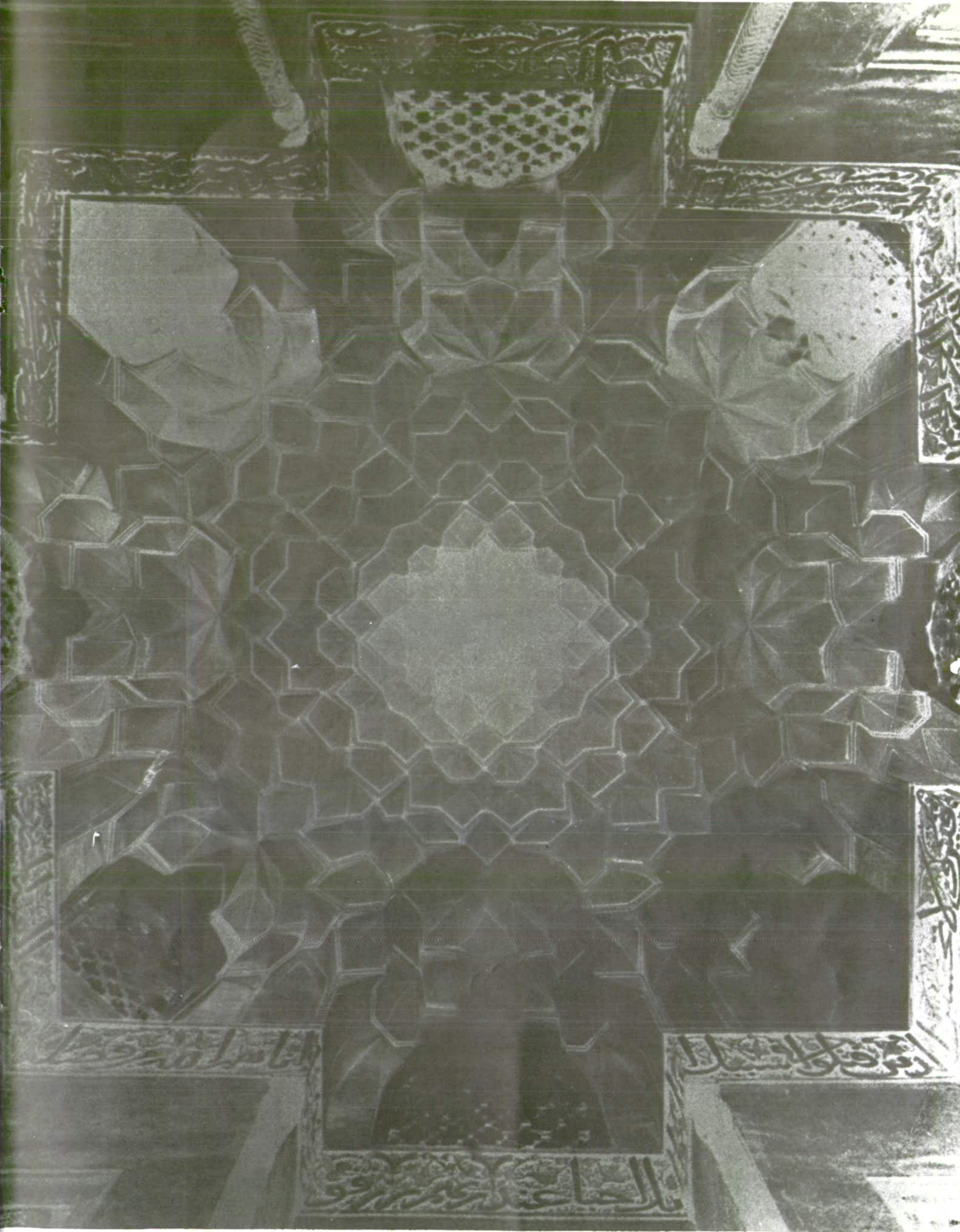
رشد
آموزش ریاضی

سال اول ـ شمارهٔ ۴ زمستان ۱۳۶۳ بها: ۱۰۰ ریال



رشد آموزش ریاضی

سال اول ـ شماره ۴ ـ زمستان ۱۳۶۳

تهیه و تنظیم : گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی ـ سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش تلفن ۴ـ ۸۳۹۱۶۱ (داخلی ۵۰)

تولید : معاونت فنی و هنری دفتر امور کمک آموزشی و کتابخانه‌ها

مرکز توزیع : تلفن ۸۳۱۲۸۱

نشانی : خیابان ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ تلفن: ۸۳۲۰۲۱

● مجلهٔ رشد آموزش ریاضی نشریهٔ گروه ریاضی دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی سازمان پژوهش وزارت آموزش و پرورش است که هرسه ماه یکبار منتشر می‌شود. هدف از انتشار این مجله در وهلهٔ اول ایجاد ارتباط متقابل بین معلمین ریاضی و دفتر مذکور، به‌منظور تبادل تجارب و آراء در زمینهٔ آموزش ریاضی است؛ و در مرحلهٔ بعد طرح و بررسی مسائل بنیادی ریاضیات مقدماتی و مطالب جنبی و مفید درسی، به منظور ارتقاء سطح معلومات معلمین ریاضی است. مجله از مشارکت و همکاری معلمین ریاضی در ارائهٔ مقالاتی ناظر بر اهداف فوق، بالاخص در زمینهٔ آموزش ریاضی، استقبال می کند.

فهرست

پیشگفتار

جای بسی خوشوقتی است کـه باتقدیم چهارمین شمارهٔ مجلهٔ نـوبنیاد رشد آموزش ریاضی، اولین دورهٔ آن به پایان مـی‌رسد، و نتیجهٔ یک سال کوشش و تـلاش هیئت تحریریه در جهت نشر شمه‌ای از دانش ریاضی بـه صورت مجموعـه‌ای از مقالات و مسائل ریاضیات مقدماتی در اختیـار خـوانندگان ارجمند قرار می‌گیرد. امید است که این اقدام کوچک درترغیب و تحریک اذهان فعال و تشویق فرزندان مستعد مملکت به آموختن ریاضیات، آغـازی مبارک بـاشد. در اینجـا بی‌مناسبت نیست بـه بهانهٔ سختی که خواهیم داشت لحظـه‌ای چند درنگ کرده و بـه موضوع مهمی اشاره کنیم که چاره‌ای عـاجل می‌طلبد. اکنون دیگر برهمهٔ کسانی‌که بنحوی با آموزش ریاضیات سروکار دارند پوشیده نیست که عوامل متعددی از گرایش فعال دانش آموزان مستعد به این رشتهٔ حیاتی از علوم می‌کاهد. در اینجا قصدما این نیست که به بررسی علل و عواملی بپردازیم که رکود نسبی گرایش بـه این رشته را در جامعهٔ ما فـراهم آورده است و یا احیاناً از این رهگذر مدعی باشیم که صرف انتشار مجلات و کتب ریاضی در سطح مقدماتی یا اقداماتی از این قبیل به بهبود وضع آن کمک ـ ولو ناچیزی ـ خواهد کرد. بلکه هدف این است که ایـن تذکار و اخطـاری مجدد باشد تا هـرچه زودتـر در پـی‌اندیشهٔ تنظیم برنـامه‌ای نو به منظور سوق دادن دانش آموزان مستعد بسوی ریاضیات باشیم. آنچه در این مرحله قابل توجه و ذکر است، عنایت به تاریخ ریاضی کشوری است کـه در سالیـان گذشته از جملهٔ کانونهـای مهم انتشار افـکار ریاضی بوده است. ما در گذشته شاهد ظهور ریاضیدانانی بودیم که برخی از آنان دقیقترین تفکرات ریاضی را به جهانیان عرضه داشته‌اند یا برآثار پیشینیان خود نقد و اشکال کرده‌اند. اینک اولین انتظار آنست که در عصر انقلاب اسلامی و بازگشت به ارزشهای اصیل و والای فرهنگ اسلامی، فعالیت مجدد افراد مستعد در همهٔ رشته‌های علمی و بالاخص رشتهٔ ریاضی آغاز گردد؛ و این علاوه برمساعد بودن زمینهٔ مطلوب، که خوشبختانه درشرف تکوین است، نیازمند برنامه‌هائي دقیق و بنیادی است. پیشنهاد می‌شودکه مسئولین محترم کشور، بالاخص اولیای محترم آموزش و پرورش و وزارت فرهنگ و آموزش عالی و نیز برنامه‌ریزان کشور بیش از پیش توجه عمیق نسبت به این امر نموده و با مآل‌اندیشی و ژرف‌نگری چاره‌ای مطلوب اندیشند.

اینک بـرگردیم بـه موضوع اصلی، یعنی بحث دربارهٔ مجله‌ای که مقابل شما خوانندهٔ عزیـز است. بنظر می‌رسد کـه پس از انتشار اولین دورهٔ آن، تـقریباً راه و رسمش مشخص شده بـاشد و خواننده بداند که چـه انتظاری از آن می‌رود. گرچـه هنوز راه درازی برای عرضهٔ مجلهٔ ریاضی جامعی که منطبق بر نیازهـای علمی غالب خوانندگان باشد، در پیش است بـا وجود ایـن هیئت تحریریهٔ مجله نهـایت کوشش خود را به منظور ارائهٔ مجله‌ای مفید و خالی از اغراض سودجویانهٔ مجله‌های تجاری ازایـن نـوع، مبذول می‌دارد. خوانندگان منصف معترف خواهند شد که کوشش‌های مسئولین مجله در جهت نشر وجوهی از دانش‌ریاضی مستلزم قـدردانی و تشکر است. هیئت تحریریهٔ مجله برای تنظیم آن، پس از بررسی قریب ده‌مجلهٔ بـرجستهٔ خـارجی

در زمینهٔ ریاضیات مقدماتی و آموزش آن، با توجه به نیازهای ریاضی خوانندگان ایرانی و با در نظر گرفتن اولویتهای خاص مربوط به ریاضیاتی که دبیران ریاضی با آن سروکار دارند، مبادرت به تدوین و انتخاب مقالات می‌نماید.

معمولاً بزرگترین خطری که این گونه مجلات علمی ـ و بالاخص آن دسته از مجلات علمی را که جنبهٔ انتفاعی آنها مقدم بر هرهدف دیگری است ـ تهدید می‌کند، در واقع افتادن به ورطهٔ سودجوئی است که به تبع آن انتشار موضوعات عامه‌پسند و غالباً مغلوط اجتناب ناپذیر خواهد بود. بی‌شک مجلاتی علمی که اغراض مادی صرف در آنها براهداف آموزشی غالب باشد، عاقبت مبدل به حل‌المسائل و مجموعه‌ای مبتذل از شعبده بازیهای ریاضی خواهند شد. هدف اصلی ما در هیئت تحریریه مصونیت از این خطر بوده است. ما سخت معترفیم که انتشار چنین نشریاتی نه تنها مفید نخواهد بود، بل بدآموز و گمراه کننده است. فی‌الجمله این راه و رسم اصلی ما است وامیدواریم که با ارشادات صاحبنظران وخوانندگان بصیر، در این راه موفق باشیم.

در مورد پذیرش مقالات برای چاپ در مجله لازم به تذکر است که مقالات واصله، پس از بررسی مقدماتی در هیئت تحریریه، برای اظهار نظر علمی دراختیار یک ویراستار علمی (از استادان ریاضی دانشگاهها) قرار داده می‌شود. پس از تأیید ویراستار، به منظور اظهار نظر قطعی، مجدداً در هیئت تحریریه مورد بحث قرار می‌گیرد؛ و این تضمین کننده مراتب صحت و تناسب آن با اهداف مجله است.

خوانندگان متعددی درخواست کرده‌اند که تعداد مجلدات هردوره از چهار شماره به حداقل شش شماره در سال افزایش یابد. در اینجا معروض می‌داریم که مشکلات ناشی از چاپ و مسائل مربوط به حروفچینی متون ریاضی که مشحون از فرمولهای پیچیدهٔ ریاضی با علائم مختلف است، کاری طاقت‌فرسا و دشوار است. بعلاوه به سبب محدودیتها و وجود مشکلات عدیده‌ای که ذکر همهٔ آنها در اینجا ضروری بنظر نمی‌رسد، انتشار شش شماره در سال فعلاً میسر نیست. امیدواریم با عنایت خاصی که مسئولین محترم نسبت به مجلات علمی رشد معطوف می‌دارند، این نقیصه در اسرع وقت رفع شود. البته شاید با افزایش تعداد صفحات که در شماره های ۳ و ۴ صورت گرفته است، خوانندگان راغب خوشنود گردند.

در خاتمه لازم است از مساعی همهٔ اشخاصی که بنحوی در انتشار این مجله سهیم‌اند تشکر و قدردانی شود. این سپاس در وهلهٔ اول تقدیم اعضای هیئت تحریریه و مسئولین محترم دفتر امور کمک آموزشی (امور فنی و هنری) می‌شود. همچنین فرض است تا از بانی‌خیر این مجله برادر **دکتر غلامعلی حداد عادل** معاونت محترم وزیر و رئیس سازمان پژوهشی و برنامه‌ریزی آموزشی که مشوق اصلی نشر این مجله بودند سپاسگزاری شود و از کوششها و حمایتهای بی‌دریغ ایشان در جهت تأسیس مجلات تخصصی رشد تجلیل گردد.

سردبیر

متن مصاحبهٔ مجلهٔ آموزش ریاضی با آقای غلامرضا عسجدی

سؤال ۱ ــ لطفا بـه طـور مختصر شرح زندگـی خود را برای خوانندگان مجلهٔ رشد آموزش ریاضی توضیح دهید و بفرمائید که چگونه شد حرفهٔ شریف معلمی، آنهم معلمی ریاضیات، را انتخاب کردید.

پاسخ ــ قبلا باید از مجلهٔ رشد آموزش ریاضـی تشکر کنم که مرا جزء فرهنگیان و معلمین موفق در نظر گرفته است. در صورتی‌که در مقابل آرزوئی که خود در کار ریاضیات داشته‌ام، خـودرا شخص چندان مـوفقـی نمی‌دانم؛ ستاره‌ای است براین بام نیلگون اندود که پیش آرزوی مردمان کشد دیوار. لیکن اگر از نظر خـدمت و صداقت در انجام آن بعضی از فرهنگیان و از جمله آن مجلهٔ محترم حسن‌ظن داشته و نام مرا به‌نیکی یاد می‌کنند، خداوند متعال را حمد وثنا می‌گویم حمداً یرتفع منا الی أعلی علیین فی‌کتاب مرقوم یشهده المقربون. اینکه راجع به زندگی نگارنده سئوال فرموده‌اند. اینجانب در سال ۱۲۹۲ در تبریز به‌دنیا آمدم.

پدر و کسان پدری من بیشتر اهل داد و ستد و بازاری بوده‌اند و خود مرحوم پدرم عقیده داشت اگر من در آتیه شغل آزاد داشته باشم، بهتر است. در صورتی که خویشان مادری من کتابی و از دوستان علم بوده‌اند و بین آنها چند تن روحانی بزرگ و چند تن طبیب یافت می‌شد. به خاطر دارم در ایام طفولیت گاهی به خانـهٔ دائی خود که از مجتهدین طراز اول بود می‌رفتم. موقعی بین آن مرحوم و شاگردانش بحث علمی درگرفته بود. آن زمان رسم چنین بود که‌استاد هر اندازه دانشمند وشاگرد هرقدر حقیر و کم اطلاع باشد در بحث علمی خجالـت و تعارف و مداهنه وجود نداشت. اگر شاگرد در گفتار استاد نکتهٔ ضعیفی به نظرش می‌رسید بی پروا اظهـار می‌کرد و این دیگر وظیفه استاد بود که یا با منطق اورا متقاعد سازد و یا خود تسلیم شود. این جریان ابداً وبه قدر ذره‌ای از مقام استاد کم نمی‌کرد و حتی بر صفا و صدق مقام او می‌افزود.

از ایام طفولیت دو خاطره دارم کـه هـردو دلیل تشکیل ایمان و شوق باطنی من به عالم معلمی است. یکی اینکه در کلاس سوم دبستان بودم که روزی رئیس‌فرهنگ ایالت آذربایجان مرحوم دکتر احمد محسنی که بعدها بـه کفالت وزارت فرهنگ رسید به کلاس‌ما آمد و ازدانش‌ـ آموزان سئوالاتی کرد. گویا من‌بین آنان به‌سئوالات‌ایشان بهتر پاسخ دادم. ضمناً پرسیده بود کدام شغل را دوست دارید که در آتیه از آن راه به جامعه خدمت کنید ومن بی سابقه جواب دادم که معلمی را دوسـت دارم. ضمناً فرمایش حضرت علی (ع) را که فرموده «هرکس حرفی بمن بیاموزد مرا بندهٔ خود ساخته است»، با زبان کودکی به ایشان توضیح دادم. آن فقید سعید به اداره برگشت و به فاصلهٔ دو ساعت یك قطعه نقشهٔ ایران به عنـوان

جایزه برای من فرستاد. مدیر دبستان ما مرحوم فخری رحمت‌اله علیه، با اینکه فرزند خود او همکلاس من بود، زنگ مخصوصی نواخت و تمام دانش‌آموزان را سر صف احضار کرد و ضمن تشویق بسیار آن نقشه را به من اعطاء کرد.

خاطرهٔ دوم مربوط به برادر خودم می‌باشد که در تشکیل شخصیت من تأثیر بسزا و طولانی داشته است. من از خودم بزرگتر دو برادر داشته‌ام که هردوی آنها نیز پس از فوت پدر و مادرم به رحمت ایزدی پیوسته‌اند و منهم من قضی نحبه و منهم من ینتظر. یکی از آنها، برادر وسطی، که متأسفانه در ایام جوانی فوت کرد در گردن من حق بسیار دارد. بعد از پدر و حتی در حیات او در هدایت و ارشاد من کوشش می‌نمود. شخص با فضیلت و با ایمانی بود در ادبیات فارسی و عربی ید طولائی داشت. تقریباً تمام خطبه‌های نهج‌البلاغه و کتاب مقامات حریری را که در ادبیات زبان عربی ممتاز است از حفظ داشت و اکثر تفسیرها را که به قرآن مجید نوشته شده مطالعه کرده و فهمیده بود و با اغلب دانشمندان شهر تبریز دوستی نزدیك داشت. علاوه براین به علوم ریاضی عشق زائدالوصفی می‌ورزید و همواره با مطالعه و خواندن کتابهای زیاد علاقهٔ نهفته خود را به این فن ظاهر می‌ساخت. آن زمان بعضی مسائل‌راعنوان می‌کرد که من بعدها فهمیدم که واجد اهمیت است، و همیشه آرزو می‌کرد که به درك محضر اساتید بزرگی در این رشته نائل شود.

من در زندگی خود تا کنون کسی را که به آن اندازه معلمی، مخصوصاً معلمی ریاضیات، را دوست‌داشته باشد ندیده‌ام حتی خودم در حال حاضر به آن درجه نرسیده‌ام.

به این ترتیب محضر این برادر با جان برابر [رحمت‌الله علیه]، برای من لذت زائدالوصفی داشت. ضمن گردش از مزایای شغل معلمی و امتیاز علوم ریاضی و کمالات نفس ناطقه که از اشتغال به آن برای انسان پیدا می‌شود توضیحات کافی می‌داد. گاهی اضافه می‌کرد که اگر من نام بزرگان علوم ریاضی از قبیل خیام و نیوتن را بدانم و به آنها بیاندیشم، از روح پر فتوح آنان الهام خواهم گرفت. به طوری که هر روز بیشتر از روز قبل آتش درون من در اثر این صحبتها تیزتر و کاسهٔ صبرم لبریزتر می‌شد تا مگر تحصیلاتی بکنم و به افتخار معلمی ریاضیات نائل شوم. به تدریج تشویق این فقید سعید سبب شد که پس از تحصیلات متوسطه و فرا گرفتن ریاضیات مقدماتی زیر نظرمعلمین مبرز فرانسوی و ایرانی که آن زمان در شهر تبریز تدریس می‌کردند اول مهر ماه سال ۱۳۱۴ در شعبهٔ ریاضیات دانشسرای عالی تهران ثبت نام کردم.

به‌طور خلاصه ورود من به خدمت معلمی ریاضیات یك امر اتفاقی نبوده بلکه سه دلیل قطعی و روشن‌داشته است؛ اول تأثیر محیط خانوادگی و محترم شمرده شدن شغل تعلیم و تربیت در میان افراد خانواده‌ام، دوم تأثیر تعلیم معلمین عالیمقام خود که به تدریج در دوران تحصیل از محضر آنان بهره‌مند شده‌ام، سوم علاقهٔ ذاتی و باطنی که گویا خود به‌این کار داشته و یا در آغاز زندگی از محیط خود کسب کرده بودم اگر چه این علاقه بجائی مناسب نرسیده، ای بسا آرزو که خاك شده است.

سؤال ۲ـ لطفاً استادان ریاضی سابق خودرا یا اشخاصی را که به نظر شما در تعلیم ریاضیات در سالهای گذشته نقش مؤثری داشتند به خوانندگان مجله معرفی کنید. ضمناً توضیحات مختصری هم راجع به وضع مدارس و دانشگاههای زمان تحصیل خود بدهید.

پاسخ ـ از شهریورماه ۱۳۱۷ وارد خدمت وزارت آموزش وپرورش شده‌ام که نام قدیمی آن وزارت فرهنگ بوده است. مشاغل غیر تعلیماتی نگارنده اندك بوده است لیکن در تمام عمر خدمت، حتی دوران بازنشستگی جز یکی دو سال اخیر، از خدمت تدریس جدا نبوده‌ام. البته در آغاز هم سالها اشتغالم منحصراً تدریس‌ریاضیات بوده است و به اینکار هم قلباً علاقه داشته‌ام. ضمناً در وظائف آموزشی دیگر از قبیل امتحانات، برنامه‌ریزی تحصیلی، طرح سئوالات امتحانات نهائی و مسابقه‌ها، تألیف کتابهای درسی، ویراستاری کتابهای مختلف، کارشناسی یا بازرسی یا پیگیری صاحب اختیار وزارتی در موارد مختلف مخصوصاً در موارد آموزشی انجام وظیفه کرده‌ام. بنابراین به مناسبت کارم با اغلب آموزگاران و دبیران و اساتید ریاضی ارتباط و دوستی داشته‌ام. دو سال بعد از انقلاب هم در دانشکدهٔ هنر دانشگاه الزهراء و دانشکدهٔ معماری دانشگاه شهیدبهشتی تدریس کرده‌ام. ضمناً درگذشته حدود ۲۰ سال هم تقریباً تمام موادریاضی دانشکدهٔ افسری را درس داده‌ام. با این مقدمه اگر از من می‌پرسید چه کسانی در سالهای گذشته در تعلیم ریاضیات نقش مؤثری داشتند، خواهم گفت معلمان ریاضی، مابین دولتمردان حتی آنهائی‌که‌سابقهٔ تحصیلات ریاضی داشتند، کسی را به اندازهٔ یك معلم ساده در راه پیشرفت دانش ریاضی دلسوز ندیده‌ام. البته حساب اشخاص سودپرست و معلم‌نما جداست لیکن اکثریت معلمان ریاضی موجب افتخار ملت بوده‌اند و سرافرازی دانشجویان در داخل و خارج از کشور مدیون زحمات آنها است. مابین معلمان ریاضی از چهار نفر اساتید خود بد احترام نام می‌برم: مرحوم استاد غلامحسین رهنما، پروفسور تقی فاطمی، اساتید سابق دانشسرای عالی تهران، مسیو امیل بدو دبیر ریاضیات دبیرستان تبریز، پروفسور پرواندکك ـ تبیلیانتز استاد آنالیز و نجوم دانشگاه تهران؛ مخصوصاً

تذکر می‌دهم در آن زمان بعضی از اساتید خارجی که در استخدام دولت ایران بوده‌اند با کوشش تمام برای پیشرفت فرهنگ ما فعالیت می‌کردند. یك خاطره ازاستاد آنالیز خود بگویم: ایشان استاد معروف جهانی بود، متجاوز از ۲۰ مقاله کشف ریاضی داشت که به آنها papier de invention می‌گفت که در اروپا گرفته بود و نام او در اغلب کتابهای ریاضی آن زمان (۱۷ـ۱۳۱۴) آمده بود. صدایش هنوز در گوشم هست که روزی درس را بااین جمله فرانسوی شروع کرد:

Je vous offre avec le plus grand degre de modestie mon théoréme de K.

یعنی با کمال تواضع قضیه‌ای را که خودم کاشف آن هستم به شما درس می‌دهم. البته دزس چنین استادهائی برای شاگردان لذت دارد. روزی دیگر درسالن دارالفنون تهران مجلس سخنرانی ترتیب داده شده بود که در آن اساتید و دانشمندان وقت حاضر بودند ومارا که دانشجویان ریاضی آن زمان بودیم نیز دعوت کرده بودند. موضوع سخنرانی استاد ما به زبان فرانسوی چنین بود:

Est—ce—que les Corps Cosmiques influencent la vie humaine au noun?

به فارسی: آیا اَجرام سماوی در مقدرات انسان تاثیر دارند؟

استاد عقیده داشت که اجرام سماوی در مقدرات بشر کم یا بیش تأثیر دارند. جدول و نمودار مفصل و بزرگث ترتیب داده بود که نشان می‌داد اغلب اتفاقات کرهٔ زمین از قبیل جنگها و انقلابات و ظهور نوابغ و... در موقعی ظاهر شده‌اند که لکه‌های خورشید مقابل کرهٔ زمین بوده است و دراین موقع گاز اوزن O_3 زیاد در سطح زمین منتشر شده است. این گاز باعث هیجان شده و انسان مانند عروسکی به دست و پا زدن افتاده است، درست شبیه عروسك خیمه‌شب‌بازی معروف بوده است. موقعی که خدمت دکتر کك تبیلیانتز در ایران تمام شده بود و می‌خواست تهران را ترك کند به‌شاگردان سال آخر دانشسرایعالی اظهار محبت می‌کرد و من که شاگرد اول کلاس خود بودم دفترم را دادم که استاد سایه دستی درآن بنویسند. استاد به‌زبان فرانسه جمله‌ای نوشت که ترجمهٔ فرمایش حضرت رسول اکرم صلوات‌اله علیه واله وسلم می‌باشد: ز گهواره تا گور دانش بجوی .

توضیح راجع به وضع مدارس و دانشگاههای زمان تحصیل نگارنده را خواسته بودید. باید عرض کنم آن زمان فقط یك دانشگاه آنهم در تهران وجود داشت و در تبریز شهر ما بیش‌از دو دبیرستان کامل وجود نداشت و آن دو دبیرستان به هم راه داشتند در واقع یك مدرسه محسوب می‌شدند . وضع مدارس از لحاظ کمیت ضعیف ولی از لحاظ کیفیت خوب و ارزنده بود. معلمان و استادان ادبیات استادان و فضلای صدر مشروطیت و برای‌مسائل مذهبی‌از روحانیان‌ومجتهدین عالیمقام و برای علوم جدید از اساتید معروف داخلی و خارجی انتخاب شده بودند. در دانشسرای عالی تهران که در آن زمان به هستهٔ مرکزی دانشگاه، معروف بود نظیر مرحوم آیةاله سیدکاظم عصار، استاد فاضل تونی، استاد ملك الشعراء بهار، استاد رضازاده شفق، استاد بدیع‌الزمان فروزانفر، استاد بهمنیار و نظائر آنان و از خارجی‌ها استاد کك تبیلیانتز، پروفسور هاز، پروفسور دوژوا پرفسور آزما، پرفسور سریگلی و دیگران تدریس می‌کردند. ریاست دانشسرایعالی و دانشکده علوم و ادبیات وقت با مرحوم دکتر عیسی صدیق بوده است . بعضی از اساتید عالیمقام آن زمان هنوز در قید حیات هستند کثراله امثالهم . رفته رفته عدهٔ دانش‌آموزان و دانشجویان افزایش پیدا می‌کرد. مدارس و دانشکده‌ها زیاد می‌شد. یك مقایسه کوچك اینکه در سال ۱۳۱۴ عدهٔ فارغ‌التحصیلان تبریز ۶۰ نفر ودر سال ۱۳۲۴، که نگارنده جزء هیئت ممتحنه تهران بودم و در مدرسهٔ عالی شهید مطهری (سپهسالار سابق) امتحان نهائی دبیرستان انجام می‌دادیم و مرحوم ابراهیم شمس‌آوری رئیس هیئت ممتحنه بود عدهٔ داوطلبان متوسطه ۳۰۰ نفر بودند. لیکن درسال ۱۳۴۴ که در دبستان نظامی تهران مشغول تکثیر سئوال ریاضی داوطلبان تهران وحومه بودم عدهٔ داوطلبان دبیرستان‌ها ۵۰ هزار نفر بوده است.

از اینجا به‌بعد دیگر نگارنده نباید سخن بگویم بلکه شخصی مطلع باید با آمار دقیق مسئله را بررسی کند ولی آنچه معلوم همه بوده و هست اینست که در گذشته هرچه کمیت زیاد می‌شد کیفیت تعلیم و تربیت تنزل می‌کرد و به‌طور خلاصه در اواخر نزدیك به انقلاب مدارس و دانشگاهها از لحاظ ساختمان و ظواهر کار ، خیلی غنی‌تر از باطن آنها در علم و معرفت بودند واین موضوع را هرشخص بی‌غرض می‌توانست تشخیص بدهد. معروف بود که از پروفسور ابرلین فرانسوی که درتهران بود و در دانشگاه کار می‌کرد پرسیده بودند که نظر شما نسبت به دانشگاه چطور است؟ او جواب داده بود که le gras batiment یعنی ساختمان معظمی است العهدة علی‌الراوی

سؤال ۳ــ دربارهٔ ریاضیاتی که سابقاً در دوران تحصیل و تدریس جنابعالی مرسوم بود توضیحاتی بدهید.

عقیدهٔ خود را دربارهٔ اینکه این ریاضیات در آن زمان تا چه اندازه منطبق برتحولات برنامه‌های ریاضی عصر خود بود بیان داریم.

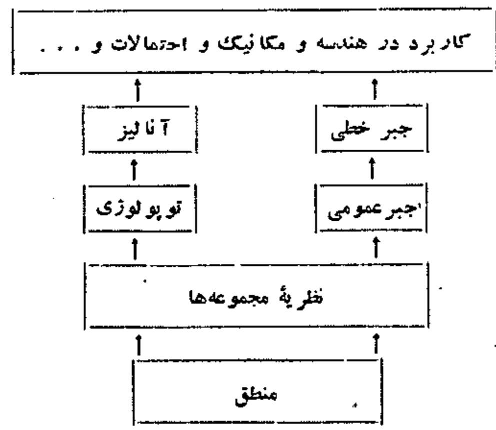
پاسخ ــ اساس ریاضیات که همان نحوهٔ فکر و استدلال باشد همیشه وجود داشته است. عملیات به وسیلهٔ اعداد و رسم اشکال مطابق احتیاج هرزمان پیش می‌رود. ریاضی همواره دو جنبه داشته است که یك جنبه استدلال و جنبهٔ دیگر کاربرد و عمل است. سابق براین، کار ریاضی منحصر به تحصیل و تدریس در مدرسه بوده است که مطالب را مطابق ذوق و سلیقهٔ شخص گسترش داده و اصل علم برای علم را همواره در مدنظر می‌گرفتند. امروزه ریاضیات بیشتر از هشتاد نوع مختلف دارد که در گذشته نداشته است. کشفیات جدید که هرروز در محیط ریاضیات می‌شود خیلی بیشتر از آن است که یك نفر شخص صلاحیت‌دار، بتواند آنرا در یك روز بخواند. گفته می‌شود که در یك سفینهٔ فضائی چهار تا پنجهزار کار بزرگ و کوچك ریاضی دخالت دارد، به‌غیر از مغز الکترونیکی که خود آنهم البته محصول مغزهای ریاضی است. اگرچه در کشور ما متأسفانه وضع باگذشته خیلی فرق نکرده است معذالك سابقاً مشاهده می‌کردیم که دانش‌آموزان‌را باصدها مسائل‌و سرگرمیهای کم نتیجه مانند اتحادهای مثلثهائی که طرف اول باطرف دوم برابر است به‌عنوان ورزشی ذهنی یا محاسبات لگاریتمی خسته‌کننده باجدولها مشغول می‌داشتند. امروز چنین نیست ماشین‌های محاسبه بزرگ و کوچك کار را ساده کرده است. این زمان در دست جوانان بیشتر کتابهای ریاضی مربوط به مهندسی و الکترونیك‌و رادیو تلویزیون دیده می‌شود در صورتی‌که سابقاً در دست آنها کتابهائی از قبیل هندسه هشت مقاله یا هندسه ترسیمی مونژ دیده می‌شد. رسم فنی عملی مهندسی جای هندسهٔ نظری را گرفته است. باز تکرار می‌کنم که در کشور ما وضع هنوز به‌طور محسوس تغییر نیافته است.

سؤال ۴ــ لطفاً نظرتان را در مورد ریاضیات جدید بیان فرمائید. همانگونه‌که مطلع هستید بااجرای برنامه‌های ریاضیات جدید در مدارس کشور نظریات مخالف و موافقی از سوی افراد مختلف اظهار شده. بویژه بعضی‌از والدین که ریاضیات را به‌سبك قدیم تحصیل کرده بودند ازاین دگرگونیها دچار شگفتی و نگرانی شدند. این‌تحول و دلائل آن از مواردی است که هنوز پس‌از گذشت چند سال در پرده ابهام باقی مانده است. توضیحات شما به عنوان یکی‌از مدرسین و مؤلفین موفق ریاضیات جدید در ضرورت این دگرگونی بی‌شك برای خوانندگان جالب و آموزنده خواهد بود.

پاسخ ــ در ابتدا نام‌گذاری ریاضیات جدید یا مدرن در تمام کشورها میان میلیونها خانواده که نسبت به تحصیل فرزندان خود علاقمند ولی از برنامهٔ تحصیل آنها بی‌اطلاع یا کم اطلاع هستند نگرانی فوق‌العاده فراهم کرده بود. در تمام کشورها توجه خارج از حد لزوم مردم به این موضوع جلب شده و سبب انتشار مقالات و اظهار نظرهای متعدد می‌گردید. چه‌بسا محصلین که ازاین ریاضیات می‌ترسیدند و چه‌بسا محصلین دیگر که باشوق و ولع می‌خواستند آنرا یاد بگیرند. ولی بعدها معلوم شد که این نگرانیها اغراق‌آمیز و بی‌اعتبار بوده است. شاید ازاینکه صفت جدید یا مدرن به‌کلمهٔ ریاضیات داده شده بود چنین تأثیری حاصل شده باشد. گویا بهتر بود که در ابتدا عوض ریاضیات جدید آموزش جدید ریاضیات گفته می‌شد. به‌هرحال امروز باید دانست که‌این‌ریاضیات نه جدید است و نه مدرن، بلکه، همین ریاضیات معمولی است که باروش دیگر یعنی امروزی تدریس می‌شود و با ریاضیات تدریس شدهٔ دیروز ارتباط مستقیم دارد. به‌طوریکه می‌توان گفت پدر ریاضیات معروف به‌مدرن همان ریاضیدان یونانی اقلیدس است که در سه قرن پیش از میلاد روش آکسیوماتیك را در هندسهٔ خود وارد کرده است. آکسیوم یعنی اصل و اگر چند اصل مستقل از هم نه زیاد و نه کم را قبول کرده و برمبنای آنها یك نظریهٔ ریاضی ایجاد کنیم آن نظریه را اصولی یا اکسیوماتیك می‌گویند. بعدها ثابت شد که نظریهٔ اصولی هندسهٔ اقلیدس کامل و بی‌عیب نبوده است. ترمیم لیست اکسیوماتیك اقلیدس از دو راه متفاوت به وقوع پیوست. درسال ۱۸۹۸، هیلبرت آلمانی ۲۷ آکسیوم برای ترمیم هندسهٔ سابق اقلیدسی پیشنهاد کرد که ادامهٔ این بحث فعلا برای ما لازم نیست. خلاصه آنرا که امروز ریاضیات جدید می‌گویند و ما هم این اصطلاح‌را به‌کار خواهیم‌برد؛ اصولی‌کردن ریاضیات است در مقابل حالت شهودی آن که قبلا داشته است. اگر درست‌تر حرف بزنیم ریاضیات از اول شهودی ــ اصولی بوده‌است، وجود هندسه‌اقلیدسی سابق مؤید این بیان است. پس مقصود ریاضیات جدید در واقع این می‌شود که کفهٔ اصولی آن برکفهٔ شهودی‌اش سنگینی داشته باشد. ریاضیات شهودی یعنی درك ریاضی از راه وجدان و بدون استدلال، ریاضیات اصولی یعنی درك ریاضی باکمك استدلال منطقی. اکنون یادآور می‌شویم که این روش اکسیوماتیك یعنی‌منطقی‌که سنگ‌بنای آنرا اقلیدس گذاشته است درزمان اخیر به‌وسیلهٔ دانشمندانی نظیر برتراندرسل و کارتان و شوارتز استیلای خود را در تمام ریاضیات پیش‌برده و وارد کلاسهای درس دبستانها و دبیرستانها و دانشکده‌ها می‌شود.

ریاضیات معاصر یا ریاضیات روز براساس منطق و

نظریهٔ مجموعه‌ها و توپولوژی و آنالیز و موارد استعمال آنها بنا می‌شود و سازمان‌بندیهای مختلف درآن به‌وجود می‌آید. امروز کسی که علوم را دنبال می‌کند ناچار است که دراین قسمتها اطلاعاتی داشته باشد والا نخواهد توانست از کتابهای علمی و مهندسی استفاده کند. دیاگرام زیر به‌طور مختصر ریاضیات معاصر را نشان می‌دهد :



باوجود این، ریاضیات جدید دراساس بلکه‌از لحاظ مسئلهٔ آموزش و پرورش موافق و مخالف دارد؛ یعنی از چه سنی جوانها باید ریاضیات را یاد بگیرند. نظر دو دسته را باختصار ذکر می‌کنیم:

الف ـ موافقین یا دستهٔ ریاضیون اصولی که ما آنها را پیروان ریاضیات معقول نیز می‌نامیم، عقیده دارند که باید از ابتدا بچه‌ها را بامنطق و اصول بار بیاوریم. چرا اجازه بدهیم که آنها با روشهای دیگر که اگر غلط هم نباشد ولی حتماً ضعیف‌اند بار بیایند و تحصیل کنند و بعدها مجبور باشند راه خود را عوض کرده و به‌طرف منطق راهنمائی شوند؟ اگر در ریاضیات کفهٔ ترازو به‌طرف اکسیوماتیك متمایل است چرا در آموزش آن نباشد؟

ب ـ مخالفین یا دستهٔ ریاضیون شهودی یا اخباری، که آنها را پیروان ریاضیات منقول نیز می‌توانیم بنامیم، می‌گویند: واردکردن ریزه‌کاریها و دقتهای باصطلاح نچسب روش اکسیوماتیك به مسائل جاری ریاضی آنها را از عمومی‌بودن خارج کرده نسبی می‌کند و این عمل زودرس به‌تربیت هوش و ذکاوت فطری و خدادادی جوانان ضرر می‌رساند و فراست آنها را از رشد و نمو طبیعی باز می‌دارد و نیز آنها را برای فراگرفتن خواص ساده و معمولی اعداد و اشکال که در حدود مقدمات لازم و ضروری است ناتوان می‌سازد. پس‌اول ریاضیات را شهودی یاد بگیرند و اگر کسانی می‌خواهند ریاضی‌دان متخصص بشوند بعدها در سنین بالاتر ریاضیات جدید را فرا خواهند گرفت. باهمهٔ این حرفها ریاضیات جدید در بعضی از کشورها ازجمله انگلیس و فرانسه و امریکا داخل برنامهٔ مدارس‌ابتدائی و متوسطه شده است. یکی از اساتید دانشگاه کمبریج انگلستان که سابقاً در تهران بود اظهار می‌کرد که ۴۵ درصد از مدارس انگلستان ریاضیات مدرن تدریس می‌کنند.

نگارندهٔ این سطور که چند سال است مسافرت به‌خارج نکرده و کسی را که در این زمینه وارد باشد ندیده‌ام و کتاب خیلی جدید هم به دستم نرسیده است نمی‌توانم فعلا در این خصوص شهادت بدهم. کسانیکه اطلاعات تازه دارند باید اظهار فرمایند.

