولذا درمورد $f(r)$ داریم:

$$f(r)^2=r^{2n}g(r)^{2n}=r^{2n}g(r)^ng(r)^n=r^ng(r)^n=$$
$$f(r)f(r)^2=f(r)$$

اگر $f(r)=0$ آنگاه

$$r^nf(r)=r^nr^ng(r)^n=r^{2n}g(r)^n=r^n=0$$

که متناقض با این فرض است که r پوچ توان نیست. پس $f(r)$ عضو خودتوان مخالف صفر R است.

۳ـ فرض کنیم $A=(a_{ij})$ یك ماتریس $n\times n$ روی میدان اعدادگویا باشد به‌طوری‌که

$$(a_{ij})=(i,\ j)$$

که درآن $(i,\ j)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترك i و j است، آیا A دارای وارون است؟ چرا؟

حل. A وارون‌پذیراست. ماتریسهای $B=(b_{ij})$ و $C=(c_{ij})$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & j|i,\\ 0, & j\nmid i.\end{cases}\quad ,\quad b_{ij}=\begin{cases}\varphi(i), & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

که درآن φ تابع اویلراست. با محاسبهٔ درایه‌هامی‌توان نشان دادکه $A=CBC^t$ که دراینجا C^t ترانهادماتریس C است. بنابراین،

$$\det A=\det B=\varphi(1)\varphi(2)\dots\varphi(n).$$

مسائل و حل آزمون مرحله اول المپیاد ریاضی

بارم هرمسأله ۷ نمره می‌باشد

مسألهٔ ۱ـ

همه جوابهای درست معادله

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{m\cdot n^2}=\frac{3}{4}$$

را بدست آورید.

مسألهٔ ۲ـ

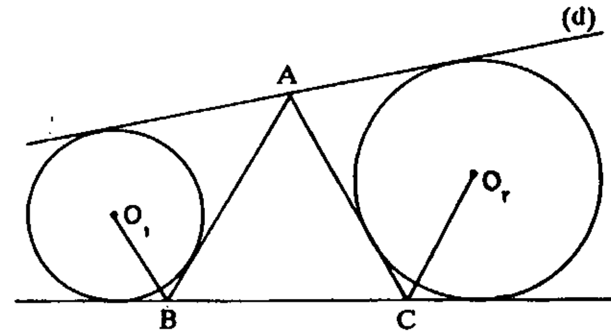
اگر X یك مجموعهٔ n عضوی باشد آنگاه ثابت کنید تعداد زوجهای (B و A) که A و B زیرمجموعه‌های X و $A\subset B$ و $A\neq B$ است برابراست با: 3^n-2^n

مسألهٔ ۳ـ

مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است:

ازنقطه A و دربیرون مثلث خطی مانند (d) رسم می‌کنیم. اگر O_1 و O_2 مرکزهای دو دایره‌ای باشندکه مطابق‌شکل به‌ترتیب بر AB و BC و (d) وهم‌چنین بر AC و BC و (d) مماسند

آنگاه ثابت کنید که O_1B+O_2C مقداریست ثابت.



مسألهٔ ۴ـ

در معادلهٔ درجهٔ سوم $ax^3+bx+c=0$ ضرایب همگی اعداد گویا هستند ومیدانیم که یکی از ریشه‌های آن باحاصلضرب دو ریشه دیگر برابر است. ثابت کنید همین ریشه عددی گویاست.

مسألهٔ ۵ـ

همهٔ اعداد اول فرد P را پیدا کنید به گونه‌ای که

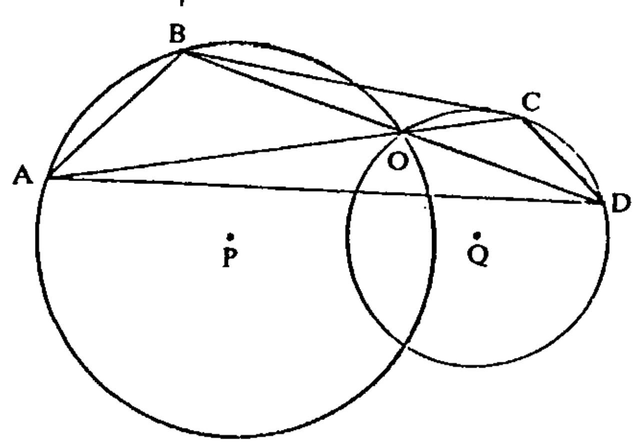
$$\frac{2^{P-1}-1}{P}$$

مربع کامل گردد.

مسألهٔ ۶ـ

درچهارضلعی گوژ ABCD نقطهٔ O محل برخورد قطرهاست. دایره‌های محیطی دو مثلث AOB و COD را رسم می‌کنیم. اگر P و Q مرکزهای این دو دایره باشند آنگاه ثابت کنید:

$$PQ\geqslant\frac{AB+CD}{4}$$



حل مسألهٔ ۱

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{m\cdot n^2}=\frac{3}{4}$$

$$4n^2+4mn-4=3m\cdot n^2$$

$$m=\frac{4n^2-4}{3n^2-4n}\Longrightarrow 3m=4+\frac{16n-12}{3n^2-4n}$$

بدیهی که باید

$$3n^2-4n\leqslant 16n-12$$

باشد

ویا:

$$3n^2-20n+12\leqslant 0\Longrightarrow \frac{2}{3}\leqslant n\leqslant 6$$

وبا آزمون به‌راحتی معلوم میشود که تنها $n=2$ قابل قبول است.

$$\begin{cases} n=2 \\ m=3 \end{cases}$$

حل مسألهٔ ۲

راه حل اول: B می‌تواند n یا $n-1$ یا $n-2$، ... یا ۱ عضو داشته باشد،

A می‌تواند هر زیرمجموعهٔ X به‌غیر ازخود X باشد

اگر B، n عضو داشته باشد،آنگاه $B=X$.

پس تعدادکل Aها برابر 2^n-1 می‌باشد (دراین حالت).

حال از X می‌توان $\binom{n}{1}$ عضو برداشت دراین حالت مشابه بالا تعدادکل Aها برابر $2^{n-1}-1$ می‌باشد مشابهاً اگر استدلال را ادامه دهیم تعدادکل زوج مرتبها برابراست با:

$$\underbrace{\binom{n}{0}\left(2^n-1\right)}_{\text{حالت اول}}+\underbrace{\binom{n}{1}\left(2^{n-1}-1\right)}_{\text{حالت دوم}}+\dots+$$

$$\underbrace{\binom{n}{i}\left(2^{n-i}-1\right)}_{\text{حالت iام}}+\dots+\underbrace{\binom{n}{n-1}\left(2-1\right)}_{\text{حالت آخر}}$$

$$+\binom{n}{n}(2^0-1)=0$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^{n-i}-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$$

$$=(2+1)^n-2^n=3^n-2^n$$

راه‌حل دوم: به استقراء روی n انجام‌میدهیم. برای $n=1$ حکم بدیهی است.

فرض کنیم که برای n تعداد این زوجها $T_n=3^n-2^n$

(هرزوج (A, B) که ACB را زوج خوب در

$$X_n=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

می‌نامند.

حال برای حالت $n+1$ یعنی

$$X_{n+1}=\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$$

زوجهای خوب را به‌چهار دسته زیر تقسیم می‌کنیم.

۱ـ هرزوج خوب (A, B) در X_n یک زوج خوب در X_{n+1} است.

۲ـ برای هرزوج خوب (A, B) در X_n زوج

$$(A, B\cup\{x_{n+1}\})$$

در X_{n+1} خوب است.