اما در کشور خودمان ـ تاریخ ورود ریاضیات جدید به کشور خودمان را تقریباً چنین یاد دارم : درسال ۱۳۴۴ مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب کتاب مدخل منطق صورت را انتشار داده بود. این کتاب اگرچه‌کتاب کاملا ریاضی نبود ولی خیلی‌ازمفاهیم ریاضی‌را شامل‌بود در سال ۱۳۴۲ کتاب مقدمه برآنالیز جدید تألیف آقای دکتر وازگن آوانسیان استاد دانشگاه ملی تازه تأسیس آن زمان منتشر شد. زمانی بعد کتاب ریاضیات نوین آقای دکتر سادات عقیلی به‌دست نگارنده رسید. خود نگارندهٔ این سطور مانند دیگران از شنیدن موضوع ریاضیات جدید به وجد آمده و از یکی از دوستانم که در پاریس زندگی می‌کرد خواستم که چند جلد کتاب ریاضی جدید برایم بفرستد، ایشان فرستادند مطالعه را شروع کردم و یك کتاب به‌نام مبادی منطق وریاضیات جدید بااستفاده از کتب قدیم و جدید نوشته پیش وزیر آموزش و پرورش وقت بردم. ایشان به‌یکی از ادارات وزارتخانه رجوع کرد تا چاپ شود. آن اداره تعلل می‌کرد تااینکه به‌همت دوست عزیز آقای عبدالحسین مصحفی مدیر مجلهٔ ریاضی یکان در سال ۱۳۴۸ آن‌کتاب چاپ شد. بعداز آنهم کتابهای دیگر دراین موضوع چاپ می‌شد و ریاضیات جدید بر سرزبانها افتاده بود. دراین موقع کتابهای ریاضی جدید که مدرسهٔ عالی آمار منتشر می‌گردید، جالب بود. تحصیل پیش دانشگاهی‌از دومقطع دبستان و دبیرستان به‌سه مقطع دبستان، راهنمائی، دبیرستان پیش آمده بود و نگارنده به سازمان کتابهای درسی آن زمان منتقل شده بودم و در تهیهٔ کتابهای موسوم به مرحلهٔ دوم تعلیمات اجباری باآن سازمان همکاری پیدا کرده بودم. کتابهای ریاضی دورهٔ دبستان و دوره راهنمائی وشعب مختلف دبیرستان و هنرستانها در سازمان تهیه و در سطح کشور انتشار یافته بود و کاری انجام شده بود. لیکن رفته رفته وضع عوض‌شده و شکایتها از کتابهای ریاضی جدید مدارس شروع شده بود.

رئیس یك دبیرستان معروف تهران یك کتاب ریاضی را پیش وزیر آموزش و پرورش وقت می‌برد که دراین

کتاب نوشته‌اند برای عمل جمع ماشین لازم است و ما در مدرسه ماشین نداریم. درصورتیکه در کتاب چنین بوده که عمل جمع $a+b=c$ شبیه یك ماشین است که اگر درآن دو عدد a و b را بریزیم عدد c بیرون می‌آید. از طرفی چون نویسندهٔ کتاب از نزدیکان وزیر بود مسئله به کمیسیون منجر می‌شود و مدتی مشاجره ادامه داشت. چنین جریانی در جاهای دیگر تکرار می‌شد. اصلا خیلی از معلمین ریاضی چون از ریاضی جدید اطلاع نداشتند کتاب را رها کرده و بطابق میل خود مثل سابق درس می‌داند. تااینکه روزی همان رئیس دبیرستان که عضو شورای آموزش و پرورش هم بود از طرف وزیر آمد تقریباً ریاضیات جدید را منسوخ یعنی محدودکرد. یعنی روشی که از اول بنا بود تمام ریاضیات بـه‌آن روش تدریس شود تبدیل به‌یك مـادهٔ تك درسی از درسهای رشتهٔ ریاضی شد درسهای ریاضی از حوزه نفـوذ آن خارج شدند یعنی در واقع ریاضیات جدید در ایـران شکست خورد. ازآن زمان به این طرف‌می‌توان‌گفت که با ـ شرایط فعلی ریاضیات جدید مخل نظم تعلیمات ریاضی می‌شود! ممکن است از خوانندگان کسانی چنین عقیده را نداشته باشند و به‌اینکه هنوز ریاضیات جدید به ـ عنوان یك تك‌درس تدریس‌می‌شود بسنده‌کنند وخوشحال باشند که در مدارس ما ریاضیات جدید وجود دارد. البته وجود دارد لیکن به‌این معنی که ریاضیات جدید روش اکسیوماتیك باشد که تمام برنامه‌های ریاضی به‌آن‌روش به‌طور کامل و سالم تدریس شود نیست.

برای اینکه‌مطلب‌محسوس خوانندگان‌واقع‌شود دروس ریاضی کلاس دبیرستان مثلا کلاس چهارم‌نظری ریاضی‌ـ فیزیك را درنظر می‌گیریم. ریاضیات این کلاس نسبت به‌کلاسهای دیگر در قله قرار دارد و دراین کلاس سه کتاب: ریاضی جدیـد، هندسهٔ تحلیلی، جبر و آنـالیز تدریس می‌شود. منظور نگارنده این نیست که این‌کتابها را نقد بکنم زیرا که برای این کار فرصت و وظیفـه ندارم. لیکن منظور این است که این کتابها را دربرابر ریاضی جدید و در پرتو نفوذ آن نگاه کنیم.

۱ـ کتاب ریاضی جدید. فرض کنیم ایـن کتاب صحیح و بی‌عیب و مطابق احتیاج معنوی فرزندان کشور تالیف شده باشد. ببینیم دوکتاب دیگر چه‌اندازه ازاین کتاب و جلدهای ماقبل آن که برای کلاسهای پائین‌تـر تالیف شده است متاثر گردیده‌اید.

۲ـ کتاب هندسه تحلیلی. سابـق براین در دورهٔ دبیرستان هندسه را به‌طور خالص یاناب تدریس می‌ـ کردیم. لیکن حالا خـواسته‌اند هندسه را طبق برنامـه به‌طور تحلیلی بنویسند، بسیار خوب لیکن این کتـاب هندسه تحلیلی از روش جدید چه بهره برده است؟

جواب اینست که این کتاب که ۱۰۷ صفحه دارد فقط یك سطر که سطر سوم از آخر صفحهٔ ۵۱ باشد از روش ریاضیات جدید بهره‌برده است و آن سطر هم با قسمتهای دیگر کتاب حالت ناسازگاری دارد.

ایـن یك سطر کـه بـه‌آن اشاره شد چنین است:

$$\left.\begin{array}{l}\triangle \perp \triangle' \\ \triangle \perp OA\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle' = OA$$

تساوی $\triangle' = OA$ بـه مـوجب قوانین ریاضیات جدید ایجاب مـی‌کند کـه دو خط $\triangle'$ و OA منطبـق هستند ولی در ریاضیات سنتی علامت = معنی دیگری دارد. اگر علامت تساوی = را به‌آن معنی که در ریاضیات جدید مطرح است بپذیریم موافق معنی آن با ریاضیات سنتی نخواهد بود.

در هندسهٔ جدید که طبق نظریهٔ مجموعه‌ها نوشته می‌شود یك شکل هندسی را مجموعهٔ نقاط می‌گیرنـد پس تساوی دو شکل هندسی مانند دو مثلث یا دو دایره یا ساده‌تر دو پاره خط بـه‌تساوی دومجموعهٔ‌نقاط بر ـ می‌گردد و دو مجموعه موقعی مساوی می‌شوند که عضو ـ های آنها یکی باشد. دراین هندسه تنها دلیل تساوی دو شکل انطباق نقطه به نقطهٔ آنها است. اگر این الگو را ملاك عمل بگیریم تمام قضایای هندسه‌های سنتی چـه تحلیلی و چه غیرتحلیلی از عرش به فرش می‌آیند یعنی غلط می‌شوند یعنی مثلا نمی‌توان گفت دو مثلث کـه اضلاع آنها نظیر به نظیر مساوی هستند باهم برابرند و یااینکه دو لبهٔ مقابل یك میز نهارخوری باهم‌مساویند و مانند اینها یك دریا اختلاف در خطها و اشکال‌و زوایا پدید می‌آید. پس هرکس بخواهد کتاب هندسهٔ ریاضی جدید بنویسد یا بخواند باید حواس خود را جمع کند و علائم و مفروضات خود را بشناسد. همچنین بـرای چاپخانه‌ها هم وقت لازم است و گاهی رنگهای مختلفو به‌کار می‌گیرند.

اینجانب نمی‌توانم درایـن مختصر مـباحث متعدد ریاضیات را مطرح کنم. فقط مـی‌خواهم بـه‌عرض خوانندگان برسانم که کتاب هندسهٔ تحلیلی که در بالا به‌عنوان مثال ذکر شد از ریاضیات جدید به‌غیر از همان یك سطر بهره برده است و اگر آنرا نداشت بهتر بود. پس این سئوال مطرح می‌شود که ریاضیات جدید به چـه مقصود در دبیرستان تدریس می‌شود؟ جواب این سئوال را خوانندگان بدهند. از نویسندگان این کتاب دوست و همکار محترم حسین مجذوب به‌رحمت ایزدی پیوسته است؛ رحمته‌الله علیه. مؤلفان دیگر را خداونـد حفظ بفرمایید.

۳ـ کتاب جبر و آنالیز. این کتاب را درسال ۱۳۵۶ نگارندهٔ ایـن سطور با همکاری دوستان عـزیـز آقای جلیل‌اله قراگوزلو ومرحوم‌هدایت‌اله‌موسوی رحمة‌اله‌علیه

تالیف کرده بردیم. امسال سال هشتم است که این کتاب تجدید چاپ می‌شود. اینجانب چون با کتاب کاری نداشتم چاپهای مختلف را ندیده بودم. تااینکه این اواخر چاپ سالهای ۵۶ ـ ۵۷ ـ ۶۱ ـ ۶۳ به دستم رسید. معلوم شد تغییراتی در آنها به‌عمل آمده و به‌قول یك دوست ظریف تکمیل نواقص شده است. در پشت جلد کتاب سال ۵۷ تجدیدنظر را در سال ۲۵۳۷ منسوب به وزارت آموزش و پرورش کرده‌اند.

در پشت جلد کتاب سال ۶۱ بررسی و تصحیح کتاب را منسوب به گروه تحقیقاتی ریاضی دانشگاه شیراز با همکاری دبیران کرده‌اند .

در پشت جلد کتاب سال ۶۳ که تازه چاپ شده علاوه برتصحیحات قبلی اصلاح طبق نظرات که از مناطق ۲۷ـ گانه تهران و مراکز استانها رسیده است معمول داشته‌اند.

بنابراین این کتاب آن نیست که ما در سال ۱۳۵۶ تالیف کرده بردیم؛ بلکه عدهٔ زیادی درآن تجدیدنظر کرده و آرایش و پیرایش معمول داشته و تغییراتی درآن داده‌اند و مسئولیت تجدیدنظرهای خود را از هرلحاظ و مخصوصاً از لحاظ وجدانی و امانت به‌عهده دارند. چون اسم اینجانب هنوز هم پشت جلد این کتاب نوشته شده است بنابراین اجازه می‌خواهم مطالبی چند به‌عرض خوانندگان محترم برسانم . .

اول اینکه در پشت جلد تمام کتابها این جمله نوشته شده است که حقوق مادی این اثر متعلق به‌وزارت آموزش و پرورش است و نوشته نشده است که حقوق معنوی و تغییر مطالب نیز از حقوق وزارت آموزش و پرورش است.

ثانیاً اعتقاد دارم اگر در یك کتاب غلطهای چاپی و عبارتی و تصحیحات عددی دیده شود مانعی نیست که بدون اطلاع مؤلف آنها را تصحیح کنند. لیکن تغییرات بنیادی در یك کتاب را حتی اگر به‌نظر خواننده متن کتاب غلط جلوه کند نباید بدون اطلاع و اجازهٔ مؤلف کتاب انجام دهند. دراین خصوص با نگارنده در ظرف این چند سال صحبتی نشده است با مؤلفین دیگر نمی‌دانم. وزارت آموزش و پرورش البته حق دارد یك کتاب را از گردونه خارج کند و کتاب بهتر از آن را در مدارس معمول دارد ولی اگر دستور بدهد بدون اجازهٔ مؤلف کتابش را تغییر بنیادی بدهند این‌کار ظلم است و معایب دیگر نیز دارد .

نگارنده نمی‌توانم تمام تغییرات را که در کتاب پیدا شده توضیح ریاضی بدهم زیرا که این کار مستلزم نوشتن یك کتاب جداگانه است. لیکن به دو مطلب آنهم فقط از جهت دید ریاضی جدید که مورد بحث ما است اشاره می‌کنم:

۱ـ دراین کتاب در ابتدا برخلاف آنچه قبلا بوده تعریف سنتی تابع $y = f(x)$ و تعریف جدید آن f دقیقاً از هم‌تمیز داده نشده است. درشمارهٔ (۱ـ۳) از صفحهٔ ۲، y را مقدار تابع f در x گفته است. حرف اضافهٔ در در اینجا وافی‌مقصود نیست شاید از ترجمه آمده باشد. بهتر است بگوئیم : y را مقدار تابع f برحسب x گویند و گاهی هم برای اختصار کلمهٔ مقدار را حذف‌کرده، y را تابع x می‌نامند و به‌صورت $y = f(x)$ می‌نویسند، پس f و y هردو تابع نامیده می‌شوند لیکن معنی تابع در هرکدام از آنها متفاوت است. شاید خواننده تصور کند که مقصود این نگارنده بازی با کلمات است، درصورتیکه اینطور نیست چون مفهوم و تحریر ریاضی تابع درسرتاسر کتاب به‌صورتهای مختلف آمده است . پس باید در ابتدا محصل به‌معنی و مفهوم دقیق آن واقف شود تا دچار سرگردانی فکری نگردد و نیز معلمین محترم مدارس باید اظهارنظر کنند که دانش‌آموزان با دستورهای از قبیل

$(f+g)' = f' + g'$ و یا $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ و نظائر

که از مقولهٔریاضیات جدیدهستند و در داخل‌مطالب سنتی قرار می‌گیرند چگونه‌هستند آیا عمق آنهارا درك می‌کنند یا خیر؟

۲ـ مطلب دوم‌که به‌آن‌اشاره‌می‌کنم مسئلهٔ حد است. این مطلب اساس و ریشهٔ آنالیز ریاضی که لایبنیتز و نیوتن پایه‌گذار آن بودند می‌باشد و از مسائل بنیادی در آموزش ریاضی است. در جبر سال ششم ریاضی سابق موضوع حد مختصر و برای تابعهای ساده کافی بود. ما خواستیم با استفاده از منطق ریاضی و کتابهای جدید در مورد مسئله حد قدری پیشرفت داشته باشیم . از بینهایت کوچك شروع کردم زیرا که تمام آنالیز سنتی از کاربرد بینهایت کوچك و تمام فیزیك نظری از کاربرد آنالیز ریاضی تشکیل می‌شود. همچنین نگارنده برای حد تابع از روی حد متغیر جدولی ارائه کرده بودم که شامل تمام حالتهای ممکن نه‌گانه و خلاصهٔ فصل مربوط به حد و مهم بود. پس‌از اینکه کتاب به‌دست ویرایشگران فرهنگی یا دانشگاهی یا مختلط البته به‌قول پشت جلد کتاب افتاده است، بینهایت کوچك را حذف و جدول را تغییر داده‌اند. در چاپ سال ۱۳۵۷ (= ۲۵۳۷) قبل‌از انقلاب جدول را به ۱۶ سطر و در چاپ ۱۳۶۱ بعداز انقلاب عده سطرها را پائین آورده به ۱۳ سطر و بالاخره در چاپ اخیر ۱۳۶۳ که تازه چاپ شده آنرا به ۱۲ سطر رسانیده‌اند. علاوه براین در چاپ اخیر ارتباط مابین توضیحات کتاب و سطرهای جدول

نیز از بین رفته و اشتباه مضاعف به‌عمل آمده است . مثل‌اینکه هنوز ویرایشگران محترم دراین خصوص به توافق نرسیده‌اند. چون توضیح کامل بیان ریاضی دریك مقاله نمی‌گنجد لذا خوانندگان را به کتاب مورد بحث رجوع داده و تاکید می‌کنم به عقیدهٔ من فقط جدولی که اینجانب در موقع تألیف کتاب در سال ۱۳۵۶ داده بودم صحیح و بقیه صحیح نمی‌باشد و باید همین جدول در کتاب چاپ و بقیه حذف شوند. اگر ویرایشگران جزاین فکر می‌فرمایند خوب است برای استفادهٔ خوانندگان مجله مرقوم فرمایند. جدول مربوط به حد تابع از روی حد متغیر دارای نه حالت یعنی نه سطر است و بیشتر نمی‌شود. مسائل جذب ریاضیات جدید با چنین دشواریها روبرو است. این اشاره‌ها که بنده دراینجا به‌عرض خوانندگان محترم رسانیدم یکی‌از ده‌ها بلکه یکی از صدها اشکال است که باید مورد توجه و اقدام مسئولین آموزش و پرورش از کوچك تا بزرگ قرار بگیرد انشاءالله تعالی. اکنون دلائل اینکه آموزش ریاضیات جدید در کشور ما چنین سرنوشت پیدا کرده است باختصار عرض می‌کنم :

۱ـ از اول وزارت آموزش و پرورش وقت برای اینکه آموزش ریاضیات جدید را در کشور عمومی کند نقشه جامع یا بلکه می‌توان گفت نقشه نداشته است . کتابهائی چاپ کرده و مسئله را به حال خود واگذاشته است .

۲ـ اشتباه اساسی از اینجا ناشی شده بود که وزارت آموزش و پرورش وقت آموزش ریاضیات جدید را در تمام کشور باهم شروع کرده بود، اگر آنرا بترتیب و تدریج انجام می‌داد بهتر بود. چنانچه در پیش عرض شد استاد انگلیسی دانشگاه کمبریج می‌گفت آن‌زمان ۴۵٪ مدارس انگلیسی ریاضیات جدید تدریس‌می‌کردند. همچنین نگارنده که در سال ۱۳۵۲ دربلژیك بودم متوجه شدم که ریاضیات جدید زیرنظر مرکز تعلیمات ریاضی آنجا CBPM که به سرپرستی پرفسور ژرژ پاپی و همکاران او اداره می‌شد به تدریج در بروکسل و سایر نواحی بلژیك پیش می‌رفت و برای این‌کار در مرکز نامبرده نقشه‌ای شبیه نقشه جغرافیائی داشتند که پیشرفت ریاضیات جدید را در کشورشان می‌داد و بسیاری از مدارس بلژیك هنوز به سبك قدیم کار می‌کردند. رادیو تلویزیون می‌دانست چکار می‌کند. خود پرفسور پاپی و همسر او بانو فردریك برای پیش‌بردن ریاضیات جدید واقعاً جهاد می‌کردند .

۳ـ بعضی از کسانی‌که مأمور نوشتن کتابهای ریاضیات جدید برای دبستانها و دبیرستانها می‌شدند واقعاً دراین کار صلاحیت و تجربهٔ کافی نداشتند و بعضی اشتباهات خنده‌آور می‌کردند. مثلا در موقعیکه تنور ریاضیات جدید گرم بود و درعین‌حال که این ریاضیات با منطق شروع می‌شد در یك کتاب درسی داخل کادر و با رنگ قرمز نوشته بودند که به‌خاطر داشته باشید که عدد یك نه اول است و نه‌غیر اول . وقتی به‌مؤلفان که موجه هم بودند گفته شد که اینکه شما نوشته‌اید یك تناقض است و عدم اجتماع نقیضین در آغاز منطق است و همه این را میدانند شما چطور نوشته‌اید اول قبول نمی‌کردند بعداً کتاب درست شد.

۴ـ چون خیلی از معلمین قبلا آموزش ریاضی جدید ندیده بودند به‌این کار اصلا اعتقاد نداشتند کتابها را رها کرده و به سلیقهٔ شخصی مانند سابق تدریس می‌کردند.

۵ـ بعضی از دانشگاهیان‌که مامور تصحیح‌و اظهار نظر در کتابهای درسی وزارت آموزش و پرورش بودند دراین کار ورود نداشتند.

۶ـ پدر و مادرها به ریاضیات جدید وارد نبودند و نمی‌توانستند به بچه‌های خود کمك کنند. ولی‌این‌اشکال منحصر به ایران تنها نبود و اشکال اساسی نیست زیرا همیشه نسل جدید دراینگونه مباحث پیش رفته‌تر از نسل قدیم است .

۷ـ اشکال بزرگ دیگر ازاینجا ناشی‌شد که در وسط کار چنانچه عرض شد ریاضیات جدید را از داخل دروس ریاضی کشیده و به‌صورت مادهٔ‌واحده درآوردند. درنتیجه زحمت دانش‌آموزان زیادتر شده است.

تمام مفاهیم ریاضی را دونوع باید یاد بگیرند : تساوی دو نوع، معادله دو نوع، نا معادله دو نوع، تابع دو نوع، و بالاخره جبر دو نوع، هندسه دو نوع. ازاین رهگذر ممکن است علاقهٔ ریاضی آنها افت پیدا کند .

جواب سئوال ۴ به درازا کشید. این‌بود آنچه نگارنده موجبات عدم پیشرفت ریاضیات جدید و حتی ریاضیات سنتی قدیم را در کشورمان تصور کرده‌ام. زیرا که اگر ریاضی جدید آسیب به‌بیند ریاضی سنتی نیز که باآن دائماً در تماس و اصطکاك است مصون نخواهد ماند، امیدواریم مسئولان آموزشی کشور با عنایات حق تعالی و باتوجه به‌پیشرفت جهانی آموزش ریاضیات با کمك استادان و کارشناسان چارهٔ خودکار را تشخیص‌و به‌مرحلهٔ عمل خواهند برد.

سؤال ۵ـ به‌اعتبار امتیازاتی‌که به‌تعلم و تعلیم ریاضیات جدید قائل هستید به‌نظرتان شیوهٔ تدریس آن چگونه باید باشد؟ باتوجه به سابقهٔ ممتدی که جنابعالی در تدریس ریاضیات داشته‌اید، این‌توضیحات برای معلمین ریاضی بالاخص دبیران ریاضی جوانی که از تجربهٔ شغلی کمتری برخور دارند بسی مفید واقع خواهد شد. همچنین برای آموختن و پی‌بردن به نقش و اهمیت ریاضیات جدید چه توصیه‌هائی برای دانش آموزان و دانشجویان ریاضی دارید.

پاسخ ـ البته همه ما به آموزش ریاضیات جدید یعنی ریاضیات اکسیوماتیك اصولی اهمیت قائل هستیم و این دلیل عدم علاقهٔ ما نسبت به ریاضیات شهودی نیست. باید دانست که هرانسان ذاتاً منطقی یا شهودی باشد زیاد هم دست خودش نیست و از سرچشمهٔ فطرت‌و خلقت خود الهام می‌گیرد. دانشمندانی بوده‌اند که‌از راه منطق و استدلال به‌کشف حقایق رسیده‌اند و دانشمندان دیگر بوده و هستند که حقیقت را قبل‌ازاینکه ثابت کنند می‌بینند. از هردو دسته نمونه‌هائی در خود کشور ما نیز وجود داشته است. استادی داشتم که می‌گفت قبل‌از اینکه مطلبی را ثابت کنید به‌آن مطلب عمیقاً فکر کنید زیرا که اکثر حقائق عالم قبل‌از اینکه ثابت بشوند خود را نشان داده‌اند .

در علوم قدیمهٔ ما نیز دو رشتهٔ تحقیق به‌نامهای‌علوم معقول و منقول معروف است. دانشمند معقول اصولی و دانشمند منقول شهودی و یا اخباری می‌باشد. اگر بگوئیم شهودیها برترند یا اصولیها قضاوتی مشکل می‌باشد: لیکن شهودیها ممکن است زودتر به‌نتیجه‌برسند و نیز ممکن است اشتباه بکنند ولی اصولیها چون رفتارشان منطقی است اشتباه نمی‌کنند. یادم می‌آید که دائی داشتم که مجتهد عالیمقام تبریز بود که در گذشته ذکرخیر او را در مجلهٔ یکان آورده بودم. وقتی نوجوان بودم هنوز به درجهٔ شاگردی او نرسیده بودم ولی در اطاق درس او می‌نشستم . روزی در مورد مسئله‌ای با دوستان و شاگردانش بحث می‌کرد که یك دفعه گفت ما اینطور می‌گوئیم. مخاطب پرسید شما کی باشید. آن مرحوم در جواب به‌عربی گفت: نحن ارباب لاصول یعنی ما صاحبان اصول یا به‌عبارت دیگر ما منطقی‌ها. نظیر این سخن را بعدها استاد فرانسویسم غالباً در دانشگاه تهران می‌گفت: nous les geometyes یعنی ما هندسه‌دانها. از اینرو حساب می‌کردم اشخاص اصولی بیشتر به‌فهم و عقل و استدلال خود متکی هستند درهرلباسی که باشند چنین است .

اکنون آن معلم ریاضی که به میل خود تدریس ریاضیات جدید را به‌عهده گرفته و به آن علاقه نشان می‌دهد فطرتاً اصولی است و باید خود را بشناسد که با منطق سرآشتی دارد. در زمره کسانی نیست که بدبختانه همواره با منطق جنگ دارند براو سلام و درود. اگر به‌چنین همکار محترم بخواهم مطلبی عرض کنم ، شاید مناسب باشد که بگویم ریاضیات جدید برروی منطق بنا شده است وقبل‌ازاینکه منطق صورت‌توسط برتراندراسل وضع شود، منطق ارسطوئی در زبانهای مختلف وجود داشته است. پس‌اگر ما بخواهیم ریاضیات جدید ونظریهٔ مجموعه را جذب بکنیم بهتر است منطق را از ریشه یا خاستگاه آن بررسی بکنیم تا معلومات ما در ریاضیات جدید محکم و ریشه‌دار باشد. نگارنده چنین می‌کردم ، وقتی‌که ریاضیات جدید در تهران شروع شده بود و من می‌خواستم آنرا خودم بدون استاد یاد بگیرم، سراغ کتب قدیمه منطق از قبیل منطق کبری و شمسیه و جامع ـ مقدمات و رهبر خود استاد محمود شهابی و نظائر می‌رفتم. خیلی خوشحال بودم که می‌دیدم در منطق‌قدیم ریشهٔ خیلی از مفاهیم نظریهٔ مجموعه‌های جدید وجود دارد، مانند نسب اربعه و کلیات خمس و غیره و ذهن خود را از آنها قوت می‌بخشیدم. مثلا نسبتهای چهارگانه مابین دوکلی که عبارت است از: تساوی، تباین، عموم و خصوص مطلق، عموم و خصوص من وجه است عیناً همان نسبتهای دو مجموعه یا نسبتهای دو،گزاره در جبر مجموعه‌ها یا جبرگزاره‌ها می‌باشد به‌این ترتیب:

در جبر مجموعه‌ها :

$$A = B, \quad A \subset B, \quad A \cap B = C, \quad A \cap B = \varnothing.$$

در جبرگزاره‌ها:

$$p \Longleftrightarrow q, \quad p \Rightarrow q, \quad p \wedge q \Longleftrightarrow R, \quad p \wedge q \Longleftrightarrow p \wedge \bar{p}.$$

پس‌از این مرحله به‌کتابهای فرانسوی و انگلیسی در ریاضیات جدید مراجعه و ملاحظه می‌کردم که قدرت استدلال و استنباط من از خیلی از دوستان که سالها در خارج بوده‌اند و زبان خارجی را بخوبی می‌دانند کمتر نیست و بلکه.... پس خلاصهٔ عرضم این است که اگر بخواهیم در ریاضیات جدید قدرت پیدا کنیم باید منطق را خوب و از ریشه بدانیم .

لیکن برای دانشجویان و دانش‌آموزان عزیز که ریاضی جدید می‌خوانند چه بگویم؟ مخصوصاً در شرایط فعلی که ریاضی قدیم و جدید در کنار هم تدریس می‌شود و تقریباً مخلوط شده‌اند. هر قضیه یا هرمفهوم را که در یك شیوه بررسی کردید ببرید به‌شیوهٔ دیگر. چون ریاضی جدید علم مخصوص نیست بلکه شیوهٔ جدید آموزش ریاضیات است این عزیزان توجه فرمایند که فرمول یا دستور ریاضی شبیه جامه‌ای است که برقامت مفهومی دوخته باشیم. خواه آن جامه‌کهنه باشد خواه‌نو. ملتفت باشید بعضی جامه‌ها گشادند و بعضی دیگر

تنگ. باید قدرت داشته باشید که فرق مابین جامه و صاحب آنرا تمیز بدهید، جمال حقائق را در هرلباس باشند بشناسید و گاه اگر لازم شد لباس آنرا بکنید و هرلباس دیگر از ریاضی جدید و قدیم که بخواهید براو بپوشانید .

مطلب دیگر اینکه به خاصیت اختصار کنندهٔ ریاضیات جدید در مقابل ریاضیات سنتی توجه داشته باشید، چون این توجه کار شما را در یادگیری ریاضیات جدید آسان می‌کند.

برای اینکه مقصودم روشن شود یك مثال بسیارساده ذکر می‌کنم :

همانطوریکه در مقدمات جبر کلاسهای راهنمائی می‌دانید معادله و نامعادله و اتحاد سه مفهوم مجزی هستند که هرکدام جداگانه عنوان می‌شوند. لیکن در ریاضی جدید می‌توانیم هرسه آنها را تحت یك‌عنوان به‌نام رابطه خلاصه کنیم. هر رابطه یك مجموعهٔ تعریف دارد که آنرا R بگوئیم صدق دارد که آنرا D بنامیم پس $D \subseteq R$ خواهد بود. اکنون جوابهای سه رابطه $x^2 - 1 = 0$ و $x^2 + 1 < 0$ و $x + x = 2x$ چنین می‌شود، R را مجموعه اعداد حقیقی می‌گویم: برای اولی $D = \{-1, 1\}$ برای دومی $D = \varnothing$ و برای‌سومی $D = R$ یعنی هرسه آنها از یك موضوع هستند که نامهای مختلف دارند مانند آفتاب، خورشید، مهر.

سؤال ۶ـ اخیراً مشاهده شده است که بعضی از مدرسین ریاضی در مقطع دبیرستان و نیز در مراکزی‌از قبیل کلاسهای کنکور ریاضیات جدید را تحت قواعد خاص‌که‌از مختصات‌ریاضیات‌تکنیکی‌وماشینی‌است درآورده و به‌اصطلاح آنرا فرموله می‌کنند و ناگریز از آموزش مبادی ریاضیات جدید و تعلیم مفاهیم بنیادی آن غفلت می‌شود. اینان معمولا به وضع قواعدی خود ساخته که صرفاً در حل تمرینات (آنهم نادرست) به‌کار آید می‌پردازند. خطر این بدعت ناروا که به برخی از تألیفات ریاضی نیز راه یافته احساس می‌شود لطفاً نظرتان را دراین مورد بیان فرمائید.

پاسخ ـ مثلی است معروف که می‌گویند : لیس اول قارورة‌کسرت‌فی‌الاسلام. اولین‌وآخرین‌دفعه‌نیست‌که‌اشخاص پول‌پرست‌پیدامی‌شوند وبامعنویات‌مردم‌بازی می‌کنند. اگر با ریاضیات جدید بازی می‌کنند و آنرا ضایع می‌گردانند با ریاضیات قدیم نیز چنین می‌کردند. این‌قبیل اشخاص درگذشته هم بودند و الان هستند در آینده هم خواهند بود. یادم هست که‌درگذشته درس هندسهٔ رقومی‌وترسیمی در دورهٔ دبیرستان از اعتبار خاصی برخوردار بود و مرحوم حسین هورفر بااینکه خود دیپلمهٔ دبیرستان نبود لیکن دراین‌درس استاد عالیمقام شناخته می‌شد. پس‌ازآن مرحوم چندسال این نگارنده تدریس‌هندسهٔ ترسیمی را به‌عهده داشتم و سئوالات امتحان نهائی کشور را من طرح می‌کردم. اشخاصی بودند که تعدادی[1] مسئله جمع کرده بودند و در عدهٔ زیادی از مدارس باحالت پول ـ سازی تدریس می‌کردند یعنی تدریس نمی‌کردند فقط مسئله‌ها را حل می‌کردند مسئله‌ها را هم حل نمی‌کردند بلکه دانش‌آموزان را وا می‌داشتند که نفهمیده شکل مسئله‌ها را بکشند. یکی از اینها روزی به‌خود می‌بالید که مسئله آخر سال را اول سال در اولین کلاس درس حل کرده است. وقتی از ضرر آموزش این‌کار با او صحبت می‌کردند در جواب گفت من متد دارم، این بود متد ایشان که عرض شد. بالاخره اکنون هم وزارت آموزش و پرورش باید جلو این قبیل کارها را بگیرد زیرا که غیر ازآن مقام کسی نیست که این موضوع فنی را تحویل بگیرد و درك کند ثانیاً اقدام نماید.

سؤال ۷ـ همانگونه که مستحضرید دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی کتابهای درسی (گروه ریاضی) اخیراً اقدام به تغییرات اساسی در کتابهای درسی ریاضی کرده است. و هم‌اکنون کتابهای ریاضی دورهٔ ابتدائی مجدداً صورت تألیف یافته‌اند و در مدارس کشور تدریس می‌شوند. این‌کار برای کتابهای درسی دورهٔ راهنمائی و نظری نیز در شرف اقدام است. ضمن اظهار عقیده چه توصیه‌هائی برای اعتلاء این کتب و برنامه‌ها دارید؟

پاسخ ـ صمیمانه برای این اقدامی که شده تبریك عرض می‌کنم و از درگاه خداوند متعال برای آن ذوات ارجمند که عهده‌دار تألیف کتابهای جدیده شده و خواهند شد موفقیت آرزو می‌کنم. متأسفانه کتابهای دورهٔ ابتدائی را که تألیف شده هنوز ندیده‌ام. برای تألیف کتابهای دورهٔ راهنمائی و نظری فکر می‌کنم که بعرض برسانم کسانی را که مأمور تألیف کتاب خواهند بود مدت محدودی امکان بدهند که به خارج از کشور سفر کنند و با جهان ریاضیات و معلمین ملتهای دیگر اندك ارتباط حاصل نمایند و کتابها و تدریس آنها را نیز ببینند و برگردند مأموریت خود را شروع کنند، و پس‌از تألیف در تهران و مراکز استانها در مدارس مخصوصی کتابها را تدریس آزمایشی کنند و آزمایش‌کنندگان با مؤلف کتابها در تماس باشند و پس‌از رفع معایب آنها را عمومیت بدهند. این یك واقعیت است که ما می‌توانیم با تماس دائم با شرق و غرب و مبادلات فرهنگی سالم و بی‌ضرر باآنها درعین‌حال نه‌شرقی‌باشیم و نه غربی .

سؤال ۸ـ با روندی که در پیش است وضع آموزش

ریاضی را در ایران چگونه می‌بینید و برای بهبود آنچه پیشنهادی دارید.

پاسخ ــ کسی سیبی در دست داشت و از بزرگی پرسید آیا این سیب قسمت من است یا قسمت من نیست. آن بزرگ فرمود اگر بخوری قسمت تواست و اگر نخوری قسمت تو نیست. من همان جواب را معروض می‌دارم. اگر ما برای بهبود وضع ریاضی تلاش بکنیم یقیناً وضع ریاضی کشور بهتر و افکار جوانان غنی‌تر خواهد شد و در نتیجه تکنیك و صنعت در مملکت پیشرفت کرده و زندگی مردم مرفه‌تر خواهد گردید و مجبور نخواهیم شد که برای هر نیاز کوچکی دست به طرف بیگانه دراز کنیم و اگر برای بهبود وضع ریاضی کشور بی علاقه باشیم نتیجه معکوس خواهد شد.

سؤال ۹ــ جنابعالی از افراد موجه و موفقی بودید که درگذشته اقدام به تالیف و ترجمه و نگارش مقالات در زمینهٔ ریاضی نموده‌اید. و این فعالیتها علی‌رغم بازنشستگی از خدمات دولتی کماکان ادامه دارد. واین خدمات ارزشمند بر کسانی که بنحوی با ریاضیات سرو کار دارند پوشیده نیست. لطفاً به ذکر فهرست آثارتان بپردازید، و بهترین اثری را که پدید آورده‌اید معرفی کنید. ضمناً نظرتان را بـه‌طورکلـی در مـورد تالیف کتابهای ریاضی بیان بفرمائید.

پاسخ ــ در آغاز کلام از اظهار لطف شما تشکر کرده‌ام بار دیگر تشکرات خودرا تکرار می‌کنم. حب نفس معمولا مانع این است که انسان درباره خودش قضاوت صحیح و عادلانه داشته باشد ولی من در این مورد سعی می‌کنم: از وقتی که یادم هست به فکر کـردن عـادت داشته‌ام و دوست داشتم در مسائل ریاضی یا مسائل‌دیگری که در دسترس بود دقیق بشوم و دربارهٔ آنها به تفـکر پردازم بدون اینکه خیلی علاقمند باشم آنها را بنویسم و یا به دیگری اظهار کنم. موقع شروع خواب بدون اینکه تعمدی داشته باشم معمولا چیزی ذهن مرا مشغول می‌کرد که اغلب باعث کم‌خوابی و ناراحتی می‌شد و با وجود این برایم خیلی نامطبوع نبود. به فرزندانم وقتی کـوچـك بودند سپرده بودم بعد از ساعت ۱۰ شب از من چیـزی نپرسند که مرا مشغول کرده و خوابم را خراب کند. اگر به تشبیه اجازه داشته باشم می‌گویم در تاریکی اطـاق خواب بدون مداد و کاغذ مرغ شکاری سفید ذهن من به دنبال زاغ سیاه مجهولی می‌پرید حال به آن بـرسد یـا نرسد و اگر می‌رسید می‌خوابیدم صبح خوشحال بودم و بعضی از مطالب را که مهم بود یادداشت می‌کردم روز دیگر برای موضوع دیگر این حرکت تکرار می‌شد و بعضی وقتها اتفاق افتاده بود که یك‌مسئلهٔ هندسه اصلا درخواب برایم حل شده بود. خصلت دیگر من، شخص کم‌رو و کم تحرك و شاید برای دنبال هدف رفتن و خواستن چیـزی از کسی حتی طلب مشروع خودم کم استعداد بودم و برای این قبیل اشخاص معمولا در محیط ما نصیب و بهره کـم بوده است. شاید اگر این قبیل عیبهـا را نـداشتم در ریاضیات به مقام شاخص و ارجمندی می‌رسیدم. موقـع تدریس ساعات رسمی و موظف خودرا بخوبـی انجـام می‌دادم و محصلین خودرا دوست می‌داشتم. ولی برای‌قبول ساعات حق‌التدریسی آزاد زیاد علاقه نشان نمی‌دادم مگر اینکه دبیرستان یا دانشکده‌ای دعوت کرده دردعوت خود اصرار هم داشته باشد و به قول معروف به رزق مقسوم بسنده می‌کردم و کفش خودرا زیاد پاره نمی‌کردم کـه الرزق زرقان رزق یطلبك و رزق انـت تطلبه. مسائـل زیاد از خود یا از ترجمه می‌نوشتم که در کلاسهای درس یا امتحانات و مسابقه‌ها تقدیم محصلین می‌شد. خیلی از دوستان و همکاران این مسائل را با حسن قبولی تلقـی می‌کردند، اگرچه بعضـی از سودپرستان مـدارس ملـی کارشکنی می‌کردند و در موقع امتحانات اسباب زحمـت فراهم می‌آوردند. یکی از معلمین معروف و بانام و نشان تهران در کلاس گفته بود، مسئله‌ای را که فلانکس یعنی نگارنده طرح کرده باشد پنجاه تومان می‌خرم البته پنجاه تومان آن زمان. یکی از شاگردان فی‌المجلس مسئله‌ای از آن قبیل ارائه کرده بود، دبیرکه پول همراه نداشت خودنویس خودرا به‌آن شاگرد هدیه کرده بود. روزی رفتم به دبیرستان هدف سابق دیدم اطاق کاری برای دانش‌آموزان مرتب شده و روی درب ورودی آن سالن افلاطـون نـام گذاشته‌اند وقتی وارد اطاق شدم دیدم اکثر مسائلی را که حل کرده به دیوارها الصاق کرده‌اند طـرح اینجانـب می‌باشد. از دوستی که آنجا بود البته بر سبیل شوخی و مزاح پرسیدم چرا مسئله‌های مرا به‌دیوار زده واسم اطاق را به افلاطون نسبت داده‌اید می‌نوشتید اطاق عسجدی. آن دوست گفت در آن صورت اطاق ابهت پیدا نمی‌کرد!.

خواهشمندم مرا آنطوری که بعضی دوستان عـزیز موفق شده‌اند مؤلف یا مترجم زبردست در نظر نگیرید. جمعا ۱۵ یا ۱۶ جلد کتاب خودم یا با همکاری دوستـان نوشته‌ایم که اکثر آنها کتابهای درسی است. از آنهـا فهرست حتی یك نمونه هم در دست ندارم. در سازمـان کتابهای درسی سابق باید معلوم باشد. آنچه فعلا درنظرم هست کتاب جبر و آنالیز برای سال چهارم نظری که از آن قبلا اسم برده‌ام، کتاب مبادی منطق و ریاضی جدید در ۴۶۴ صفحه کتاب ریاضی دانشسراهای راهنمائی در ۴۹۲ صفحه که با همکاری دوست عزیز آقای عبدالحسین مصحفی نوشته‌ایم و نیز یك کتاب جبر تحلیلی که توسط انتشارات فاطمی باید این روزها از چاپ خـارج شود.

ضمناً چهار جلد کتاب راجع به نظریهٔ نسبیت به نامهای: کلیات اصول ریاضی نظریهٔ نسبی آلبرت انیشتین نسبیت همزمانی مأخوذ از نظریه نسبی، ناسازگاری یك ناظر نسبت به دودستگاه، ترجمه نسبیت، نظریه خصوصی و عمومی نوشته آلبرت انیشتین و توضیح آن. به کتاب اول را با سرمایهٔ محقر خودم تألیف کرده‌ام ولی چهارمی وسیلهٔ انتشارات امیرکبیر انتشار یافته و سال گذشته تجدید چاپ شده است. با وجود اینکه این کتاب اخیر نسبت به ترجمه‌هائی که از اصل کتاب توسط دیگران‌شده است شاید بهتر باشد لیکن نگارنده کتاب اول را که در تاریخ ۱۳۳۳/۴/۲۹ در این موضوع خودم نوشته بودم بیشتر دوست دارم زیرا که آنرا با مقدورات کم وکوشش خود تألیف کرده بودم.