۳ـ برای هرزوج خوب (A, B) در X_n زوج

$$(A\cup\{x_{n+1}\}, B\cup\{x_{n+1}\})$$

در X_{n+1} خوب است.

۴ـ برای هر زیرمجموعهٔ $A\subseteq\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ زوج $(A, A\cup\{x_{n+1}\})$ در X_{n+1} خوب‌است.

پس:

$$T_{n+1}=3(T_n)+2^n=3(3^n-2^n)+2^n=3^{n+1}-2^{n+1}$$

راه‌حل سوم: اگر تعداد زوجها را درمجموعهٔ

$$X_n=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

T_n بنامیم طبق استدلال حالت $n+1$ استقراء،

$$T_{n+1}-3T_n=2^n$$

ریشه معادله مفسر است

$$x-3=0$$

یعنی $x=3$

$$T_n=A3^n+B2^n$$

اگر $n=1$ آنگاه $A=1$

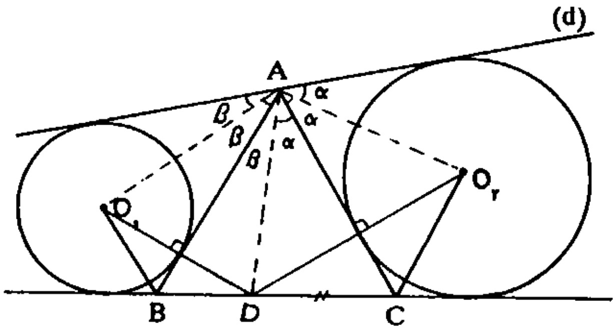
$$T_1=3A+2B=1$$

اگر $n=0$ آنگاه $B=-1$

$$T_0=A+B=0$$

$$T_n=3^n-2^n$$

حل مسألهٔ ۳



از O_2 عمودی بر AC فرودمی‌آوریم تا BC را در D قطع کند. مطابق شکل سه زاویه مساوی α پدید می‌آید چون

$$\widehat{BAD}=60^\circ-\alpha$$

پس

$$\beta=60^\circ-\alpha$$

درنتیجه سه‌زاویه مساوی β نیزدرطرف چپ‌شکل‌ایجادمیشود.

اکنون‌گوئیم دومثلث ABD و ABO_1 بحالت (ز ضز) با هم برابر ند درنتیجه: $O_1B=BD$ وبدلیل‌مشابه $O_2C=CD$ است پس:

$$O_1B+O_2C=BD+CD=BC=\text{مقدارثابت}$$

حل مسأله ۴

ریشه‌های معادله را α، β و γ می‌نامیم دراین صورت داریم. مثلا $\gamma=\alpha\beta$ با توجه به‌روابط ریشه‌ها داریم:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\alpha\beta=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

ازاین‌رو داریم:

$$\alpha\beta(1-\alpha\beta)=\frac{b}{a}$$

یعنی

$$\alpha\beta-(\alpha\beta)^2=\frac{b}{a}$$

بالنتیجه

$$\alpha\beta+\frac{c}{a}=\frac{b}{a}$$

یعنی

$$\gamma=\alpha\beta=\frac{b-c}{a}$$

حل مسأله ۵

بنا بفرض داریم:

$$۲^{p-۱}-۱=k^۲\cdot p$$

$$(۲^{\frac{p-۱}{۲}}-۱)(۲^{\frac{p-۱}{۲}}+۱)=k^۲\cdot p$$

بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $۲^{\frac{p-۱}{۲}}+۱$ و $۲^{\frac{p-۱}{۲}}-۱$ باید عدد ۲ را عادکنند ولی چون این دو عدد فردند پس بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها ۱ است یعنی دوعدد نسبت به هم اولند.

بنابراین $۲^{\frac{p-۱}{۲}}-۱$ ویا $۲^{\frac{p-۱}{۲}}+۱$ باید مربع کامل باشد.

اگر $۲^{\frac{p-۱}{۲}}-۱=a^۲$ باشد باید a عدد فردی باشد پس

$$۲^{\frac{p-۱}{۲}}-۱=(۲c+۱)^۲=۴c^۲+۴c+۱$$

یعنی

$$\Longrightarrow ۲^{\frac{p-۱}{۲}}=۲(۲c(c+۱)+۱)$$

اما $۲c(c+۱)+۱$ عدد فردی است ناچار $c=۰$ و در نتیجه $۲^{\frac{p-۱}{۲}}=۲$ وازآنجا $p=۳$

حال اگر $۲^{\frac{p-۱}{۲}}+۱=b^۲$ باشد بازهم باید b فرد باشد و درنتیجه:

$$۲^{\frac{p-۱}{۲}}+۱(=۲d+۱)^۲=۴d^۲+۴d+۱$$

یعنی

$$۲^{\frac{p-۱}{۲}}=۴d(d+۱)$$

اما در $d(d+۱)$ حداقل یکی از عاملها عدد فردی است و برای اینکه توانهای ۲ داشته باشیم لازم است $d=۱$ باشد درنتیجه:

$$۲^{\frac{p-۱}{۲}}=۸$$

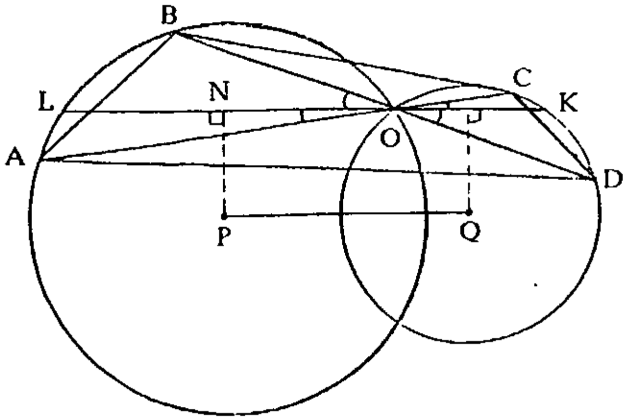
یعنی

$$p=۷$$

حل مسألهٔ ۶

نیمساز زاویه O را رسم می‌کنیم تا دایره‌ها را در K و L قطع کند. به‌طوری‌که ملاحظه می‌شود

$$\widehat{OK}>\widehat{BK}$$



پس:

$$OK>BK$$

ویا:

$$۲OK>۲BK=BK+BK$$

ویا:

$$۲OK>BK+BK>AB$$

پس

$$OK>\frac{۱}{۲}AB$$

به‌همین‌ترتیب

$$OL>\frac{۱}{۲}CD$$

اکنون می‌نویسیم:

$$PQ\geqslant MN=\frac{۱}{۲}KL=\frac{۱}{۲}(OK+OL)>$$

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}AB+\frac{۱}{۲}CD\right)$$

وبالاخره:

$$PQ\geqslant\frac{۱}{۴}(AB+CD)$$

حل مسائل شماره ۳۴

تهیه و تنظیم از: محمود نصیری

۱ـ ازمجموعه $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$، یك زیرمجموعه S شامل $(n+1)$ عدد انتخاب می‌کنیم. ثابت‌کنید دوعدد در S وجود داردکه مجموع آنها $2n+1$ است.

حل. بنا به‌اصل لانه کبوتری. جفت عددهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases}1\\2n\end{cases}\begin{cases}2\\2n-1\end{cases}\begin{cases}3\\2n-2\end{cases}\cdots\cdots\begin{cases}n-1\\n+2\end{cases}\begin{cases}n\\n+1\end{cases}$$

دراینجا n زوج وجود دارد، مانندآنکه n خانه وجود داشته باشدکه درهرخانه دوعدد بامجموع $2n+1$ قراردارد. اکنون اگر $n+1$ عدد از ۱ تا $2n$ انتخاب‌کنیم باید دو عدد از یکی از n خانه انتخاب‌کنیم. بنابراین باید یك جفت وجود داشته باشدکه مجموع آنها $2n+1$ باشد.