علاقهٔ نگارنده به نظریهٔ نسبیت انیشتین بیشتر از اینجا پیدا شده بود که ملاحظه می‌کردم بعضیها از نویسندگان و گویندگان داخلی و حتی خارجی حرفهائی می‌زنند و آنرا اشتباهاً به نظریه نسبیت مربوط می‌کنند. به این جهت می‌خواستم آن اندازه که مقدورم بود عمق این نظریه را بدانم. یادم می‌آید در مجلس یادبود وتجلیل نابغهٔ فقید آلبرت انیشتین که از طرف دانشگاه تهران منعقد شده بود و در آن مجلس دانشمندان و دانشگاهیان و فرهنگیان و عده‌ای از معاریف دعوت شده بودند و نگارنده نیز در آن جلسه حضور داشتم دو اتفاق پیش‌آمد که یکی از آنهابرای من خوشحال کننده ودیگری‌ناراحت کننده بود.

اول اینکه مرحوم دکتر رضازاده شفق استاد فلسفهٔ دانشگاه تهران در آن جلسه از نگارنده و کتابی که دربارهٔ نظریهٔ‌نسبی نوشته بودم اسم برد و مرا مورد مهر و محبت قرار داد، دیگر اینکه یکی دیگر ازاساتید معروف و ممتاز ومشار بالبنان دانشگاه تهران که دربارهٔ نظریهٔ نسبی سخنرانی می‌کرد اشتباه عمده‌ای دراین خصوص مرتکب شد که نگارنده متوجه و ناراحت شدم نه از جهت خودم بلکه از نظر فرهنگ کشورمان. چندی بعد همراه یك دوست پیش آن استاد رفتیم و چون به ایشان احترام زیاد قائل بودم با خجالت تمام اشتباهش را گوشزد کردم و ایشان نیز گرچه قدری متغیر شد ولی تقریباً قبول کرد و دیگر موضوع مسکوت ماند. تا اینکه چند سال پیش از انقلاب در مسئله‌ای مجبور شدم آن اشتباه و چند اشتباه دیگر که بعضی کتابهای خارجی و داخلی مرتکب شده بودند در جزوه یا کتاب کوچکی جمع کرده و به چاپ برسانم. این کتاب همان کتاب موسوم به نسبیت همزمانی مأخوذ از نظریهٔ نسبی است که ذکر شد.

سؤال ۱۰ـ ضمن تشکر از اینکه در این مصاحبه شرکت کردید اگرپیامی برای‌خوانندگان مجله دارید بیان فرمائید.

پاسخ ـ اگر خوانندگان مجله از اشخاص غیر معلم ریاضی باشند پس از سلام و درود تقاضای من از آنها اینست که در پیشرفت دروس ریاضی فرزندان خود هر اندازه که می‌توانند با معلمین آنها همکاری فرمایند. این اقدام آنها در عین حال که موجب پیشرفت فرزندان می‌شود، در نظر معلمین هم به عنوان محك اطمینان و رضایت اولیاء از تلاش ثمربخش آنها محسوب می‌شود. و اگر خوانندگان خود از معلمان ریاضی باشند عرض دیگری دارم وان اینکه ما معلمان (اگر نگارنده را نیز شایستهٔ همکاری خویش بدانند) مانند سربازانی هستیم که در جبههٔ جنگ علم علیه جهل مبارزه می‌کنیم و اگر از یك تعبیر لغوی مجاز باشم دو کلمهٔ کفر و جهل مترادف و یا بسیار به هم نزدیك هستند. کفر یعنی سیاهی و پوشاندن و کافر کسی است حق را می‌پوشاند یعنی در مقابل آن ایستادگی و با آن مخاصمه می‌کند. کافر هم یاکافر حربی است یاکافر ذمی. سرباز می‌خواهد در میدان جنگ کافر حربی را از پای درآورد. درصورتی که ما معلمان می‌خواهیم شاگردان خودرا که جاهل ذمی هستند و تعلیم و تربیت آنها بر ذمهٔ ما است به نور علم زنده کنیم. اینکه مداد علماء بر دماء شهدا رجحان دارد، شاید از این نظر باشد. اگر دراین معنی مورد قبول قرار بگیرد پس باید در گفتار و رفتار و نوشته‌های خود بسیار دقت کنیم. تا می‌توانیم حرف غلط نزنیم و کار غلط نکنیم و چیز غلط ننویسیم اگر یك ایدئولوژی یا تز فلسفی که در دست بودن صددرصد آن برایمان محقق نیست در اختیار شاگردان خود قرار بدهیم و آنها روی احترام و علاقه به ما آنرا بپذیرند و بعد پشیمان یا بیچاره شوند در پیشگاه خداوند ما مسئول خواهیم بود. خداوندی که سریع‌الحساب است. به همین ترتیب اگر طبیبی یقین نداشته باشد که فلان دوا برای فلان بیمار حتماً صحیح است و دوا را بدهد و بیمار بمیرد آن مریض را کشته است. طبیب و معلم هردو امین هستند و امین هم ضامن است. مطلب آخر اینکه هرکس در هر سن بخصوص در سن این نگارنده مسافر محسوب می‌شود و بهترین زاد و توشه که دوستان برای‌مسافرهمراه می‌کنند دعای خیر است. از دوستان خود که در سر کلاس درس یا خارج از کلاس به هم رسیده‌ایم و حق دوستی به گردن همدیگر داریم تقاضا دارم در هر فرصتی مرا از دعای خیر بهره‌مند فرمایند.

فسبح بحمد ربك واستغفره انه کان تواباً

ریاضیات یونانی (۲)

دکتر محمد قاسم وحیدی

در نبرد خرونه[1]، به سال ۳۳۸ ق. م.، فیلیپ مقدونی شکست سختی بر آتن وارد کرد، که این شهر دیگر از آن سر راست نکرد. فیلیپ در سال بعد درگذشت، و سلطنت به پسرش اسکندر کبیر رسید. اسکندر بلافاصله عازم جهانگشایی شد و در سال ۳۲۲ ق. م. مصر را اشغال و شهر اسکندریه را برساحل رود نیل بنا کرد. نه سال بعد، مرگ او منجر به کشمکشهای درونی در امپراطوری وسیع او شد. سرانجام این امپراطوری بین سرداران نظامی‌اش منقسم گردید و درتقسیم این غنایم، مصر نصیب بطلیموس[2]، ملقب به سوتر[3]، شد. بطلیموس، چون اسکندر، پیش ارسطو درس خوانده بود و مانند اسکندر از عشق و علاقهٔ آموزگارش به علم بهره‌ای یافته بود. بطلیموس اسکندریه را پایتخت خود قرار داد، و نفوذ وی شهر را به سرعت به مرکز فرهنگی دنیای باستان تبدیل کرد. موزهٔ مشهور، که پیشاهنگ دانشگاههای امروزی بود، تأسیس شد و در کنار آن کتابخانهٔ باشکوهی دایر گردید. هنر و علم در آنجا بارور شدند و این شهر تا زمان سقوط آن به دست اعراب مسلمان، به عنوان مرکز بلامعارض علوم یونانی باقی ماند.

عده زیادی از فضلای صاحب نام عصر به این شهر جلب شدند. در زمرهٔ آنها سه تن بودند که مسیر ریاضیات تا چند قرن بعد به دست آنان معین شد. اقلیدس اولین آنهاست. تبدیل هندسه، از مجموعه‌ای از قضایای بی‌ارتباط و با براهین نادقیق به بنایی عظیم باشالوده‌ای محکم، مرهون کوششهای اوست. در مدتی کمتر از یک صد سال، ارشمیدس و آپولونیوس[4]، این موضوع را به سطحی رساندند که تا قرن هفدهم تفوقی بر آن حاصل نشد.

از زندگی این سه دانشمند، کمتر چیزی را با قطعیت می‌دانیم. از خلاصهٔ اودموسی چنین برمی‌آید که اقلیدس حدود سال ۳۰۰ ق. م. رونق یافته و اصول را، که آوازهٔ اقلیدس از آن است، در حدود ۳۲۰ ق. م. تدوین کرده است. این اثر بقدری مشهور است که کمتر نیاز به توصیف دارد و از زمان تدوین آن تا همین اواخر به عنوان مقدمه‌ای ضروری در مطالعهٔ هندسه تلقی می‌شد.

هیچ نسخه‌ای به‌خط خود اقلیدس از اصول باقی نمانده است. بنا بر این نوشته‌های او از طریق تحریرها، شروح، و تذکرات نویسندگان بعدی بازسازی شده است. کلیه چاپهای انگلیسی و لاتین اصول منبعث از دستنوشته‌های یونانی‌اند. از جملهٔ آنها می‌توان از تحریر تئون اسکندرانی[5] (اواخر قرن چهارم بعد از میلاد) نام برد. نسخی از تحریر تئون، دروسی که توسط تئون برمبنای اصول نوشته شده، و یک دستنوشتهٔ یونانی اصول در کتابخانه واتیکان به دست آمده است. دستنوشتهٔ اخیر قدیمی‌تر ازکارتئون است. لذا مورخینی چون هایبرگ[6] و هیث[7] عمدتاً این نسخه را مبنای تحقیق دربارهٔ اقلیدس قرار داده‌اند. هیث ویرایشی از اصول را مطابق همین متن منتشر کرده است. در زیر هرجا که سخن از اصول می‌رود، اشاره به نسخهٔ هیث دارد. ذکر ترجمه‌های عربی اصول وکار دانشمندان دورهٔ اسلامی در این زمینه، در جای خود خواهد آمد.

اصول در سیزده مقاله است. در ابتدای آن مجموعه‌ای از تعاریف، اصول موضوعه، و «مفاهیم عام» دیده می‌شود. این «مفاهیم عام» به مرور زمان، اصول متعارفی یا بدیهیات اولیه نامیده شدند. تعداد اصول موضوعه اصلاً پنج بود و سه‌تای اول اصول ترسیم یاساختمان بودند:

۱) [امکان] رسم خطی که دو نقطه را به‌هم وصل کند؛

۲) [امکان] ادامه دادن لاینقطع خطی مستقیم در هردو جهت؛

۳) [امکان] رسم دایره‌ای با هر مرکز مفروض؛

اصل موضوع چهارم تساوی زوایای قائمه‌را بیان می‌دارد؛ و پنجمی، که اقلیدس کل نظریهٔ توازیها را برآن بنا می‌کند، به این مضمون است:

«اگر خط مستقیمی برروی دو خط مستقیم دیگر قرار گیرد به قسمی که دوزاویهٔ داخلی ایجاد شده در یک طرف خط قاطع [= متقابل داخلی] کمتر از دوقائمه شود، آنگاه این دوخط مستقیم، در صورتی‌که امتداد داده شوند، یکدیگر را درآن طرف خط قاطع که دو زاویه کمتر از دوقائمه‌اند، تلاقی می‌کنند.»

اقلیدس این تعاریف، اصول متعارفی، و اصول موضوعه را پایهٔ ساختمان دانش هندسی زمان، برسیاقی‌کاملاً دقیق، قرار داد. قبل ازاو دیگران طرحهای مشابهی در سر پرورده بودند، ولی اقلیدس بود که به گفتهٔ خلاصهٔ اودموسی«اجزاء اصول را به‌هم پیوست، بسیاری از قضایای ائودوکسوس را به‌طور مرتب نظم داد، بسیاری از قضایای منتسب به تئایتتوس را کامل کرد، و نیز براهین محکمی برای چیزهایی که توسط پیشینیان به‌طور نادقیق ثابت شده بودند، ارائه داد.»

مقالهٔ‌اول دربارهٔ هندسهٔ خطوط مستقیم‌الخط است. درمقالهٔ دوم برخی از اتحادهای آشنای جبری به اثبات رسیده‌اند. در غیاب نمادهای جبری، یونانیان برای اثبات این اتحادها، اجباراً به هندسه متوسل می‌شدند. فیثاغورسیان محتویات این دو مقاله را می‌دانسته‌اند.

مقالهٔ سوم بـه خواص دوایر، کـه اغلب آنهـا توسط سوفسطائیان در جریـان تلاشهای آنها بـرای ترسیم دایره کشف شده بود، می‌پردازد. مقالـهٔ چهارم دنبالهٔ هندسه دوایـر، باتأکید خاص برمسائل محیط کردن و محاط کـردن اشکال مستقیم‌الخط خاصی در دایره است، قضیهٔ ۱۰، که طرز ساختن مثلث متساوی الساقینی را نشان می‌دهد که زاویه مجاور به قاعدهٔ آن دو برابر زاویهٔ رأس باشد، بـر فیثاغورسیان معلوم بوده است و اینان از آن برای ساختن پنج ضلعی منتظم استفاده می‌کرده‌اند. این روش به تقسیم یک خط مستقیم بـه نسبت ذات وسط و طرفین (نسبت طلایی) مبتنی است که فیثاغورسیان از آن مطلع بوده‌اند.

مقالـهٔ پنجم نظریـهٔ تناسب را بتفصیل شرح داده آن بـه کمیتهای از هر نـوع گسترش می‌دهد، و چگونگی به کار بردن آن را در مورد کمیتهای نـا متوافق و متوافـق نشان می‌دهد. به اعتقاد هیث چیزی از ایـن بهتر نمی‌تواند مایهٔ مباهات یونانیان باشد. به‌زعم غالب مورخین ریاضی، قسمت اعظم این مقاله کار ائودوکسوس و تئایتتوس است ولـی اعتبار منظم کردن منطقی‌آن، بایـد بـه اقلیدس داده شود. مفاهیم اساسی نسبت و تناسب چنین تعریف می‌شوند:

گویند کمیتهایی به یکدیگـر دارای نسبت‌اند، هرگاه در موقع ضرب مستعد افزونی بردیگری باشند. (تعریف ۴).

معنی این تعریف‌آن است که کمیتهای b, a دارای نسبت‌اند هرگـاه مضرب صحیحی از a (از جمله خود a) از b بیشتر شود و همینطور مضرب صحیحی از b (از جمله خـود b) از a بیشتر شود.

گویند کمیتهایی به یک نسبت‌اند، اولی به دومی وسومی به چهارمی، در صورتی که اگرمضارب یکسانی از اولی وسومی، و مضارب یکسانـی از دومـی و چهارمی اختیار شوند، مضارب اول، بترتیب، متناظراً بیش از، متناظراً برابر با، متناظراً کمتراز مضارب دوم باشند. (تعریف ۵)

بنا بر این تعریف

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

در صورتی کـه اگر c, a را در هـر عدد صحیحی مـانند m، d, b، را در هر عـدد صحیحی یانند n ضرب کنیم، آنگاه برای هر انتخابی از اعداد n, m

$ma < nb$ ایجاب می‌کند که $mc < nd$

$ma = nb$ ایجاب می‌کند که $mc = nd$

$mc > nd$ ایجاب می‌کند که $ma > nb$.

کمیتهایی را که به یک نسبت‌اند، متناسب بنامید. (تعریف ۶)

درمقالهٔ ششم، نظریه عمومی تناسب،که قبلاً درمقالهٔ پنجم تأسیس شده، در مورد اشکالی مستوی به کار گرفته می‌شود.

مقاله‌های هفتم، هشتم، و نهم بـه نظریهٔ اعداد می‌پردازد. اعداد فرد و زوج، اول و مرکب، مربعی و مکعبی، همه در اینجا تعریف شده‌اند. در مقالهٔ هفتم اولین قضیه بیان می‌دارد کـه «اگر از دو عدد نابرابر، عدد کوچکتر را از عدد بزرگتر، تا آنجا که ممکن باشد، کم‌کنیم، وباقیمانده را ازعدد کوچکتر، و باقیماندهٔ بعدی‌را از قبلی‌کم کنیم، و همینطور الی‌آخر، وهیچ باقیمانده‌ای در دیگری نگنجد تا آنکه واحـد حاصل شود، دو عدد مفروض را نسبت به هم اول گویند.» ایـن قضیه که با استفاده از برهان خلف ثابت‌می‌شود، بـه‌روش یافتن بزرگتریـن مضرب مشترک دو، یـا سه عـدد کـه نسبت به هـم اول نباشند، منجر می‌شود. باقیماندهٔ مقالـهٔ هفتم در بارهٔ خـواص اعداد اول است و شامل قضایای زیر می‌باشد:

۱) اگر دو عدد نسبت به‌هم اول باشند، حاصلضرب آنها نسبت به‌هم اول است. (مقالهٔ هفتم، قضیهٔ ۲۴)

۲) اگر دوعدد نسبت بـه هـم اول باشند، مجموع آنها نسبت به هریک ازآنها اول است، و اگر مجموع دوعدد نسبت به هـر یک از آنها اول باشد، اعداد اصلی نسبت بـه‌هم اول خواهند بود. (مقالهٔ هفتم، قضیه ۲۸)

۳) هر عدد مرکب توسط عدد اولی عاد می‌شود.

۴) هر عدد یا اول است یـا توسط عدد اولی عاد شود. (مقالهٔ هفتم، قضیهٔ ۳۲)

مقالهٔ هشتم عمدتاً به قضایایی در بـارهٔ اعدادی که تناسب مسلسل تشکیـل مـی‌دهند، اختصاص دارد. در اینجا یافتن هـر تعدادی واسطهٔ هندسی بین دوعـدد (یعنی یافتن جمـلات یک تصاعد هندسی که دوعـدد مفروض جمله‌هـای اول و آخـر آن باشند) نشان داده شده ثابت می‌شود کـه که اگر نسبت دو عدد، مانند a و b، برابر بـا نسبت دوعـدد دیگر مـانند c و d باشد، و اگر n واسطهٔ هندسی بین b, a موجود باشد، آنگاه n واسطهٔ هنـدسی نیـزبین c و d وجـود خواهد داشت. اقلیدس همچنین ثابت می‌کند که: (۱) اگـر مجموعه‌ای از اعداد تناسب مسلسل تشکیل دهند، مربعات، مکعبات، ...، آنهاهـم چنین‌اند. (مقالهٔ هشتم، قضیهٔ ۱۳)؛ (۲) بین دوعـدد مستوی (یعنی مربعی)، تنها یک واسطـهٔ هندسی و بین دو عدد صلب (یعنی مکعبی) تنها دو واسطهٔ هندسی موجود است؛ (۳) اگر سه عدد در تناسب مسلسل باشند و اولی مربعی باشد، سومی نیز چنین است. (مقالهٔ هشتم،

قضیهٔ ۲۲)؛ (۴) اگر چهار عدد در تناسب مسلسل[1] باشند، و اولی مکعبی باشد، چهارمی نیز مکعبی است. (مقالهٔ هشتم، قضیهٔ ۲۳)

مقالهٔ نهم سطور مقالهٔ هشتم را تعقیب می‌کند. نظریهٔ اعداد اول در اینجا بسط داده شده و نشان داده شده است که تعداد اعداد اول نا متناهی است. اعداد اول [از حیث تعداد] از هر عدد معینی بیشترند.» (مقالهٔ نهم، قضیهٔ ۲۰) قضیهٔ ۸ جالب توجه است. اگر اعدادی به هر تعداد، باشروع از یک، تناسب مسلسل تشکیل دهند، سومی، پنجمی، هفتمی، . . . ، مربعی‌اند؛ چهارمی، هفتمی، دهمی، . . . مکعبی‌اند. اگر اعدادی به هر تعداد، باشروع از یک، تناسب مسلسل تشکیل دهند، و عدد بعد از واحد مربعی (یا مکعبی) باشد، سایرین‌هم مربعی (یا مکعبی) خواهند بود، و اگر در همین سری، عدد بعد از واحد، مربعی نباشد، در این صورت تنها اعداد سوم یا پنجم، هفتم، . . .، مربعی خواهند بود. اگر عدد بعد از اولین عدد مکعبی نباشد، تنها جملاتی در سری که مکعبی‌اند، عبارت‌اند از جملات چهارم، هفتم، دهم، و غیره (مقاله نهم، قضیه ۱۰). بعد از اینها قضیه‌ای می‌آید که بعدها قضیهٔ اساسی حساب نامیده شد؛ مبنی براینکه هرعدد را می‌توان تنها به یک صورت به عوامل اول تجزیهٔ کرد. قضیهٔ ۳۵ روش زیبایی برای یافتن مجموع یک تصاعد هندسی به‌دست می‌دهد: اگر اعدادی به هر تعداد تناسب مسلسل تشکیل دهند، واز دومی و وآخری عددی برابر با اولی کم شود، آنگاه نسبت زیادتی دومی به‌اولی هرچه باشد، زیادتی جملهٔ آخر به[مجموع] جمله‌های پیش از آن هم همین نسبت خواهد بود. یعنی اگر a_1، a_2، . . .، a_n جملات یک تصاعد هندسی باشند به‌عبارت دیگر هرگاه

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\dots=\frac{a_2}{a_1}$$

آنگاه طبق این قضیه

$$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_n+a_{n-1}+\dots+a_1}=\dots=\frac{a_2-a_1}{a_1}$$

وبدین ترتیب s_n، یا $a_1+a_2+\dots+a_n$ معین می‌شود. معهذا اقلیدس عملاً از این رابطه برای پیدا کردن مجموع تصاعد هندسی استفاده نمی‌کند؛ وی آن را برای یافتن قاعده‌ای به منظور تعیین اعداد تام به کار می‌برد؛ قاعده‌ای که در قضیهٔ ۳۶ بیان می‌شود: اگر اعدادی به هر تعداد، باشروع از یک، تناسب مسلسلی به نسبت دو تشکیل دهند، به طوری که مجموع همهٔ آنها عدد اولی شود، و اگر باضرب مجموع در آخرین عدد، عددی به دست آید، حاصلضرب عدد تامی خواهد بود. به‌عبارت دیگر اگر مجموع

$$1+2+2^2+\dots+2^n$$

اول باشد آنگاه

$$(1+2+2^2\dots+2^n)\,2^n$$

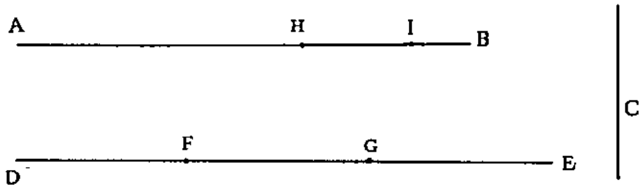
عددی است تام. مثلاً[2]، $31=16+8+4+2+1$، که اول است. در این صورت 16×31 یا ۴۹۶ عددی تام است چون مقسوم علیه‌های ۴۹۶ اعداد ۱، ۲، ۴، ۷، ۱۶، ۶۲، ۱۲۴، ۲۴۸ هستند ومجموع ۴۹۶ است، که صحت قاعده را به ثبوت می‌رساند.

مقالهٔ دهم به کمیتهای ناگویا اختصاص دارد و عموماً آن را شاهکار اقلیدس می‌دانند. دمورگن معتقد است که هیچ مقالهٔ دیگری حتی مقالهٔ پنجم، کمال این مقاله را ندارد. قسمت اعظم محتویات این مقاله منسوب به تئایتتوس است، ولی در اینجا هم باید اعتبار منظم کردن منطقی را به اقلیدس داد. این مقاله با تعریف کمیتهای متوافق ونامتوافق خطوط مستقیم گویا و ناگویا شروع می‌شود. کمیتهایی را متوافق، می‌نمایم که بتوان آنها را با مقیاس واحدی سنجید، وآنها که مقیاس مشترکی ندارند، نامتوافق‌اند (تعریف ۱). خطوط مستقیم به‌طورمربعی متوافق‌اند هرگاه مربعهای روی آنها را بتوان با سطح واحدی سنجید، و به طور مربعی نامتوافق‌اند هرگاه مربعهای روی آنها سطح واحدی را به‌عنوان مقیاس مشترک نداشته باشند (تعریف۲). با فرض اینها، ثابت می‌شود که عدهٔ بی‌نهایتی خط مستقیم وجود دارند که بترتیب نسبت به خط مستقیم مفروض، برخی تنها در طول، و برخی به طور مربعی ودر طول، متوافق یا نامتوافق‌اند.

اولین قضیه، پایهٔ روش افناء را که قبلا توسط ائودوکسوس به کار گرفته شده بود، و خود اقلیدس آزادانه از آن در همه‌جا استفاده می‌کند، تشکیل می‌دهد. قضیهٔ چنین بیان شده است. از دوکمیت نابرابر مفروض، اگر ازآنکه بزرگتر است کمیتی بزرگتر از نصف آن، یا صرفاً نصف آنکم شود، و از آنچه باقی مانده است، کمیتی بزرگتر از نصف آن، یاصرفاً نصف آن کم شود، و اگر این جریان مداوماً تکرار شود، کمیتی باقی خواهد ماند که کمتر از کوچکترین کمیت ین دوکمیت مفروض خواهد بود. برهان اقلیدس چنین است:

فرض کنید AB و C (شکل ۱) دوکمیت نابرابر مفروض باشند و AB بزرگتر از C باشد. در این صورت مضربی از C وجود خواهد داشت‌که از AB بزرگتر خواهد بود (تعریف۴) فرض کنید DE مضربی از C باشد که از AB بزرگتر است و فرض کنید که DE به قسمتهای برابری مانند DF، FG، GE تقسیم شود که هریک برابر با C باشند. از AB قطعه‌ای مانند AH که بزرگتر از نصف آن است، جدا کنید، و از باقیمانده، یعنی HB، قطعه‌ای جدا کنید که بزرگتر از نصف آن باشد، این کار را ادامه دهید تا اینکه تعداد تقسیمات AB برابر با تعداد تقسیمات DE شود.

فرض کنید AH، HI، IB، تقسیماتی باشند کـه از نظر تعداد با DF، FG، GE برابر باشند. حـال چون DE بزرگتر از AB است، و از DE قطعهٔ EG جـدا شده که کمتر از نصف آن است، و از AB قطعهٔ AH جـدا شده کـه بزرگتر از نصف آن است، نتیجه می‌شود کـه باقیمـانده، یعنی GD بـزرگتر از باقیماندهٔ HB است.



ش ۱

حال به دلیل اینکه GD بزرگتر از HB است، و از GD نصف آن، یعنی FG، جدا شده، و از HB قطعهٔ HI جدا شده که بزرگتر از نصف آن است، نتیجه می‌شود که باقیمانده، یعنی DF، بزرگتر از باقیمانده IB است. اما DF برابر با C است، بنابراین C بزرگتر از IB، یا IB کـوچکتر از C است، یعنی کمیتی باقی مانده است، کـه کمتر از کوچکترین بین دو کمیت مفروض است، و این چیزی است که باید ثابت می‌شد.

اقلیدس از قضیهٔ فـوق برای اثبات این قضیه کـه نسبت مساحات دو دایره همان نسبت مربعات اقطار آنهاست (قضیهٔ ۲، مقالهٔ دوازدهـم)، استفاده می‌کند. ولـی استفادهٔ عمدهٔ او بـرای اثبات قضیه‌ای است کـه به عنوان مبنایی بـرای روش آزمودن متوافق بودن یـا نامتوافق بودن دوکمیت بـه کار می‌بـرد: اگر موقعی که از دوکمیت نـابرابر، آنکه کوچکتر است، از بزرگتر کاسته شود، و بین بـاقیمانده و کمیت دیگر بـه همین نحو عمل شود، و این کار مداوماً تکرار شود، و آنچه باقی می‌ماند هرگز مقیاسی از دیگری نباشد، این دو کمیت نـامتوافق خواهند بـود. دو قضیهٔ بعد نشان می‌دهند که بزرگترین مقیاس مشترک دو یا سه کمیت را چگونه می‌توان تعیین کرد. این روش، روشی را که در مقالهٔ هفتم بـرای تعیین مقیـاس مشترک دو یـا سه عـدد به کار می‌رود، تداعی می‌کند.

مقاله‌های یازدهم تـا سیزدهم به هندسهٔ فضایی اختصاص دارند. درمقاله یازدهم، هندسهٔ خطوط مستقیم و زوایا به زوایای بین دو صفحه تعمیم داده می‌شود. یک زاویـهٔ صلب (فـرجه) به عنوان زاویـه‌ای تعریف می‌شود که تـوسط بیش از دو زاویـهٔ مستوی که بر صفحهٔ واحـدی قـرار ندارند و از یک نقطه می‌گذرند، احاطه شده است. همچنین در اینجا ثـابت می‌شود که: (۱) اگر کنجی توسط سه زاویهٔ مستوی احاطه شده باشد، هردو تا از آنها مجموعاً از سومی بـزرگترند، (۲) هر کنجی توسط زوایای مستویی احـاطه شده است کـه مجموعاً کمتر از چهار قائمه‌انـد. بقیهٔ این مقاله بـه خـواص اجسام صلب، متوازی‌السطوحها و مخروطیها و کرات، مـی‌پردازد. دو شکل اخیر بـه عنوان اجسام دوار تعریف می‌شوند؛ مثلاً کره بـه عنوان مکان هندسی نقاط همفاصله از یک نقطه درفضا تعریف نمی‌شود بلکه تعریف آن توسط اقلیدس با عبارات زیر انجام می‌شود: وقتی که قطر یک نیمدایره ثابت بماند، و نیمدایره چرخـانده شده و به همان وضعی برگردد کـه از آن شروع بـه حرکت کرده است، شکلی که به این ترتیب حـاصل می‌شود، یـک کره است. نظیر اغلب پیشینیانش، اقلیدس تنها با مخروط قائم دوار آشنائی داشته است.

در مقالهٔ دوازدهم روش افناء به‌کار گرفته می‌شود. از این روش برای اثبات قضایای زیر استفاده شده است:

۱) نسبت چند ضلعیهای متشابـه محاط در دو دایره همان نسبت مربعات اقطار دایره‌هاست (قضیهٔ ۱)

۲) نسبت مساحات دو دایره به هم، همان نسبت مربعات روی اقطار آنهاست (قضیه ۲)

۳) نسبت هرمهای مثلث القاعدهٔ هم ارتفاع، همان نسبت قاعده‌های آنهاست (قضیهٔ ۵)

۴) نسبت مخروطها و استوانه‌های هم ارتفاع همان نسبت قاعده‌های آنهاست (قضیهٔ ۱۱)

۵) حجم مخروط، یک سوم حجم استوانهٔ محـاط کنندهٔ آن است.

۶) نسبت مخروطها (و استوانه‌های) متشابه به هم، همان نسبت مکعب اقطار قاعده‌های آنهاست (قضیهٔ ۱۲)

۷) نسبت کـره‌هـا به هـم، همان نسبت مکعبـات اقطار آنهاست.

مقـالهٔ سیزدهم طـرز سـاختن پنج چند‌وجـهی منتظم و «گنجاندن» آنها در داخـل یک کره را نشان می‌دهد. منظور از «گنجاندن» هر یک از آنها در یک کره، یـافتن کره‌هایی است که بر آنها محیط بـاشند و این کار مستلزم ایجاد رابطـه‌ای بین ضلع (یـال) جسم و شعـاع کـره است. اقلیـدس بـا استدلال ماهرانه‌ای نتایج زیر را ثابت می‌کند:

ضلع چهار وجهی $= (2r\sqrt{6})/3$

ضلع هشت وجهی $= r\sqrt{2}$

ضلع مکعب $= (2r\sqrt{3})/3$

ضلع دوازده وجهی $= r(\sqrt{15} - \sqrt{13})/\sqrt{3}$

ضلع بیست وجهی $= 2\sqrt{10(5-\sqrt{5})}/5$

آثار دیگری هم به اقلیدس منسوب است. از جملهٔ اینها یکی معطیات[۹] (داده‌ها) است، که مجموعه‌ای است از نود و چهار تمرین که به منظور ایجاد مهارت در خواننده برای حل مسائل، نوشته شده است. کار دیگر او به نام تقسیم اشکال[۱۰] است که نسخهٔ عربی آن به نسل حاضر رسیده است. این اثر به مسئلهٔ تقسیم شکل مسطحهٔ مفروضی توسط خط مستقیمی، به‌قطعاتی که نسبت معینی دارند، می‌پردازد. ارشمیدس کتابی در مقاطع مخروطی را به اقلیدس نسبت داده است. از کتب دیگر اقلیدس می‌توان ظاهرات[۱۱] و رسالهٔ نور[۱۲] را برشمرد.

از ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ ق.م.) به عنوان بزرگترین ریاضیدان عهد باستان یاد شده است. او در سیراکیوز[۱۳] به دنیا آمد و گمان می‌رود که در اسکندریه درس خوانده باشد. وی در سالهای بعد به موطن خود مراجعت کرده و دستگاههایی برای ایذای رومیان وحمله به‌آنها، که شهر را درمحاصره داشتند، تعبیه کرده و این کار شهرت فوق‌العاده‌ای عاید او کرده است. معهذا ابداع در ریاضیات محض بیشتر مورد علاقهٔ او بوده است تا اکتشافات عملی.

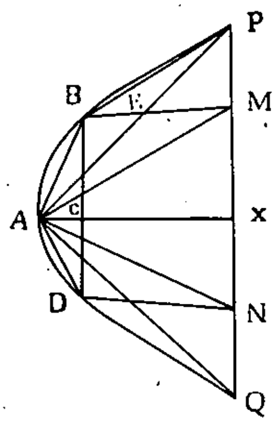
ابداعات او در زمینهٔ ریاضیات محض بسیار وسیع است و اطلاعات عمیق او را از کلیهٔ اکتشافات ریاضی انجام شده تا عصر وی، نشان می‌دهد، در هندسه وی تحقیقات دست اولی دربارهٔ تربیع اشکال مسطحهٔ منحنی‌الخط و تعیین‌حجم محصور بین سطوح خمیده به‌عمل می‌آورد. پیش‌درآمد مفهوم تقسیم ناپذیرها، که نقش بسیار برجسته‌ای در ریاضیات قرن هفدهم ایفا کرد، در این پژوهشها مطرح می‌شود. گرچه ارشمیدس مفهوم حد را نمی‌دانسته است، ولی نتایج مهمی را دربارهٔ مسائلی که امروزه به کمک حسابان حل می‌شوند، به دست آورده است. وی اصول بنیادی مکانیک را تدوین کرده و مقدمات علم ئیدروستاتیک را پایه‌ریزی کرده است.

کارهای معلوم ارشمیدش به قرارزیرند.

۱- تعادل مسطح[۱۴]. این اثر که مشتمل بر پانزده قضیه است، احتمالاً قدیمی‌ترین رساله در باب مکانیک است. می‌توان گفت که دانش مکانیک با این رساله شروع شده است. آرخوتاس و دیگران به مطالعه دربارهٔ اهرم و گاوه و احتمالاً قرقره‌ها پرداخته‌اند، ولی سخن از وجود هرگونه برهان جدی دربارهٔ اصول حاکم در این زمینه‌ها، قبل از ظهور این رسالهٔ ارشمیدس، گزافه خواهد بود. معهذا ارشمیدس تنها به استاتیک پرداخت و خود را محدود به مسائلی نمود که قابل تحویل به اصل هرم بودند (نظیر مسئلهٔ تعیین مرکز ثقل اشکال مستوی و صلب)

۲- تربیع سهمی[۱۵]. اثری است مشتمل بر ۲۴ قضیه و در آن ارشمیدس به مسئلهٔ تربیع اشکال منحنی‌الخط می‌پردازد و با به کاربردن روش افناء، وی این نتیجه را ثابت می‌کند که «هر قطعه‌ای که بین یک خط مستقیم و مقطعی از یک مخروط قائم‌الزاویه (یعنی سهمی) قرار گرفته باشد، چهار سوم مثلثی است که همان قاعده و همان ارتفاع قطعه را داشته باشد.»

برهان ساده شدهٔ زیر روش ارشمیدس را در برخورد به این مسئله روشن می‌کند. فرض کنید APQ قطعه‌ای از یک سهمی به رأس A باشد (شکل ۲). PQ محور سهمی را در X قطع می‌کند. M و N بترتیب اوساط PX و QX است. شکل با رسم خطوط به طریق نشان داده شده، کامل می‌شود. حال



ش ۲

$$PX^2 = 4\,MX^2 = 4\,BC^2$$

$AX = 4AC$؛ بنابراین $BM = 3\,AC$

همچنین، $EM = \frac{1}{2}AX = 2AC = 2BE$

لذا، مثلث BPE = $\frac{1}{2}$ (مثلث EPM)

و مثلث BAE = $\frac{1}{2}$ (مثلث EAM)

در نتیجه

مثلث BPA = $\frac{1}{2}$ (مثلث PAM) = $\frac{1}{4}$ (مثلث PAX) (۱)

به طور مشابه می‌توان نشان داد که مثلث ADQ ربع مثلث AXQ است.

به همین طریق می‌توان با نصف کردن متوالی PM و MX نشان داد که در طرف راست معادلهٔ (۱) مثلثهایی قرار دارند که مساحتهای آنها یک چهارم مساحت مثلث BPA است، یعنی یک شانزدهم مساحت مثلث PAX و ...، با ادامهٔ این کار به همین صورت می‌توان نشان داد که مساحت قطعهٔ سهموی عبارت

است از

$$\Delta + \Delta/۴ + \Delta/۱۶ + \Delta/۶۴ + \dots$$

که در آن Δ مساحت مثلث APQ را نشان می‌دهد.

مجموع این سری $\Delta/(1 - \frac{1}{4})$ یا $۴\Delta/۳$ است. معهذا برای ارشمیدس امکان رسیدن به این حد مقدور نبوده است و لذا وی نتیجهٔ خود را با برهان خلف ثابت می‌کند. یعنی نشان می‌دهد که اگر مساحت مطلوب برابر مساحت مفروض K نباشد، باید کوچکتر یا بزرگتر از آن باشد، و از چنین تناقضی نتیجه می‌شود که مساحت قطعهٔ سهموی چهار سوم مساحت مثلث APQ است.

۳ـ کره و استوانه[۱۶]. این اثر، که متشکل از دو مقاله است، مجموعاً حدود شصت قضیه دارد و معمولاً شاهکار ارشمیدس تلقی می‌شود. بدواً تعدادی تعریف، وپنج فرض در آن داده شده که عمدتاً عبارتند از

۱) از همهٔ خطوطی که انتهاهای یکسان دارند، خط مستقیم کمترین طول را دارد.

۳) از بین همهٔ سطوحی که انتهاهای یکسان دارند، انتهاهایی که بریک صفحه‌اند، صفحه کمترین است.

۵) از کمیتهای نابرابر زیادتی کمیت بزرگتر برکوچکتر، کمیتی است که وقتی آن را به طور متوالی برخود اضافه کنند، قابلیت آن را دارد که از هر کمیت همجنس با آن بیشتر شود، این فرض به اصل ارشمیدس مشهور شد و شباهت آن به تعریف چهارم مقالهٔ پنجم اصول آشکار است.

از آنچه دربالا گفته شد، نتیجه می‌شود که اگر یک چندضلعی در دایره‌ای محاط شود، محیط شکل محاط شده از محیط دایره کوچکتر است، و در قضیهٔ اول، ارشمیدس نشان داده است که اگر یک چند ضلعی در دایره‌ای محیط شود، محیط چند ضلعی، از محیط دایره بزرگتر است.

این رساله شامل اکتشافاتی است که از نظر ارشمیدس ارزش زیادی داشتند. از جملهٔ آنها می‌توان موارد زیرین را نام برد:

۱) مساحت سطح جانبی استوانهٔ قائم برابر است با مساحت دایره‌ای که شعاع آن واسطهٔ هندسی بین ارتفاع استوانه و قطر قاعدهٔ آن است (قضیهٔ ۱۲).

۲) سطح جانبی مخروط برابر است با مساحت دایره‌ای که شعاع آن واسطهٔ هندسی بین یال و شعاع قاعدهٔ مستدیر آن است (قضیهٔ ۱۴)

۳) سطح کره چهار برابر مساحت دایرهٔ عظیمهٔ آن است (قضیهٔ ۲۳)

۴) اگر حول یک کره، استوانه‌ای به ارتفاعی برابر با قطر کره محیط شود، آنگاه حجم استوانه یک ونیم برابر حجم کره است، و سطح کل آن یک و نیم برابر سطح کره است (قضیهٔ ۳۳).

در اثبات این قضایا، ارشمیدس به حدی به حساب بی‌نهایت کوچکها نزدیک شد که بدون توسل به مفهوم حد، بیشتر از آن دیگر ممکن نبود.

۴ـ اندازه‌گیری دایره[۱۷]. این اثر شامل سه قضیه است.

۱) مساحت دایره برابر با مساحت مثلث قائم الزاویه‌ای است که دوضلع مجاور به زاویهٔ قائمه آن بترتیب برابر باشعاع و محیط دایره باشند.

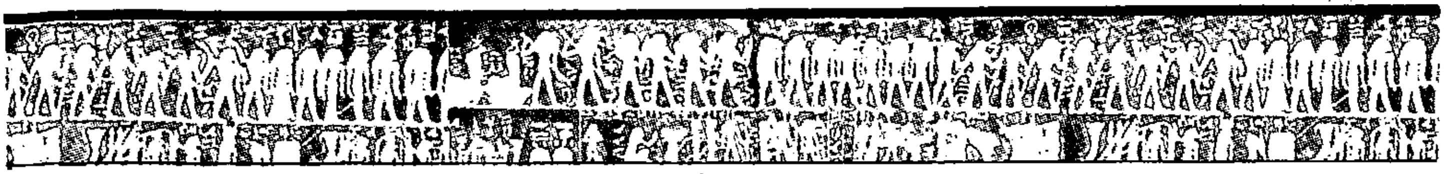
۲) مساحت یک دایره به مساحت مربعی با ضلعی برابر قطر آن، نسبتی دارد که بسیار نزدیک به ۱۴:۱۱ است.

۳) افزونی محیط یک دایره از سه برابر قطر آن جزئی است که کمتر از یک هفتم، ولی بیش از ۱۰/۷۱ قطر آن است. ارشمیدس این قضیه را با محیط و محاط کردن ۹۶ ضلعی های منظم بردایره ثابت کرد.

۵ـ در باب مارپیچها[۱۸]. از برخی جهات، مهمترین سهم ارشمیدس در ریاضیات را می‌توان همین اثر محسوب کرد. اغلب مورخین ریاضی روش ارشمیدس را در رسم مماسی بر مارپیچ ابداعی خود، پیش در آمد حساب دیفرانسیل می‌دانند. مارپیچ ارشمیدس چنین تعریف می‌شود: «اگر در یک صفحه، خط مستقیمی که یک انتهای آن ثابت می‌ماند، با سرعت ثابتی چرخانده شود تا به وضعیتی باز گردد که از آن آغاز به حرکت کرده است، و اگر در همان زمان که خط حول نقطه می‌چرخد، نقطه‌ای با سرعت ثابتی از انتهای ثابت در امتداد خط حرکت کند، این نقطه یک مارپیچ در صفحه رسم می‌کند.» خاصیت بنیادی مارپیچ که طول‌بردار شعاعی را به زاویه‌ای که بردار شعاعی با وضعیت اولیه‌اش تشکیل می‌دهد، مربوط می‌سازد، یعنی خاصیتی که امروزه با معادلهٔ $r = a\theta$ نشان داده می‌شود، در قضیهٔ چهاردهم بیان شده است. ارشمیدس سپس ثابت می‌کند که مساحتی که بین خط اولیه و خطی که پس از یک بار چرخش کامل ایجاد می‌شود، یعنی بردارهای شعاعی o، $2\pi a$، یک سوم سوم دایره‌ای است که شعاع آن $2\pi a$ است.

۶ـ شبه کره ها و شبه مخروطها[۱۹]. این اثر مشتمل بر ۴۵ قضیه است و درآن حجم اجسام صلبی‌که با دوران دادن سهمی‌ها و هذلولیها حول محورشان به وجود می‌آیند (شبه مخروطها) و اجسامی که با دوران دادن بیضیها حول محور اطول یا اقصر حادث می‌شود (شبه کره‌ها)، تعیین می‌شود. در این اثر روش افنا کراراً مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۷ـ اجسام شناور[۲۰]. این اثر سرآغاز علم ئیدروستاتیک را مشخص می‌کند. با به‌کاربردن استدلال ریاضی بر تعادل اجسام



شناور، ارشمیدس قوانین مربوط به تعادل چنین اجسامی را تعیین می‌کند. تحقیقات او در ئیدروستاتیک وی را در اختراع برخی دستگاههای مفیدیاری کرد که از مهمترین آنها می‌توان پیچ آبی را نام برد.

۸ــ ماسه شمار[21]. ارشمیدس دستگاهی برای نمایش اعداد بزرگ خارج از حیطهٔ برد دستگاه عدد شماری یونانی اختراع کرد. وی نشان داد که امکان تخصیص عددی به عدهٔ کل دانه‌های شنی که تمام عالم را پر می‌کند، وجود دارد.

گذشته از آثاری که هنوز در دست است، ارشمیدس کتابهای دیگری هم نوشته است. این کتابها موضوعات گوناگونی را در برمی‌گیرند. همهٔ آثار معلوم او سرشار از دقتی است که در آثار هیچیک از پیشینیان، بجز شاید اقلیدس، سراغ نداریم.

گفتیم که عموماً ارشمیدس را بزرگترین ریاضیدان عصر باستان می‌دانند. ولی دیدگاههای او بواقع بسیار جدید است. باید دکارت[22] و نیوتن[23]، و نه اعقاب بلافصلش را در زمرهٔ دودمان علمی ارشمیدس دانست. پیشتر شمه‌ای از سهم او در ریاضیات محض و کاربردی گفته شد. گرچه خود این آثار مهم‌اند، ولی معرف نبوغ واقعی ارشمیدس نیستند. این آثار تحت‌الشعاع روشهای شجاعانهٔ او در ریاضیات قرار می‌گیرند و همین روشهاست که تحسین همه را برمی‌انگیزد. ارشمیدس به نکته سنجیهای ریاضی رایج زمان خود بی‌توجه بود، زیرا مادام که ریاضیدان خود را مقید به ساختمانهایی منحصراً با خطکش و پرگار نماید، افق دید او محدود خواهد بود. فرمول مساحت مثلث برحسب اضلاع آن که به هرون[24] نسبت داده می‌شود، و مطمئناً ارشمیدس از آن اطلاع داشته است، توسط معاصرین او عمل رافضی منشانه‌ای محسوب می‌شد، چون مستلزم ضرب چهار طول درهم بود ــ مفهومی که خارج از وسعت نظر کسانی بود که به فضای سه‌بعدی اقلیدسی عادت کرده بودند. اگر جانشینان ارشمیدس کمی از شجاعت او را داشتند و این محدودیتهای ابعادی را به کنار می‌نهادند، اکتشافاتی که هجده یا نوزده قرن بعد در ریاضیات به عمل آمد، خیلی پیشتر تحقیق پیدا می‌کرد. در دیدگاه، ارشمیدس نه به مکتب اسکندریه و بلکه به مکتبی که توسط نیوتن و حتی گاوس[25] پایه‌گذاری شد، تعلق داشت.

آپولونیوس در پرگا[26] در حدود ۲۵۵ ق.م. به دنیا آمد. او نیز در اسکندریه تحصیل کرد ولی بعداً به پرگامون[27] (برغمه)، که در آنجا دانشگاه و کتابخانه‌ای به سبک اسکندریه موجود بود، رفت.

آپولونیوس استاد مسلم هندسهٔ ترکیبی بود واز این لحاظ عنوان مهندس کبیر را یافته است. شهرت او ناشی از کتاب مقاطع مخروطی[28] اوست که در هشت مقالهٔ است و تنها چهار مقالهٔ آن به زبان اصلی یونانی باقی مانده است. ترجمه‌ای عربی از سه مقالهٔ دیگر در قرون وسطی به دست آمد و بعدها هالی[29] در صدد برآمد که این کتاب را برمبنای مندرجات مجموعه های ریاضی[30] پاپوس[31]، بازسازی کند. مقالات به جا مانده حاوی مطلبی که برهندسه‌دانان پیش ازآپولونیوس پوشیده باشد، نیستند و مثلاً این اعتقاد وجود دارد که از نظر مطلب بین این مقالات و مقالات گمشده اقلیدس دربارهٔ مقاطع مخروطی تفاوتی وجود نداشته است.

اعتبار کشف مقاطع مخروطی به منایخموس[32] (حدود ۳۵۰ــ۳۰۰ ق.م.) نسبت داده می‌شودکه وی در جریان تلاشهایش برای تضعیف مکعب به راه حلی به کمک قطع دادن یک هذلولی و یک سهمی، و نیز قطع دادن دو سهمی، دست یافت. پیشینیان آپولونیوس، و از جمله منایخموس، مقاطع مخروطی را به عنوان مقاطع مخروط قائم دواری با صفحاتی عمود بر مولد آن تلقی می‌کردند. دیدیم که اقلیدس و کسان بعد از او، تنها با مخروط قائم دوار آشنا بودند؛ برای به وجود آوردن سه‌مقطع مخروطی، باید از سه مخروط مختلف که زاویه رأس مثلثهای قائمه مولد آنها با هم تفاوت داشتند، استفاده می‌شد. پیش از آپولونیوس این منحنی‌ها مقطع مخروطی حاده، قائمه، یا منفرجه نامیده می‌شدند، بسته به اینکه زاویهٔ بین محور و مولد مخروط، کمتر از، برابر با، یا بزرگتر از نصف زاویهٔ قائمه باشد. آپولونیوس این روش توصیف مقاطع مخروطی را مردود دانست. در عوض وی نشان داد که این مقاطع را می‌توان تنها از یک مخروط، خواه قائمه و خواه مایل، با قطع دادن آن توسط صفحه‌ای که برمولد مخروط عمودباشد یا شیبی درهرجهت باآن داشته باشد، به‌دست‌آورد. در نتیجه نامهای سابق بی‌معنی‌شدند وآپولونیوس نامهای بیضی، سهمی، و هذلولی (در اصطلاح ریاضیون اسلامی بترتیب قطع ناقص، قطع مکافی، قطع زاید) را به آنها داد. اگر p پارامتر منحنی و d طول قطر آن باشد، و اگر مختصات منحنی نسبت به یکی از اقطار و مماس در یکی از انتهاهای آن برمنحنی در نظر گرفته شود، تعاریف آپولونیوس را می‌توان به زبان مختصات دکارتی توسط معادلات زیر بیان کرد:

برای سهمی، $y^2 = px$

برای هذلولی، $y^2 = px + px^2/d$

برای بیضی، $y^2 = px - px^2/d$

برخی چنین مطرح می‌کنندکه آپولونیوس بامبادی دستگاه مختصات آشنا بوده است. این نکته جای بسی تردید است، معهذا می‌توان مطمئن بود که اگر آپولونیوس چنین دستگاه مختصاتی

در اختیار داشت، در ایــن زمینه به فرمـا و دکارت چیزی برای کشف، باقی نمی‌گذاشت.

چهار مقالـهٔ مقاطع مخروطی آپولونیوس حکم مقدمه را دارند. چــون آپولونیوس تعاریف مقاطع مخروطی را به روش مرسوم ردکرده بود و آنها را به عنوان مقاطع مخروط واحدی تلقی‌می‌کرد، لذا مقالهٔ اول را بـا توصیف یک مخروط یا سطح مخروطی آغاز می‌کند. تعریف وی چنین است: دایره‌ای و نقطه ثابتی را خـارج از صفحهٔ آن دایــره در نظر گیرید. نقطهٔ ثابت در حالت‌کلی برروی عمود وارد بر صفحه از مرکز دایره، واقع نیست حال خط مستقیمی را که از نقطهٔ ثابت گذشته و برنقطه‌ای از محیط دایره می‌گذرد، طوری حـرکت دهید کـه همواره یک نقطهٔ آن برپیرامون دایره باقی بماند. اگرچنین خطی در دوجهت امتداد داده شود، یک سطح مخروطی تولید خواهـد کرد. این سطح، مرکب از دوپارچـه است که مقابل‌هم قـرار دارند و در نقطهٔ ثابت‌مفروض، یکدیگر را تلاقی می‌کنند. این نقطه را رأس مخروطی‌می‌نامند وخط مستقیم‌مار براین‌نقطه ثابت ومرکزمفروض را محور نامند.

روش به‌دست آوردن مقاطع مخروطی از چنین سطحی در قضایای ۱۱ ــ ۱۴ آمده است. بعد ازآن قضایای اصلی مربوط به خواص ایــن منحنی‌ها بیان و اثبات می‌شوند. در مقالـهٔ دوم مجانبها بحث می‌شود. در اینجا نشان داده می‌شود کــه وقتی بر روی مجانبها به سمت بینهایت پیش رویــم، مجانبها مداوماً به منحنی نزدیکتر می‌شوند به طوری که فاصلهٔ آنها را می‌توان از هرطول مفروض کوچکتر کــرد. همچنین در اینجا ثابت می‌شود که مستطیل حادث از رسم خطوطی عمود بر مجانبها از هر نقطهٔ منحنی مساحت ثابتی دارد، این معادل بـا رابطه‌ای است که به زبان‌دکارتی با معادلهٔ $xy = c$ بیان می‌شود. بعد ازآن توصیفی از روشهای بــه دست آوردن قطرهــای مقاطع مخروطی، محور سهمی، و محورها و مرکـز بیضی و هذلولی می‌آید. ایــن مقاله باشرحی ازروشهای رسم مماس بر این منحنی‌ها خاتمه می‌یابد.

مقالهٔ سوم ادامهٔ مقالهٔ قبلی است ومسائلی دربارهٔ‌مکانهای هندسی را مطرح می‌کند. مقالهٔ چهارم عمدتاً راجــع به قضایایی دربارهٔ تقاطع مقاطع مخروطی است. در مقالهٔ پنجم به آنچه که در نوشته‌های امروزی قائـم برمنحنی نامیده مــی‌شود، پرداخته شده است، امــا قائمها در اینجــا به عنوان خطوطی کــه زاویهٔ قائمه با مماس بــر منحنی تشکیل می‌دهند، تلقی نمی‌شوند؛ بلکه به آنها بــه عنوان خطوطی نظر می‌شود کــه می‌توان با طـول ماکسیمم یا می‌نیمم از نقاطــی داخل یا خـارج منحنی بر منحنی رسم کرد.

گفتیم که شهرت عمدهٔ آپولونیوس به خاطر کتاب مقاطع مخروطی است ولی آثار دیگری‌هم بــه وی نسبت داده می‌شود. ازجملهٔ این‌آثار می‌توان از قطـع معین[۲۳] و تماسها و مماسیها[۲۴] نام‌برد. آخرین اثر، مسئله مشهور آپولونیوس را در بردارد: سه عنصر که هر یک می‌توانند نقطه باخط یا دایره باشند، مفروض‌اند. دایره‌ای رسم کنید کــه، اگـر عناصر مفروض هــر سه نقطه باشند، براین سه نقطه بگــذرد، یا بردایره‌ها یاخطوط مفروض، درصورتی کــه عناصر مفروض خط یادایره باشند، مماس باشند. بسته به ماهیت این عناصر، از لحـاظ اینکه نقطه، خط یا دایره باشند، ده مسئله وجود دارد که اغلب باهندسهٔ مقدماتی قابل حل است.

ظاهراً آپولونیوس‌کتاب دیگری‌هم تحت عنوان مکانهای مسطح داشته است. اهمیت این اثر درتاریخ ریاضیات به خاطر آن است کــه تـلاشهای فرما برای احیای آن بــه کشف اصول هندسهٔ مختصاتی (تحلیلی) منجر شد.

فصل ریاضیدانان برجسته در تاریخ ریاضیات یونانی در پایان قــرن سوم بعد از میلاد بسته می‌شود. اقلیدس، ارشمیدس، آپولونیوس ریاضیات را به درجه‌ای رسانده بودند که پیشرفت بیشتر، تا ابداع روشهایی نوتر و دستگاههای نمادگذاری‌مناسب، غیر ممکن بود. گرچه در سالهای بعد ریاضیدانانی که قابل مقایسه با این سه تن باشند، پدید نیامدند، ولی این دوره‌ها بکلی خالی از ریاضیدان نبوده است. تنی چند از ریاضیدانان در این سالها پیدا شدند کــه سهم آنها در ریاضیات بــی اهمیت نیست. آثار زیادی از این ریاضیدان بــه جــا نمانده است. در ارزیابی کار آنها باید بــر شروحی کــه توسط تئون، پاپوس، پروکلوس، و اثوتوکیوس[۳۵] نوشته شده، تکیه کرد. در مجموع می‌توان گفت خلاقیت چندانی درکــار اینان آشکار نیست. تــدریجاً مطالعهٔ ریاضی به‌کاربــردهای عملی منحصر شد. زمانی در حــدود قرن دوم قبل از میلاد دیــوکلس منحنی سسوئید[۳۶] را ابــداع کرد و بدینوسیله امکان درج دو واسطه بین دوخط مستقیم مقدور گردید و معاصری، نیکوماخوس، منحنی کونکوئید[۳۷] را کشف کـرد واو از آن برای حل مسئله تضعیف دایره استفاده به عمل آورد.

هــرون اسکندرانی، کــه احتمالاً رونقش به حدود ۲۰۰ بعد از میلاد بــوده، استعداد ریاضی ممتازی از خــود بروز داد ولی وی بیشتر دنبالــه‌رو سنت مصریان بود تا یونانیان. اختراع برخی آلات مکانیکی هوشمندانــه را بــه او نسبت داده‌اند و فرمول محاسبهٔ مساحت مثلث بـرحسب اضلاع آن، یعنی فرمول

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

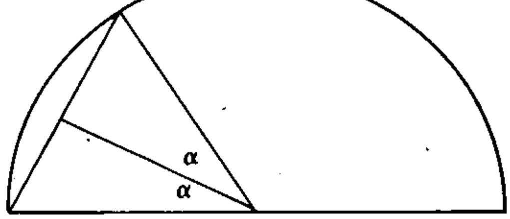
به او منسوب است‌که وی برهان هندسی آن را در کتاب هندسه[۳۸]، خود داده است.

از دیگر ریاضیدانان این دوره می‌توان هیپار خوس نیکایی[39] (ابرخس نیقیه‌ای، رونقش به حدود ۱۲۵ ق. م.) را نام برد. وی در اصل یک منجم بود و تعیین دقیق طول سال و توضیح پدیدهٔ تقدیم اعتدالین مرهون اوست. مطالعهٔ نجوم وی را به ابداع موضوع کاملاً تازه‌ای، یعنی مثلثات، کشاند. هیچ نوشته‌ای از ابرخس به جا نمانده است ولی به گفتهٔ تئون اسکندرانی، وی اثری در دوازده مقاله تدوین کرده بودکه گویا در آن اساس مثلثات را پایه ریزی کرده بوده است وبدون شک بطلمیوس در ساختن جدول اوتار خود از آن سود برده است.

بعد از شروع عصر مسیحیت‌هم مطالعهٔ ریاضیات در اسکندریه دوام داشته است ولی علاقه به مطالعهٔ این موضوع به خاطر خود آن، کم‌کم رو به کاهش گذاشته و ریاضیات تدریجاً در خدمت موضوعات دیگر از جمله نجوم قرار گرفته است. چهرهٔ برجستهٔ این دوره، بطلمیوس (کلاودیوس بطلمیوس[40]) است که به حدود نیمه اول قرن دوم رونق یافته است. وی یک منجم بود. اثر عظیم او به نام سونتاکسیس[41]، که بعداً توسط ریاضیدان اسلامی مجسطی[42] (کبیر) نامیده شد، رساله‌ای عمدتاً در نجوم است. معهذا مقام شامخ این کتاب در تاریخ ریاضیات بدین دلیل است که می‌توان آن را اولین رسالهٔ منظم در مثلثات دانست. دلایل موجهی درتأیید این نظر که ابرخس قسمت اعظم مندرجات مجسطی را می‌دانسته، در دست است. بسیار محتمل است‌که بطلمیوس باکتاب اکر (کره‌ها) منلائوس[43] آشنایی داشته است. منلائوس در این کتاب خواص مثلثهای کروی را نسبتاً به طور کامل شرح می‌دهد.

تعیین روابط موجود بین اضلاع و زوایای مثلثهای کروی و مسطحه، منشأ علم مثلثات بوده است. به احتمال قوی مصریان این نکته را دریافته بودند که اجزاء گوناگون مثلث به نحوی به‌هم مرتبط‌اند، ولی یونانیان بودندکه برای اولین بار لزوم ایجاد روابط دقیق بین‌اضلاع وزوایای مثلث پی‌بردند. تحقیقات نجومی بطلمیوس اثبات قواعدی راکه به‌کمک آنها این روابط دقیقاً تعیین شوند، الزام آور کرده بود و در تلاش برای تصحیح محاسبات نجومی، علم مثلثات ابداع گردیده است و به همین دلیل مطالعهٔ مثلثهای کروی پیش از مطالعهٔ مثلثهای مسطحه آغاز شده است. بسیاری از این قواعد را می‌توان در اولین مقالهٔ مجسطی مشاهده کرد.

نه بطلمیوس و نه دیگر یونانیان این دوره، نسبتهائی را که امروزه به توابع مثلثاتی موسوم‌اند، مورد استفاده قرار نداده‌اند. به جای آن، آنها از وتر زاویه سخن به‌میان آورده‌اند که منظور از آن طول وترقوس مقابل به زاویهٔ مرکزی مفروضی بوده است. چون اندازهٔ یک قوس با اندازهٔ زاویهٔ مقابل به‌آن برابر گرفته می‌شود، آشکارا Chord ۲α، یعنی طول وتر مقابل به زاویهٔ مرکزی ۲α و $\sin \alpha$ عبارتهای معادلی هستند (شکل۳).



ش ۳

بنابراین‌کار بطلمیوس (یا ابرخس) در ساختن جدولی از اوتار برای همهٔ زوایای بین ۱/۲° تا ۱۸۰° و به فواصل ۱/۲° را در واقع معادل با محاسبهٔ جدولی از سینوسها از ۱/۴° تا ۹۰° به فواصل ۱/۴° بوده است.

روش بطلمیوس، مطابق انتظار، با توجه به محدودیتهای علمی آن زمان بسیار پیچیده بوده است. به طور خلاصه، روش او در وهلهٔ اول مبتنی برتشخیص این نکته بوده است که تعیین طول وترهای مقابل به زوایای مختلف معادل با یافتن طول اضلاع چند ضلعیهای منتظم محاط در دایره بر حسب طول قطر دایره می‌باشد. باچنین فکری، وی محیط دایره را به۳۶۰ قسمت مساوی، یا درجه تقسیم می‌کند. قطر دایره‌هم به ۱۲۰ قسمت مساوی تقسیم می‌شود وکلیه محاسبات در دستگاه شصتگانی انجام می‌شود و بدین ترتیب نیاز به اعداد کسری پای دقیقه و ثانیه را در مثلثات باز می‌کند. از این‌رو بیان طول وتر مقابل به یک زاویهٔ مرکزی بر حسب تعدادی از اجزاء قطر مقدور می‌گردد و این همان وتر زاویه است.

با مرگ بطلمیوس، عصرطلایی علوم یونانی به پایان می‌رسد و دوره‌ای از رکود علمی آغاز می‌شود که تنها هر از چندگاه با ظهور ریاضیدانی برتر از معاصرانش‌که قادر به ادامه سنت مکتب اسکندریه باشد، ازشدت این‌انحطاط کاسته می‌شود. مشهورترین این دانشمندان پاپوس اسکندرانی و دیوفانتوس هستند که هر دو در اواخر قرن سوم بعد از میلاد رونق یافته‌اند.

شهرت پاپوس متکی بر مجموعه‌های ریاضی اوست که اثری در هشت مقاله است و همهٔ آن جز مقالهٔ اول و بخشی از مقالهٔ دوم از گزند روزگار محفوظ مانده است. مجموعه‌ها گام مهمی در جهت یک پارچه کردن دانش هندسی نویسندگان پیشتر بر می‌دارد. به کمک این اثر است که دربارهٔ کوششهای به عمل آمده در جهت حل سه مسئله مشهور باستان اطلاعاتی حاصل می‌کنیم. خود پاپوس‌هم مطالب مهمی به آثار پیشینیان افزوده‌است که بحث جامعی ازهندسهٔ فضایی، منحنی‌های مسطحه بادرجات بالاتر، مسائل هم‌محیطی و نیزکارهایی در مکانیک در این زمره‌اند. پاپوس رده‌بندی مهمی ازمسائل را مطابق باماهیت

منحنی‌هایی که در حل آنها مورد نیاز است، به عمل می‌آورد.

یکی از معاصران پاپوس، دیوفانتوس[44] بوده است. وی قدرت ابتکار فوق‌العاده‌ای داشت وعلاقه‌اش عمدتاً معطوف جبر بود؛ رشته‌ای از ریاضیات‌که عمدتاً خود به خلق آن پرداخت و روشهای هندسی یونانیان در این زمینه را بهایی نداد. اثر مهم دیوفانتوس که شهرتش به خاطر آن است، کتاب علم حساب[45] اوست که شاید بتوان از آن به عنوان اولین رساله در جبر یاد کرد. تنها شش مقاله از سیزده مقالهٔ اصلی باقی مانده است.

علم حساب مجموعه‌ای از مسائل عددی است که برخی به معادلات درجه اول یک مجهولی تادستگاههای چهار مجهولی و برخی به معادلات درجهٔ دوم برمی‌گردد ولی اکثر مسائل آن به معادلات سیاله از درجات دوم تا چهارم باز می‌گردد (به‌همین دلیل معادلات سیاله را معادلات دیوفانتی‌هم می‌خوانند). وی همواره معادلات را طوری مرتب می‌کند که همهٔ جملات مثبت باشند. دیوفانتوس از کمیتهای منفی آگاهی داشته است ولی در حل معادلات درجهٔ دوم حتی آنجا که معادله دوریشهٔ مثبت دارد، فقط یکی را اختیار می‌کند. در کارهای دیوفانتوس گامی در جهت نمادگذاری مشاهده می‌شود. یونانیان و ریاضیدانان دورهٔ اسلامی در براهین خود استفاده‌ای از نمادها به عمل نمی‌آوردند. هر عمل به طور کامل نوشته می‌شد و لذا یک برهان ریاضی شکل مقاله‌ای را در ادبیات پیدا می کرد. در مقابل این سیاق لفظی، روش تلخیصی قرار دارد که نام دیوفانتوس به این روش مرتبط است، نمادهایی برای کمیتها و اعمالی که خیلی تکرار می‌شوند، وضع گردید و این نمادها عمدتاً شکل مختصر شدهٔ کلمات را داشتند. این روش تا قرن هفدهم دوام آورد. در این قرن روش نمادهای امروزی پدیدار گردید.

بحث مختصر ما دربارهٔ ریاضیات یونانی در اینجا پایان می‌یابد. در شمارهای آینده به نحوهٔ انتقال این علوم به عالم اسلامی و کارهای دانشمندان دورهٔ تمدن اسلامی خواهیم پرداخت.

1. Chaeronea
2. Ptolemy
3. Soter
4. Apollonius
5. Theon of Alexanderia
6. Heiberg
7. Heath
8. De Morgan
9. Data
10. Division of Figures
11. Phaenomena
12. Optics
13. Syracuse
14. Plane Equilibrium
15. Ouadrature of the Parabola
16. The Sphere and Cylinder
17. Measurement of the Circle
18. On spirals
19. Conoids and Spheroids
20. Floating Bodies
21. Sand Reckoner
22. Descarte
23. Newton
24. Heron
25. Gauss
26. Pèrga
27. Pergamum
28. Conic Sections
29. Halley
30. Mathematical Collections
31. Pappus
32. Menaechmus
33. Determinate section
34. Contacts and Tangencies
35. Eutocius
36. Cissoid
37. Conchoid
38. Geometrica
39. Hipparchus of Nicaea
40. Claudius Ptolemaeus
41. Suntaxis
42. Almagest
43. Menelaus
44. Diophantus
45. Arithmetica

منابع

1. Scott, J.F., A History of Mathematics, Taylor and Francis LTD. London, 1975

۲) مصاحب، غلامحسین، حکیم عمر خیام بعنوان عالم جبر. سلسلهٔ انتشارات انجمن آثار ملی، تهران؛ ۱۳۳۹

> **مطالعهٔ ریاضیات ذهن را چنان پرورش می‌دهد که از هزار چشم با ارزشتر است**
>
> افلاطون

اصول در هندسه (۱)

دکتر مگردیچ تومانیان

قبل از بیان اصول در هندسه به‌بینیم کـه اثبات چیست و در چه مواردی ضروری است. دانش آموزی پس از اولین جلسهٔ درس هندسه می‌گفت:

ـ مسخره است؛ معلم وارد کلاس می‌شود، دومثلث مساوی بر تخته سیاه می‌کشد و تمام وقت خود را برای اثبات تساوی آنها هدر می‌دهد. معلوم نیست که صرف این‌همه انرژی برای چیست. آدم نمی‌داند این درس را چگونه بـاید جواب دهـد. از روی شکل معلوم است که هر زاویهٔ خارجی در یک مثلث از هر یک از زوایای داخلی غیر مجاور خـود بزرگتر است، و اثبات این موضوع معنی ندارد.

آنچه مسلم است اغلب دانش آموزان لزوم اثبات مفاهیمی که ظاهراً بدیهی‌اند، نمی‌پذیرند. مخصوصاً اگر اثبات آنها کمی پیچیده باشد.

فرض کنیم هدف آن است که شخصی را بـه کروی بودن زمین متقاعد سازیم. به این شخص می‌گوئیم کـه وقتی در بلندی بایستیم و نظاره کنیم افق دید وسیعتر می‌شود و یا هنگام کسوف سایهٔ خورشید بروی ماه گرد است.

هریک از این عبارات که برای متقاعد ساختن این شخص بکار برده می‌شود، عبارتی در اثبات مـوضوع است. در مـورد مستدل بودن این گفته می‌گـوئیم در اثـر تجربهٔ روزانـه دیده می‌شود که سایهٔ هرجسم کروی از هرطرف کـه باشد، گرد است و برعکس اگر سایهٔ یک جسم از تمام جوانب گرد باشد، جسم کـروی است. بنابـراین قبلاً از یک حقیقتی کـه برای اجسام ملموس درمحیط اطراف خود همواره مورد آزمایش است استفاده می‌کنیم، آنگاه نتیجه می‌گیریم هرجسمی که بدون توجه به وضعیت خود، دارای سایهٔ گرد باشد، کروی است. و چون هنگام کـسوف سایهٔ زمین بدون توجه به وضعیت‌آن گرد است، پس زمین کروی است.

در حساب با توجه به تساوی زیر

$$۵^۲ - ۱ = ۲۴,\quad ۷^۲ - ۱ = ۴۸,$$
$$۹^۲ - ۱ = ۸۰,\quad ۱۱^۲ - ۱ = ۱۲۰,\ldots$$

ملاحظه می‌شود که هریک از آنها، به ۸ بخش‌پذیـر است. به نظر می‌رسد که می‌توانیم گزاره‌ای بصورت زیر داشته باشیم:

مربع هرعدد فرد منهای یک، مضرب ۸ است.

چون در مورد هرعدد اظهار نظر می‌کنیم، بـاید دلایلی که برای هرعدد مورد قبول باشد ارائه کنیم. هرعدد فرد به صورت $۲n - ۱$ نـوشـتـه مـی‌شود، پـس $(۲n - ۱)^۲ - ۱ = ۴n(n - ۱)$ مضرب ۴ است؛ از طرفی از دوعدد متوالی یـکی زوج است در نتیجه حـاصلضرب $۴n(n - ۱)$ مضرب ۸ است.

درمثال اول تجارب و آزمونهای زیادی را در نظر گرفتیم و از حقایق مربوط به آنها استفاده کردیم. در مثال دوم خاصیت چند عدد را در نظر گرفتیم و دیدیم که این خاصیت کلیت دارد. این گونه استدلالها را استقراء می‌نامیم.

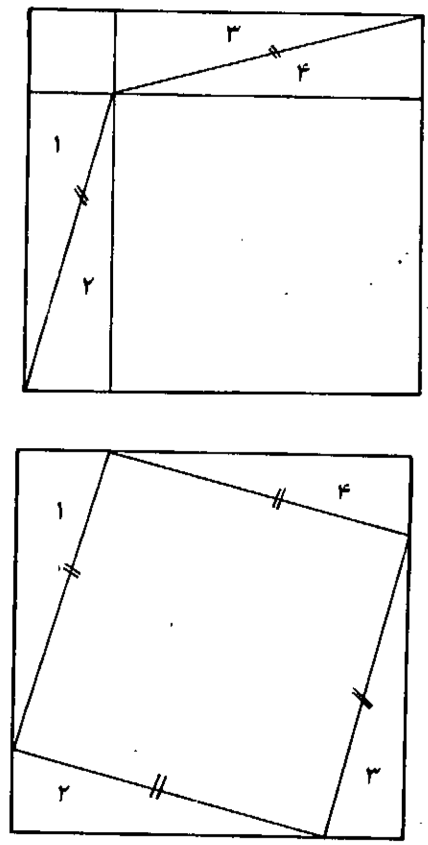
طریقهٔ دیـگری معمول است کـه یک قـانون کلی را در مورد حالتهای خاصی اعـمال می‌کنیم و چنین عملی را استنتـاج می‌گوئیم.

بطور خلاصه، اثبات یک دسته نتیجه‌گیریهـائی است که بکمک آنها با ارزش بودن گـزاره‌ای را تعین می‌کنند. تضمینی که برای صحت دلایل استنتاجی وجود دارد آن است کـه نتـایج کلی را در موارد خاصی که کاملاً مسجل است بکار ببریم.

با مشاهدات و آزمونهای طولانی متقاعد شدیم کـه از دو نقطه یک و فقط یک خط راست می‌گـذرد. از این حقیقت چنین نتیجه می‌شود کـه دو خـط راست بیش از یـک نقطهٔ تقـاطع ندارند، در غیر این صورت خلاف حقیقتی است که پذیرفتیم.

ضرورت اثبات نتیجـه‌ای است از قـوانین اساسی منطق، بالاخص قـانون ادلهٔ کافی؛ اما، آیا در مواردی هم که موضوع

بدیهی باشد باز هم باید بفکر اثبات باشیم؟ ریاضیدانان هند مسائل هندسی را بیشتر با رسم شکل حل می‌کردند. مثلاً در مورد قضیهٔ فیثاغورث به این دو شکل اکتفا می‌کردند، هرچند که این روش نیز براساس حقایقی است که قبلاً روشن شده‌اند.



ش ۱

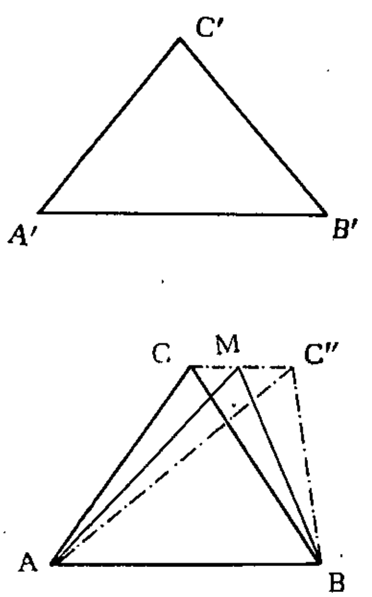
در هرحال موضوعی را که یک نفر بدیهی می‌داند برای دیگری بدون دلیل قابل قبول نباشد. مثلاً اگر از نوار موبیوسی اطلاعی در دست نباشد و سئوال شود که اگر درامتداد خط وسط، نوار موبیوس را ببریم چه می‌شود؟ اغلب جواب داده می‌شود بدیهی است که به دوقسمت تقسیم می‌شود؛ در صورتی که نه تنها بدیهی نیست بلکه درست عکس آن است؛ یعنی یکپارچگی خود را حفظ می‌کند. باید متوجه باشیم که رسم شکل در هندسه یک وسیلهٔ کمکی در اثبات است و نه خود اثبات. بنابراین یکی از دلایل مهم ضرورت اثبات در هندسه آن است که هندسه فقط گردآیه‌ای از یک سری حقایق در مورد خواص ظاهری اجسام و اشکال نیست، بلکه یک سیستم علمی و برپایهٔ قوانین مستحکمی استوار است. در حدود ۳۰۰ سال قبل از میلاد اقلیدس[1] خطوط اصلی هندسه را بنیانگذاری کرد و حقایقی را که می‌شد بدون اثبات قبول کرد بعنوان اصول متعارف و موضوعه پذیرفت و آنچه می‌باید براساس آنها ثابت کرد قضیهٔ نام‌گذاری کرد. اثبات مستدل باعث شده است که هندسه بصورت دستگاه علمی استواری درآید. معمولاً قضایا را بدو روش کلی ثابت می‌کنند.

۱ـ **روش مستقیم**. بدین صورت که رابطه بین این قضیه و آنچه قبلاً اثبات شده یا پذیرفته شده است برقرار می‌سازند.

۲ـ **روش غیر مستقیم**. در این صورت درستی قضیه را به آزمایش می‌گذارند یعنی تناقضی بین این قضیه و آنچه قبلاً پذیرفته شده است به وجود می‌آورند (برهان خلف).

مثال. تساوی دو مثلث در حالت ض ض ض.

دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را با شرایط $AB = A'B'$، $B'C' = B'C'$ و $AC = A'C'$ در نظر می‌گیریم، $A'B'$ را به AB منطبق می‌کنیم؛ فرض کنیم C' بر C واقع نشود، درغیر این صورت تساوی حاصل است. محل جدید C' را C'' می‌نامیم. مثلثهای ACC'' و BCC'' متساوی الساقین‌اند. ارتفاع BM در مثلث BCC'' و ارتفاع AM در مثلث ACC'' در وسط ضلع CC'' براین ضلع عموداند. نتیجه اینکه باید قبول کنیم که از یک نقطه واقع برخط راستی دو عمود می‌توان اخراج کرد، و این مغایر مطلبی است که ثابت کرده‌ایم (پذیرفته‌ایم). از این تناقض نتیجه می‌شود که فرض C' بر C واقع نمی‌شود، نمی‌تواند درست باشد. یعنی دو مثلث قابل انطباق و مساویند.



ش ۲

بطور خلاصه، گزاره‌هائی که صحت آنها درعمل بارها مورد آزمون واقع شده و قابل شک و تردید نیستند؛ بعنوان اصل موضوع در هندسه پذیرفته شده‌اند. ولی این هم درست نیست هر گزاره‌ای که خیلی بدیهی باشد باید بعنوان اصل پذیرفته شود. هدف اصلی آن بوده است که تعداد این اصول حداقل باشد به‌طوری که بقیهٔ مفاهیم هندسی را بتوان برمبنای آنها قرار داد. به طور کلی هرگاه اصول اساسی یک علم کمتر باشد کلیت آن بیشتر است. مسئلهٔ اساسی انتخاب این اصول است که باید در سه شرط زیر صادق باشند:

(۱) **شرایط سازگاری.** بین این اصول و همچنین نتایج حاصل از آنها نباید تناقضی ظاهر شود.

(۲) **شرایط استقلال.** صحت هیچکدام از این اصول نباید بکمک بقیهٔ اصول محقق شود.

(۳) **شرط کمال.** در حین حداقل کردن اصول نباید اصولی که در اثبات قضایای اساسی بعدی اجتناب ناپذیراند، حذف شوند.

اقلیدس اولین کسی است که مجموعه نسبتاً کاملی از اصول هندسهٔ مسطحه را ارائه کرد و تعداد زیادی قضیه را برپایهٔ این اصول و با استنتاجهای منطقی بدست آورد. فرضهائی که اقلیدس براساس تجربه و بدون اثبات پذیرفته است به دو دستهٔ اصول موضوع و اصول متعارف تقسیم نمود و مفاهیم نقطه، خط، منحنی و غیره را تعریف کرد، که امروزه جزء مفاهیم تعریف نشده به حساب می‌آیند. برخی از اصول موضوع اقلیدس ازاین قراراند:

(۱) از هر دونقطهٔ متمایز یک خط می‌گذرد.

(۲) از هر دونقطهٔ واقع بر هرخط راستی می‌توان پاره خطی به هراندازهٔ دلخواه جدا کرد.

(۳) به هر مرکز و هرشعاعی می‌توان یک دایره رسم کرد.

(۴) همهٔ زاویه‌های قائمه با هم برابراند.

(۵) اصل توازی. اگر خط راستی دوخط راست دیگر را چنان قطع کند که مجموع زوایای متقابل داخل در یک طرف خط اول از دوقائمه کمتر باشد، دوخط دیگر در همان طرف یکدیگر قطع می‌کنند.

چون می‌خواهیم پس از ذکر نواقصی اصول اقلیدس، تکمیل شدهٔ آنها را که توسط هیلبرت به انجام رسید بیان کنیم، از ذکر بقیهٔ اصول اقلیدس خودداری می‌کنیم.

اقلیدس به ظن خود مفاهیم نقطه، خط، منحنی و غیره را تعریف کرد و از آنجا که هدف اقلیدس (به طور کلی افلاطونیان) از وضع اصول، انتزاع علم هندسه از تجربه و محسوسات بود، در بعضی موارد به گزاره‌هائی استناد می‌کردند که نه جزء اصول بودند و نه قابل اثبات (به توسط اصول). مثلاً اقلیدس هیچ اصلی را برای جلوگیری از تهی بودن فضا برقرار نکرده و یا بدون دلیل پذیرفته بود که هرگاه یک نقطه از خطی در درون یک دایره یا مثلث باشد، آن خط محیط دایره یا مثلث را قطع می‌کند. همچنین تقسیم اصول به اصول موضوعه و اصول متعارف نشانهٔ دیگری از عدم موفقیت اقلیدس در انتزاعی کردن هندسه می‌باشد زیرا وقتی که اصلی قابل اثبات نیست درجهٔ بدیهی بودن آن از فردی به فرد دیگر تغییر می‌کند. بعضی از اصول متعارف (بدیهیات) مبهم و گمراه کننده‌اند.

در هندسهٔ اقلیدسی عباراتی نظیر «نقطهٔ p بین دو نقطهٔ Q و R مفروضی است»، «دونقطهٔ P و Q در یک طرف خط D واقع‌اند»، و «نقاط P و Q در طرفین خط D واقع‌اند» زیاد به کار برده شده است بدون اینکه در اصول اقلیدس مفاهیم فوق روشن شده باشند. این مفاهیم بیشترجنبهٔ عینی پیدا کرده‌اند، حال آنکه در علمی با بنیاد منطقی مفاهیم هرچند ساده باشند، اگر جزء اصول نباشند اثبات آنها ضروری است.

اقلیدس تساویهای هندسی را به کمک حرکت مشخص کرده است در حالیکه مفهوم حرکت را تعریف نکرده است.