۲ـ ثابت‌کنید معادله $\sum_{i=1}^{3}(x-a_i)^{2k+1}=0$

الف ـ فقط دارای یك ریشه حقیقی است.

ب ـ $x=a_1+a_2+a_3/3$ ریشهٔ آن‌است اگروفقط‌اگر a_iها تشکیل تصاعد حسابی دهند. ($K\in N$ و a_iها اعداد حقیقی‌اند.)

حل. الف. اگرفرض کنیم $f(x)=\sum_{i=1}^{3}(x-a_i)^{2k+1}$ آنگاه

چون $f(x)$ ازدرجه فرد است پس معادله $f(x)=0$ حداقل یك ریشه حقیقی دارد. و چون تابع $f(x)$ همواره پیوسته و مشتق‌پذیر است و $f'(x)=(2k+1)\sum_{i=1}^{3}(x-a_i)^{2k}$ لذا $f'(x)\geqslant 0$ وتابع f اکیداًصعودی‌است. لذا، معادلهٔ $f(x)=0$ فقط یك ریشه حقیقی دارد.

ب ـ اگر فرض کنیم $b_i=a_i-\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$ آنگاه $b_1+b_2+b_3=0$.

a_iها تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند اگروفقط اگر b_iها تشکیل تصاعد حسابی دهند. چرا؟

b_iها تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند اگر وفقط اگریکی از b_iها برابرصفر باشد. چرا؟ $\frac{a_1+a_2+a_3}{3}$ ریشه معادله $f(x)=0$ است اگروفقط اگر

$$b_1^{2k+1}+b_2^{2k+1}+b_3^{2k+1}=0$$

بنابراین مسأله به‌این منجرمی‌شودکه ثابت‌کنیم:

اگر $b_1^{2k+1}+b_2^{2k+1}+b_3^{2k+1}=0$ آنگاه یکی از b_i ها صفر است. و برای این منظور، با توجه به اینکه $b_1+b_2+b_3=0$ کافی است ثابت کنیم یکی از b_iها برابر صفر است.

این مطلب را به برهان خلف ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم هیچ یك از b_iها صفر نباشد. بدون آن که به کلیت استدلال خللی وارد شود فرض می‌کنیم $b_1>0>b_2 , b_3$.

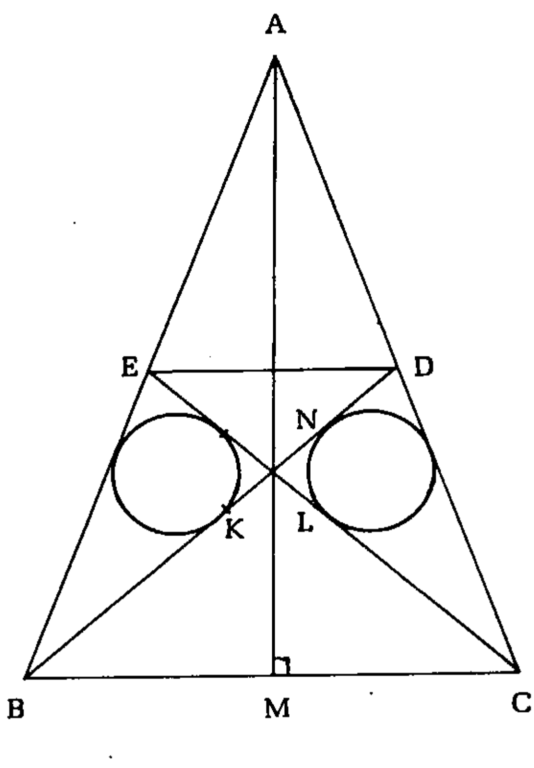
فرض کنیم $x=b_1$ و $y=-b_2$ و $z=-b_3$ ($x, y, z>0$). در این صورت، $x=y+z$ و $x^{2k+1}=y^{2k+1}+z^{2k+1}$.

اما $x^{2k+1}=(y+z)^{2k+1}>y^{2k+1}+z^{2k+1}$ که یك تناقض است.

۳ـ فرض کنیم N نقطه‌ای دلخواه روی میانه وارد بر ضلع BC از مثلث ABC باشد. امتدادهای BN و CN به ترتیب AC و AB را در نقاط D و E قطع می‌کنند. اگر شعاع دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای CND و BNE برابر باشند، ثابت کنید $AB=AC$.

حل. فرض کنیم M وسط BC باشد. چون AM و BD و CE در نقطه N همرس‌اند. بنا به قضیه سوا داریم:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC}.$$



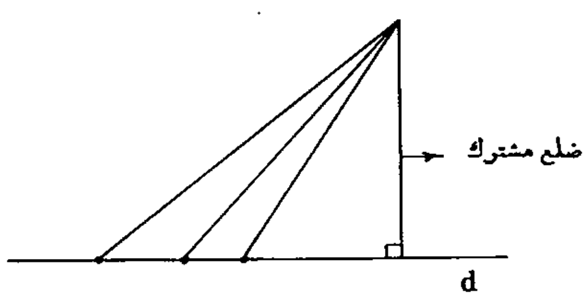
بنابراین دو مثلث AED و ABC متشابهند و $DE \parallel BC$.

در ذوزنقه BCDE دو مثلث NDC و BNE معادل‌اند بنابراین، با توجه به رابطه $S=rP$ که S مساحت و r شعاع دایره محاطی و P نصف محیط است، نتیجه می‌گیریم که محیط دو مثلث NDC و NBE نیز برابرند. چون شعاعهای دو دایره مساوی‌اند لذا، $NK=NL$ و در نتیجه $P-BE=P-DC$ یا $BE=DC$ و ذوزنقه EDCB متساوی‌الساقین است. بنابراین، مثلث ABC نیز متساوی‌الساقین است.

۴ـ خط راست d و عدد طبیعی n مفروض است. ثابت کنید n نقطه متمایز روی خط d و یك نقطه خارج آن می‌توان طوری انتخاب کرد که فاصله هر زوج از $n+1$ نقطه عدد صحیح باشد.

حل. هر یك از n مثلث فیثاغورثی (مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلعهای آنها اعداد صحیح می‌باشند) دو به دو غیر متشابه را با یك ضریب طبیعی به گونه‌ای بزرگ می‌کنیم که همه دارای یك ضلع برابر باشند، به طوری که ضلع برابر ضلع مشترك آنها و عمود بر d باشد و n ضلع دو به دو نابرابر روی خط d قرار گیرند.

n نقطه انتهای وترها که روی خط d قرار می‌گیرند و انتهای ضلعی که بر d عمود است، جواب مسأله هستند.



بنابراین، مسأله به این منجر می‌شود که ثابت کنیم n مثلث فیثاغورثی مناسب یافت می‌شوند.

برای این منظور مثلثهایی به طول اضلاع $2m+1$، $2m^2+2m$ و $2m^2+2m+1$ به ازای $m=1, 2, 3, \ldots, n$ در نظر می‌گیریم.

بنا به عکس قضیه فیثاغورث این مثلث‌ها قائم‌الزاویه هستند، زیرا:

$$(2m+1)^2+(2m^2+2m)^2=(2m^2+2m+1)^2$$

طول ضلعهای کوچك مقسوم علیه‌های عدد $(2n+1)!$ می‌باشند،

پس با استفاده از ضریبهای طبیعی. مناسب می‌توان n مثلث را به‌مثلث‌های فیثاغورثی تبدیل کرد که طول‌ضلع کوچك آنها برابر $(2n+1)$ باشد.