اصل توازی اقلیدس یکی از جاذبترین مسائلی بوده است که در حدود دو هزار سال عده زیادی از ریاضیدانان را به خود مشغول داشته است؛ برخی از آنها این اصل را با اصل دیگری عوض می‌کردند و آنرا بدیهی‌تر می‌پنداشتند. مثلاً بطلمیوس[۲] ریاضیدان مشهور در حدود دویست سال بعد از میلاد با فرض اینکه «از یک نقطه خارج خط بیش از یک خط نمی‌توان بموازات آن رسم کرد»، اصل توازی اقلیدس (اصل پنجم) را ثابت کرد. بعدها معلوم شد که این فرضها هردو معادل‌اند.

اصولی که با اصل توازی اقلیدس معادلند عبارت‌اند از

(۱) اگر خط راستی دوخط راست دیگر را چنان قطع کند که مجموع زوایای متقابل داخل در یک طرف خط اول از دو قائمه کمتر باشند، دو خط دیگر در همان طرف یکدیگر را قطع می‌کنند (اقلیدس).

(۲) از یک نقطه خارج خط بیش از یک خط نمی‌توان به موازات آن رسم کرد (بطلمیوس).

(۳) هر خط یا برهمهٔ خطوط موازی عمود است یا بر هیچکدام (پروکلیوس[۳]).

(۴) هرگاه خطی یکی از دوخط متوازی را قطع کند دیگری را نیز قطع می‌کند (پروکلیوس).

(۵) اگر مثلث ABC و پاره خط $A'B'$ مفروض باشند، آنگاه نقطه‌ای مانند C' یافت می‌شود به طوری که مثلثهای ABC و $A'B'C'$ متشابه باشند ($\widehat{A}=\widehat{A'}$، $\widehat{B}=\widehat{B'}$ و $\widehat{C}=\widehat{C'}$) (والیس[۴]).

(۶) هرگاه خطی از نقطه‌ای در درون یک زاویهٔ (حاده) بگذرد آن خط حداقل یکی از اضلاع زاویه را قطع می‌کند (لژندار[۵]).

(۷) مجموع زوایای داخلی یک مثلث دوقائمه است (لژندار).

(۸) از هرسه نقطه نا همخط یک دایره می‌گذرد (بابایی، فارکاس[6])

(۹) اگر در یک چهار ضلعی دوضلع رو بروی آن باهم برابر و برضلع سومی عمود باشند برضلع چهارم نیز عموداند (ساکری[7] ــ خیام).

در حین اثبات این عبارت، ساکری متوجه شد که ممکن است مثلثی داشت که مجموع زوایای آن کمتر از دوقائمه باشد و به نتایج عجیب و غریبی دست یافت. یعنی مشاهده کرد که با این فرض، هیچ دو مثلثی با هم متشابه نمی‌شوند مگر اینکه با هم برابر باشند. یا هیچ مستطیلی وجود ندارد (آغاز هندسه نا اقلیدسی).

لامبرت[8] نیز با روش مشابهی با چهار گوشه‌ای‌که سه‌گوشهٔ آن قائمه باشد شروع کرد و نشان داد که اگر گوشهٔ چهارم نیز قائمه باشد اصل توازی برقرار است و اگر حاده باشد نتایج ساکری تائید می‌شود. لامبرت نشان داد که اگر زاویهٔ چهارم حاده باشد، مربع مستطیل وجود ندارد و حاصلضرب قاعده در نصف ارتفاع برای مساحت مثلث برقرار نیست.

در سال ۱۸۱۷ گوس[9] ضمن نامه‌ای به البرز[10] اظهار داشت که روز بروز در این عقیده راسختر می‌شود که طبیعت واقعی فضا را نمی‌توان با عقل و منطق بشری درک کرد و دیگر اینکه اثبات اصل توازی در این دنیا امکان ندارد.

در سال ۱۸۲۳ بابایی طی نامه‌ای به پدر خود می‌نویسد که به‌عقیدهٔ او هیچ گونه تناقضی درفرض زاویهٔ حاده وجود ندارد و او از هیچ، یک دنیای تازه و عجیب آفریده است. این اصول هندسه اقلیدس توسط ریاضیدانانی چون پاش[11]، پئانو[12]، پیری[13]، ورونز[14]، وبلن[15]، روبینسون[16]، هونیگتن[17]، فرار[18]، و سرانجام هیلبرت[19]، بررسی و تکمیل گردید، هیلبرت (۱۸۹۹) برخلاف اقلیدس سعی بیهوده در تعریف خط و نقطه وغیره ننمود، بلکه مفاهیم نقطه، خط، صفحه، وقوع (واقع شدن خط برنقطه یا صفحه برخط و نقطه)، بینیت (دونقطه)، و همنهشتی (دو پاره خط یا دوزاویه) را تعریف نشده پذیرفت. زیرا هرگونه تعریفی برای این مفاهیم متکی بر تجربه است و مغایر با اصولی کردن هندسه می‌باشد. مجموعهٔ تمام نقاط، خطوط و صفحات را فضا نامید. همچنین هیلبرت از تقسیم اصول به انواع موضوعه و متعارف اجتناب کرد و همهٔ آنها را اصول نامید. اصول هیلبرت برای هندسهٔ اقلیدس به پنج گروه بشرح زیر تقسیم شده‌اند.

نقاط، خطوط، و صفحات به وسیلهٔ اصول وقوع (واقع شدن ــ گذشتن)، بینیت و همنهشتی بهمدیگر وابسته‌اند: هرگاه خط d به نقطهٔ A وابسته باشد می‌گویند، d بر A می‌گذرد، یا A بر d واقع است، و هرگاه نقطهٔ A و صفحهٔ p وابسته باشند می‌گویند، A بر p واقع است، یا p بر A می‌گذرد؛

تبصره. به‌کمک نظریهٔ مجموعه‌ها می‌توان برخی ازمفاهیم تعریف نشده را نیز به‌زبان مجموعه‌ها تعریف کرد مثلاً واقع‌شدن نقطه بر خط، و یا گذر خط برنقطه به معنای تعلق نقطه به مجموعهٔ نمایش خط است.

I ــ اصول وقوع (۸ اصل) (خط و صفحه بر نقطه، صفحه بر خط)

۱ــ از هردو نقطهٔ متمایز دقیقاً یک خط می‌گذرد (دو اصل).

۲ــ بر هرخط حداقل دو نقطه متمایز وجود دارد؛ حداقل سه نقطه وجود دارند که بریک خط واقع نیستند.

۳ــ از هرسه نقطهٔ ناهمخط دقیقاً یک صفحه می‌گذرد؛ بر هر صفحه اقلاً یک نقطه وجود دارد (دو اصل).

۴ــ اگر دو نقطه از خطی در یک صفحه باشند، تمامی آن خط در آن صفحه است.

۵ــ اگر دو صفحه در یک نقطه مشترک باشند، حداقل در یک نقطه دیگر نیز مشترکند.

۶ــ حداقل، چهار نقطه وجود دارند که در یک صفحه واقع نیستند.

II ــ اصول بینیت (۴ اصل)

۱ــ هر گاه نقطهٔ B بین دو نقطهٔ A و C واقع شود، آنگاه A، B، و C نقاط متمایزیک خط‌اند و B بین C و A واقع است.

۲ــ هرگاه A و B دو نقطهٔ متمایز بریک خط باشند، آنگاه یک نقطه C بر آن خط موجود است به طوری که B بین A و C باشد.

۳ــ از هرسه نقطهٔ متمایز همخط دقیقاً یکی بین دونقطه دیگر قرار دارد.

۴ــ اصل پاش. اگر خط l از هیچ رئوس مثلث ABC نگذرد و ضلع AB را بین A و B قطع کند، آنگاه خط l فقط یکی از دو ضلع BC و AC را بین B و C یا بین A و C قطع می‌کند.

زوج نقاط A و B را یک پاره خط می‌نامند و بصورت AB یا BA نشان می‌دهند. نقاط بین A و B را نقاط پاره خط و خود A و B را نقاط انتهائی پاره خط می‌خوانند. بافرض نقطهٔ O برخط l، دو نقطهٔ A و B را در یک طرف (سمت) O می‌نامند هرگاه O بین A و B نباشد. نقطهٔ O از خط l با نقطهٔ دیگری مانند A بر l، تشکیل یک نیم خط را می‌دهند؛ نقاطی که با A در یک سمت O واقع‌اند، نقاط نیم خط‌اند. مجموعهٔ نقاط یک خط را مرتب می‌گویند هرگاه کلمات 'پیش' و 'پس'

در مورد آنها دارای معنی باشد. نقاط A و B را در صفحه α در طرفین خط l (در α) گویند هرگاه پاره خط AB نقطه‌ای از l را شامل نشود.

III_ اصول همنهشتی (هم اندازگی) (۵ اصل)

۱ــ اگر پاره خط AB و نقطهٔ A مفروض باشند، آنگاه بر هر نیمخط با آغاز A' نقطهٔ یکتائی مانند B' یافت می‌شود به طوری که پاره خط AB با پاره خط $A'B'$ همنهشت باشد.

۲ــ اگر پاره خط AB با هر یک از پاره خط های CD و EF همنهشت باشد، آنگاه پاره خط CD با EF همنهشت است؛ همچنین هر پاره خط با خودش همنهشت است.

۳ــ اگر B بین A و C و B' بین A' و C' باشند و اگر پاره خطهای AB و $A'B'$ با یکدیگر و پاره خطهای BC و $B'C'$ نیز با یکدیگر هم‌اندازه باشند، آنگاه پاره خطهای BC و $A'C'$ نیز با یکدیگر هم‌اندازه‌اند.

۴ــ اگر زاویهٔ BAC و خط $A'C'$ مفروض باشند آنگاه در هر نیم صفحه با مرز $A'C'$ یک نبم خط یکتای $A'B'$ (با آغاز A') چنان یافت می‌شود که زاویهٔ BAC با زاویهٔ $B'A'C'$ همنهشت باشد.

اگر زاویهٔ A با زاویهٔ B و همچنین زاویهٔ A با زاویهٔ C همنهشت باشد، آنگاه زاویهٔ B با زاویهٔ C همنهشت است.

۵ــ هرگاه دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی با دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلث دیگر نظیر به نظیر همنهشت باشند آنگاه سایر اضلاع و زوایای دو مثلث نظیر به نظیر همنهشت هستند.

توضیح. از اصول ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که هم‌اندازگی پاره خطها، یک رابطه هم ارزی است؛ همنهشتی زوایا نیز یک رابطهٔ هم ارزی است که اثبات آن قدری طولانی است. برخی از این اصول به‌طور مبهم در اصول متعارف اقلیدس گنجانیده شده است: اصل ۶ توسط اقلیدس فرض نشده است و آن را به صورت یک قضیه اثبات کرده است. اقلیدس برای اثبات این قضیه (ض‌زض) پذیرفته است که هرگاه شکلی در صفحه (یا فضا) حرکت کند ابعاد آن تغییر نمی‌کنند.

تعریف. زوج نیمخط h و k با مبدأ مشترک (و غیر منطبق) را یک زاویه می‌نامند و نیمخط های h و k را اضلاع و نقطه O را رأس زاویه می‌نامند. اگر k' و h' نیمخطهائی باشند که به ترتیب با k و h تشکیل خط بدهند، نقاطی از صفحه که اولاً با نقاط نیمخط k، در یک طرف خط $h'h$ واقع‌اند، ثانیاً با نقاط نیمخط h، در یک طرف خط $k'k$ واقع‌اند، نقاط درونی زاویهٔ $(\widehat{k,h})$ می‌نامند. مجموعهٔ نقاط درونی زاویه را درون زاویهٔ (k,h) می‌گویند.

IV_ اصل پیوستگی (اصل کمال خطی_ اصل ددکیند)

۱ــ هرگاه مجموعهٔ نقاط واقع بریک خط برابر با اجتماع دو مجموع ناتهی C_1 و C_2 باشد به طوری که هیچ نقطه‌ای از C_1 بین هیچ دونقطه‌ای از C_2 و همچنین هیچ نقطه‌ای از C_2 بین هیچ دونقطه‌ای از C_1 نباشد، آنگاه یک نقطهٔ O چنان یافت می‌شود که‌آن نقطه بین هردونقطه A و B با شرطهای $O \neq A \in C_1$ و $O \neq B \in C_2$ قرار دارد.

توضیح. اقلیدس بدون اثبات پذیرفته بود که هرگاه یک نقطه از خطی در داخل دایره‌ای باشد آن خط دایره را لزوماً قطع می‌کند و یا هرگاه یک نقطه از دایره C در داخل دایره دیگر D و یک نقطه از D در داخل دایره C باشد آنگاه دو دایره متقاطع‌اند. این نقائص را می‌توان از اصل ارشمیدس که از اصل ددکیند و سایر اصول هیلبرت به دست می‌آید جبران کرد. عمل اندازه‌گیری به کمک اصل ارشمیدس و به طریق وابسته کردن عددی حقیقی (مثبت) به هر یک از قطعه خطوط، امکان پذیر است.

اصل ارشمیدس. هرگاه پاره خط AB مفروض باشد آنگاه چند نقطهٔ A_1، A_2، ...، و A_n بر خط AB چنان یافت می‌شوند که خطهای AA_1، A_1A_2، ...، $A_{n-1}A_n$ هم‌اندازه بوده و نقطه B بین A_{n-1} و A_n قرار دارد.

اصل ارشمیدس برای محاسبهٔ دایره و بسیاری از مسائل هندسی کافی نیست و نمی‌تواند الگوی یکتائی برای هندسه اقلیدسی ارائه نماید. اصل پیوستگی در سال ۱۸۷۱ توسط ددکیند وضع شد که به نام اصل ددکیند نیز شناخته می‌شود. اضافه کردن این اصل به هندسهٔ اقلیدسی باعث می‌شود که الگوئی منحصر بفرد حاصل شود و محاسبات هندسی امکان پذیر گردد.

اصل پیوستگی یا اصل ددکیند معادل اصل کانتور است که به صورت زیر بیان می‌شود.

اصل کانتور. فرض کنیم بر هرخط l، یک دنبالهٔ بینهایت از پاره خطهای A_1B_1، A_2B_2، ... داده شده باشند که در آن هر یک از پاره خطها درون پارهٔ خط قبلی خود واقع شود. باز فرض کنیم که به ازای هر پاره خط، عدد n وجود داشته باشد به طوری که $A_n B_n$ کوچکتر از این پاره خط باشد. آنگاه نقطه‌ای مانند x وجود دارد که درون هر یک از پاره خطهای A_1B_1، A_2B_2، ... واقع شود.

از این اصل نتیجه می‌شود که تنها یک نقطه با چنین شرایطی وجود دارد. به کمک اصل ارشمیدس و کانتور ثابت می‌شود که یک رابطهٔ یک به یک بین نقاط یک خط و مجموعهٔ اعداد حقیقی وجود دارد و از آنجا می‌توان اندازهٔ یک پاره خط (طول پاره خط) را تعریف کرد.

اندازهٔ پاره خط. به ازای هرپاره خط یک عدد معین و مثبت با شرایط زیر نظیر می‌گردد:

۱ــ به پاره خطهای برابر (همنهشت) اعداد مساوی نظیر می‌گردد.

۲ــ اگر B نقطه‌ای از پاره خط AC و اعداد a و b متناظر با پاره خطهای AB و BC باشند، آنگاه عدد $a+b$ نظیر AC است.

۳ــ به یک پاره خط مانند OO' عدد ۱ نظیر می‌گردد.

عدد مثبتی که با این شرایط به هر پاره خط نظیر می‌گردد طول پاره خط و پاره خط OO' را واحد طول می‌نامند. وجود یگانگی اندازهٔ پاره خط قابل اثبات است.

اندازهٔ زاویه نیز بهمین ترتیب تعریف می‌شود.

۷ــ اصل توازی

۱ــ از یک نقطه خارج یک خط حداکثر یک خط به موازات آن خط می‌توان رسم کرد. با استفاده از اصول وقوع، بینیت، و همنهشتی می‌توان نشان داد که از یک نقطه خارج خط حداقل یک خط به موازات آن خط می‌گذرد. لذا از اصل توازی و سایر اصول نتیجه می‌شود که در **هندسهٔ اقلیدسی** از هر نقطه خارج خط دقیقاً یک خط به موازات آن می‌گذرد.

(ادامه دارد)

یادداشتها:

(1) Euclid (300_360)
(2) Ptolmyy
(3) Proclus
(4) Wallis, J. (1616_1703)
(5) Legendre (1752_1833)
(6) Wolfgang Bolyai
(7) Saccheri, G. (1667_1733)
(8) Lambert, J H. (1728_1777)
(9) Gauss, C. F. (1777_1855)
(11) Pasch, M.
(12) Peano, G. (1858_1932)
(13) Pieri, M.
(14) Veronese, H.
(15) Veblen, O.
(16) Robinson G. de B.
(17) Huntington, E. V.
(19) Hilbert, D. (1862_1943)
(20) Dedekind, R. (1831_1916)
(21) Archimedes (287?_212 B.C.)

قوای ۳

حاصلجمع های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$1 = 3^0$$
$$1+2 = 3^1$$
$$2+3+4 = 3^2$$
$$2+3+4+5+6+7 = 3^3$$
$$5+6+7+\dots+13 = 3^4$$
$$5+6+7+\dots+22 = 3^5$$
$$14+15+16+\dots+40 = 3^6$$
$$14+15+16+\dots+67 = 3^7$$
$$41+42+43+\dots+121 = 3^8.$$

آیا می‌توان این طرح را برای اعداد 3^9 و 3^{10}، وغیره نیز ادامه داد و آیا می‌توان یک دستور کلی ارائه داد؟

قابلیت قسمت بر ۷ و ۱۳

می‌خواهیم امتحان کنیم که یک عدد به ۷ قابل قسمت است یا نه. عدد ۲۷۷۲۰ را بـه عنوان مثال در نظر می‌گیریم. اگر این عدد را به ۵۰ تقسیم کنیم، خارج قسمت آن ۵۵۴ و باقیمانده‌اش ۲۰ می‌شود. اینک ۵۵۴ را به ۵۰ تقسیم می‌کنیم، خارج قسمت آن ۱۱ و باقیمانده‌اش ۴ می‌شود. حالا ۱۱ را به ۵۰ تقسیم می‌کنیم، ۰ خارج قسمت و ۱۱ باقیمانده‌اش می‌شود. حاصلجمع باقیمانده‌ها عبارتست از $35 = 11 + 4 + 20$ که بر ۷ قابل قسمت است. نتیجه می‌شود که ۲۷۷۲۰ بر ۷ قابل قسمت است. این عمل را می‌توان برای هر عدد دلخواه انجام داد. آیا می‌توانید بـرای این روش دلیل بیاورید؟ روش مشابهی نیز برای قابلیت قسمت به ۱۳ موجود است. آیا می‌توانید آن را پیدا کنید؟

قابلیت قسمت بر ۱۱

به عنوان مثال اعداد ۱۲۴۹۳۵۲۶ و ۹۲۴۹۳۵۷۶ را در نظر می‌گیریم. اینک

$$(6+5+9+2)-(2+3+4+1)=12,$$
$$(6+5+9+2)-(7+3+4+9)=-1,$$

که بترتیب دارای باقیمانده‌های ۱ و ۱۰ در تقسیم بر ۱۱ می‌باشند. خود اعداد نیز در تقسیم بر ۱۱ دارای همین باقیمانده‌ها هستند. ازاینجا یک روش برای قابلیت قسمت بر ۱۱ بدست آوردید و برای این روش دلیل بیاورید.

استقراء قهقرائی

علیرضا جمالی

مقدمه. استقراء قهقرائی[1] یکی از وسایل توانا در استدلال است. در بعضی از مواردی که استقراء معمولی توانائی خود را از دست می‌دهد توسل به این قضیه می‌تواند گره‌گشا باشد. ذیلاً پس از ذکر آن، به بیان چند مثال خواهیم پرداخت. اثبات احکام این مثالها به وسیلهٔ استقراء عادی به طریق معمول میسر نخواهد بود؛ ولی چنانکه ملاحظه خواهد شد به کمک استقراء قهقرائی این احکام به سهولت به اثبات خواهند رسید. صورت آن چنین است:

اگر P خاصیتی تابع شرایط دوگانهٔ ذیل باشد آنگاه جمیع اعداد طبیعی خاصیت P دارند:

I. مجموعهٔ اعداد طبیعی واجد خاصیت P نامتناهی است؛

II. به ازای هر عدد طبیعی n، اگر $n > 1$ و $P(n)$ آنگاه $P(n-1)$.

($P(n)$ یعنی n خاصیت P دارد.)

مبنای برهان این حکم شهوداً از این قرار است: درواقع می‌خواهیم با شرایط فوق ثابت کنیم که هر عدد طبیعی دلخواه مانند n خاصیت P دارد. گوئیم چون، برطبق I، مجموعهٔ اعداد طبیعی واجد خاصیت P نامتناهی است، این مجموعه عضوی مانند m دارد که $m > n$. فرض می‌کنیم که $d = m - n$. چون m خاصیت P دارد، به موجب II، $m - 1$ نیز خاصیت P دارد، و از اینجا، $m - 2$ نیز واجد خاصیت P است؛ به همین ترتیب $m - 3$، ...، و بالاخره $m - d$ یعنی n نیز واجد خاصیت P است. و این استدلال را کامل می‌کند.

استدلال مذکور بدین جهت مستدل نیست که در آن عبارتی نظیر «به همین ترتیب» در کار می‌آید که از نظر ریاضی اعتبار ندارد. ذیلاً استدلال فوق را بر برهانی دقیق استوار می‌کنیم.

برهان قضیه (استقراء قهقرائی)

می‌خواهیم ثابت کنیم که هر n طبیعی خاصیت P دارد. فرض کنیم که چنین نباشد. بنا بر این، عددی طبیعی مانند n_0 وجود دارد که فاقد خاصیت P است (فرض خلف). گوئیم چون مجموعهٔ اعداد طبیعی واجد خاصیت P نامتناهی است، عددی طبیعی مانند m هست به طوری که $m > n_0$ و $P(m)$. فرض کنیم که $m - n_0 = d$؛ ثابت می‌کنیم که حکم ذیل برقرار است:

(*) به ازای هر i طبیعی که $1 \leqslant i \leqslant d$، $P(m - i)$.

فرض کنیم که چنین نباشد. بنا بر این مجموعهٔ

$$B = \{i \in N \mid 1 \leqslant i \leqslant d, \sim P(m - i)\},$$

غیر تهی است. (علامت $\sim$ به معنی «چنین نیست که» است.) پس B دارای کوچکترین عضو است (برطبق خاصیت خوشترتیبی اعداد). فرض می‌کنیم که i_0 کوچکترین عضو B باشد. گوئیم $i_0 > 1$؛ زیرا هرگاه $i_0 = 1$ آنگاه خواهیم داشت، $\sim P(m - 1)$ که متناقض با $P(m)$ و شرط II است. بنا بر این، $i_0 - 1$ عددی است طبیعی و کوچکتر از d. ولی چون i_0 کوچکترین عضو B است، $m - (i_0 - 1)$ باید واجد خاصیت P باشد؛ یعنی $P(m - i_0 + 1)$. از اینجا به موجب شرط II، $P(m - i_0)$. بنا بر این، $i_0 \notin B$ که یک تناقض است. بالنتیجه (*) برقرار می‌شود. با انتخاب $i = d$ در (*)، خواهیم داشت $P(m - d)$؛ یعنی، $P(n_0)$. به عبارت دیگر، n_0 خاصیت P دارد که متناقض است با فرض خلف. بنا بر این، فرض خلف باطل، و قضیه ثابت می‌شود. ■

(1) backward induction

فایده. اگر ثابت شود که خاصیت P تابع شرط II قضیهٔ فوق هست، و همهٔ قوای طبیعی ۲ نیز خاصیت P دارند، نتیجه می‌شود که هر عدد طبیعی خاصیت P دارد؛ زیرا مجموعهٔ $\{2^1, 2^2, 2^3, \ldots\}$ مجموعه‌ای است نا متناهی. نظر به اهمیت این حالت خاص که اغلب در حل مسائل مربوط به استقراء مورد استفاده قرار می‌گیرد، صورت آن را ذیلاً ذکر می‌کنیم:

اگر P خاصیتی تابع شرایط دوگانهٔ ذیل باشد آنگاه جمیع اعداد طبیعی خاصیت P دارند:

I. به ازای هر k طبیعی، $P(2^k)$؛

II. به ازای هر عدد طبیعی n، اگر $n > 1$ و $P(n)$ آنگاه $P(n-1)$.

بعلاوه لازم به توضیح است که برای اثبات I، غالباً از استقراء معمولی استفاده می‌شود.

امثله

(آ). [نامساوی واسطه‌های عددی و هندسی]. می‌خواهیم ثابت کنیم که به ازای هر رشتهٔ از اعداد نامنفی مانند a_1، a_2، …، a_n،

$$(*)\qquad \sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}\leqslant \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$$

ابتدا ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هردو عدد نامنفی مانند a_1 و a_2،

$$\sqrt{a_1a_2}\leqslant \frac{a_1+a_2}{2}.$$

یعنی، نامساوی (*) به ازای 2^1 عدد برقرار است. اینک صحت آن را به ازای 2^2 عدد نامنفی a_1، a_2، a_3، و a_4 ثابت می‌کنیم. گوئیم

$$(1)\qquad \left(\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\right)^{1/2}\leqslant \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}.$$

ولی بر طبق آنچه که در مورد دو عدد نامنفی دیدیم،

$$(2)\qquad (a_1a_2)^{1/2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2},\quad (a_3a_4)^{1/2}\leqslant\frac{a_3+a_4}{2}.$$

از ضرب روابط (۲) با توجه به (۱) نتیجه می‌شود که

$$(a_1a_2)^{1/2}(a_3a_4)^{1/2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\right)^2,$$

و از اینجا برقراری (*) به ازای چهار عدد نامنفی محقق می‌شود. با همین روش، می‌توان نامساوی (*) را به ازای 2^3 عدد، و به‌طور کلی به استقراء به ازای 2^k عدد ثابت کرد [۱]. بنا بر این شرط I برقرار می‌شود.

اینک می‌خواهیم ثابت کنیم که هرگاه حکم به ازای هر n (>1) عدد نامنفی برقرار باشد آنگاه به ازای هر $n-1$ عدد نامنفی نیز برقرار است. فرض می‌کنیم که a_1، a_2، …، a_{n-1} رشته‌ای دلخواه از $n-1$ عدد نامنفی باشد. اعداد a'_1، a'_2، …، a'_n را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(3)\qquad \begin{cases} a'_i=a_i \quad (i=1,2,\ldots,n-1),\\ a'_n=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\end{cases}$$

به موجب فرض استقراء،

$$(a'_1a'_2\ldots a'_{n-1}a'_n)^{1/n}\leqslant\frac{a'_1+a'_2+\ldots+a'_{n-1}+a'_n}{n},$$

یا با استفاده از روابط (۳)،

$$\left(a_1a_2\ldots a_{n-1}\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}\right)^{1/n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}}{n},$$

که معادل است با

$$(a_1a_2\ldots a_{n-1})^{1/n-1}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}$$

که همان نامساوی مطلوب است. بدین ترتیب شرط II نیز برقرار است، بنا بر این به موجب استقراء قهقرائی، نامساوی (*) ثابت می‌شود. ■

این نامساوی حالت خاصی است از یک نامساوی مشهور موسوم به نامساوی واسطه‌های وزندار که در [۲] مورد بحث قرار گرفته است. بعلاوه لازم به توضیح است که برهانهای متعددی برای (*) ارائه شده که بعضی از آنها ساده ومختصر، و برخی نسبةً طولانی‌اند. این برهانها عموماً مبتنی بر استقراء ریاضی‌اند. یکی از اثباتهای موجز و تازهٔ آن در [۴] مذکور است. ضمناً باید متذکر شد که بااستفاده از خواص توابع محدب درآنالیز هم می‌توان این نامساوی را ثابت کرد. طالبین می‌توانند به [۳] مراجعه کنند.

(ب). [نامساوی ینسن[2]]. تابع حقیقی f را که بربازهٔ $I=[a,b]$ تعریف شده، محدب گویند در صورتی که به ازای هر x و y از I،

(2) J. L. W. V. Jensen (1859–1925).

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

می‌خواهیم ثابت‌کنیم که به ازای هر تابع محدب مانند $f:I\to R$، و هر رشته دلخواه از اعضای I مانند x_1، x_2، ...، x_n،

$$(**)\quad f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}.$$

(نا مساوی فوق بـه نا مساوی ینسن مشهور است.) در اینجا نیز حکم را با استفاده از قضیهٔ استقراء قهقرائی ثابت خواهیم کرد.

ابتدا حکم سادهٔ زیر را که مورد لزوم خواهد بود بیان می‌کنیم. اثبات آن به وسیلهٔ استقراء معمولی به‌سهولت انجام می‌گیرد.

اگر x_1، x_2، ...، x_n رشته‌ای از n عدد حقیقی دلخواه از بازهٔ بستهٔ I باشد آنگاه عدد $\frac{x_1+x_2+\dots x_n}{n}$ نیز در این بازه است. به عبارت دیگر، ازفرض $a\leqslant x_i\leqslant b$، ($i=1, 2, \dots, n$)، نتیجه می‌شود که

$$a\leqslant\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\leqslant b.$$

اینک برمی‌گردیم به‌اثبات (**) در حالتی که $n=2^k$. در صورتیکه $k=1$، $n=2$ و داریم

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

که برطبق تحدب تابع f، برقرار است. فرض کنیم‌که (**)، به ازای هر 2^k عدد از بازهٔ I برقرار باشد. می‌خواهیم صحت آن را به ازای هر 2^{k+1} عـدد از این بازه معلوم کنیم. بـرای این منظور ملاحظه می‌کنیم که

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{2^k}+x_{2^k+1}+\dots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)$$

$$=f\left(\frac{\frac{x_1+x_2+\dots+x_{2^k}}{2^k}}{2}+\frac{\frac{x_{2^k+1}+x_{2^k+2}+\dots+x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}\right)$$

$$\leqslant\frac{f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{2^k}}{2^k}\right)+f\left(\frac{x_{2^k+1}+x_{2^k+2}+\dots+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)}{2}$$

$$\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{2^k})}{2^{k+1}}+\frac{f(x_{2^k+1})+f(x_{2^k+2})+\dots+f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}}.$$

بنابراین شرط I قضیه (استقراء قهقرائی) محقق می‌شود. باقـی می‌ماند اثبات برقراری شرط II. برای منظور ثابت می‌کنیم که هرگاه نامساوی (**) بـه ازای هر $n(>1)$ عدد از بازهٔ بستهٔ I برقرار باشد، آنگاه به ازای هر $n-1$ عدد از این بازه نیز برقـرار است. فرض کنیم که x_1، x_2، ...، x_{n-1} رشته‌ای از n عـدد حقیقی از بـازهٔ مزبور باشد. در این صورت برطبق فرض داریم،

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1}}{n}\right)$$

$$\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{n-1})+f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right)}{n}.$$

ولی

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}+\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1}}{n}\right)$$

$$=f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right).$$

بنا بر این، خواهیم داشت

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right)$$

$$\leqslant\frac{f(x_2)+f(n_2)\dots+f(x_{n-1})}{n}$$

$$+\frac{1}{n}f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right).$$

از اینجا،

$$\frac{n-1}{n}f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right)$$

$$\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{n-1})}{n}$$

بنا بر این،

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_{n-1}}{n-1}\right)$$

$$\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{n-1})}{n-1}.$$

بدین ترتیب برقـراری شرط II نیز محقق مـی‌شود. بالنتیجه، بـرطبـق قضیه (استقراء قهقرائی) نـامساوی (**) بـه ثبوت می‌رسد. ■

در مرجع [۷] که کتابی است مقدماتی در باب استقراء و

حاوی تمرینات و امثلهٔ متعدد، می‌توان مسائل دیگری راجع به مبحث اخیر یافت. ضمناً دراین مورد می‌توان به [۳] نیز مراجعه کرد.

در اینجا به‌بحث مربوط به استقراء قهقرائی خاتمه می‌دهیم و برای حسن ختام مسئله‌ای ازهندسه را که با توسل به نامساوی ینسن حل خواهد شد، ذکر می‌کنیم. به وسیلهٔ نامساوی مذکور می‌توان بعضی از مسائل مربوط به ماکزیموم و مینیموم را در هندسه حل کرد [۵].

اینک می‌پردازیم به طرح مسئله

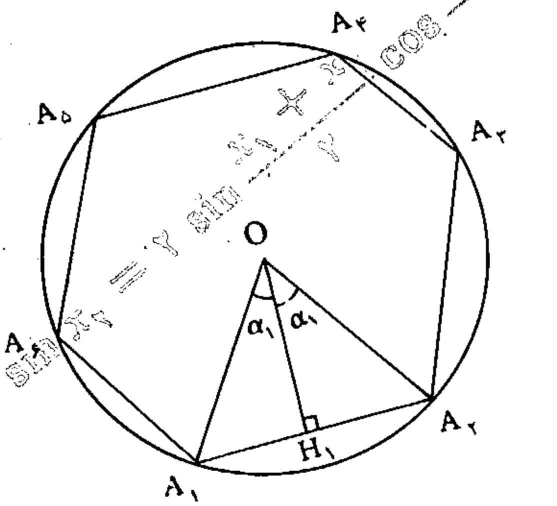
از بین همهٔ n ضلعیهای محاط در یک دایرهٔ مفروض، n ضلعی منتظم بیشترین مساحت را دارد.

برای حل، شعاع دایرهٔ مفروض را r می‌گیریم. فرض می‌کنیم که $A_1A_2\ldots A_n$ یک n ضلعی دلخواه محاط در این دایره باشد. از نقطهٔ O مرکز دایره عمودی بر هر یک از اضلاع A_iA_{i+1} فرود آورده و پای عمود را H_i می‌نامیم ($i = 1, 2, \ldots, n-1$).

فرض می‌کنیم که $A_i\widehat{O}H_i = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

در این صورت مساحت مثلث A_iOA_{i+1} برابر $\frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha_i$ می‌شود ($i = 1, 2, \ldots, n$). بنا بر این مساحت n ضلعی $A_1A_2\ldots A_n$ چنین خواهد شد:

$$S = \frac{1}{2}r^2\sum_{i=1}^{n}\sin 2\alpha_i$$



که در آن، $0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

اینک گوئیم که تابع $f(x) = -\sin x$ بربازهٔ $I = [0, \pi]$ محدب است؛ زیرا، به ازای هر x_1, x_2 از I،

$$\sin x_1 + \sin x_2 = 2\sin\frac{x_1 + x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2} \leqslant 2\sin\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

بنا بر این با به کار بردن نامساوی ینسن، خواهیم داشت:

$$S = \frac{1}{2}r^2\sum_{i=1}^{n}\sin 2\alpha_i \leqslant \frac{r^2}{2}\sin\frac{2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + 2\alpha_n}{2} = \frac{r^2}{2}\sin\frac{2\pi}{2}.$$

ولی طرف دوم نامساوی فوق عبارتست از مساحت یک n ضلعی منتظم که در دایره‌ای به شعاع r محاط است. از اینجا حکم محقق می‌شود. ■

برای اثبات دیگری از این حکم که بی‌استفاده از نامساوی ینسن صورت می‌گیرد به [۶] مراجعه کنید.

مراجع

(آ). فارسی

[۱]. شهریاری اردیلی، رضا، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، سال اول، شمارهٔ ۱، (۱۳۶۳).

[۲]. مصاحب، غلامحسین، آنالیز ریاضی، جلد اول، قسمت II، (۱۳۵۰).

(ب). بیگانه

[3]. Bowmann, F. and Gerard, F. A., 1967, *Higher Calculus* (Cambridge Unirersity press).

[4] Chong, K., M., *American Mathematical Monthly*, vol. 83, (1976).
(ترجمهٔ مقالهٔ فوق در مجلهٔ فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، شمارهٔ اول، بهار ۱۳۶۱ آمده است)

[5]. Meschkowski, H., 1966, *Unsolved and Unsolvable Problems in Geometry* (Oliver & Boyd).

[6]. Rademacher, H. and Teoplitz, O., 1957. *The Enjoyment of Mathematics for the Amateure* (Princton Unirersity Press).

[7]. Youse, B. K., 1964 *Mathematical Induction* Prentice _ Hall INC).

ایجاد یک تناظر یک به یک بین $N\times N$ و N

علیرضا جمالی ـ رضا شهریاری

حل مسئلهٔ ۱۲ شماره اول مجله

ابتدا یک تناظر یک به یک بین مجموعهٔ

$$A = \{(x, y \mid x, y \in N, y \leqslant x\}$$

و N برقرار می‌کنیم. می‌توان مجموعهٔ A را به وسیلهٔ نقاطی از صفحهٔ اقلیدسی که دارای مختصات طبیعی‌اند و عرض هریک از آنها از طولشان نا بیشتر است، نشان داد (شکل زیر). هدف اینست که تناظری یک به یک مانند g بین A و N برقرار کنیم. با توجه به شکل بنظر می‌رسد که این تناظر باید چنین باشد:

(۱,۱) ↔ ۱, (۲,۱) ↔ ۲, (۲,۲) ↔ ۳, (۳,۱) ↔ ۴,
(۳,۲) ↔ ۵, (۴,۱) ↔ ۷, (۴,۲) ↔ ۸, (۴,۳) ↔ ۹,...

(این عمل، در واقع، شماره گذاری اعضای A است.) اینک باید ضابطه‌ای را بیابیم که این تناظر را بیان کند. با اندکی تأمل معلوم می‌شود که جفت مرتب (i, j) از A را باید به عدد طبیعی

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (i-1) + j$$

نظیر کرد. بنابراین کافی است که تابع $g: A \to N$ را چنین تعریف کنیم

$$g(i,j) = \frac{i(i-1)}{2} + j \quad (i,j) \in A.$$

از طرف دیگر تابع $h: N\times N \to A$ را با ضابطهٔ $h(x,y) = (x+y-1, y)$ تعریف می‌کنیم. بسادگی معلوم می‌شود که این تابع یک تناظر یک به یک $N\times N$ و A است. بنابراین ترکیب دو تابع h و g یعنی $goh: N\times N \to N$ تناظری یک به یک خواهد بود. ذیلاً پس از تعیین ضابطه تابع goh، مستقیماً ثابت خواهیم کرد که تابع اخیر تناظری یک به یک بین $N\times N$ و N است. ملاحظه می‌شود که به ازای هر (m, n) از $N\times N$،

$$\begin{aligned}(goh)(m,n) &= g(h(m,n))\\ &= g(m+n-1, n)\\ &= \frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2) + n.\end{aligned}$$

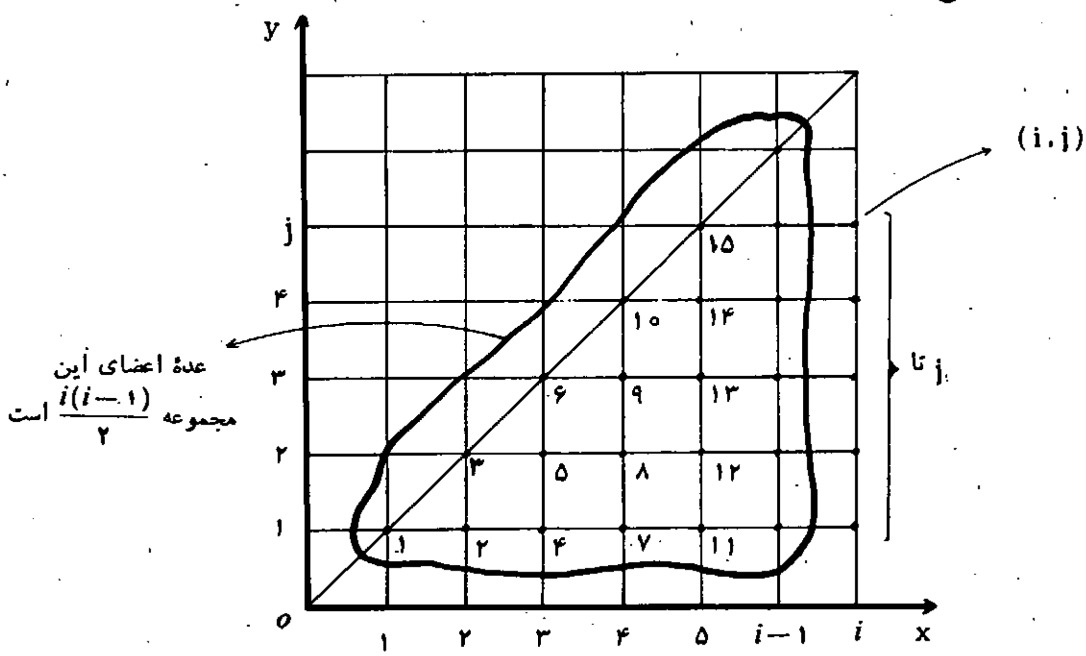
(مراجعه شود به مسئلهٔ ۱۲ مندرج در شمارهٔ اول مجلهٔ رشد آموزش ریاضی).

برای سهولت در نوشتن goh را با f نشان می‌دهیم.

f یک به یک است. فرض می‌کنیم که (m, n) و (m', n') دو عضو دلخواه از $N\times N$ باشند به طوری که

$$f(m,n) = f(m',n').$$

بنابراین،



$$(1)\qquad \frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)+n = \frac{1}{2}(m'+n'-1)(m'+n'-2)+n'.$$

با فرض $m+n-1=k$، $m'+n'-1=k'$ رابطهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$\frac{1}{2}k(k-1)+n=\frac{1}{2}k'(k'-1)+n',$$

یا

$$(2)\qquad (k-k')(k+k'-1)=2(n'-n).$$

با استفاده از (۲) ثابت می‌کنیم که $k=k'$. اگر چنین نباشد، $k\neq k'$. بی آنکه خللی بـه کلیت استدلال وارد شود، فرض می‌کنیم کـه $k>k'$. بنابرایـن، $k-k'\geqslant 1$. گوئیم $k-k'>1$. زیرا، اگر $k-k'=1$ آنگاه از (۲) نتیجه می‌شود که $k'=n'-n$ یعنی $m'+n'-1=n'-n$؛ که یک تناقض است (زیـرا m' و n اعدادی طبیعی‌انـد). پس $k-k'>1$. بالنتیجه، $k-k'\geqslant 2$. از اینجا برطبق (۲)،

$$2(k+k'-1)\leqslant (k-k')(k+k'-1)=2(n'-n),$$

یا

$$k+k'-1\leqslant n'-n.$$

اگر بجای k و k' مقادیرشان را برحسب n، m، n'، و m' قرار دهیم،

$$2n+m+m'\leqslant 3,$$

که یک تناقض است (n، m، m' اعدادی طبیعی‌اند).

f پوشا است (راه حل اول). فرض کنیم که ν عدد طبیعی دلخواهی باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که اعـدادی طبیعی مانند m و n موجودند به طوری که

$$\frac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2)+n=\nu$$

با فرض $m+n-1=k$، خواهیم داشت

$$\frac{1}{2}k(k-1)+n=\nu.$$

در صورتی که چنین اعدادی موجود باشند، باید داشته باشیم

$$\frac{1}{2}k(k-1)+1\leqslant \frac{1}{2}k(k-1)+n=\nu\leqslant \frac{1}{2}k(k-1)+k,$$

(زیرا، $1\leqslant n\leqslant k$). بنابراین، بـاید عدد طبیعی k را چنان تعیین کنیم که

$$\frac{1}{2}k(k-1)+1\leqslant \nu\leqslant \frac{1}{2}k(k+1)$$

(باید توجه داشت که ν مفروض است). از دو نـامساوی فـوق، نامساویهای ذیل حاصل خواهند شد:

$$k^2-k+2-2\nu\leqslant 0,$$
$$k^2+k-2\nu\geqslant 0.$$

برای تعیین k (برحسب ν)، جواب مشترک دو نامساوی فوق را بدست می‌آوریم. ملاحظه می‌شود که

k	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{1+8\nu}}{2}$		$\frac{1-\sqrt{8\nu-7}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{1+8\nu}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{8\nu-7}}{2}$		$+\infty$
$sgn(k^2+k-2\nu)$		+		−		−		+		+	
$sgn(k^2-k+2-2\nu)$		+		+		−		−		+	

بنابراین، چنین k ی (در صورت وجود) بـاید در نامساوی زیر صدق کند:

$$(3)\qquad \frac{-1+\sqrt{8\nu+1}}{2}\leqslant k\leqslant \frac{1+\sqrt{8\nu-7}}{2}$$

اینک کافی است ثابت کنیم که بین دو عدد حقیقی

$$\frac{1+\sqrt{8\nu-7}}{2} \quad \text{و} \quad \frac{-1+\sqrt{8\nu+1}}{2}.$$

همواره یک عدد طبیعی وجود دارد. ثابت خواهیم کرد که عدد طبیعی

$$k=\left[\frac{1+\sqrt{8\nu-7}}{2}\right]$$

در نامساوی (۳) صدق می‌کند (علامت $[m]$ به معنی جزء صحیح m است)، و بدین ترتیب وجود k محقق می‌شود. بدیهی است که

$$k\leqslant \frac{1+\sqrt{8\nu-7}}{2}$$

(چرا؟) بنابراین کافی است نشان دهیم که

$$\frac{-1+\sqrt{8\nu+1}}{2}\leqslant k.$$

برای اثبات، گوئیم به موجب تعریف k،

$$\frac{1+\sqrt{8\nu-7}}{2} < k+1,$$

از اینجا،

$$\sqrt{8\nu-7} < 2k+1,$$

یا

$$8\nu < 4k^2+4k+8.$$

از تقسیم طرفین بر ۸، نامساوی

$$\nu < \frac{k(k+1)}{2}+1$$

حاصل می‌شود. چون طرفین این نامساوی اعدادی طبیعی‌اند،

$$\nu \leqslant \frac{k(k+1)}{2}.$$

بنابراین

$$8\nu+1 \leqslant (2k+1)^2.$$

بالنتیجه،

$$\frac{-1+\sqrt{8\nu+1}}{2} \leqslant k.$$

بعد از تعیین k، از رابطهٔ

$$\frac{1}{2}k(k-1)+n=\nu,$$

n معلوم خواهد شد؛ و پس از مشخص شدن n، از رابطهٔ $k=m+n-1$، m تعیین خواهد شد.

برعهدهٔ خواننده است که تحقیق کند اعداد n و m حاصل طبیعی‌اند و در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$f(m,n)=\nu.$$

ذیلاً با ذکر مثالی نشان می‌دهیم که عملاً چگونه می‌توان به ازای هر ν مفروض اعداد طبیعی m و n مذکور را یافت.
به‌عنوان مثال عدد $\nu=9$ را اختیار می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که

$$k=\left[\frac{1+\sqrt{8\nu-7}}{2}\right]=\left[\frac{1+\sqrt{65}}{2}\right]=4,$$

$$n=\nu-\frac{1}{2}k(k-1)=9-\frac{1}{2}(4)(3)=3,$$

$$m=k-n+1=4-3+1=2.$$

بنابراین $(2,3)$ جواب است. یعنی $f(2,3)=9$ (امتحان کنید.)

راه حل دوم. با همان علائم و مفروضات راه حل اول (برای پوشا بودن f)، ابتدا باید ثابت کنیم که اعدادی طبیعی مانند n و k موجودند به طوری که

$$\frac{1}{2}k(k-1)+n=\nu,$$

که در آن $n \leqslant k$. اگر چنین اعدادی موجود باشند، باید داشته باشیم:

$$n=\frac{1}{8}\{(8\nu+1)-(2k-1)^2\}.$$

با توجه به رابطهٔ فوق، ذیلاً برای تعیین عدد طبیعی n بر حسب ν اقدام می‌کنیم. گوئیم چون به‌ازای هر ν طبیعی $3 \leqslant \sqrt{1+8\nu}$، همواره می‌توان عدد طبیعی فردی مانند l یافت به طوری که $l<\sqrt{1+8\nu}$. از طرفی، چون تعداد چنین اعداد فردی متناهی است، تعیین بزرگترین این اعداد امکان پذیر است.
فرض کنیم l_0 بزرگترین عدد فردی باشد که $l_0<\sqrt{1+8\nu}$.
بنابراین،

$$l_0+2 \geqslant \sqrt{1+8\nu}. \qquad (*)$$

اینک عدد n را چنین در نظر می‌گیریم:

$$n=\frac{1}{8}\{(8\nu+1)-l_0^2\}.$$

n یک عدد طبیعی است؛ زیرا از فرد بودن l_0 معلوم می‌شود که $\frac{1-l_0^2}{8}$ عددی صحیح است، و بعلاوه از نامساوی $l_0<\sqrt{1+8\nu}$ نتیجه می‌شود که $\nu>\frac{l_0^2-1}{8}$.
بنابراین عدد

$$n=\nu+\frac{1-l_0^2}{8}$$

طبیعی خواهد شد.

پس از تعیین عدد طبیعی n، عدد طبیعی k از رابطهٔ $l_0=2k-1$ معلوم می‌شود و در نتیجه بر طبق رابطهٔ $k=m+n-1$، عدد m تعیین خواهد شد. آنچه که باقی می‌ماند اثبات این حکم است که m عددی است طبیعی. برای اثبات گوئیم

$$m=k-n+1=\frac{l_0+1}{2}-\left(\nu+\frac{1-l_0^2}{8}\right)+1$$
$$=1+\frac{(l_0+2)^2-(8\nu+1)}{8}.$$

از اینجا، به موجب $(*)$، معلوم می‌شود که m یک عدد طبیعی است.

برگردیم به همان مثالی که در ذیل راه حل اول ذکر کردیم. فرض کنیم که $\nu=9$. در این صورت باید بزرگترین عدد طبیعی فرد، یعنی l_0، را چنان تعیین کنیم که

$$l_0<\sqrt{1+8\nu}\ (=\sqrt{73}).$$

بنابراین $l_0=7$. از اینجا

$$n=\nu+\frac{1-l_0^2}{8}=9+\frac{1-49}{8}=3.$$

بعلاوه، از رابطه $l_0=2k-1$، خواهیم داشت $k=4$ و بالنتیجه،

$$m=k-n+1=4-3+1=2.$$

و این همان جوابی است که در راه حل اول بدست آوردیم. ■

برهانهائی از اصمیت $\sqrt{2}$

و. هریس
ترجمه: دکتر آدینه محمد نارنجانی

مقدمهٔ مترجم. این مقاله درمورد تعدادی از برهانهای موجود برای اصمیت $\sqrt{2}$ است. اهمیت مقالهٔ حاضر در این است که در هر برهان، احتمالاً بجز برهان هندسی، از یک مبحث جالب و مهم نظریهٔ اعداد استفاده شده است. برای کسب اطلاعات در این زمینه‌ها می‌توان به کتاب پر ارزش تئوری مقدماتی اعداد تألیف مرحوم دکتر غلامحسین مصاحب رجوع کرد.

در این مقاله، سیزده طریق اثبات برای اصمیت $\sqrt{2}$ ارائه می‌شود. در هرطریق متذکر می‌شویم که آیا روش ارائه شده را می‌توان برای اصمیت جذرهای دیگر یا ریشه‌های مراتب بالاتر تعمیم داد.

برهان ۱. برهان آخرین رقم. فرض کنیم که $\sqrt{2}$ منطق باشد، بنابراین می‌توان نوشت $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ و $a^2=2b^2$، که در آن a و b اعداد صحیح متباین هستند. آخرین رقم مربع یک عدد صحیح برابر است با آخرین رقم مربع آخرین رقم آن عدد. بنابراین b^2 به یکی از ارقام ۰، ۱، ۴، ۵، ۶، یا ۹ ختم می‌شود. پس $2b^2$ به یکی از ارقام ۰، ۲، یا ۸ ختم می‌شود. اینک چون a^2 نیز مربع کامل است، به یکی از ارقام ۰، ۱، ۴، ۵، ۶، یا ۹ ختم می‌شود، پس از آنجا $a^2(=2b^2)$ نمی‌تواند به ۲ یا ۸ ختم شود. بنابراین، a^2 و $2b^2$ هردو به صفر ختم می‌شوند. بالنتیجه، b^2 به ۰ یا ۵ ختم می‌شود. ولی اگر a^2 به صفر ختم شود و b^2 به صفر یا ۵ آنگاه a به صفر ختم می‌شود و b به صفر یا ۵. بنابراین ۵ هم a و هم b را عاد می‌کند و این متناقض با متباین بودن a و b است. پس $\sqrt{2}$ اصم است.

این روش برای اثبات اینکه ریشهٔ هرعدد صحیح مثبت مختوم به ۲، ۳، ۷، یا ۸ اصم است، مفید می‌باشد. با در نظر گرفتن دو رقم آخر، اصمیت ریشه‌های دیگری از جمله $\sqrt{26}$ و $\sqrt[3]{2}$ را می‌توان ثابت کرد.

پروفسور والترت. اسکات[1] مطلب زیر را یاد آوری کرده است. در مبنای ۳ هرمربع کامل به یکی از ارقام ۰ یا ۱ ختم می‌شود. اگر $a^2=2b^2$ که در آن a و b متباین‌اند، آنگاه a و b باید به صفر ختم شوند. بنابراین متباین نیستند و این یک تناقض است.

برهان ۲. اولین برهان عامل اول. فرض کنیم که $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ و $a^2=2b^2$، که در آن a و b اعداد صحیح مثبت و نسبت بهم اولند. ملاحظه می‌کنیم که $b>1$، زیرا در غیر این صورت $b=1$ و $a=\sqrt{2}$ عددی است صحیح که این درست نیست[2]. به وسیلهٔ تقسیم، $a\cdot\left(\frac{a}{2}\right)=b^2$. اینک،

(۱) هرعدد صحیح مثبت بزرگتر از ۱ یا اول است یا به صورت حاصلضربی از اعداد اول؛

و

(۲) اگر عدد اول p حاصلضرب دو عدد صحیح مانند rs را عاد کند آنگاه $p|r$ یا $p|s$. چون $b>1$، عددی اول مانند p هست $p|b$. بنابراین، $p|\frac{a}{2}$ یا $p|a$. درهرحالت $p|a$. بنابراین p هم a و هم b را عاد می‌کند و این فرض باتباین a و b متناقض است. پس $\sqrt{2}$ اصم است.

این روش برای همهٔ ریشه‌های اصم، یعنی، در هرحالت که $b>1$، مفید است. این روش را می‌توان هم برای حالت جذر و هم برای ریشه‌های مراتب بالاتر بکار بست.

برهان ۳. دومین برهان عامل اول. فرض کنیم که $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ و $a^2=2b^2$، که درآن، a و b دو عدد صحیح متباین هستند. در این صورت، $b^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

(۱) هرعدد صحیح مثبت بزرگتر از ۱ یا عددی اول است یا حاصلضربی از اعداد اول؛

و

(۲) اگر p حاصلضربی از اعداد صحیح مانند rs را عاد کند، آنگاه $p|r$ یا $p|s$؛

و

(۳) اگر p عددی اول و $p|r$ و $p|r+s$ یا $p|r-s$ آنگاه $p|s$.

مانند برهان ۲ نتیجه می‌شود که $b>1$ و عامل اولی مانند p هست که b را عاد می‌کند. در این صورت p یکی از اعداد $a+b$ و $a-b$ را عاد می‌کند. در هر صورت $p|a$. پس p

هم a و هم b را عاد می‌کند و این یک تناقض است. بنابراین $\sqrt{2}$ اصم است.

این روش را می‌توان برای ریشه‌های مرتبهٔ دوم و مراتب بالاتر تعمیم داد.

برهان ۴. برهان «هر دو زوجند». فرض کنیم که $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ و $a^2 = 2b^2$، که در آن a و b دو عدد صحیح مثبت متباین می‌باشند. اینک اگر a^2 زوج باشد، a نیز زوج خواهد بود. رابطهٔ $a^2 = 2b^2$ نشان می‌دهد که a^2 و در نتیجه a زوج است. گوئیم $a = 2c$، که در آن c عددی صحیح است. در این صورت $2b^2 = 4c^2$ و یا $b^2 = 2c^2$. بنابراین b^2 و در نتیجه b زوج است. یعنی a و b هردو زوجند و این با متباین بودن آنها متناقض است. بنابراین $\sqrt{2}$ اصم است.

این روش را می‌توان برای ریشه‌های مرتبهٔ دوم و مراتب بالاتر تعمیم داد.

برهانهای ۵ و ۶. برهانهای قضیهٔ اساسی. فرض کنیم که $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ و $a^2 = 2b^2$. مانند قبل، چون $1 < b$ و $1 < \sqrt{2}$، نتیجه می‌شود که $1 < a$. اینک هرعدد صحیح مثبت بزرگتر از ۱ را می‌توان به صورت حاصلضربی منحصر بفرد از قوای اعداد اول نوشت؛ بنابراین

$$a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_t^{r_t},$$

و

$$b = q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots q_u^{s_u},$$

که در آن p_1، p_2، ...، p_t و q_1، q_2، ...، q_u اعداد اول و r_1، r_2، ...، r_t و s_1، s_2، ...، s_u اعداد صحیح مثبت هستند. با توجه به تجزیهٔ a و b، نتیجه می‌شود

$$p_1^{2r_1} p_2^{2r_2} \dots p_t^{2r_t} = 2 q_1^{2s_1} q_2^{2s_2} \dots q_u^{2s_u}.$$

اما این یک تناقض است. زیرا (برهان ۵) ۲ با قوه‌ای زوج در طرف چپ و با قوه‌ای فرد در طرف راست ظاهر شده است. یا چون (برهان ۶) تعداد کل عوامل اول در یک طرف زوج و در طرف دیگر فرد است. بنابراین $\sqrt{2}$ اصم است.

این روش را می‌توان برای جذرها و ریشه‌های مراتب بالاتر بکار برد.

برهانهای ۷، ۸، و ۹. برهانهائی که یک خاصیت مینیموم را نقض می‌کنند. مانند قبل می‌نویسیم $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. درمیان همهٔ کسرهائی با صورت مثبت که مساوی با $\frac{a}{b}$ هستند کسری وجود دارد که صورتش از بقیهٔ کسرها کوچکتر است؛ همین طور کسری هست که مخرجش از بقیه کوچکتر است؛ همچنین کسری موجودست که $a + b$ مینیموم است. بنابراین می‌توان فرض کرد (برهان ۷) که صورت "a" کوچکترین عدد صحیح مثبت ممکن است؛ (برهان ۸) مخرج "b" کوچکترین مقدار مثبت ممکن‌است؛ (برهان ۹) مجموع صورت و مخرج کوچکترین عدد صحیح مثبت ممکن است. در این صورت با تفریق ab از طرفین رابطهٔ $a^2 = 2b^2$ داریم،

$$a^2 - ab = 2b^2 - ab.$$

بنابراین $a(a-b) = b(2b-a)$. با تقسیم داریم،

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}.$$

دراین بسط جدید برای $\sqrt{2}$ داریم، $2b - a < a$ و $a - b < b$ و حاصلجمع صورت و مخرج کمتر از $a + b$ است. سه تناقض اخیر برای تکمیل سه برهان کافی است.

این روش را می‌توان برای همهٔ جذرها و ریشه‌های مراتب بالاتر بکار برد. در واقع، در برهانهای ناشماری شبیه این می‌توان فرض کرد که تفاضل صورت و مخرج کوچکترین مقدار ممکن است یا $a^4 + 3b$ کوچکترین مقدار ممکن است.

برهان ۱۰. برهان کسر مسلسل. فرض کنیم که $a = \sqrt{2}$؛ بنابراین، $a^2 = 2$ و $a^2 - 1 = 1$. دراین‌صورت $a - 1 = \frac{1}{1+a}$ و $a = 1 + \frac{1}{1+a}$.
با جایگذاری

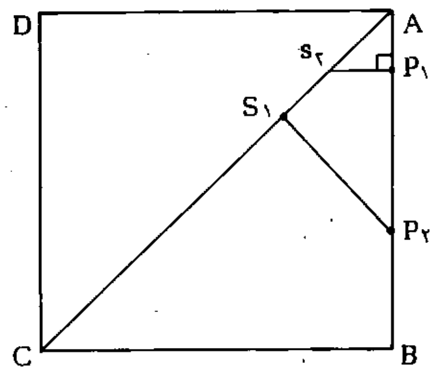
$$a = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+a}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}.$$

می‌دانیم که یک کسر مسلسل نامتناهی متناوب که صورت همهٔ آنها ۱ و مخرج همه آنها عدد صحیح مثبتی باشد یک عدد گنگ[۳] از درجهٔ دوم را نشان می‌دهد. بنابر این، $\sqrt{2}$ اصم است. این روش برای همهٔ اعداد گنگ از درجهٔ دوم کفایت می‌کند، ولی، برای ریشه‌های مراتب بالاتر پیچیده است.

برهان ۱۱. برهان تئوری معادلات. فرض کنیم که $a = \sqrt{2}$. بنابراین a ریشهٔ معادلهٔ $x^2 - 2 = 0$ است. اگر $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ معادله‌ای با ضرایب صحیح a_0، a_1، ...، a_n باشد، آنگاه به ازای هر جواب منطق $x = \frac{r}{s}$ باید $r \mid a_n$ و $s \mid a_0$. ولی در $x^2 - 2 = 0$ هرجواب $x = \frac{a}{b}$، که در آن a و b اعداد صحیح‌اند، باید داشته باشیم $b = 1$ که یک تناقض است. بنابراین $\sqrt{2}$ اصم است.

این روش همهٔ حالات جذرها و ریشه‌های مراتب بالاتر را در بر می‌گیرد.

برهان ۱۲. برهان هندسی. بنا بر قضیهٔ فیثاغورس، نسبت طول قطر AC از یک مربع به طول ضلع AB از آن برابر $\sqrt{2}$ است. فرض کنیم که طولهای AC و AB متوافق باشند (بنابراین نسبت $\frac{AC}{AB}$ منطق است). (شکل زیر). در این صورت قطعه‌ای مانند AP موجود است به طوری که AC و AB مضرب صحیحی از AP است. روی AC طول CS_1 را مساوی AB اختیار کرده، سپس S_1P_1 را عمود بر AC رسم می‌کنیم. در این صورت $AP_1 = AB - P_1B = AB - AS_1$، و بنابراین AP_1 و AS_1 نسبت به AP متوافقند[۴] روی P_1A طول P_1P_2 را به اندازهٔ S_1A جدا می‌کنیم و P_2S_2 را عمود بر AB رسم می‌کنیم. در این صورت AP_2 و AS_2 نسبت به AP متواقفند. این فرایند را ادامه می‌دهیم تا به زوج متوافق AP_n و AS_n برسیم که در آن $AP_n < AP$. این ممتنع است. بنابراین $\sqrt{2}$ اصم است.
این روش را دست کم می‌توان برای جذرها تعمیم داد.



برهان ۱۳. روش نزول نامتناهی فرما. فرض کنیم که $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ که در آن a و b اعداد صحیح مثبتند. داریم

بنابراین،
$$\sqrt{2}+1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

$$\frac{a}{b}+1 = \frac{1}{\frac{a}{b}-1} = \frac{b}{a-b},$$

و
$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} - 1 = \frac{2b-a}{a-b} = \frac{a_1}{b_1},$$

که در آن $a_1 = 2b - a$ و $b_1 = a - b$. چون $1 < \sqrt{2} < 2$، داریم $b < a < 2b$ و $0 < 2b - a = a_1 < a$. بدین طریق رشتهٔ a، a_1، a_2، ... با خاصیت $a > a_1 > a_2 > \dots$ از اعداد صحیح بدست می‌آید که جملگی مثبتند. اینک می‌دانیم که فقط تعدادی متناهی عدد صحیح کوچکتر از عدد صحیح مثبت مفروضی وجود دارد. پس این غیر ممکن است و بنابراین $\sqrt{2}$ اصم است.

برهانهای ۱، ۲، ۳ تازگی دارند و از نویسندهٔ مقاله هستند. برهان ۱ در سال ۱۹۶۹ بنظر نگارنده آمد. برهانهای ۴، ۵، ۱۲، و ۱۳ در سال ۱۹۴۵ بنظر ایوز[۵] رسید. برهان ۶ به وسیلهٔ ج. ا. ایگل[۶] یادآوری شد. برهانهای ۷، ۸، و ۹ در سال ۱۹۶۸ در مقالهٔ سوبارائو[۷]، و تعمیم آن برای مراتب بالاتر در مقالهٔ لنگ[۸] ظاهر گردید. برای برهان ۱۰ به استوارت[۹] (۱۹۶۴، صفحهٔ ۳۵۴) و برای برهان ۱۱ به مك دوفی[۱۰] (۱۹۵۴، صفحهٔ ۲۶) مراجعه کنید.

مطالعه در اصمیت $\sqrt{2}$ را با یادی از اثبات نادرست مری[۱۱] (۱۹۶۷) و اظهار نظر جالب بکنباخ[۱۲] دربارهٔ آن (۱۹۶۸) تکمیل می‌کنیم.

یادداشتها:

(۱) Walter T. Scott

(۲) زیرا $1 < \sqrt{2} < 2$ (مترجم)

(۳) Surd

(۴) $AS_1 = AC - AB$ و چون AB و AC مضرب صحیحی از AP اند، AS_1 و در نتیجه بنابر رابطهٔ $AP_1 = AB - AS_1$ طول AP_1 نیز مضرب صحیحی از AP است (مترجم).

(۵) Eves (۶) J. E. Eagle (۷) Subbarao
(۸) Lang (۹) Stewart (۱۰) Mac Duffee
(۱۱) Murray (۱۲) Beckenbach

ترجمه از

The Mathematics Teacher (January 1971). "On Proofs of The Irrationality of $\sqrt{2}$", By V. C. Harris, San Diego State Icollege, San Diego, California.

منابع

Beckenbach, Edwin F. "*Geometric Proofs of The Irrationality of $\sqrt{2}$*". ARITHMETIC TEACHER 15 (March 1968): 244–50.

Eves, Howard "*The Irrationality of $\sqrt{2}$*", MATHEMATICS TEACHER 38 (1945): 317–18

Harris, V. C. "*Terminal Digit Proof That $\sqrt{2}$ Is Irrational*". Mathematical Gazette (February 1969).

Lang, L. J. "*A Simple Irrationality Proof for n-th Roots of Positive Integer*", Mathematics Magazine 42 (November 1969): 242–43.

Mac Duffee, C. C. *Theory of Equations*, New york, John Wiley & Sons, 1954.

Marray, Jerome T. "*A More Elementary View of Irratioualty of $\sqrt{2}$* "ARITHMETIC TEACHER 14 (February 1967).110–14.

Stewart, B. M. *Theory of Nnmbers* 2d ed, New yourk, Macmillan Co; 1964.

Subbarao, M. V. "*A Simple Irrationalty Proof for Quadratic Surds*" American Mathematical Monthly 73 (August-September 1968): 772–73.

مکانهای هندسی

حسین غیور

مکان هندسی

مکان هندسی نقطه‌ای از فضای H که دارای خاصیت a باشد شکل هندسی f است هرگاه،

I. هر نقطه از شکل f دارای خاصیت a باشد؛

II. هر نقطه از فضای H که دارای خاصیت a است، متعلق به شکل f باشد.

برای توضیح، مکان هندسی نقطه‌ای از فضای H را که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است در نظر می‌گیریم. اگر فضای H (میدان عمل) صفحه‌ای شامل A و B باشد، می‌دانیم که مکان هندسی عمود منصف پاره خط AB است. اگر H فضای سه‌بعدی باشد، مکان هندسی صفحهٔ عمود منصف AB است. اگر H خط مستقیمی باشد که از A و B می‌گذرد، مکان هندسی مطلوب نقطهٔ وسط AB است. اگر H سطح کره‌ای باشد که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد، مکان هندسی مطلوب دایرهٔ عظیمه‌ای از این کره است که صفحهٔ آن بر AB عمود است.

مکانهای هندسی مهم

مکانهای هندسی اصلی و مهم که علم و اطلاع بر آنها برای حل مسائل کمک مؤثری می‌کند، از این قرارند:

۱. مکان هندسی نقطه‌ای که از نقطهٔ O به فاصلهٔ R است. می‌دانیم که این مکان در هندسهٔ مسطحه دایره‌ای به مرکز O و شعاع R، و در فضا کره‌ای با همین مرکز و شعاع است.

۲. مکان هندسی نقطه‌ای که از خط مفروض d به فاصلهٔ معین l است. این مکان در صفحه دو خط موازی با d است که به فاصلهٔ l در دوطرف آن رسم می‌شوند. در فضا این مکان سطح استوانهٔ دواری است که محور آن خط d است، و شعاع مقطع قائم آن مساوی با l.

۳. مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است. این مکان به شرحی که ذکر شد، در صفحه عمود منصف AB و در فضا صفحهٔ عمود منصف AB است.

۴. مکان هندسی نقطه‌ای که از دو خط d و d' به یک فاصله است. این مکان در صفحهٔ نیمساز های زاویه های دو خط متقاطع است که دو خط عمود برهم را تشکیل می‌دهند. در حالتی که دو خط موازی باشند، مکان مطلوب عمود منصف هر یک از عمود مشترکهای دو خط موازی است. در فضا در حالتی که دو خط متقاطع باشند، دوصفحهٔ عمود بریکدیگر است که هریک از یکی از دونیمساز زاویه‌های دو خط می‌گذرد و برصفحهٔ آنها عمود است. در حالتی که دوخط موازی باشند، صفحهٔ عمود منصف هریک از عمود مشترکهای دوخط موازی است. اگر دو خط در فضا متنافر باشند، مکان رویهٔ درجهٔ دومی است که معادلهٔ آن را در هندسهٔ تحلیلی بسادگی می‌توان تعیین کرد.

۵. مکان هندسی نقطه‌ای که از آن پاره خط AB بەزاویهٔ α رویت شود (یعنی مکان نقطهٔ M به طوری $\widehat{AMB} = \alpha$). این مکان دو کمان در خور زاویهٔ α است که در دو طرف AB رسم می‌شوند. در حالت خاصی که $\alpha = 90°$، مکان دایره‌ای به قطر AB است. این مکان در فضا سطح دواری است که از دوران کمان درخور زاویهٔ α حول AB پدید می‌آید و آن را چنبره گویند. درحالتی که $\alpha = 90°$، کره‌ای به قطر AB است.

۶. مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌های آن از دو نقطهٔ A و B مساوی عدد k است. این مکان دایره‌ای به قطر CD است که C و D دونقطه از مکان در راستای خط AB است. مکان مذکور درفضا کره‌ای به قطر CD است (این دایره به دایرهٔ آپولونیوس موسوم است).

۷. مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌های آن از خطهای d و d' مساوی k است. این مکان دوخط است که با d و d' دستگاه توافقی تشکیل می‌دهند. در فضا برای دوخط موازی سطح استوانهٔ دواری است که محور آن موازی با دوخط است، و در غیر این صورت رویهٔ درجهٔ دومی است که معادلهٔ آن را در هندسهٔ تحلیلی می‌توان بدست آورد.

۸. مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربع فاصله‌های آن از دو نقطهٔ A و B مساوی k است. این مکان دایره‌ای به مرکز وسط $A\,B$ و شعاع

$$\sqrt{\frac{k}{۲}-\frac{AB^{۲}}{۴}}$$

است. در فضا کره‌ای با همین مرکز و همین شعاع است

۹. مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل مربع فاصله‌های آن از دو نقطهٔ A و B مساوی k است. این مکان خطی عمود بر AB به‌فاصلهٔ $\frac{k}{۲AB}$ از وسط AB است، و در فضا صفحه‌ای عمود بر AB با همان مشخصات است.

۱۰. دو نقطهٔ A و B و سه عدد جبری P، q، r مفروضند، مکان هندسی نقطهٔ M که در تساوی زیر صدق می‌کند:

$$pMA^{۲}+qMB^{۲}=r.$$

این مکان دایرهٔ معینی است به مرکز C به طوری که

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{q}{p},$$

و درفضا کره‌ای معین با مرکز C است.

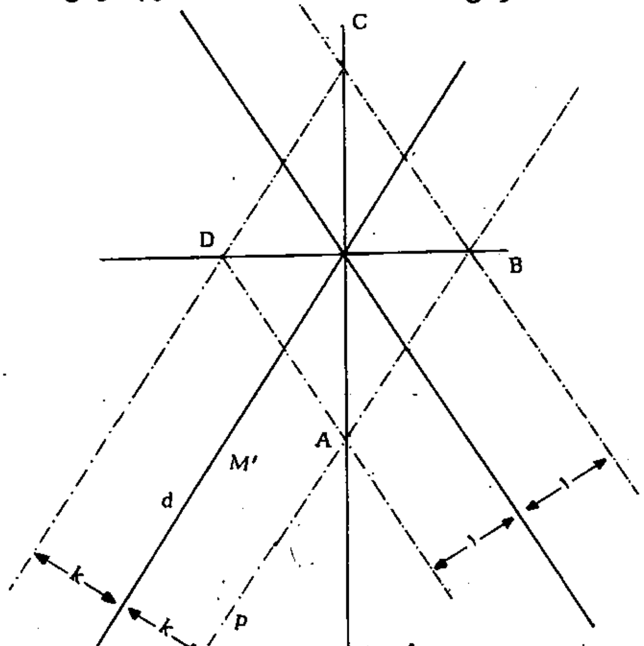
مکانهای شمارهٔ ۸ و ۹ حالتهای خاصی از مکان ۱۰ می‌باشند. اکثر این مکانها در کتابهای درسی در جای خود مورد بررسی واقع شده است و در اینجا مکانهای شمارهٔ ۷ و ۱۰ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

تعیین مکان شمارهٔ ۷

به عنوان مقدمه یادآوری می‌شود که اگر M نقطه‌ای باشد که نسبت فاصلهٔ آن از خط d به فاصلهٔ آن از خط d' مساوی k باشد، هر نقطهٔ M' از خط OM همین خاصیت را دارد (O نقطهٔ تقاطع d و d' است). این حکم از تشابه مثلثهای قائم الزاویه‌ای ثابت می‌شود که از رسم عمودهای وارد از M و M' بر d و d' پدید می‌آیند

برای تعیین مکان مطلوب ابتدا نقطه‌هائی از مکان را پیدا می‌کنیم که فاصلهٔ آنها از خط d مساوی k و ازخط d' مساوی ۱ باشد. این نقطه‌ها به موجب مکان شمارهٔ ۲ منحصر به چهار نقطه می‌باشد که از تقاطع دو خط موازی با d به فاصلهٔ k از آن و دو خط موازی با d' به فاصلهٔ ۱ از آن تعیین می‌شوند. این چهار نقطه که در شکل ۱ به A، B، C، و O نموده شده‌اند، رأسهای متوازی الاضلاعی به مرکز O (نقطهٔ تقاطع d و d') می‌باشند.

با توجه به مقدمه‌ای که گفته شد نسبت فاصله‌های هر نقطه از خطهای دوقطر AC و BD از این متوازی الاضلاع از d و d' مساوی k است. به فرض اینکه M' نقطه‌ای از مکان مطلوب فرض



ش. ۱

شود، به طریق ذیل می‌توان ثابت کرد که این نقطه روی یکی از دو خط AC و BD است. M' را به O وصل می‌کنیم؛ این خط یکی از دو خط موازی با d را که به فاصلهٔ k از آن رسم شده‌اند در p قطع می‌کند. چون نسبت فاصله‌های p از d و d' مانند M' مساوی k است و فاصلهٔ p از d مساوی k می‌باشد، باید فاصلهٔ P از d' مساوی ۱ باشد یعنی p منطبق بـه یکی از چهار نقطـهٔ A، B، C، و D است و در نتیجه M' باید روی یکی از دو قطر AC و BD باشد و خطهـای این دوقطر مکان هندسی مطلوبند.

تعیین مکان شمارهٔ ۱۰

ابتدا نقطهٔ C را روی خط AB طوری اختیار می‌کنیم که

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{q}{p}$$

(شکل ۲). برای وجود این نقطه باید $-\frac{q}{p}\neq ۱$.

حال به فرض اینکه M نقطه‌ای از مکان مطلوب فرض شود، رابطهٔ استوارت را می‌نویسیم:

$$\frac{MA^{۲}}{\overline{AB}\,.\,\overline{AD}}+\frac{MB^{۲}}{\overline{BA}\,.\,\overline{BC}}+\frac{MC^{۲}}{\overline{CA}\,.\,\overline{CB}}=۱.$$

$\overline{CA}$ و $\overline{CB}$ را برحسب ($AB=a$) و p، q، r از دستگاه زیر استخراج کرده و در رابطهٔ استوارت می‌بریم:

استخراج کرده و در رابطهٔ استوارت می‌بریم:

$$\begin{cases}\overline{CB}-\overline{CA}=a\\[4pt] \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\dfrac{q}{p}\end{cases}\Rightarrow \overline{CA}=\frac{-aq}{p+q},\ \overline{CB}=\frac{ap}{p+q};$$

$$\frac{MA^2}{\frac{qa^2}{p+q}}+\frac{MB^2}{\frac{pa^2}{p+q}}-\frac{MC^2}{\frac{pqa^2}{(p+q^2)}}=1.$$

از آنجا

$$(p+q)(pMA^2+qMB^2)-(p+q)^2MC^2=a^2pq.$$

چون M نقطه‌ای از مکان مطلوب فرض شده است،

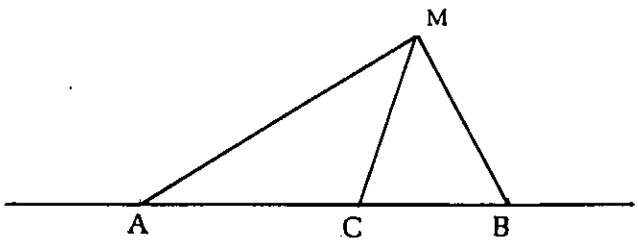
$$pMA^2+qMB^2=r,$$

$$(p+q)r-(p+q)^2MC^2=pqa^2.$$

از اینجا،

$$MC^2=\frac{(p+q)r-pqa^2}{(p+q)^2}.$$

به فرض اینکه صورت کسر مثبت باشد، MC مساوی مقدار ثابت معلومی می‌شود و مکان مطلوب دایره‌ای به مرکز C و شعاع مساوی جذر طرف دوم تساوی اخیر است. در حالت خاصی که $\frac{p}{q}=-1$، نقطه C وجود ندارد (به بینهایت می‌رود) و طبق مکان هندسی شمارهٔ ۹، مکان خطی عمود بر AB است.



ش. ۲

مثال ۱. تعیین نقطه یا نقطه هائی که فاصله های آن از سه رأس مثلث متناسب با سه عدد مفروض است.

حل. مثلث را ABC و سه عدد را α، β، و γ فرض می‌کنیم. مقصود تعیین نقطهٔ M است به طوری که

$$\frac{MA}{\alpha}=\frac{MB}{\beta}=\frac{MC}{\gamma}.$$

رشتهٔ تساوی را می‌توان به این دو تساوی تبدیل کرد:

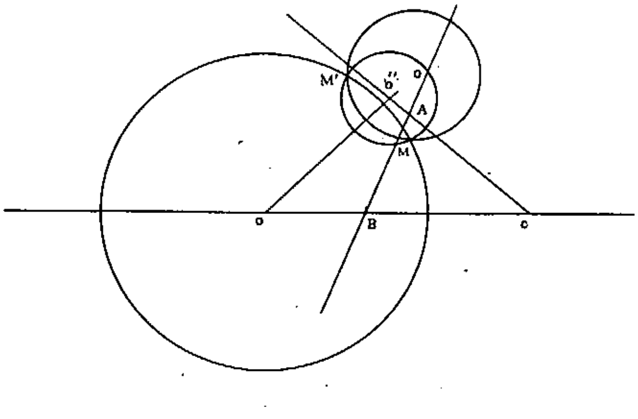
$$\frac{MA}{MB}=\frac{\alpha}{\beta}. \qquad (۱)$$

$$\frac{MB}{MC}=\frac{\beta}{\gamma}. \qquad (۲)$$

تساوی (۱) نشان می‌دهد که M جزء مکان هندسی شمارهٔ ۶ یعنی دایرهٔ آپولونیوس نظیر A و B وعدد $\frac{\alpha}{\beta}$ است. به‌همین ترتیب از تساوی (۲) نتیجه می‌شود که M جزء مکان هندسی شماره ۶ یعنی دایرهٔ آپولونیوس دو نقطهٔ B، C و عدد $\frac{\beta}{\gamma}$ است. پس برای تعیین نقطهٔ مطلوب باید این دو دایره را رسم کرد و نقطهٔ تقاطع آنها را تعیین نمود. نکتهٔ جالب توجه این است که نقطهٔ مطلوب در تساوی

$$\frac{MA}{MC}=\frac{\alpha}{\gamma}$$

که از ترکیب تساوی (۱) و (۲) پیدا می‌شود نیز صدق می‌کند. یعنی جزء دایرهٔ آپولونیوس نظیر دو نقطهٔ A و C و عدد $\frac{\alpha}{\gamma}$ است. بنابراین سه دایرهٔ آپولونیوس نامبرده جزء یک دسته دایره‌اند و از خواص دایره‌های عمود برهم می‌توان دریافت که دایرهٔ محیطی مثلث ABC برسه دایرهٔ آپولونیوس عمود است. برحسب اینکه دسته دایره‌ای که سه دایرهٔ آپولونیوس را در بردارد، متقاطع یا مماس یا غیر متقاطع باشند، مسئله دارای دو جواب یا یک جواب است یا اینکه جواب ندارد.



ش. ۳

مثال ۲. مثلث ABC مفروض است. دایره‌ای رسم کنید که ضلعهای روبروی A، B، و C را به زاویه‌های α، β، و γ قطع کند.

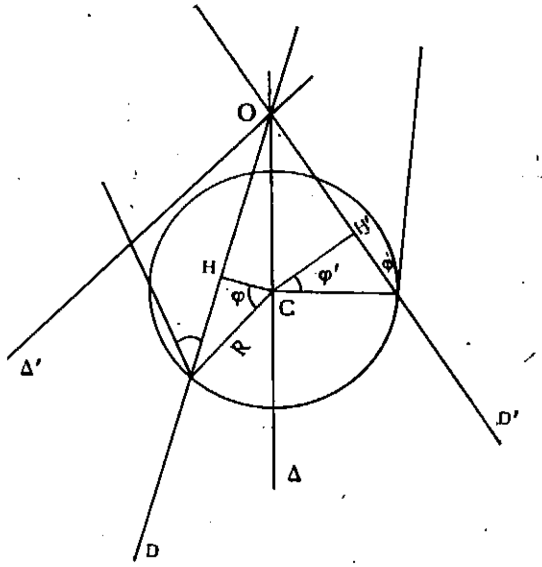
حل. ابتدا مکان هندسی مرکز دایره‌هائی را تعیین می‌کنیم که دو خط را به زاویه‌های معین قطع می‌کند. اگر C مرکز دایره‌ای باشد که دو خط D و D' را در شکل ۴ به زاویه‌های φ و φ' قطع کرده، چون از C دو عمود CH و CH' را بر D و D' فرود آوریم با ملاحظهٔ شکل دو تساوی زیر بدست می‌آید:

$$CH = R\cos\varphi,$$
$$CH' = R\cos\varphi'.$$

از تقسیم دو طرف این تساوی نتیجه می‌شود که

$$\frac{CH}{CH'} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}.$$

از این دو تساوی با عطف به مکان هندسی شمارهٔ ۷ نتیجه می‌گیریم مکان هندسی C دو خط مانند Δ و Δ' است که با D و D' یک دستگاه توافقی می‌سازد.