هیچ دومثلثی باهم‌متشابه نیستند زیرا نسبت‌طول وتر به‌طول ضلع بزرگتر برابر

$$\frac{2m^2+2m+1}{2m^2+2m}=1+\frac{1}{2m^2+2m}$$

است.

که این عبارت به‌ازای مقادیر مختلف m مقادیر متمایز اختیار می‌کند، درواقع یك دنباله نزولی است که به‌ازای مقادیر به‌اندازه‌کافی بزرگ m، مقدار آن به‌حد کافی به‌یك نزدیك می‌شود. به‌این‌ترتیب اثبات کامل است.

۵ـ ثابت کنید معادله

$$f(x)=x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}$$

دارای ریشهٔ حقیقی نیست.

حل. اگر $x\leqslant 0$ واضح است که $f(x)>0$.
همچنین اگر $x\geqslant 1$ آنگاه

$$f(x)=x^5(x-1)+x^3(x-1)+x(x-1)+\frac{3}{4}$$

و در نتیجه بازاء هر $x\geqslant 1$ نیز $f(x)>0$. در $(-\infty,0]\cup[1,\infty)$ معادله ریشه حقیقی ندارد.

حال ثابت می‌کنیم به‌ازای هر $0<x<1$ نیز $f(x)=0$ برقرارنیست. $f(x)$ را به‌صورت زیرمرتب می‌کنیم

$$f(x)=x^6-x^3+\frac{1}{4}+x^2-x+\frac{1}{4}$$

$$+x^4(1-x)+\frac{1}{4}=\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$+x^4(1-x)+\frac{1}{4}>0$$

چون $0<x<1$ داریم $1-x>0$ وبقیه جمله‌ها نیز نامنفی هستند. پس به‌ازای هر $x\in R$، $f(x)>0$ و لذا معادله ریشه حقیقی ندارد.

۶ـ اگر $A=x^2y+y^2z+z^2x$ و $B=xy^2+yz^2+zx^2$ عبارت A^2+AB+B^2 را به حاصل‌ضرب تجزیه کنید.

حل.

$$A^3-B^3=x^6y^3-x^3y^6+y^6z^3-y^3z^6$$

$$+z^6x^3-z^3x^6=(y^3-x^3)(z^3-y^3)(x^3-z^3)$$

$$A-B=x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2$$

$$=(y-x)(z-y)(x-z)$$

بنابراین

$$A^2+AB+B^2=\frac{A^3-B^3}{A-B}$$

$$=\frac{(y^3-x^3)(z^3-y^3)(x^3-y^3)}{(y-x)(z-y)(x-z)}$$

$$=(x^2+xy+y^2)(y^2+yz-z^2)(z^2+zx+x^2).$$

۷ـ فرض‌کنیم s و t اعدادحقیقی مفروضی‌باشند. تمام‌توابع مشتق‌پذیر f را روی خط حقیقی‌که دررابطه زیر به‌ازای هر x و y حقیقی و $x\neq y$ صدق می‌کنند پیداکنید.

$$f'(Sx+ty)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

حل. تنها توابعی‌که در شرایط مسأله صدق می‌کنند توابع $f(x)=ax+b$ می‌باشند، به‌جز درحالتی‌که $s=t=1/2$ که‌دراین حالت هر تابع‌چند جمله‌ای ازدرجه دو نیزدرشرایط مساله صدق می‌کند. اگر $S+t\neq 0$، آنگاه فرض می‌کنیم $x=\frac{z-t}{s+t}$ و $y=\frac{z+s}{s+t}$، باجایگذاری دررابطه‌فوق به‌ازای هر z حقیقی ودلخواه داریم:

$$f'(z)=f(y)-f(x)$$

بنابراین: f' نیزمشتق‌پذیر است.

چون $s+t\neq 0$، می‌توانیم‌فرض‌کنیم $t\neq 0$ وبامشتق‌گیری ازرابطه $(y-x)f'(sx+ty)=f(y)-f(x)$ نسبت به x داریم،

$$-f'(sx+ty)+(y-x)sf''(sx+ty)$$

$$=-f'(x).$$

برای‌مقدار x، $y=-\left(\frac{s}{t}\right)x$، بدست می‌آید

$$f'(x)=f'(0)+(s+t)\left(\frac{s}{t}\right)f''(0)x$$

یعنی مشتق $f(x)$ یك چند جمله‌ای حداکثر از درجهٔ اول است. پس، $f(x)$ یك چند جمله‌ای حداکثر از درجه ۲ است. با امتحان کردن $f(x)=ax^2+bx+c$ نشان می‌دهیم که a مخالف صفر است فقط وفقط اگر $s=t=\frac{1}{2}$.

برای هر $y\neq x$ بامحاسبه داریم

$$2a(sx+ty)+b=\frac{a(y^2-x^2)+b(y-x)}{y-x},$$

یا

$$2a(sx+ty)=a(x+y).$$

اگر $s+t=0$، برای $u\neq 0$ی فرض می‌کنیم $y=x+u$ به‌ازای هر x داریم:

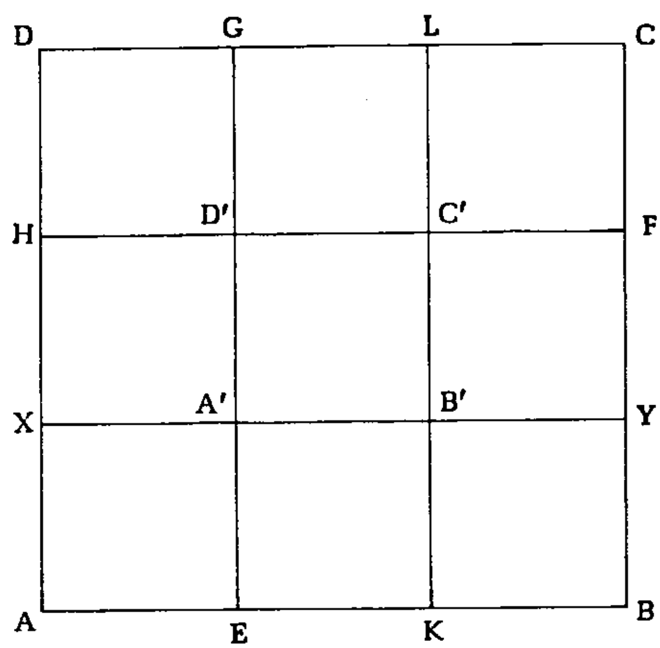
$$f'(sx+ty)=f'(tu)=\frac{f(x+u)-f(x)}{u}$$

بامشتق‌گیری ازطرفین رابطه فوق نسبت به x بدست می‌آید

$$f'(x+u)-f'(x)=0$$

باانتخاب $x=0$ بدست می‌آید $f'(u)=f'(0)$. چون بازاء هر u دلخواه $f'(u)=f'(0)$ لذا f' تابعی ثابت است و اثبات کامل است.

۸- فرض کنیم ABCD یك چهارضلعی محدب درصفحه



باشد، بانقاطی روی اضلاع که هرضلع را به‌سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، مطابق شکل نه چهار ضلعی کوچکتر حاصل می‌شود.

الف- نشان‌دهید مساحت چهارضلعی $A'B'C'D'$، $\frac{1}{9}$مساحت چهارضلعی ABCD است.

ب. تعیین کنید شرط لازم و کافی برای آنکه مساحت تمام نه‌چهار ضلعی برابر باشند چیست.

حل. الف. ابتدا ثابت می‌کنیم نقاط A'، B'، C' و D' نیز پاره خطهای XY و HF و EG و KL را به‌سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنند.

$$\overline{EF}=\frac{2}{3}\,\overline{AC} \text{ و } \overline{HG}=\frac{1}{3}\,\overline{AC}$$

بنابراین، مثلثهای $D'GH$ و $D'EF$ متشابه‌اند، و لذا، $|\overrightarrow{D'F}|=2|\overrightarrow{D'H}|$ بنابراین، D'، $\overrightarrow{HF}$ را به نسبت $\frac{1}{3}$ تقسیم می‌کند. وبه‌همین ترتیب A' و B' و C' پاره‌خطهای فوق را تثلیث می‌کنند. بنابراین،

$$\overrightarrow{A'C'}=\frac{1}{2}\,\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\,\overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{B'D'}=\frac{1}{3}\,\overrightarrow{BD}$$

اگر θ زاویه بین $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ باشدآنگاه زاویه‌بین $\overrightarrow{A'C'}$ و $\overrightarrow{B'D'}$ نیز θ می‌باشد وچنین داریم:

$$S_{A'B'C'D'}=\frac{1}{2}\,|\overrightarrow{A'C'}||\overrightarrow{B'D'}|\sin\theta=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\,|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|\sin\theta=\frac{1}{9}\,S_{ABCD}$$

حل. ب. شرط لازم وکافی برای آنکه‌نه چهارضلعی‌معادل باشند آن است‌که ABDC متوازی‌الاضلاع باشد. کفایت برقرار است، زیرا اگرچهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد مشخص‌است که نه متوازی الاضلاع حاصل معادل‌اند. برای اثبات لزوم، اگر $AEA'X$ و$XA'D'H$ معادل باشندآنگاه‌چون دو مثلث $A'D'X$ و $EA'X$ معادل‌اند، دو مثلث EAX و $D'HX$ نیزمعادل‌اند. ازمعادل بودن این دومثلث نتیجه می‌گیریم ED' موازی AH است یا $AD\|EG$ و به‌همین ترتیب از معادل بودن سایرچهارضلعیها نتیجه می‌گیریم که اضلاع مقابل چهار ضلعی دوبه‌دو موازی و لذا متوازی‌الاضلاع است.

۹– دنباله توابع $\{f_n(x)\}$ به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$f_1(x)=\sqrt{x^2+48}$ و به‌ازای $n\geqslant 1$،

$$f_{n+1}(x)=\sqrt{x^2+6f_n(x)}$$

به‌ازای هر عدد طبیعی n، تمام ریشه‌های معادله $f_n(x)=2x$ را پیدا کنید.

حل. ابتدا مشاهده می‌کنیم که برای هر $n\geqslant 1$ و به‌ازای هر x، $f_n(x)$ مثبت است.

نشان می‌دهیم به‌ازای هر n تنها ریشهٔ معادله $f_n(x)=2x$ عدد ۴ است.

ابتدا به استقراء ثابت می‌کنیم $x=4$ یك جـواب است.

به‌ازای $n=1$ داریم $f_1(4)=\sqrt{16+48}=8=2\times 4$

فرض کنیم $f_k(4)=2\times 4=8$.

دراین‌صورت،

$$f_{k+1}(4)=\sqrt{16+6f_k(4)}=\sqrt{16+48}=2\times 4.$$

اکنون نشان‌می‌دهیم که‌ریشه‌دیگری وجودندارد، این‌را به‌استقراء نشان می‌دهیم:

به‌ازای هر n، $\frac{f_n(x)}{x}$ در $(0,\infty)$ اکیداً نزولی است و لذا نمی‌تواند مقدار ۲ را دوبار اختیار کند.

اگر $n=1$ داریم $\frac{f_1(x)}{x}=\sqrt{1+\frac{48}{x^2}}$ ، که وقتی x افزایش‌پیدا کند، نزولی است.

اکنون فرض‌کنیم $\frac{f_k(x)}{x}$ اکیداً نـزولی بـاشد. در ایـن صورت،

$$\frac{f_{k+1}(x)}{x}=\sqrt{1+\frac{6}{x}\cdot\frac{f_k(x)}{x}}$$

که نزولی است و لذا اثبات کامل است.

۱۰– فرض کنیم A یك ماتریس $n\times n$ بادترمینان برابر ۱ باشد. فرض کنیم B ماتریسی‌باشدکه به‌وسیله اضافه‌کردن‌عدد ۱ به‌هر درایه A بدست می‌آید. ثابت‌کنید دترمینان B برابر $1+S$ است، که S مجموع n^2 درایه A^{-1} است.

حل. حالت‌کلی‌تری را ثابت می‌کنیـم: ثابت می‌کنیـم اگـر $\det(A)\neq 0$، آنگاه $\det(B)=(1+S)\det(A)$. فرض کنیم I ماتریس همانی $n\times n$ و J ماتریس $n\times n$ باشد که همهٔ درایه‌های‌آن برابر ۱ هستند. دراین‌صورت،

$$\det(B)=\det(AA^{-1}B)=$$

$$\det(A)\cdot\det(A^{-1}(A+J))=$$

$$\det A\cdot\det(I+A^{-1}J)=$$

$$\det(A)\circ\begin{vmatrix}1+S_1 & S_1 & \cdots & S_1\\ S_2 & 1+S_2 & \cdots & S_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ S_n & S_n & \cdots & 1+S_n\end{vmatrix}$$

که S_i مجموع درایه‌های سطر iاُم A^{-1} است. ستون آخر را از هر یك از ستونهای دیگر کم می‌کنیم داریم

$$\det(B)=\det(A)\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & S_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & S_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & S_{n-1}\\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1+S_n\end{vmatrix}$$

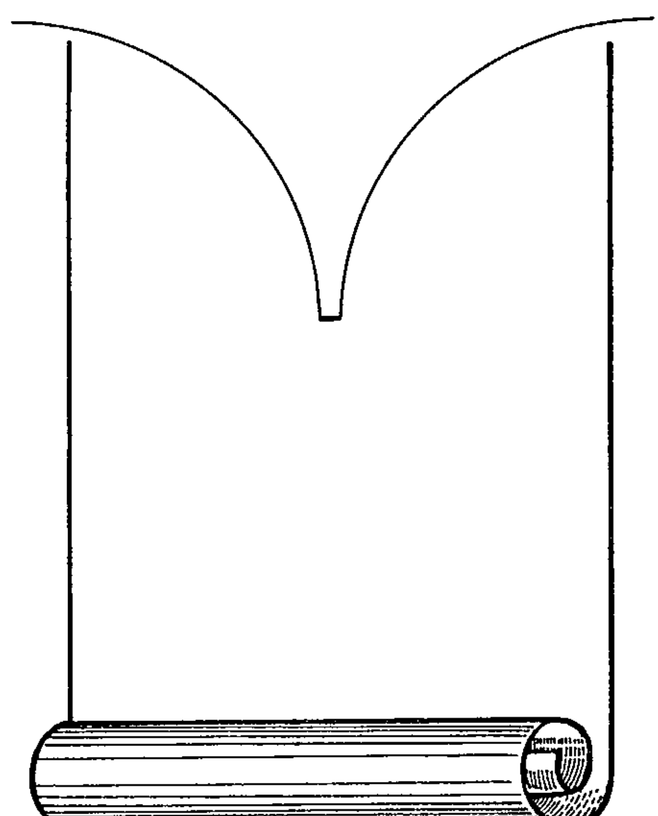
اکنون تمام سطرها را به‌آخرین سطر اضافه می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\det(B)=\det(A)\circ\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & S_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & S_2\\ 0 & 0 & \cdots & . & .\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & S_{n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+\sum_{i=1}^{n} S_i\end{vmatrix}$$

$$=\det(A)\cdot\left(1+\sum_{i=1}^{n} S_i\right)=$$

$$\det(A)\cdot(1+S).$$

پاسخ به نامه خوانندگان



آقای قاسم‌سلیمانی استپار، دانش‌آموز، تبریز

با تشکر از نامهٔ محبت‌آمیز شما نسبت به‌اعضای محترم‌هیأت تحریریه به‌اطلاع می‌رسانیم که‌درصورت امکان‌مقاله‌ارسالی‌تان را با جزئیات بیشترهمراه با مثال وکاربرد برای مجله‌بفرستید درغیراین‌صورت درمسایل از آن استفاده خواهد شد.