ش. ۴

با استفاده از این مقدمه اگر M مرکز دایره‌ای باشد که اضلاع مثلث ABC را به زاویه‌های α، β، و γ قطع کند، در صورتی که فاصلهٔ M از اضلاع نظیر d_A، d_B، و d_C فرض شود، این تساوی حاصل است:

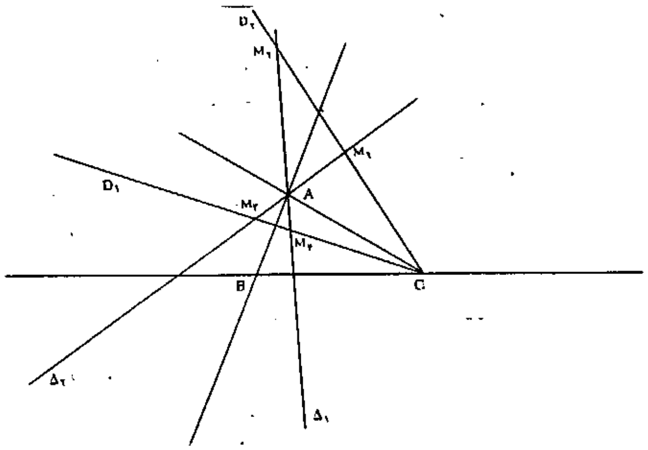
$$\frac{d_A}{\cos\alpha} = \frac{d_B}{\cos\beta} = \frac{d_C}{\cos\gamma}.$$

از اینجا،

$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \qquad (۱)$$

$$\frac{d_B}{d_C} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \qquad (۲)$$

از تساوی (۱)، عطف به مکان هندسی شمارهٔ ۷، نتیجه می‌شود می‌شود که M متعلق به یکی از دو خط D_1 و D_2 است که از رأس C می‌گذرند و با CA و CB دستگاه توافقی می‌سازند. همین طور از تساوی (۲) نتیجه می‌گیریم که M متعلق به یکی از دو خط Δ_1 و Δ_2 است که از رأس A می‌گذرد و با آن دستگاه توافقی می‌سازد. از تقاطع D_iها با Δ_iها چهار نقطهٔ M_1، M_2، M_3، و M_4 که مرکزهای دایره‌های مطلوب‌اند تعیین می‌شوند (شکل ۵). رسم دایره‌ها بعد از تعیین مرکز آنها، چون با هرضلع زاویهٔ معینی می‌سازند، به سادگی انجام می‌گیرد.



ش. ۵

تمرین

۱. دایره‌ای رسم کنید که از سه نقطهٔ A، B، و C بگذرد (مکان هندسی شمارهٔ ۳).

۲. دایره‌ای رسم کنید که از اضلاع مثلث مفروض به یک فاصله باشد (مکان هندسی شماره ۴). (چهار جواب دارد.)

۳. مکان هندسی نقطه‌هائی از فضا را پیدا کنید که از اضلاع مثلث مفروض به یک فاصله‌اند.

(جواب: چهار خط معین عمود برصفحهٔ مثلث.)

۴. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از سه خط متوازی غیر واقع در یک صفحه به یک فاصله باشد.

۵. مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که از یالهای یک کنج سه وجهی به یک فاصله باشد. (مکان هندسی شمارهٔ ۴).

۶. مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که از آن نقطه دایرهٔ مفروض به زاویهٔ α دیده می‌شود.

(زاویهٔ بین مماسهای مرسوم از یک نقطه برزاویهٔ رویت دایره است.)

۷. مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین کنید که مجموع یا تفاضل فاصله‌های آن نقطه از دوخط متقاطع معلوم باشد.

بستائی یک عدد اول در یک عدد طبیعی

جواد لالی

مقدمه. فرض کنیم که p عدد اول مفروضی و n یک عدد طبیعی باشد. بنا بر قضیه‌ای درنظریهٔ اعداد یک و تنها یک عدد صحیح نامنفی مانند α موجوداست‌که $p^{\alpha} \mid n$ و $p^{\alpha+1} \nmid n$. عدد α را بزرگترین قوهٔ صحیح نامنفی p، و یا بستائی p، در n می‌نامند وآن را با نماد $e(p, n)$ نمایش می‌دهند.

مثلا، بزرگترین قوهٔ صحیح نامنفی عدد اول p (یا بستائی p) در عدد طبیعی ۱ برابر با ۰ است؛ یعنی $e(p, 1) = 0$. همچنین بستائی p در p^{α} برابر α است؛ $e(p, p^{\alpha}) = \alpha$. یا به عنوان مثالی دیگر،

$e(3, 108) = 3$، $e(2, 108) = 2$، و $e(5, 108) = 0$.

واضح است که اگر p یک عدد اول و a، b دو عدد طبیعی باشند،

$$e(p, ab) = e(p, a) + e(p, b).$$

در حل مسائل مربوط به تعیین بستائی یک عدد اول در یک عدد طبیعی، غالباً مفهوم جزء صحیح نقش اساسی دارد. بنا براین، ذیلاً بعضی خواص‌جزء صحیح راکه مورد نیازخواهد بود، می‌آوریم. سپس با ذکر یک مثال مقدماتی، قضیهٔ اصلی این مبحث‌را که در واقع تعیین بستائی یک عدد اول در $n!$ است بیان و ثابت می‌کنیم و در تعقیب آن به حل مسئلهٔ ۱۰ شمارهٔ دوم مجله مبادرت خواهد شد.

جزء صحیح و جزء کسری یک عدد. به ازای هر عدد حقیقی x، یک وتنها یک عدد صحیح مانند n موجود است که $n \leqslant x < n + 1$. عدد n را جزء صحیح x و عدد $x - n$ را جزء کسری x خوانند، و بترتیب آنهارا با نمادهای $[x]$ و (x) نمایش می‌دهند. بنا بر این

$$[x] \leqslant x < [x] + 1, \quad 0 \leqslant (x) = x - [x] < 1.$$

بنا به‌تعریف فوق، جزء صحیح x بزرگترین عدد صحیح نا بیشتر از x است. به عنوان مثال، $\left[\frac{3}{2}\right] = 1$، $\left[-\frac{5}{2}\right] = -3$، $[15] = 15$، $[\sqrt{2}] = 1$، و $[\pi] = 3$.

احکام ذیل نتیجهٔ مستقیم تعریف است و بلافاصله از آن نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۱. فرض کنیم که x، y، و θ اعداد حقیقی، و n یک عدد طبیعی باشد. در این صورت،

(آ). $x - 1 < [x] \leqslant x$؛

(ب). اگر $n \leqslant x$ آنگاه $n \leqslant [x]$؛

(پ). اگر $x < n$ آنگاه $[x] < [x] + 1 \leqslant n$؛

(ت). اگر $x < y$ آنگاه $[x] \leqslant [y]$؛

(ث). اگر $x = n + \theta$ به طوری که $0 < \theta < 1$ آنگاه $[x] = n$؛

(ج). $[n + x] = n + [x]$.

قضایای مربوط به جزء صحیح و جزء کسری و قواعد محاسبه با آنها بسیارند، وحفظ کردن همهٔ این‌احکام کاری بیهوده است. آنچه که در جزء صحیح و قضایای مربوط به آن دارای اهمیت است آموختن روشها و براهین آن است. ذیلاً، نمونه‌هائی از آنها را می‌آوریم:

قضیهٔ ۲. به ازای هر عدد حقیقی x و هرعدد طبیعی n،

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right].$$

برهان. بنا به تعریف جزء صحیح،

$\left[\frac{x}{n}\right] \leqslant \frac{x}{n} < \left[\frac{x}{n}\right] + 1$؛ یا $n\left[\frac{x}{n}\right] \leqslant x < n\left[\frac{x}{n}\right] + n$.

از قضیهٔ اخیر، قسمت (آ) و (پ)، نتیجه می‌شود که

$$n\left[\frac{x}{n}\right] \leqslant [x] < n\left[\frac{x}{n}\right] + n.$$

از آنجا

$$\left[\frac{x}{n}\right] \leqslant \frac{[x]}{n} < \left[\frac{x}{n}\right] + 1.$$

پس، بنا به تعریف،

$$\left[\frac{[x]}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right].$$

قضیهٔ ۳. به ازای هر عدد حقیقی x،

$$[2x] - [x] = \left[x + \frac{1}{2}\right].$$

برهان. تابع f را بر R با ضابطهٔ

$$f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] - [2x]$$

تعریف می‌کنیم. باید ثابت کنیم که به ازای هر عدد حقیقی x،

$$f(x) = 0.$$

گوئیم چون به‌ازای هر x حقیقی، $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x)$،
پس f تابعی متناوب بادورهٔ تناوب $\frac{1}{2}$ است. بنا بر این، برای اثبات قضیه کافی است که حکم را به ازای هر x که

$$0 \leqslant x < \frac{1}{2}$$

بررسی کنیم؛ زیرا اگر x یک عدد حقیقی دلخواه باشد آنگاه عددی صحیح مانند n و عدد حقیقی مانند ξ که $0 \leqslant \xi < 1/2$ موجود است به طوری که $x = \frac{n}{2} + \xi$ (چرا؟). بسادگی ثابت می‌شود که

$$f(x) = f\left(\frac{n}{2} + \xi\right) = f(\xi).$$

بدین ترتیب اثبات کفایت حکم در حالتی که $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ محقق می‌شود. در این صورت،

$$f(x) = 0 + 0 - 0 = 0.$$

قضیهٔ ۴. به ازای هر دو عدد حقیقی x و y،

$$[2x] + [2y] \geqslant [x] + [y] + [x + y].$$

برهان. فرض می‌کنیم که

$$x = n_1 + \theta_1,$$
$$x = n_2 + \theta_2,$$

که درآن n_1، n_2 دو عدد صحیح و θ_1، θ_2 دو عدد حقیقی‌اند که $0 \leqslant \theta_1 < 1$ و $0 \leqslant \theta_2 < 1$.
اینک اگر در نامساوی حکم مسئله بجای x و y مقادیر مساوی آنها را جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$2n_1 + [2\theta_1] + 2n_2 + [2\theta_2] \geqslant n_1 + [\theta_1] + n_2 + [\theta_2] + n_1 + n_2 + [\theta_1 + \theta_2],$$

یا

$$[2\theta_1] + [2\theta_2] \geqslant [\theta_1 + \theta_2].$$

برای اثبات نا مساوی فوق دو حالت تشخیص می‌دهیم. حالت اول، $0 \leqslant \theta_1 < \frac{1}{2}$ و $0 \leqslant \theta_2 < \frac{1}{2}$. در این صورت هردو طرف نامساوی فوق صفرمی‌شود. حالت دوم، حداقل یکی ازاعداد θ_1 و θ_2 ناکمتر از $\frac{1}{2}$ است. بنا بر این حداکثر مقدار $[\theta_1 + \theta_2]$ برابر بـا یک وحداقل مقدار $[2\theta_1] + [2\theta_2]$ نیز یک است؛ پس نا مساوی فوق برقرار است.

اینک برمی‌گردیم بـه موضوع بستائی یک عدد اول در یک عدد طبیعی و به عنوان مقدمه و مثال، مسئله زیر را طرح و بررسی می‌کنیم.

مسئلهٔ ۹. بـه ازای عـدد طبیعی n، مطلوبست بستائـی ۲ در $A_n = [(1 + \sqrt{3})^n]$. (پرانتز در اینجا بـه معنی عـادی آن بکار رفته است.)

حل. بسهولت به استقراء ثابت می‌شود که همواره

$$(1 + \sqrt{3})^n = x_n + y_n\sqrt{3},$$
$$(1 - \sqrt{3})^n = x_n - y_n\sqrt{3}$$

که در آن x_n و y_n اعدادی طبیعی‌اند (ثابت کنید). بنا بر این، عبارت

$$C_n = (1 + \sqrt{3})^n + (1 - \sqrt{3})^n = 2x_n$$

یک عـدد طبیعی است (بـه ازای هـر n طبیعی). از طرفـی $-1 < 1 - \sqrt{3} < 0$، پس بنا بـر آنکه n زوج بـاشد $0 < (1 - \sqrt{3})^n < 1$ و بنـا بـر آنـکـه n فرد بـاشد، $-1 < (-\sqrt{3})^n < 0$.
بنا بر این،

$$A_n = \begin{cases} C_n - 1 & 2 \mid n \\ C_n & 2 \nmid n \end{cases}$$

ابتدا فرض می‌کنیم که $n = 2k$. داریم

$$A_n = (1 + \sqrt{3})^{2k} + (1 - \sqrt{3})^{2k} - 1,$$

یا

$$A_n = 2^k\{(2 + \sqrt{3})^k + (2 - \sqrt{3})^k\} - 1;$$

که حاصل یک عدد فـرد است. بنا بر ایـن، بستائی ۲ در A_n صفر است.

اینک اگر $n = 2k - 1$ آنگاه

$$A_n = (1 + \sqrt{3})^{2k-1} + (1 - \sqrt{3})^{2k-1}$$
$$= \frac{1}{1 + \sqrt{3}}(1 + \sqrt{3})^{2k} + \frac{1}{1 - \sqrt{3}}(1 - \sqrt{3})^{2k}$$
$$= 2^{k-1}\left\{(\sqrt{3} - 1)(2 + \sqrt{3})^k - (\sqrt{3} + 1)(2 - \sqrt{3})^k\right\}$$
$$= 2^{k-1}\{\sqrt{3}((2 + \sqrt{3})^k - (2 - \sqrt{3})^k) - ((2 + \sqrt{3})^k + (2 - \sqrt{3})^k)\}.$$

اگر $(2 + \sqrt{3})^k = u_k + v_k\sqrt{3}$ آنگاه $(2 - \sqrt{3})^k = u_k - v_k\sqrt{3}$ (ثابت کنید)، آنگاه

$$A_n = 2^k(3v_k - u_k).$$

اینک گوئیم عبارت $3v_k - u_k$ یک عدد فرد است. زیرا، کافی است ملاحظه کنیم که

$$(2 + \sqrt{3})^k(2 - \sqrt{3})^k = u_k^2 - 3v_k^2$$

یا

$$1 = u_k^2 - 3v_k^2.$$

بنا بر این،

$$(3v_k - u_k)(3v_k + u_k) = 9v_k^2 - u_k^2 = 6v_k^2 - 1.$$

از اینجا معلوم می‌شود که $u_k - ۳v_k$ یک عدد فرد است. بنا بر این بستائی ۲ در A_n برابر با k است. به طور خلاصه:
اگر n زوج باشد، بستائی ۲ در A_n صفر است و اگر n فرد باشد بستائی ۲ در A_n برابر با $\frac{n+۱}{۲}$ است.

بستائی یک عدد اول در n!

اینک می‌خواهیم بستائی یک عدد اول را در $n!$ محاسبه کنیم. به عنوان مثال، چون $۰! = ۱$، $e(p, ۰!) = ۱$. اگر $n = ۸$ آنگاه $۸! = ۲^۷ \times ۳^۲ \times ۵ \times ۷$؛ بنا بر این

$$e(۲, ۸!) = ۷,\ e(۳, ۸!) = ۲,\ e(۵, ۸!) = e(۷, ۸!) = ۱.$$

دستور جالبی دراین زمینه هست‌که به‌توسط آن می‌توان بزرگترین قوهٔ صحیح نامنفی یک عدد اول را در n!، یعنی $e(p, n!)$ را، محاسبه کرد.

قضیهٔ ۵. اگر p یک عدد اول و n یک عدد طبیعی باشد آنگاه

$$e(p, n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^۲}\right] + \dots + \left[\frac{n}{p^r}\right].$$

که در آن، عدد طبیعی r در نامساوی $p^r \leqslant n < p^{r+۱}$ صدق می‌کند.

(تبصره. اگر $k > r$ آنگاه $\left[\frac{n}{p^k}\right] = ۰$. بنابراین نمایش معادلی به صورت ذیل برای $e(p, n!)$ وجود دارد، و آن چنین است: $e(p, n!) = \sum_{k=۱}^{\infty} \left[\frac{n}{p_k}\right]$.)

برهان. قبل ازآنکه برهان قضیهٔ ۵ را به طور رسمی آغاز کنیم، جهت آمادگی ذهن $e(۳, ۲۸!)$ را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم که k عدد صحیح نامنفی باشد که $۳^k \leqslant ۲۸$. بنابراین، $۰ \leqslant k \leqslant ۳$. اینک فرض می‌کنیم که S_k مجموعهٔ متشکل از همهٔ اعداد صحیح m باشد که $m = q \times ۳^k$ و $۱ \leqslant m \leqslant ۲۸$، و $(q, ۳) = ۱$. بنا بر این

$$S_۰ = \{۱, ۲, ۴, ۵, ۷, \dots ۲۳, ۲۵, ۲۶, ۲۸\},$$
$$S_۱ = \{۳, ۶, ۱۲, ۱۵, ۲۱, ۲۴\},$$
$$S_۲ = \{۹, ۱۸\},$$
$$S_۳ = \{۲۷\}.$$

مجموعهٔ $\{S_۰, S_۱, S_۲, S_۳\}$ افرازی‌است ازمجموعهٔ اعداد طبیعی نابیشتر از ۲۸. بنا بر این، هر m ($۱ \leqslant m \leqslant ۲۸$) تنها متعلق به یکی از مجموعه‌های مذکور است. بدیهی است. که هیچ عضو $S_۰$، سهمی برای $e(۳, ۲۸!)$ معین نمی کند. ولی هر عضو $S_۱$ یک سهم، و هر عضو $S_۲$ دو سهم، و بالاخره هر عضو $S_۳$ سه سهم برای $e(۳, ۲۸!)$ منظور می‌کند. بنا بر این،

$$e(۳, ۲۸!) = ۶ \times ۱ + ۲ \times ۲ + ۱ \times ۳ = ۱۳.$$

از طرف دیگر عدهٔ اعضای $S_۱ \cup S_۲ \cup S_۳$ برابر با $\left[\frac{۲۸}{۳}\right]$، عدهٔ اعضای $S_۲ \cup S_۳$ برابر با $\left[\frac{۲۸}{۹}\right]$، وعدهٔ اعضای $S_۳$ برابر با $\left[\frac{۲۸}{۲۷}\right]$ است. با توجه به‌اینکه هریک از اعضای $S_۱$ یک سهم، و هر یک از اعضای $S_۲$ دو سهم، و هر یک از اعضای $S_۳$ سه سهم را در $e(۳, ۲۸!)$ منظور می‌کنند، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} e(۳, ۲۸!) &= |S_۱| + ۲\,|S_۲| + ۳\,|S_۳| \\ &= |S_۱ \cup S_۲ \cup S_۳| + |S_۱ \cup S_۲| + |S_۳| \\ &= \left[\frac{۲۸}{۳}\right] + \left[\frac{۲۸}{۹}\right] + \left[\frac{۲۸}{۲۷}\right] \\ &= ۹ + ۳ + ۱ = ۱۳ \end{aligned}$$

($|A|$ یعنی عدهٔ اعضای مجموعهٔ متناهی A).

اینک به بیان برهان قضیه می‌پردازیم.

فرض کنیم که k عدد صحیحی باشد به طوری که $۰ \leqslant k \leqslant r$. رشتهٔ اعداد مضارب p^k که از n تجاوز نمی‌کنند عبارت است از

$$p^k,\ ۲p^k, \dots, qp^k,$$

که در آن q بزرگترین عدد صحیح است که $qp^k \leqslant n$. به‌عبارت دیگر، q بزرگترین عددصحیح نابیشتر از $\frac{n}{p^k}$ است. یعنی $q = \left[\frac{n}{p^k}\right]$. بنا بر این به ازای هر k، تعداد مضارب مثبت p^k که از n تجاوز نمی‌کنند دقیقاً برابر است با $\left[\frac{n}{p^k}\right]$.

اینک به ازای هر k که $۰ \leqslant k \leqslant r$، مجموعهٔ S_k را چنین تعریف می‌کنیم:

$$S_k = \{m \mid m = p^k, (q, p) = ۱\}.$$

بدیهی است‌که هرعدد طبیعی مانند m که $۱ \leqslant m \leqslant n$، متعلق به یکی از مجموعه‌های S_k است، واگر $۰ \leqslant k < j \leqslant r$ آنگاه $S_k \cap S_j = \varnothing$. بنابراین مجموعهٔ $\{S_r, S_۰, S_۱, S_۲, \dots,\}$ افرازی است از مجموعهٔ اعداد طبیعی نابیشتر از n. از طرفی هیچ عضو $S_۰$ سهمی برای $e(p, n!)$ معین نمی‌کند، ولی هر عضو S_k درست k سهم در $e(p, n!)$ منظور می‌کند ($۱ \leqslant k \leqslant r$). بنا بر این،

$$\begin{aligned} e(p, n!) &= |S_۱| + ۲\,|S_۲| + \dots + r\,|S_r|. \\ &= |S_۱ \cup S_۲ \cup S_۳ \cup \dots \cup S_r| \\ &\quad + |S_۲ \cup S_۳ \cup \dots \cup S_r| + \dots + |S_r|. \end{aligned}$$

اینک با توجه به تذکری که در ابتدای برهان آوردیم، معلوم است که

$$|S_۱ \cup S_۲ \cup S_۳ \cup \dots \cup S_r| = \left[\frac{n}{p}\right]$$

$$|S_۲ \cup S_۳ \cup \dots \cup S_r| = \left[\frac{n}{p^۲}\right]$$

$$\vdots$$

$$|S_r| = \left[\frac{n}{p^r}\right].$$

بنا بر این،

$$e(p, n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^۲}\right] + \dots + \left[\frac{n}{p^r}\right].$$

با توجه به قضیهٔ فوق، مسئله زیر را حل می‌کنیم.

مسئلهٔ ۴. ثابت کنید که به ازای هر دو عدد طبیعی a و b،
$$\frac{(۲a)!\,(۲b)!}{a!\,b!\,(a+b)!}$$
یک عدد طبیعی است (مسئلهٔ ۱۰ شمارهٔ دوم مجله).

حل. عدد اخیر را A می‌نامیم. فرض کنیم که p عدد اول دلخواهی باشد. بنا بر قضیهٔ ۴، به ازای هر k طبیعی،
$$\left[\frac{۲a}{p^k}\right]+\left[\frac{۲b}{p^k}\right]\geqslant\left[\frac{a}{p^k}\right]+\left[\frac{b}{p^k}\right]+\left[\frac{a+b}{p^k}\right].$$
بنا بر این،
$$\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{۲a}{p^k}\right]+\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{۲b}{p^k}\right]\geqslant\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{a}{p^k}\right]+\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{b}{p^k}\right]+\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{a+b}{p^k}\right],$$
یا
$$e(p,(۲a)!)+e(p,(۲b)!)\geqslant e(p,a!)+e(p,b!)+e(p,(a+b)!).$$
این بدین معنی است که اگر p عامل اولی باشد که در مخرج کسر A ظاهر شود، بستائی آن در صورت کسر ناکمتر از بستائی آن در مخرج کسر است. بنا بر این A یک عدد طبیعی است.

به عنوان کار برد دیگری مثال ذیل را ثابت می‌کنیم.

مسئلهٔ ۳. ثابت کنید که اگر کسر
$$H=\frac{۱\times۳\times۵\times\dots\times(۲n-۱)}{۲\times۴\times۶\times\dots\times(۲n)}$$
به‌ساده‌ترین صورت آن تبدیل کنیم (یعنی به‌کسری تحویلناپذیر) آنگاه
$$H=\frac{a}{۲^m},$$
در آن a یک فرد و $m<۲n$.

حل. در واقع $H=\frac{(۲n)!}{۲^{۲n}\,n!\,n!}$. چون عبارت $\frac{(۲n)!}{n!\,n!}$ یک عدد طبیعی است (چرا؟) تنها عاملی که در مخرج کسر H ظاهر می‌شود، عبارتی برحسب قوه‌ای از ۲ خواهد بود. بنا بر این کافی است بستائی ۲ را در کسر $G=\frac{(۲n)!}{n!\,n!}$ محاسبه کنیم. گوئیم
$$\begin{aligned}e(۲,G)&=e(۲,(۲n)!)-۲e(۲,n!)\\&=\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{۲n}{۲^k}\right]-۲\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{n}{۲^k}\right]\\&=\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{n}{۲^{k-۱}}\right]-۲\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{n}{۲^k}\right]\\&=n-\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{n}{۲^k}\right].\end{aligned}$$

از اینجا
$$H=\frac{a}{۲^m},$$
که در آن، $m=۲n-\left(n-\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{n}{۲^k}\right]\right)$.
یا
$$m=n+\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{n}{۲^k}\right].$$
ولی از طرفی دیگر،
$$\sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{n}{۲^k}\right]<\frac{n}{۲}+\frac{n}{۴}+\frac{n}{۸}+\dots=n\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\dots\right)=n.$$
بالنتیجه، $m<۲n$. ■

تمرین

۱. ثابت کنید که به ازای هر x حقیقی، اگر $x\in Z$ آنگاه $[-x]=-[x]$، و اگر $x\notin Z$ آنگاه $[-x]=-[x]-۱$. (Z یعنی مجموعهٔ اعداد صحیح.)

۲. ثابت کنید که به ازای هر x حقیقی، و هر عدد طبیعی n،
$$[x]+\left[x+\frac{۱}{n}\right]+\left[x+\frac{۲}{n}\right]+\dots+\left[x+\frac{n-۱}{n}\right]=[nx].$$

۳. ثابت کنید که اعداد $[(۲+\sqrt{۳})^n]$ و $[(۳+\sqrt{۷})^n]$ فردند.

۴. ثابت کنید که به ازای هر دو عدد طبیعی m و n، عدد
$$\frac{(۲m)!\,(۳n)!}{(m!)^۲\,(n!)^۳}$$
طبیعی است. ■

منابع

۱. مصاحب، غلامحسین؛ تئوری مقدماتی اعداد، جلد دوم. قسمت اول، انتشارات سروش، ۱۳۵۸.

2. Lang, Calvin T., *Elementary Introduction to Number Theory*, by D. C. Heath and Company, (1972).

3. Uspensky, J. V. Elementary Number Theory, by the Mc Graw – Hill Book Company, (1939).

مفهوم تابع و آموزش آن

دکتر علیرضا مدقالچی

مقدمه و ملاحظات تاریخی. مفهوم تابع مانند مفهوم فضا و هندسه در طول تاریخ ریاضی بسیار متحول گشته و در این تحولات بسیار متکامل شده است [۱]. هر محصل ریاضی متناسب با دورهٔ تحصیلی خود، با نوعی و جزئی از این مفهوم آشنا می‌شود و آن را بکار می‌برد.

از جنبهٔ تاریخی چنین استنباط می‌شود که اصطلاح تابع برای نخستین بار به توسط لایبنیتز[1] ریاضیدان آلمانی در سال ۱۶۶۴ معرفی شده است؛ به این مفهوم که تابع کمیتی است که به هریک از نقاط منحنی مربوط می‌شود، مانند مختصات در روی یک منحنی، شیب یک منحنی و غیره. یوهان برنولی[2] ریاضیدان بلژیکی در سال ۱۷۱۸ تابع را عبارتی در نظر می‌گیرد که از یک متغیر و چند ثابت تشکیل شده است. اویلر[3] ریاضیدان بزرگ سویسی و یکی از بار آورترین ریاضیدانان جهان تابع را فرمول و یا عبارتی در نظر می‌گیرد که شامل متغیر و ثابتها است. برای اویلر و همعصران وی عباراتی نظیر $y = e^x$ و $y = \sqrt{1+x}$ مثالهائی از این نوع تابع بودند. اما زمانی که آنان با عباراتی نظیر

$$y = x^2 \ (x > 0) \ \text{و} \ y = x \ (x \leqslant 0)$$

مواجه می‌شدند می‌گفتند دو تابع داریم، یکی $y_1 = x^2$ و دیگری $y_2 = x$. به نظر اویلر به هر عدد x مقدار $f(x)$ «تابعی از x» نسبت داده می‌شود مانند توابعی معمولی $\sin x$، $\cos x$ و ... [۲]

آنچه که در همهٔ این مثالهاهست اینکه همواره قادریم به ازای مقداری از x، مقدار تابع را محاسبه کنیم؛ یعنی به هرعدد x، عددی مانند $f(x)$ نسبت داده می‌شود. این است مفهوم تابع در نظر اویلر و همعصران او.

ذکر این نکته ضروری است که علامت $f(x)$ به صورت فعلی نخستین بار به توسط کلرو[4] در سال ۱۷۳۴ بکار رفت. این مفهوم تا زمان فوریه[5] ریاضیدان فرانسوی تغییر نیافت آنانی که با مختصری از ریاضیات عالی آشنائی دارند می‌دانند که در نظریهٔ فوریه به توابع مناسبی یک سری مثلثاتی نسبت داده می‌شود که امروزه به سری فوریه موسوم است و برای توابع مناسبتر مقدار تابع با مقدار سری برابر است. پیدایش سریهای فوریه و رابطهٔ آن با $f(x)$ تحولی بود در تعمیم مفهوم تابع.

بالاخره، دیریکله[6] و کوشی[7] تعریف جامع زیر را برای در برگرفتن این نوع روابط ارائه دادند. یک متغیر عبارت است از عملی که بر روی اعضای یک مجموعهٔ اعداد انجام می‌گیرد؛ اگر x و y دو متغیر باشند به قسمی که چنان به هم مربوط شوند که وقتی که مقداری به x مختص می‌شود، خود بخود مقداری منحصر بفرد به y تخصیص داده می‌شود (به وسیلهٔ قانون یا تناظری)، آنگاه y تابعی است از x. متغیر x که مقادیر به آن نسبت داده می‌شوند **متغیر مستقل** و متغیر y که مقادیر آن به x وابسته است **متغیر وابسته** نامیده می‌شود.

باید توجه داشت که تعریف فوق الذکر علیرغم روشنی و سادگی در بیان، هنوز دارای ابهاماتی است که باید روشن شود. زیرا اگر مقصود از «بستگی» بستگی به وسیلهٔ فرمول باشد یعنی رابطهٔ بین x و y، این همان تعریف اویلر است که دارای همان محدودیتهائی است که ذکر گردید و اگر غیر آن باشد باید دقیقاً روشن شود.

محصلین عموماً در دروس مقدماتی و ریاضیات عمومی تعریف دیریکله را فرا می‌گیرند. این تعریف بسیار سربسته است. زیرا وی تابع را عملی می‌داند که به هر عدد حقیقی x، عدد حقیقی $f(x)$ را نسبت می‌دهد ابتدا به عنوان تعریف مقدماتی، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱. در مجموعهٔ A و B را در نظر می‌گیریم. تابع f از A به B ضابطه‌ای است که به هرعضو a از A تنها یک عضو از B نسبت می‌دهد [۲].

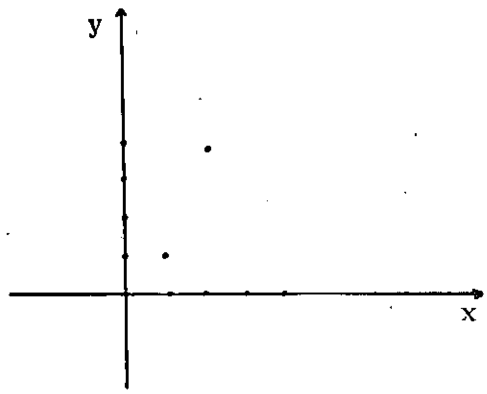
ملاحظه می‌کنیم که فعلاً مفهوم ضابطه چندان روشن نیست ولی در این مرحله منظور ما از ضابطه عملی است که روی مقادیر مجموعهٔ A انجام می‌گیرد؛ مثلاً وقتی صحبت از تابع سینوس می‌شود یعنی عملی که مثلاً زاویه ۳۰ درجه را به $\frac{1}{2}$، ۶۰ درجه

(1) G. V. Leibnitz
(2) J. Bernolli
(3) L. Euler
(4) A. C. Clainaut
(5) J. Fourier
(6) G. L. Dirichlet
(7) A. L. Cauchy

را به $\frac{\sqrt{3}}{2}$ تبدیل می‌کند.

برای تبیین این تعریف و توسیع و تعمیم و تبدیل آن به یک تعریف منطقی و ریاضی امثلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم. توجه شود در این مثالها نقاط روی محور x ها را به متغیر x و نقاط روی محور y ها را به $f(x)$ نسبت می‌دهیم و نقاط بدست آمده را در روی شکل مشخص می‌کنیم.

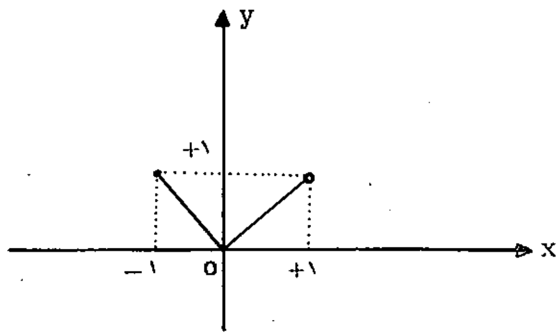
(۱) فرض می‌کنیم $A = B = N$ و $f(n) = n^2$ (N مجموعهٔ اعداد طبیعی است) (شکل ۱).



(ش. ۱)

بنا براین، تابع فوق با مجموعهٔ نقاط $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), \dots\}$ مشخص می‌شود.

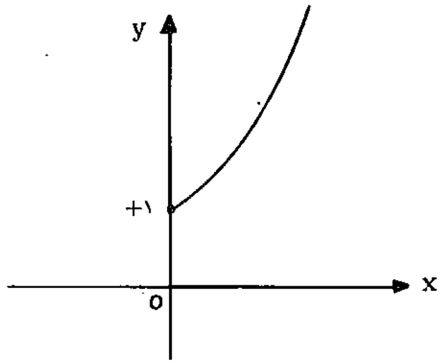
(۲) فرض می‌کنیم که $A = [-1, 1)$، $B = R$ (R مجموعهٔ اعداد حقیقی است) و $f(x) = |x|$ (شکل ۲).



ش. ۲

توجه شود که نقطهٔ $(1, 1)$ توسط تابع فوق مشخص نمی‌شود.

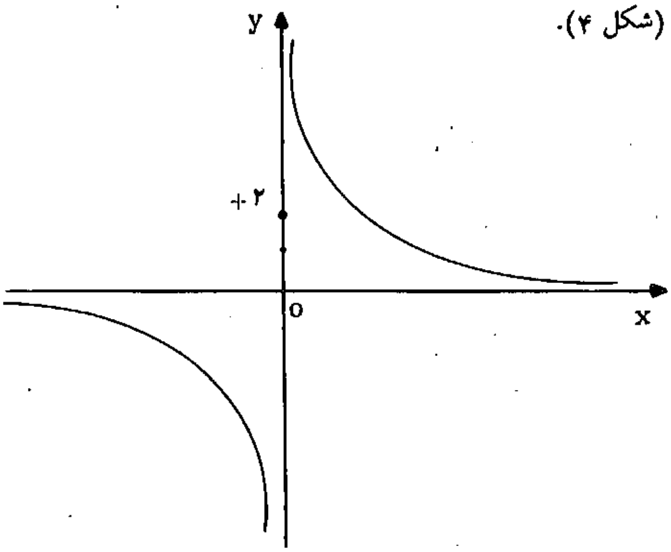
(۳) فرض می‌کنیم $A = B = R^+$ (R^+ مجموعهٔ اعداد حقیقی نا منفی است) و $f(x) = e^x$ (شکل ۳).



ش. ۳

(۴) اگر $A = R^+$ و $B = R$ (R مجموعهٔ اعداد حقیقی است) آنگاه تابع $g(x) = e^x$ همان تابع فوق است.

(۵) $A = B = R$ و $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$، و $f(0) = 2$ (شکل ۴).

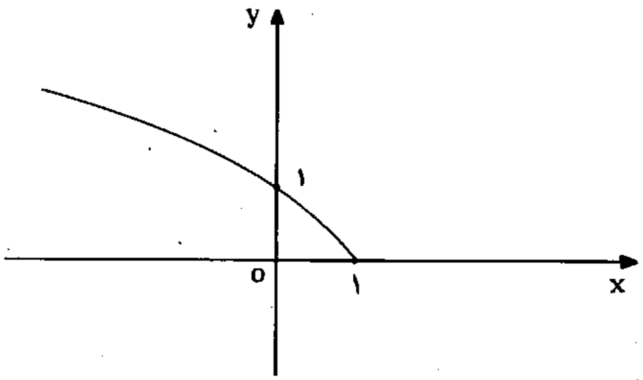


ش. ۴

تذکر. (آ) باید توجه داشت که اگر مقدار $f(x)$ در نقطهٔ $x = 0$ عوض شود تابع فوق نیز به یک تابع دیگر تبدیل خواهد شد.

(ب) تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ بر $R - \{0\}$ تعریف می‌شود مگر آن که در نقطهٔ صفر دقیقاً تعریف شود. در غیر این صورت اگر فرض کنیم $A = B = R$ آنگاه تابع فوق بر مجموعهٔ $A_1 = R - \{0\}$ تعریف می‌شود یعنی به اصطلاح با معنی است.

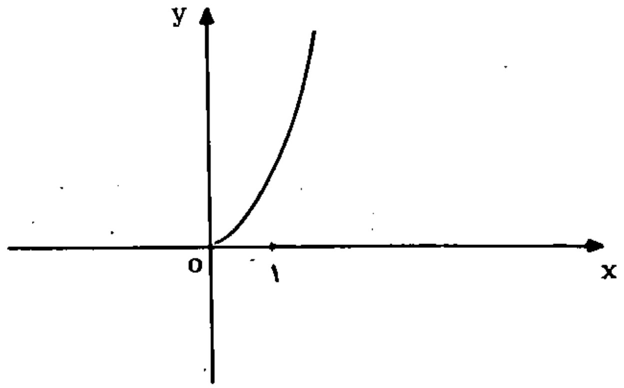
(۶) $A = B = R$ و $f(x) = \sqrt{1 - x}$ (شکل ۵).



ش. ۵

تذکر. مجموعهٔ مقادیری که تابع فوق می‌تواند بر آن تعریف شود مجموعهٔ $A_1 = \{x \mid x \leqslant 1\}$ است.

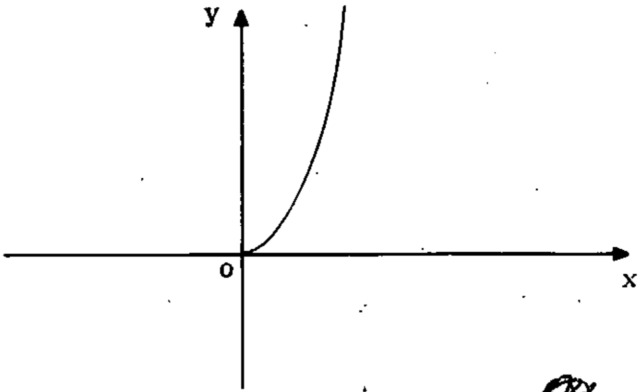
(۷) مجموعهٔ دوایر به مرکز مبدأ مختصات $= C$، $B = R^+$، $A = \{x \mid$ است C شعاع دایره‌ای از $x\}$، و $f(x) = \pi x^2$ (شکل ۶).



ش. ۶

تذکر. اگر نقطه‌ای به طول x را روی سهمی (شکل فوق) در نظر بگیریم عرض آن نقطه مساحت دایره‌ای به شعاع x است. لازم به یاد آوری است که نقطهٔ صفر مبین دایره‌ای به شعاع صفر و به مساحت صفر است.

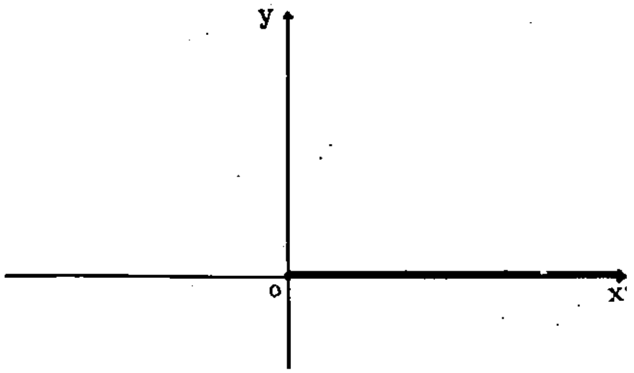
(۸) مجموعهٔ کره‌هائی به مرکز مبدا مختصات $= S$، $B = R^+$، $A = \{x \mid$ است S شعاع کره‌ای از $x\}$، و $f(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$ (شکل ۷)



ش. ۷

تذکر. اگر هر نقطه‌ای به طول x رو منحنی $y = \frac{4}{3}\pi x^3$ در نظر بگیریم عرض آن نقطه حجم کره‌ای به شعاع x است. لازم به یاد آوری است که نقطهٔ صفر مبین کره‌ای به شعاع صفر و به حجم صفر است.

(۹) $A = B = R$ و $f(x) = \sqrt{x - |x|}$ (شکل ۸) اینک باید $x - |x| \geqslant 0$ و لهذا، $x \geqslant |x|$ یعنی x فقط و فقط مقادیر نا منفی را انتخاب می‌کند و در این صورت $f(x) = 0$.