آقای‌مهدی داودی، مشهد

درپاسخ به سؤال شما مبنی براینکه چگونه نقاله را مدرج می‌کنند، باید خاطرنشان‌کنیم‌که درهندسه اقلیدسی زاویه قائمه رانمی‌توان‌به ۹۰ قسمت‌مساوی‌تقسیم کرد. بنابراین‌با نقاله‌و به‌روش فیزیکی مدرج می‌شود.

خانم‌صغری‌محبی، دانش‌آموز، بندرلنگه

بهتراست بخش عمودمنصف را درهندسهٔ‌سال اول‌دبیرستان مطالعه‌کنید.

آقای‌محمدجوادحبیبی‌خراسانی، دانش‌آموز،مشهد

نامه‌های شما به‌آدرسی‌که اشاره‌کرده‌اید می‌رسد. درمورد این‌که ازبرهان‌خلف‌ثابت‌کرده‌اید دو دایره مجانس‌یکدیگرند، باید خاطرنشان ساخت رابطه

$$AB = |K|A'B'$$

شما که برای هر دوپاره‌خط نوشته‌اید، ارتباطی به تجانس ندارد. درتجانس k می‌تواند مثبت‌یا منفی باشد وبه‌علاوه

$$AB \| A'B'$$

وحتماً برای هرتجانس‌مرکز تجانس تعریف می‌شودکه شما خود را از آن بی‌نیاز دانسته‌اید.

آقای افشین نجفی‌شیرتری، دانشجو، رشت

برای اعداد فیثاغورثی فرمولهای زیادی وجود دارد.ضمناً اعدادی وجود دارند که فیثاغورثی هستند ولی در رابطه شما صدق نمی‌کنند. مثلاً

$$x = ۵,\ y = ۱۲,\ z = ۱۳$$

درصفحه ۱۹ شماره ۲۷رشد ریاضی، نمونه‌هایی‌ازاین‌فرمولها را می‌توانید پیداکنید.

آقای پورباقری

در پاسخ به نامه ۷۱/۸/۱۱ اشعار می‌دارد که گفتهٔ‌دبیر محترمتان درست‌است‌وشما ازمفهوم حداستفاده می‌کنید. ظاهراً

با انتگرال آشنایی ندارید، در آخر جبر و آنالیز سال چهارم این مطلب را خواهید خواند.

درعبارت شما جمله $\frac{r^2}{n}$ عملاً صفر است.وشما به‌مفهوم حد توجه نکرده‌اید.

آقای فرید حیدرنیا، دانشجو، اصفهان

هر دو حل قابل‌قبول است ومنجر به‌تناقض می‌شود.
اولی: هر $0<\varepsilon$ از $\frac{1}{2}$ کوچکتر است درحالی که مثلا

$$0<\varepsilon=\frac{2}{3}>1$$

دومی: عدد $\varepsilon=\frac{1}{3}$ انتخابی شما منجر به تناقض $\frac{2}{3}>1$ می‌شود.

آقای شهرام بیگلری، دانش‌آموز، کرمانشاه

نامهٔ شما مطالعه ومورد بررسی قرار گرفت. روش کار شما امیدوار کننده است. ولی توجه داشته باشید که وقتی از اعداد به‌تابع می‌رسید، باید دقت بیشتری کنید. درمورد انتگرال

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$$

اثبات شما فقط در حالتی معتبر است کــه همه ریشه‌ها حقیقی و ساده باشند، درحالی که درانتگرال

$$\int \frac{dx}{a^3-x^3}$$

خود شما متوجه این مساله شده‌اید که انتگرال منجر به

$$\int \frac{dy}{1+y+y^2}$$

شده و ریشه‌های $1+y+y^2$ حقیقی نیستند.

درمورد سؤالاتی که‌مطرح کرده‌اید، به‌کتابهای حساب دیفرانسیل وانتگرال مراجعه‌کنید و درانتگرال $\int x!\,dx$ تابع $x!$ مطرح شده‌است شما آن‌را چگونه تعریف می‌کنید!؟ مسلماً $x!$ تعریف نمی‌شود.

آقای محمدرضا شکوهی، دانش‌آموز، شیراز

توجه داشته باشید که رسم مثلث با معلوم بودن سه نیمساز قابل‌حل نیست زیرا اگر درمحاسبهٔ طول نیمسازها، اضلاع مثلث را برحسب نیمسازها پیداکنیم به‌معادلهٔ درجهٔ سوم به‌بالا می‌رسیم وهرمسأله هندسه که به‌معادلهٔ درجه سوم وبالاترمنجر شود، راه‌حل هندسی‌ندارد.

آقای تورج نیک‌آزاد

با تشکر ازشما، هردومقالهٔ شما دریافت و درهیأت‌تحریریه مطرح‌گردید. نظرات هیأت تحریریه به‌شرح زیر است:
مقاله استقراء ریاضی شما، مطلبی کلاسیك و در مواردی ناقص است که لااقل دریك‌مورد می‌توان نواقص آن را برطرف ونحوه اثبات راگفت.

$$m,n\in N \Longrightarrow m+n\in N$$

مقاله‌کاربردی صعودی یا نزولی بودن تابع با استفاده از مشتق مرتبه اول، قضیه ۱ نتیجه قضیه مقدار میانگین است که متعاقب آن آمده است وبهتراست جایشان عوض شود.
حکم ۲ شما نامساوی مشهور هولدر است‌که‌درآن $M\geqslant 0$ یا $N\geqslant 0$ و در آخر درنتیجه‌گیــری هم اشاره‌ای به اینکه اگر $M=0$ یا $N=0$ حکم برقراراست نشده‌است.
حکم ۱ درصورتی‌که قبلاً در مجلــه چاپ‌نشده باشد درقسمت مسایل بررسی خواهد شد.

آقای محسن نصرتی‌نیا، دانش‌آموز، تبریز

با سلام متقابل و آرزوی مــوفقیت وشادکامــی برای شما، کوشش وتقلای شما قابل‌تقدیراست. هیأت تحریریه برای‌شما آرزوی موفقیت می‌کند. امیــد است با تأکید و مطــالعه روی مباحث درسی خودتان، تحصیلات خود را طوری جهت‌گیری کنیدکه درادامه تحصیلات موفق باشید.

آقای امیرحسین‌کارگر، دانش‌آموز، تهران

نامهٔ شما درهیأت تحریریه مطرح گــردید. امیــد است با بازسازی‌کتابها وبازآموزی‌دبیران‌محترم نقایص مرتفع‌گردد.

آقای حسین‌اصلانی، دانش‌آموز، تبریز

با تشکر ازشما، درصورت‌نیاز، ازمسایل‌ارسالی‌شما‌استفاده خواهد شد. اما این‌که می‌پرسیدآیا می‌توان $[x^n]$ را برحسب $[x]$ نوشت یا خیر؟ جواب شما منفی است. زیرا فرض‌کنید $x\geqslant 0$

$$[x]\leqslant x<[x]+1 \Longrightarrow [x]^n\leqslant x^n<([x]+1)^n$$

$$=[x]^n+n[x]^{n-1}+\dots+1$$

بنابراین نمی‌توان [x^n] را دقیقاً تعیین کرد. مثلاً

$$[۱/۱]=۱,\ [۱/۱^{۱۰}]\geqslant ۲$$

خانم سارا فرقانی، دانش‌آموز، تربت‌حیدریه.

رابطهٔ جذر ومجذورشما، اشکال دارد و $(a-b)$ دوعدد متوالی نیست. رابطه دوم شما یك اتحاد ساده است‌که‌خودتان هم به آن رسیده‌اید. در رابطهٔ سوم نتیجه‌گیری شما درست نیست نوشته‌اید:

$$\left(۲-\frac{۵}{۲}\right)^۲=\left(۳-\frac{۵}{۲}\right)^۲ \Longrightarrow ۲-\frac{۵}{۲}=۳-\frac{۵}{۲}$$

یعنی از

$$\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲$$

نتیجه می‌گیرید

$$\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

یا از $(a)^۲=(-a)^۲$ نتیجه‌می‌گیرید $a=-a$ واین‌درست نیست. در واقع از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود $|a|=|-a|$ یعنی

$$\left|۲-\frac{۵}{۲}\right|=\left|۳-\frac{۵}{۲}\right|=\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

واین صحیح است.

آقای‌افشین‌حسین‌نژاد، دانش‌آموز،کلیبر

با تشکر ازنامه شما، مطلب شما را درباره محاسبه تقریبی محیط بیضی دریافت کردیم.

خانم پروانه نوکندی، دانش‌آموز،کرج

توجه داشته باشیدکه درهندسه اقلیدسی منظور ازخط، دو خط راست موازی‌است‌که یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

آقای‌سیدمحمد مصطفوی‌نژاد، مشهد

این مجله، مسایل ارسالی از طرف خوانندگان را به شرط داشتن حل، منبع و به‌شرط درج نشدن در نشریات‌دیگر چاپ می‌کند.

آقای‌علیرضا بامری، دانشجو، رضوانشهر

مطلب شما درمورد بسط دترمینان ۴ × ۴ رسید. روشی‌که درشماره ۳۲ چاپ شده بود، خطا نداشت.

آقای‌علیرضا‌امشاق‌طبری،‌دانش‌آموز، بابل

با تشکر ازنامهٔ شما، به‌اطلاع می‌رسانیم‌که هردو مجموع زیرشناخته شده هستند

$$\sum_{k=۱}^{n-۱} k(۲k+۱)=۲\sum_{k=۱}^{n-۱} k^۲+\sum_{k=۱}^{n-۱} k$$

آقای‌کیوان‌صادقی‌نژاد، دانش‌آموز، تهران

درمورد سئوال‌کنکور، اشتباه چاپی رخ داده، همان گزینه (۲) صحیح است.

خانم‌شرمینه‌صمدانی‌فرد، دانش‌آموز، تهران

طرح محاسبه یالهای چندوجهی منتظم باروش شما، کار تازه‌ای نیست. چنین نتایجی را ازفرمول اویلرمی‌توان نتیجه گرفت.

خانم زهرا...، دانش‌آموز، قم

اگرکارخانم شرمینه‌که دربالا جواب‌داده‌شده ابداعی‌باشد، کارشما اقتباس‌است. یا بالعکس به هرحال جواب ایشان را شما هم مطالعه‌کنید.

آقای‌سجاد دیبایی‌اصل، دانش‌آموز، بناب‌آذربایجان

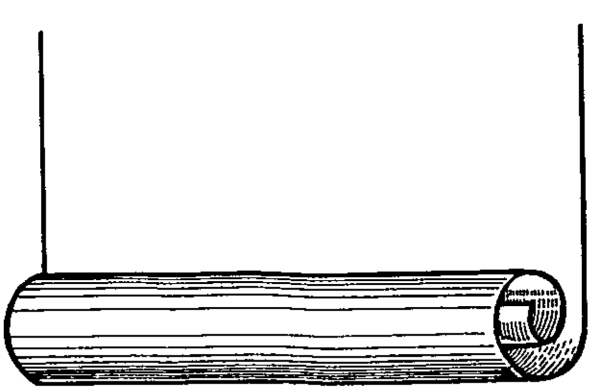
بهتراست در باره اصل اقلیدس، کتاب هندسه اول نظام جدید را بادقت مطالعه‌کنید. خواهیدیدکه برای اثبات اصل پنجم چه‌کسانی وچقدر زحمت بی‌نتیجه‌کشیده‌اند.

آقای‌امیدصابری، دانش‌آموز، شیروان(خراسان)

دقت شما درمطالعه‌کتاب مبانی‌کامپیوتر وانفورماتیك قابل تحسین است. نظرات شما درچاپ سال ۱۳۷۲ کتاب‌مذکور، اعمال خواهد شد.

آقای‌جوادجوینی،دانشجو، بجنورد

تساوی‌که براساس آن‌رابطه $a^n=b^n+c^n$ رابرای nهای فرد نتیجه‌گیری‌کرده‌اید، درست نیست، زیرا، نتیجه‌آن غلط



است. اعداد ۳ و ۴ و ۵ تشکیل یك مثلث قائم‌الزاویه می‌دهند اما

$$۳^{۲}+۴^{۲}\neq ۵^{۲}$$

آقای امیرحسین قاضی‌سعید، دانش‌آموز. اراك

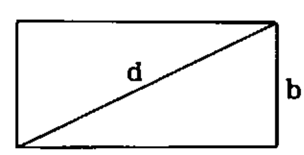
برخلاف نظر شما، برای حل دستگاههای بزرگ، دستگاههایی که تعداد مجهولات آن زیاد است، اصلاً از دترمینان استفاده نمی‌شود طریقه‌ای که شما برای محاسبه دترمینان ارائه کرده‌اید، بسیار وقت‌گیر است ومحاسبه یك دترمینان ۲۰ × ۲۰ ساعتها وقت کامپیوتر را می‌گیرد! حل دستگاههای بزرگ، به‌روش حذفی‌گاوس میسر است وتوسط همین روش، دترمینان هم به سادگی حساب می‌شود.

آقای اسماعیل بهاری‌تهرانی

قبل از دریافت نامه شما، فرمولی برای الگوهای عددی چاپ شده درصفحهٔ ۳۴ شماره ۲۸ مجله، دریافت کرده‌ایم که درحال بررسی واحیاناً چاپ آن درشماره‌های بعدی مجله‌رشد هستیم.

آقای خبازی‌ربطی

مطالبی که درمورد عدد ۱۹۹۲ ارسال کرده‌اید جالب هستند ولی باتوجه به‌این که اکنون سال ۱۹۹۳ است چاپ تمامی آنها، ضروری به‌نظر نمی‌رسد. می‌توانید درمورد عدد ۱۳۷۳ مطالبی بفرستید تا پس از بررسی به‌نام شما چاپ شود. باوجود این، مطلب ارسالی شما را دربارهٔ طول اضلاع، قطر، مساحت، محیط وشعاع دایره محیطی مستطیل که برحسب ارقام عدد ۱۹۹۲ نوشته شده است چاپ می‌کنیم.



$$a=۱+۹\div۹+۲$$

$$b=۱+۹-۹+۲$$

$$d=(۱+\sqrt{۹}\times\sqrt{۹})\div۲$$

$$S=(۱-۹+۹\times۲)+(۱\times۹-۹\times۲)$$

$$\text{محیط}=-۱-\sqrt{۹}+۹\times۲$$

$$R=(۱\times۹-۹+۲)+[(۱+۹-۹)\div۲]$$

آقای محمدرضا اسکندری، دانش‌آموز، اراك

مطلب شما درباره جملات گویا دربسط

$$(\sqrt[m]{x}+\sqrt[p]{y})^{n}$$

درست است وجواب تعداد زوجهای (A, B) است که برای آنها $n=Am+BP$ ولی حل این معادله برای A و B همیشه آسان نیست.

آقای مهران بکائی‌جزمی، دانش‌آموز

برنامه شما درمورد قسمت(د) ازمساله اول المپیادکامپیوتر، رسید. درج آن درمجله تکرارمساله‌ای است که قبلاً حل‌شده‌است با وجود این، زحمات‌شما قابل‌تقدیر است.

خانم طاهره اسدی، دانشجو

نظیرمسألهٔ المپیادکامپیوتر که موردنظر شما می‌باشد، درشماره ۳۸ مجله چاپ‌شده است. آن را مطالعه بفرمائید. در ضمن، الگوریتمهای کلیدی‌که ازاین به‌بعد چاپ می‌شود، در راستای همان معادلات قبلی درمورد «آموزش مبانی‌کامپیوتر و انفورماتیك» است.

آقای عین‌الله اکبرپور، دانشجو، بابل

درمجله رشد آموزش ریاضی، چند مقاله ازآقای دکتر جمالی وآقای لالی به‌چاپ رسیده است که جامعتروکلیترمسأله را موردبررسی قرار داده‌اند.

آقای بخشایش‌داسی. دانشجوی‌سال‌آخر رشته دبیری ریاضی، تبریز

مطلب ارسال شده خوب است ولی متأسفانه ترجمهٔ آن بسیارناقص وپرغلط است. ازچاپ آن معذوریم

آقای علیرضا مشاق‌طبری، دانش‌آموزسال سوم‌ریاضی ازبابل

مقالهٔ شما «تعیین خارج‌قسمت وباقیمانده تقسیم $p(x)$ بر مشتقات متوالی‌آن» رسید. فرمولی‌که به‌دست آورده‌اید عوامل زیادی دارد‌که محاسبهٔ هریك بسیارپیچیده و وقت‌گیر است. ضمناً هیچگونه‌کاربردی برای این مطلب نیاورده‌اید حتی یك مثال عددی ملاحظه نشد. چاپ این مقاله برای خوانندگان‌مجله مفید نخواهد بود.

فقدان یک همکار

به قلم یکی از همکاران او

«بُعِثتُ مُعلِّما»

ظهیری که از دست یاران برفت
عجب گوهری بود و آسان برفت
خدایش به جنت مکانش دهد
به خوبان و نیکان جوارش دهد

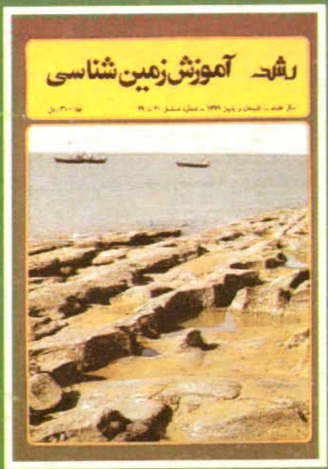
منوچهر اتفاق ظهیری در نوزدهم مهرماه ۱۳۱۷ شمسی در یک خانواده مذهبی در ارومیه دیده به جهان گشود. پس از طی دوران خردسالی پدرش مسیح‌الدین او را راهی دبستان نمود. منوچهر دوران دبستان و دبیرستان را در ارومیه به پایان رسانید و برای ادامه تحصیل به تهران آمد و در کنکور دانشکده علوم تهران شرکت جُست و توانست به اخذ لیسانس در رشته ریاضی نایل آید. در سال ۱۳۴۴ به استخدام وزارت آموزش‌وپرورش درآمد و در دبیرستان‌های منطقه ۳ پیشین و منطقه ۷ کنونی تهران مانند دبیرستانهای پرورش، سخن، هاجر و گروه فرهنگی آذر به تدریس ریاضی پرداخت. در سال ۱۳۵۸ برای تدریس در دبیرستان ایرانیان به عراق رفت ولی آغاز جنگ تحمیلی تعطیلی دبیرستان را بدنبال داشت. مأمورین بعثی برای دستگیری او به دبیرستان هجوم بردند.

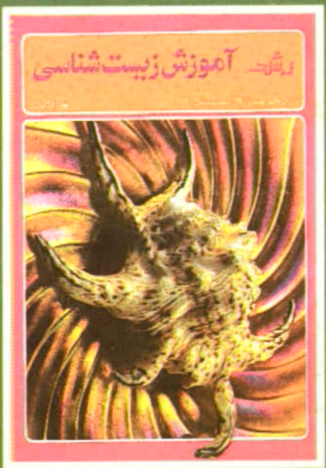
ظهیری توانست با مخفی شدن از چنگال خون‌آشامان بعثی بگریزد و خود را به سفارت جمهوری ایران رسانیده و با معاضدت آنان پس از تحمل صدمات بسیار به ایران بازگردد. سال بعد مأمور تدریس در دبیرستان ایرانیان در کویت و مدت دو سال در آن خطه به تدریس مشغول بود. با مراجعت به ایران در دبیرستان شهید رجائی به تدریس ریاضی پرداخت. در سال ۶۹ علاوه بر دبیرستان شهید رجایی تدریس ریاضی در دبیرستان شهدای انقلاب را نیز آغاز نمود. بعلاوه چند سالی هم مسئولیت گروه ریاضی منطقه ۷ را متکفل بود.

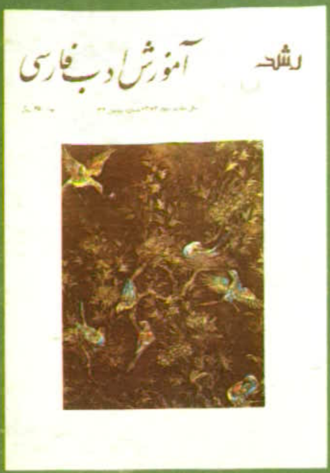
ظهیری واقعاً عاشق کارش بود و خدمت سی ساله و بی‌وقفه او شاهد صادقی بر این مدعا است و در این راه از هیچ کوششی فروگذار ننمود تا اینکه در سال ۱۳۷۰ اندک‌اندک بیماری سرطان کالبدش را فراگرفت و معالجات گوناگون هم مثمر ثمر واقع نشد تا بالاخره در ۲۸ خرداد سال ۷۲ نخل وجودش را از پای درآورد و آموزش‌وپرورش از یکی دیگر از مدرسین دلسوز، پرسابقه و متبحر محروم شد. جنازه‌اش در حالی‌که بر دوش دوستان و همکاران و شاگردانش تشییع می‌شد به بهشت زهرا حمل و به خاک سپرده شد. روانش شاد و یادش گرامی باد. مصیبت وارده را به خانواده گرامیش به‌ویژه فرزندش بابک و دوستان و همکارانش تسلیت می‌گوییم.

Contents

Roshd, Magazine of Mathematical Education.Vol 10 No 39, **Autumn** 1993 Mathematics Section, 274 BILDING No, 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave.Tehran-Iran. A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.







رشد

مجلات رشد آموزش مواد درسی به‌منظور ارتقاء سطح دانش معلمان و ایجاد ارتباط متقابل میان صاحبنظران، معلمان و دانشجویان با برنامه‌ریزان امور درسی از سوی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی به‌صورت فصلنامه منتشر می‌شود.