ش. ۸

تذکر. تابع فوق فقط به ازای اعضای $A_1 = [0, \infty)$ با معنی است.

(۱۰) $A = B = R$ و $f(x) = \frac{1}{x - |x|}$.

شرط اینکه $f(x)$ مشخص کننده عددی باشد آن است، که

$x - |x| > 0$، یعنی $x > |x|$ و بدیهی است که هیچ عددی در نامساوی اخیر صدق نمی‌کند یعنی مجموعهٔ

$$\left\{x \mid f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - |x|}}\right\}$$

تهی است، بنابراین هیچ تابعی نمی‌تواند مشخص شود.

بالاخره، دو مثال زیر را که تا اندازه‌ای با مثالهای فوق متفاوت است، می‌آوریم:

(۱۱) $A = R$، $B = \{0, 1\}$، و

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$$

با اندکی تأمل در این مثال معلوم می‌شود که به ازای هر مقدار x از A یک مقدار برای $f(x)$ بدست می‌آید. اما متأسفانه نمی‌توان شکل تابع فوق را نشان داد.

* (۱۲) $A = \{$آذر، شهریور، تیر$\}$ $B = \{$ببر، اسب، شیر$\}$ و تیر = (اسب) f و شهریور = (ببر) f، آذر = (شیر) f [۳].

نا گفته نماند که در امثلهٔ فوق به سیاق پیشینیان گاهی $f(x)$ را تسامحاً تابع نامیدیم، این تسامح متعاقباً تصحیح خواهد شد و با توجه به ضرورت ملاحظهٔ روال تاریخی این تسامح اجتناب ناپذیر بوده است.

ملاحظهٔ مثالهائی از نوع اخیر (مثلاً مثالهای ۶ و ۹)، بعضی‌ها را بر آن داشته است که تابع را به صورت زیر تعریف کنند.

تعریف ۲. یک تابع عبارت است از یک پنج تائی مانند (A, A_1, f, B_1, B) که در آن A مجموعه اولیه و $A_1 \subseteq A$، $B_1 \subseteq B$، و f «قانون یا ضابطهٔ» است که به هر x از A_1 تنها یک مقدار از B_1 نسبت می‌دهد.

حال اگر قدری جلوتر برویم و از تسامح خود بکاهیم، وقتی که مثلاً می‌گوئیم $\ln x$، در واقع $y = \ln x$ $(x > 0)$ تابع نیست، بلکه در این مرحله عبارت است از قاعده‌ای که «لگاریتم یک عدد مثبت را می‌گیرد»

گرچه تعریف فوق الذکر با تعریفی که متعاقباً به طور دقیق و کامل بیان خواهد شد تا اندازه‌ای مطابقت می‌کند ولی بزرگترین ضعف آن این است که در مقطع دبیرستان تدریس آن بسیار مشکل است و موجب بروز ابهاماتی برای دانش آموزان خواهد شد و بعلاوه، توجیه یک پنج تائی برای محصلین دبیرستان کاری طاقت فرسا و بی‌فایده است.

از سوی دیگر هنوز عده‌ای اصرار دارند که باید تابع را با همان مفاهیم اویلر و دیریکله تدریس کرد. به اعتقاد این عده هر گونه گرایش به سوی تعریف دقیقتر و جامعتر باعث عدم فهم دانش آموزان و دانشجویان خواهد بود. بدون هیچگونه تردیدی این باور و اعتقاد یک اشتباه محض است زیرا اولین دلیل آن این است که امروز مفاهیمی از تابع در ریاضیات بکار می‌رود که به هیچ وجه با تعریف اویلر و همعصرانش نمی‌توان آن را به عنوان تعریف تابع در نظر گرفت ثانیاً نمی‌توان همواره مقدار $f(x)$ را صریحاً بدست آورد.

نکتهٔ دیگر اینکه مفهوم تابع جوهر ومبنای دانش ریاضی و سایر علوم وابسته است و در کلیهٔ علوم مرتبط با ریاضیات هم موارد استعمال آن به خوبی آشکار است. لهذا، هرگونه تسامح در تعریف دقیق نه تنها موجب بروز ابهاماتی در فهم مفهوم تابع، بلکه در فهم کلیه مسائل و قضایای ریاضی خواهد بود، مثال زیر را در نظر می‌گیریم، $A = N$، B مجموعهٔ اعداد گویا است، و

$f(n) =$ بسط اعشاری $\sqrt{2}$ تا n رقم اعشار

بدیهی است که

$$f(1) = 1/4$$
$$f(2) = 1/41$$
$$\vdots$$

معرفی این نوع توابع برای دانش آموزان تازگی دارد، بالاخص اگر او چون پیشینیان فکر کند و تابع را فقط با تعریف اویلر بپذیرد. عامل عمده این کج فهمی‌ها آنانی هستند که می‌خواهند در مسائل ریاضی با روشهای سهل الوصول به کاربرد برسند. حتی اگر مفهوم اولیه فدا شود، اینان فقط دنبال کار برد هستند و نه مفهوم. برای این قبیل افراد آنچه اهمیت دارد مشهودات است نه معقولات و منطق و غیره ... اینان از هر کار دقیق و مشکل هراسانند و بر هر کار غیر دقیق و سطحی تن در می‌دهند. به نظر این عده حقایق عبارت‌اند از چیزهائی که فقط در عمل مفیدند و لاغیر.

از مجموع آنچه که تا به حال بیان گردید روشن شد که تعریف دقیق و جامع تابع باید بر مبنای مفاهیم دقیق منطقی و ریاضی باشد تا شامل آنچه که به عنوان تابع در ریاضیات و علوم ریاضی و مهندسی و حتی زندگی روزمره بکار می‌رود باشد.

از سوی دیگر به این حقیقت هم باید اذعان کرد که برای شروع، تعریف کاملاً منطقی و دقیق مشکل به نظر می‌رسد و ممکن است از نظر آموزش ریاضی هم موجب بروز اشکالاتی در فهم دانش آموزان شده واصل مطلب فدا شود.

به نظر نگارنده می‌توان تعریف زیر را به عنوان شروع تعریف تابع برای محصلین ارائه داد و به تدریج ذهن او را برای درک مفهوم دقیقتر آماده ساخت.

تعریف ۳. فرض می‌کنیم که A_1 و B_1 در مجموعه باشند و f «ضابطه‌ای» باشد بـه قسمی کـه به هر x از A_1 فقط یک y از B_1 نسبت دهد و $f(A_1) \subseteq B_1$ که در آن

$$f(A_1) = \{f(x) \mid x \in A_1\}.$$

در این حالت سه‌تائی (A_1, f, B_1) را یک تابـع می‌نامیم. در واقع B_1 محدودیتی است کـه روی دامنهٔ عمل f مـی‌توان گذاشت.

گرچـه تعریف اخیر هنوز دارای ضعفهایی است ولی به نظر می‌آید باتوجه به پایهٔ نسبتاً منطقی از یک‌سو، و ملموستر، و محسوستر و قـابل فهمتر بودن آن سوی دیگر، دارای فوائـد عدیده‌ای باشد که ذهـن محصلین را برای درک و لمس مفهوم دقیق تابع آماده کند.

حال برمی‌گردیم به امثلهٔ فوق، وتعریف اخیر را در مورد آنها اجرا می‌کنیم. ذکر یک نکته دیگر را هم ضروری می‌دانیم وآن اینکه غیر از مثال ۱۲ بقیه مثالها جملگی در مـورد اعداد حقیقی و یا زیر مجموعه‌های آن است.

(۱) $A_1 = N$، $f(n) = n^2$، و $B_1 = \{1, 4, 9, \dots\}$.

(۲) $A_1 = [-1, 1)$، $f(x) = |x|$، و $B_1 = [0, 1]$ (و یا هر زیر مجموعه R حاوی $[0, 1]$).

(۳) $A_1 = R^+$، $f(x) = e^x$، و $B_1 = [1, \infty)$.

(۴) می‌توان مانند ۳ در نظر گرفت.

(۵) $A_1 = R$، $f(x) = \dfrac{1}{x}$، و $B_1 = R$.

(۶) $A_1 = (-\infty, 1]$، $f(x) = \sqrt{1 - x}$، و $B_1 = [0, +\infty)$.

(۷) $A_1 = R^+$، $f(x) = \pi x^2$، و $B_1 = [0, +\infty)$.

(۸) $A_1 = R^+$، $f(x) = \dfrac{4}{3}\pi x^3$، و $B_1 = R^+$.

(۹) $A_1 = [0, +\infty)$، $f(x) = \sqrt{x - |x|}$، و $B_1 = \{0\}$.

(۱۰) $A_1 = \varnothing$، $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x - |x|}}$، و $B_1 = \varnothing$.

(۱۱) $A_1 = R$، $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in Q) \\ 0 & (x \notin Q) \end{cases}$ (کـه در آن Q مجموعهٔ اعداد گویا است)، و $B_1 = \{0, 1\}$

مثال ۱۲ را فعلاً رها می‌کنیم و در مورد مثالهای ۱ تا ۱۱ ذکر یکـ نکته را ضروری می‌دانیم بدیـن نحو کـه B_1 می‌توانـد مجموعه‌ای شامل B_1 مذکور در بحث فوق باشد.

در مثالهای فوق ملاحظه کردیم که به هر تابع مجموعهٔ نقاطـی از صفحه نظیر می‌شود کـه عبارت است از نقاطـی به مختصات $(x, f(x))$ که به وسیلهٔ تابع f در صفحه مشخص می‌شود.

از سوی دیگـر، آنچه کـه هنوز از دیدگاه ریاضی دقیقاً مشخص نشده است و ایجاد دردسر می‌کند بکـار بـردن کلمهٔ «قانون»، عمل و یـا «ضابطه» و غیره می‌باشد. لهذا، بایـد این اصطلاحات به نحوی تعریف شونـد. و الا تعریف تابع تکمیل نخواهد شد، وباز ممکن است موجب ابهاماتی در درک آن شود. بالنتیجه تعمیم و تکمیل یا به عبارت اخری ارائه تعریف دقیق تابع اجتناب ناپذیر است ایـن تعریف ضمن آنکه بایـد شامل کلیهٔ مـوارد سابق‌الذکر باشد، باید نقاط ضعف تعریفات قبل راهـم جبران کند.

نخست تعریف یک زوج مرتب را می‌آوریم:

تعریف ۴.** اگر A و B دو مجموعه باشند، $x \in A$، و $x \in B$ آنگـاه مجموعهٔ $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ را یک زوج مرتب می‌نامیم. عضو مربوط به مجموعهٔ یکانـی را مختص اول وشیء دوم را مختص دوم می‌نامیم و خـود زوج مرتب را بـه (x, y) نمایش می‌دهیم [۴] و [۳].

به کمک اصـل گسترش در نظریهٔ مجموعه‌ها بـه راحتی می‌توان قضیهٔ ذیل را ثابت کرد.

قضیهٔ. شرط لازم و کافـی برای آنکه زوجهای مرتب (x, y) و (u, v)، باهم برابر باشند آن است که $u = x$ و $v = y$.

این تعریف زوج مرتب ما را بـه کجا می‌برد؟ قوت این تعریف در آن است کـه در قضیهٔ فوق صدق می‌کند و مفهومـی است از نظریهٔ مجموعه‌ها. اما خبر ناخـوش در این تعریف آن است که از نظر شهودی بسیار ضعیف است. وقتی که صحبت از $(3, 2)$ می‌شود یک محصل ریاضی ترجیح می‌دهـد که آن را با نقطه‌ای به طول ۲ و عرض ۳ تصور کند تا این که به صورت مجموعهٔ $\{\{3, 2\}, \{2\}\}$. ولی شرایط قضیهٔ فوق این ضعف را جبران می‌کند یعنی به هر حال اگر زوجهای (x, y) و (u, v) به

(**) این تعریف ازکوراتوفسکی (C. Kuratowski) ریاضیدان معاصر لهستانی است.

عنوان مختصات در صفحه در نظر گرفته شوند آنگاه این دو نقطه برهم منطبقند اگر و فقط اگر $u = x$ و $v = y$؛ یعنی همان شرایط قضیه فوق برقرار است [۳].

تعریف ۵. فرض می‌کنیم که A و B دو مجموعه باشند. تابع f از A به B زیر مجموعه‌ای از $A \times B$ است به طوری که
(ت ۱) اگر $x \in A$ آنگاه yی متعلق به B باشد به طوری که $(x, y) \in f$؛
(ت ۲) چنین y منحصر به فرد باشد، یعنی اگر $(x, y) \in f$ و $(x, z) \in f$ آنگاه $z = y$.

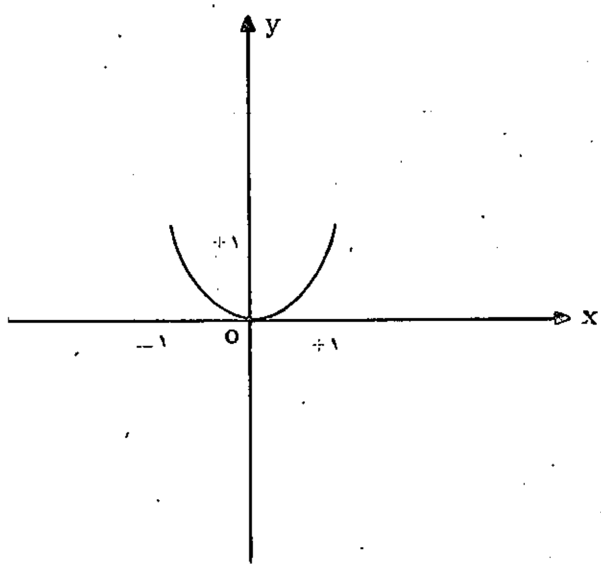
تذکر. تعریف ۲ بر این تعریف منطبق است.
مثال مربوط به بسط اعشاری $\sqrt{۲}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:
$$f = \{(۱, ۱/۴)\ (۲, ۱/۴۱), (۳, ۱/۴۱۴, \ldots)\},$$
و نیز در مورد مثالهای ۱۰، ۱۱ می‌توان نوشت:
$$f = \{(x, ۱) \mid x \in Q\} \cup \{x, ۰) \mid x \notin Q\},$$
$f =$ {(اسب ، تیر) و (ببر ، شهریور) و (شیر ، آذر)}.
در مورد سایر مثالها نیز می‌توان به روش مشابه عمل کرد ولی برای جلوگیری از اطالهٔ کلام از بررسی تک تک آنها اجتناب می‌شود.

بنا به تعریف y منحصر بفرد موجود در تعریف ۳ را به $f(x)$ نمایش می‌دهیم. معمولاً وقتی از یک تابع مانند f می‌شود چنین بیان می‌کنیم «تابع $f: A \to B$ با ضابطهٔ $y = f(x)$ به ازای هر $x \in A$» [۳].

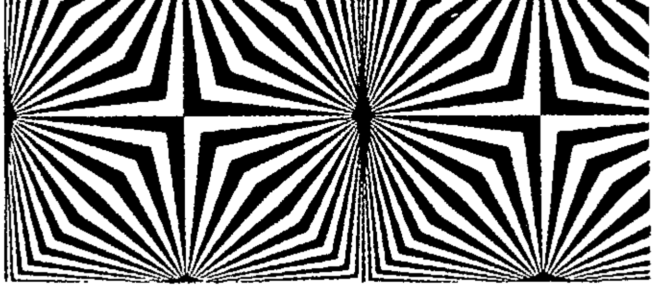
به طور کلی اگر f تابعی از A به B باشد، بنا به تعریف A را حوزهٔ تعریف تابع f می‌نامیم و آن را به fح نمایش می‌دهیم، مجموعهٔ $f(A)$ (یعنی $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$) را حوزهٔ مقادیر تابع f می‌نامیم و آن را بـه fحع نمایش می‌دهیم. بدیهی است
$$f(A) \subseteq B.$$
بالاخره، برای حسن ختام یکی از نمایشهای تابع را که صرفاً جنبهٔ هندسی دارد و دارای اهمیت فیزیکی است تعریف می‌کنیم:

نمودار تابع. یکی از روشهای نمایش توابعی که حوزهٔ تعریف و حوزهٔ مقادیر آن با جزء R است نمودار به وسیلهٔ محورهای مختصات می‌باشد برای انجام این کار مقادیر مختص اول (یعنی x) را در محور xها و مقادیر مختص دوم (یعنی y) را در روی محور yها تعیین کرده و مجموعهٔ نقاط حاصل را نمودار تابع می‌نامیم. این را در مثالهای زیر مورد مشاهده قرار می‌دهیم.

۱. فرض می‌کنیم که $A = [-۱, ۱]$، $B = [۰, ۱]$، و تابع $f: A \to B$ با ضابطهٔ $f(x) = x^۲$ تعریف شده است. مطلوب است نمودار f.

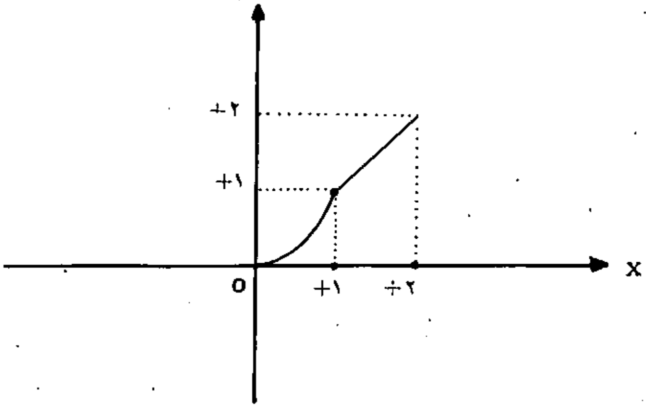


۲. $A = [۰, ۲]$، $B = R$، و تابع $f: A \to B$ با ضابطهٔ
$$f(x) = \text{Min}\,\{x, x^۲\}$$
تعریف شده است. مطلوب است نمودار f.
حل. با اندکی تأمل معلوم می‌شود که
$$\text{Min}\,\{a, b\} = \frac{a+b}{۲} - \frac{|a-b|}{۲},$$
که در آن $|a-b|$ به معنی قدر مطلق $a-b$ است. لهذا،
$$f(x) = \frac{x+x^۲}{۲} - \frac{|x-x^۲|}{۲}.$$
بدیهی است که اگر $۰ \leqslant x \leqslant ۱$ آنگاه $x^۲ \leqslant x$. لهذا، $x - x^۲ \geqslant ۰$ یعنی $|x - x^۲| = x - x^۲$. بالنتیجه، اگر $۰ \leqslant x \leqslant ۱$،
$$f(x) = \frac{x+x^۲}{۲} - \frac{x-x^۲}{۲} = x^۲,$$
اگر $۱ \leqslant x \leqslant ۲$ آنگاه $x \leqslant x^۲$. لهذا،
$$|x - x^۲| = -(x - x^۲),$$
و بالنتیجه،



$$f(x)=\frac{x+x^{۲}}{۲}+\frac{x-x^{۲}}{۲}=x,$$

بنا بر این، نمودار تابع به صورت زیر است.



البته می‌توانستیم نمودارهای توابع $y_{۱} = x^{۲}$ و $y_{۲} = x$ را در یک صفحه رسم کرده و مینیموم آن‌ها را در بازهٔ $[۰, ۲]$ تعیین می‌کنیم.

بالاخره، در پایان ذکر یک نکته را ضروری می‌دانیم و آن این که ممکن است همیشه نتوان مقادیر y را بر حسب x به دست آورد. مثلاً، فرض می‌کنیم که تابع f با ضابطهٔ $xy + x\sin^{۲} xy = ۱$ بر بازهٔ $[۰, ۱]$ تعریف شده باشد، در این نوع حالات f را فقط می‌توان، مجموعه‌ای از ازواج مرتب نمایش داد یعنی

$$f = \{(x, y) \mid x \in [۰, ۱] \text{ و } xy + x \sin xy = ۱\}$$

منابع

1. Eves H. & Newson C. V., *An introduction to the Foundation and Fundamental Concepts of Mathematics*, 1965
2. Silverman R. A. *Modren Calculus and analytic geometry*, Macmilon Conpany, 1969.
3. Ste wart I. & Tall D. *The Foundation of Mathematics*, Oxford university press, 1977.

بحث
در ریشه‌های معادلهٔ

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{x-a_i} = ۰$$

رضا شهریاری

ابتدا بحث را در حالتی‌که $n = ۳$ شروع می‌کنیم. فرض می‌کنیم $a_{۱}$، $a_{۲}$، و $a_{۳}$ اعداد حقیقی و $a_{۱} < a_{۲} < a_{۳}$. طرفین معادلهٔ

$$\frac{۱}{x-a_{۱}}+\frac{۱}{x-a_{۲}}+\frac{۱}{x-a_{۳}}=۰ \qquad (۱)$$

را در $(x-a_{۱})(x-a_{۲})(x-a_{۳})$ ضرب می‌کنیم، معادله‌ای‌هم ارز با (۱) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$(x-a_{۲})(x-a_{۳})+(x-a_{۱})(x-a_{۳})+(x-a_{۱})(x-a_{۲})=۰.$$

فرض می‌کنیم

$$f(x)=(x-a_{۲})(x-a_{۳})+(x-a_{۱})(x-a_{۳})+(x-a_{۱})(x-a_{۲}).$$

اگرمقدار تابع f را در نقاط $x = a_{۱}$ و $x = a_{۲}$ حساب کنیم، خواهیم داشت.

$$f(a_{۱})=(a_{۱}-a_{۲})(a_{۱}-a_{۳}),$$

$$f(a_{۲})=(a_{۲}-a_{۱})(a_{۲}-a_{۳}).$$

چون $f(a_1) > 0$ و $f(a_2) < 0$، بالنتیجه $f(a_1)\cdot f(a_2) < 0$.
بنا بر این، بنا بر قضیهٔ بولتسانو، عددی حقیقی مانند x_1 که

$$a_1 < x_1 < a_2$$

موجود است به طوری که $f(x_1) = 0$. مقدار تابع f را در نقطهٔ $x = a_3$ به دست می‌آوریم.

$$f(a_3) = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2).$$

چون $f(a_3) > 0$ و $f(a_2) < 0$، بنابراین $f(a_2)\cdot f(a_3) < 0$.
پس بنا بر قضیهٔ بولتسانو، عددی حقیقی مانند x_2 که $a_2 < x_2 < a_3$ موجود است به طوری که $f(x_2) = 0$.
چون کثیرالجملهٔ $f(x) = 0$ از درجهٔ دوم است بنا بر این معادلهٔ $f(x) = 0$ دارای دوریشهٔ حقیقی متمایز x_1 و x_2 است.
در نتیجه هر معادله بصورت (۱) دارای دو ریشه حقیقی متمایز است. حال به نکته‌ای خاص اشاره می‌کنیم وآن اینکه x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ (۱) در نامساویهای زیر صدق می‌کنند:

$$(۲)\quad a_1 + \frac{1}{3}(a_2 - a_1) < x_1 < a_1 + \frac{2}{3}(a_2 - a_1),$$

$$(۳)\quad a_2 + \frac{1}{3}(a_3 - a_2) < x_2 < a_2 + \frac{2}{3}(a_3 - a_2).$$

برای اثبات نا مساوی (۲) بدین طریق عمل می‌کنیم. گوئیم چون x_1 ریشهٔ معادلهٔ (۱) است، بنا بر این،

$$\frac{1}{x_1 - a_1} + \frac{1}{x_1 - a_2} + \frac{1}{x_1 - a_3} = 0,$$

یا

$$\frac{1}{a_2 - x_1} + \frac{1}{a_3 - x_2} = \frac{1}{x_1 - a_1}.$$

چون $\frac{1}{a_2 - x_1} > \frac{1}{a_3 - x_1}$ پس $\frac{2}{a_2 - x_1} > \frac{1}{x_1 - a_1}$.
بنا بر این، $a_1 + \frac{a_2 - a_1}{3} < x_1$.
از طرفی می‌دانیم

$$\frac{1}{a_2 - x_1} + \frac{1}{a_3 - x_1} > \frac{1}{a_2 - x_1},$$

یا

$$\frac{1}{x_1 - a_1} > \frac{1}{a_2 - x_1},$$

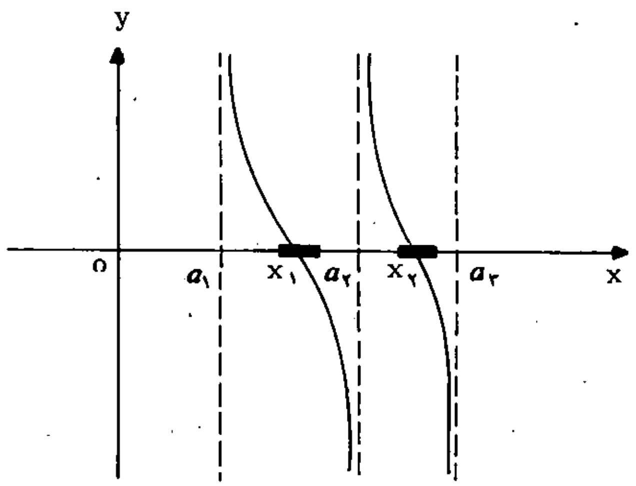
که پس از خلاصه کردن خواهیم داشت،
$x_1 < a_1 + \frac{2}{3}(a_2 - a_1)$. یعنی

$$a_1 + \frac{1}{3}(a_2 - a_1) < x_1 < a_1 + \frac{2}{3}(a_2 - a_1).$$

به‌همین طریق می‌توان نامساوی (۳) را ثابت کرد. در شکل زیر نمودار تابع

$$g(x) = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \frac{1}{x - a_3}$$

در مجموعهٔ $(a_1, a_2) \cup (a_2, a_3)$ رسم شده، و نقاط تلاقی با محور X نشان داده شده است.



اکنون در حالت کلی ثابت می‌کنیم که هر معادله بصورت

$$(۴)\quad \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \ldots + \frac{1}{x - a_n} = 0$$

که در آن $a_i \in R$ $(i = 1, 2, \ldots)$ و $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$، دارای $n - 1$ ریشهٔ حقیقی متمایز است. برای اثبات طرفین معادلهٔ (۴)را در $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$ ضرب می‌کنیم معادله‌ای هم‌ارز با (۴) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$(x - a_2)(x - a_3)\ldots(x - a_n) + (x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_n) + \ldots + (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1}) = 0.$$

فرض می‌کنیم

$$f(x) = (x - a_2)(x - a_3)\ldots(x - a_n) + (x - a_1)(x - a_3)\ldots(x - a_n) + \ldots + (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1}).$$

مقدارتابع f را در نقاط $x = a_1$، $x = a_2$، ...، و $x = a_{n-1}$ حساب می‌کنیم،

$$f(a_1) = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n),$$
$$f(a_2) = (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n),$$
$$f(a_n) = (a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1}),$$

بدیهی است که به ازای هر i طبیعی که $1 \leqslant i \leqslant n$، $f(a_i)\cdot f(a_{i+1}) < 0$. بالنتیجه بنا بر قضیهٔ بولتسانو عددی حقیقی مانند x_i $(a_i < x_i < a_{i+1})$ موجود است به‌طوری که $f(x_i) = 0$. تعداد x_iها (ریشه‌های معادلهٔ (۴)) برابر با $n - 1$ است و این ریشه‌ها جملگی متمایزند و چون کثیرالجملهٔ $f(x) = 0$ از درجهٔ $n - 1$ است؛ در نتیجه هرمعادله بصورت

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - a_i} = 0$$

دارای $n - 1$ ریشهٔ حقیقی متمایز است. حال این سوأل مطرح است آیا مشابه نامساویهای (۲)، (۳) در حالت کلی که معادله بصورت (۴) مطرح است، می‌توان ارائه کرد؟ ●

مسائل

۱. (ا). نمودار تابع f با ضابطهٔ

$$f(x) = (-1)^{[x]}\frac{x-1}{x}$$

را در بازهٔ $[0, 2]$ رسم کنید. ($[x]$ جزء صحیح x است.)

(ب). با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$.

(پ) آیا تابع فوق در $x_0 = 1$ دارای مشتق است؟ مشتق چپ و راست چطور؟

۲. با استفاده از تعریف حد، ثابت کنید که تابع f با ضابطهٔ ذیل در $x_0 = 1$ دارای حد نیست.

$$f(x) = \begin{cases} 3x & (-1 < x \leqslant 1) \\ 2x & (1 < x \leqslant 3). \end{cases}$$

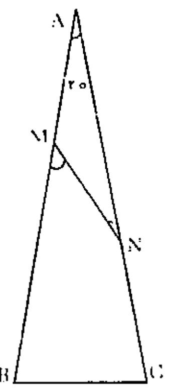
۳. مطلوبست تعیین مینیموم مطلق تابع f با ضابطهٔ ذیل

$$f(x) = \text{Max}\,\{\sin x, \cos x\}, \quad x \in [0, 2\pi].$$

۴. ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی زوج مانند n،

$$20^n + 16^n - 3^n \equiv 1 \text{ (پیمانه } 323)$$

۵. درمثلث متساوی‌الساقین ABC بازاویهٔ رأس $\widehat{A} = 20°$، طولهای AM و CN را مساوی BC جدا کرده، M را به N وصل می‌کنیم. به طریقهٔ مثلثاتی (نه هندسی) زاویهٔ $B\widehat{M}N$ را بیابید (شکل زیر).



(توضیح. علاقه‌مندان هندسه، می‌توانند راه حل هندسی‌هم برای این مسئله ارائه دهند.)

۶. از مثلثی سه مرکز دایرهٔ محاطی معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۷. قرینه‌های هر نقطه از دایرهٔ محیطی مثلث مفروض بریک خط واقعند که این خط از نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع می‌گذرد (تصویر هرنقطه از دایرهٔ محیطی بروی سه ضلع بریک استقامتند).

۸. دستگاه $(Q, *, \square)$ را در نظر می‌گیریم، که در آن Q مجموعهٔ اعداد گویا و اعمال $*$ و $\square$ چنین تعریف شده‌اند:

$$a * b = a + b - 1$$
$$a \square b = a + b - ab.$$

آیا $(Q, *, \square)$ یک حلقه است؟ میدان چطور؟

۹. تابع زیر مفروض است

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \in Q) \\ 0 & (x \notin Q). \end{cases}$$

ثابت کنید که این تابع فقط در $x_0 = 0$ پیوسته است.

۱۰. اگر $ac - b^2 > 0$ و $ac' - 2bb' + ca' = 0$ آنگاه $a'c' - b'^2 \leqslant 0$.

۱۱. بدون محاسبه نشان دهید که

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 arc\sin x dx.$$

۱۲. (آ). چند عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰ هست‌که نه‌بر ۵ و نه بر ۷ قابل قسمت است؟
(ب) چند عـدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰ هست که نه بر ۳، نه بر ۵، و نه بر ۷ قابل قسمت است؟
(پ) چند عـدد طبیعی نابیشتر از ۱۰,۰۰۰ مانند x هست به طوری که $2^x - x^2$ مضرب ۷ نیست؟

۱۳. دو عمل $\odot$ و $\oplus$ را در مجموعهٔ اعداد صحیح Z، بـه صورت ذیل تعریف می‌کنیم

$$a \odot b = (a, b),\ a \oplus b = [a, b] \quad (a, b \in Z),$$

که در آن (a, b) و $[a, b]$ بترتیب به‌معنی بزرگترین مقسوم‌علیه‌های مشترک و کوچکترین مضرب مشترک a و bاند. ثابت کنید کـه هریک ازاعمال فوق نسبت به‌دیگری توزیع‌پذیر است، به‌عبارت دیگر، به ازای هر a و b از Z،

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c),$$
$$a \oplus (b \odot c) = (a \oplus b) \odot (a \oplus c).$$

(ب) بنا برآنکه a و b دوریشهٔ متوالی معادلهٔ $p(x) = 0$ باشند، در این صورت عـدهٔ ریشه‌های معادلهٔ (*) که بین a و b قرار دارند فرد است (بـا احتساب بستائی [= مرتبهٔ تکـرار] هرریشه).

۱۴. (آ). فرض کنیم که $p(x)$ یک بسجمله [= کثیرالجمله] باشد. ثابت کنید که بین هردو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $p(x) = 0$، ریشه‌ای از معادله ذیل وجود دارد

$$p'(x) + k\,p(x) = 0, \qquad (*)$$

که در آن $k \neq 0$ عدد حقیقی دلخواهی است.

۱۵. فرض کنیم کـه k صفر بین هر جفت رقم متوالی عـدد ۱۴۶۴۱ درج کـرده باشیم. ثابت کنید عـدد حاصل مربع کامل است.

۱۶. مطلوبست تعیین همهٔ جوابهای معادلهٔ ذیل

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right) - \operatorname{cotg}(\pi \sin x) = 0.$$

۱۷. فرض کنیم نقاط A، B، و C که بر یک استقامت نیستند چنان باشند که $AB^2 \leqslant AC^2 + BC^2$. ثابت کنید که به ازای هرنقطه مانند D از صفحهٔ A، B، و C،

$$CD^2 \leqslant AD^2 + BD^2.$$

آیا نامساوی فوق‌وقتی که D در این صفحه نباشد برقرار است؟

۱۸. ثابت کنید که به ازای هر دو عدد طبیعی متباین m و n عبارت $\dfrac{(m+n-1)!}{m!\,n!}$ یک عدد طبیعی است.

۱۹. مطلوبست تعیین دو رقم آخر عدد $14^{(14^{14})}$.

۲۰. ثابت کنید که به ازای هر دو عدد طبیعی m و n، عبارت $mn\,(m^{60} - n^{60})$ بر ۵۶۷۸۶۷۳۰ قابل قسمت است.

حل مسائل شمارهٔ (۲)

۱. تابع f با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x < -1) \\ 0 & (x = -1) \\ \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & (x > -1) \end{cases}$$

مفروض است. مستقیماً، بـا استفاده از تعریف پیوستگی در یک نقطه، در پیوستگی این تابع در نقطهٔ $x = -1$ بحث کنید.

راه حل اول. ثابت می‌کنیم که تابع f در نقطهٔ $x = -1$ پیوسته نیست. برای این منظور به‌برهان خلف عمل می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم تابع‌در نقطهٔ $x = -1$ پیوسته باشد. بنا براین به‌ازای $\varepsilon = 1$، عددی مثبت‌مانند δ وجود دارد به طوری‌که به‌ازای هر x، اگر $|x + 1| < \delta$ آنگاه $|f(x) - f(-1)| < 1$. فرض می‌کنیم که $x_1 = -1 + \frac{\delta}{2}$ و $x_2 = -1 - \frac{\delta}{2}$. در ایـن صورت، باتوجه به اینکه $|x_1 + 1| < \delta$ و $|x_2 + 1| < \delta$،

$$|f(x_1) - f(-1)| = \left|-2 + \frac{\delta}{2}\right| < 1,$$

$$|f(x_2) - f(-1)| = \left|\frac{\delta}{2}\left(2 + \frac{\delta}{2}\right)\right| < 1.$$

بنا بر این $|4 - \delta| < 2$ و $\left|\delta + \dfrac{\delta^2}{4}\right| < 1$. اینک ملاحظه می‌شود که

$$\begin{aligned} 4 < 4 + \delta^2/4 &= |(4 - \delta) + (\delta + \delta^2/4)| \\ &\leqslant |4 - \delta| + \left|\delta + \frac{\delta^2}{4}\right| \\ &< 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

بالنتیجه، $4 < 3$؛ و این یک تناقض است.

راه حل دوم. ثابت می‌کنیم که $f(-۱)$ حد تابع f نیست (وقتی که $x \to -۱$). برای این منظور باید صحت گزارهٔ ذیل را ثابت کنیم:

ε مثبتی هست که به ازای هر δ مثبت xی وجود دارد که در عین حال

$$|x+۱|<\delta,\ |f(x)-f(-۱)|\geqslant\varepsilon.$$

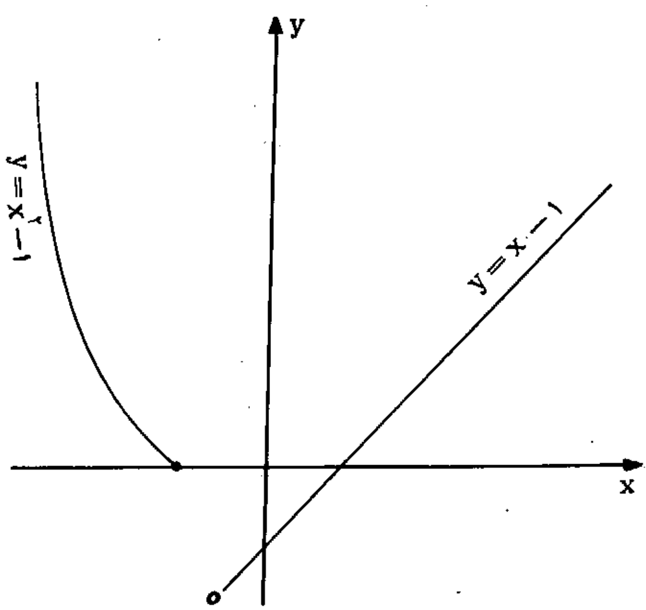
فرض کنیم که $\varepsilon = ۱$؛ اگر δ عدد مثبت دلخواهی باشد، با انتخاب $x=-۱+\min\left\{\frac{\delta}{۲},۱\right\}$، خواهیم داشت:

$|x+۱| = x+۱<\delta$ و

$$|f(x)-f(-۱)| = |x-۱| = |۲-(x+۱)| \geqslant ۲-|x+۱| \geqslant ۲-۱=۱.$$

راه حل سوم. ثابت می‌کنیم که حد راست این تابع در نقطهٔ $x=-۱$ برابر -۲ است و از اینجا چون حد راست تابع با مقدار تابع در این نقطه متمایز است، پس تابع نمی‌تواند در $x=-۱$ پیوسته باشد. فرض کنیم ε مثبت دلخواهی باشد، عدد مثبت δ را برابر ε می‌گیریم. اینک اگر x عدد دلخواهی باشد به‌طوری که $۰<x+۱<\delta$ آنگاه

$$|f(x)-(-۲)| = \left|\frac{x^۲-۱}{x+۱}+۲\right| = |x+۱| = x+۱<\delta=\varepsilon$$ ■



۲. ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح نامنفی n،

$$۳^{۶n+۲}+۳^{۳n+۲}+۱\equiv ۰\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳).$$

راه حل اول. اثبات به استقراء است. به ازای $n=۰$،

$$۳^۲+۳^۱+۱\equiv ۰\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳)$$

که به وضوح برقرار است. اینک فرض می‌کنیم که به ازای هر n صحیح نامنفی،

$$۳^{۶n+۲}+۳^{۳n+۱}+۱\equiv ۰\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳),$$

(فرض استقراء). طرفین همنهشتی اخیر را در $۳^۶$ ضرب می‌کنیم.

$$۳^{۶n+۸}+۳^{۳n+۷}+۳^۶\equiv ۰\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳)\quad (*)$$

از طرف دیگر،

$$۳^{۳n+۷} \equiv ۳^{۳n+۴}\times ۲۷ \equiv ۳^{۳n+۴}(۲\times ۱۳+۱) \equiv ۳^{۳n+۴}\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳)$$

همچنین به سادگی دیده می‌شود که $۳^۶\equiv ۱\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳)$. با استفاده ازروابط اخیر همنهشتی (*) به صورت زیر در می‌آید:

$$۳^{۶n+۸}+۳^{۳n+۴}+۱\equiv ۰\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳),$$

یا

$$۳^{۶(n+۱)+۲}+۳^{۳(n+۱)+۱}+۱\equiv۰\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳)$$

(حکم استقراء). بنا بر این حکم ثابت می‌شود.

راه حل دوم. می‌دانیم

$$۳^۳\equiv۱\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳).$$

از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$(۳^۳)^{۲n}\equiv۱\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳),$$
$$(۳^۳)^n\equiv ۱\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳).$$

بنابراین،

$$۳^{۶n}\equiv۱\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳),\ ۳^{۳n}\equiv ۱\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳).$$

با استفاده از روابط اخیر خواهیم داشت:

$$۳^{۶n+۲}\equiv ۹\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳),$$
$$۳^{۳n+۱}\equiv۳\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳).$$

بنابر این،

$$۳^{۶n+۲}+۳^{۳n+۱}+۱\equiv ۱۳\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳).$$

و حکم برقرار می‌شود.

راه حل سوم. چون $۳^۳\equiv۱\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳)$،

$$۳^{۳n}\equiv ۱\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳),$$

و بالنتیجه، $۳^{۳n+۱}\equiv ۳\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳)$. از اینرو

$$(۳^{۳n+۱})^۳\equiv ۳^۳\equiv ۱\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳).$$

یعنی، $(۳^{۳n+۱})^۳-۱\equiv۰\ (\text{پیمانهٔ } ۱۳)$. بنا بر این بر طبق تعریف همنهشتی

$$۱۳ \mid (۳^{۳n+۱})^۳-۱.$$

اینک با توجه به اتحاد $a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+b^۲+ab)$ می‌توان نوشت:

$$۱۳\mid(۳^{۳n+۱}-۱)(۳^{۶n+۲}+۳^{۳n+۱}+۱).$$

چون دو عدد ۱۳ و $۳^{۳n+۱}-۱$ نسبت بهم اولند (چرا؟)، بنا بر این

$$۱۳\mid ۳^{۶n+۲}+۳^{۳n+۱}+۱$$

و از اینجا حکم ثابت می‌شود ■

۳. ثابت کنید که در هر مثلث ABC، همواره

$$b\cos^{۲}\frac{C}{۲}+c\cos^{۲}\frac{B}{۲}=p$$

(p نصف محیط است)

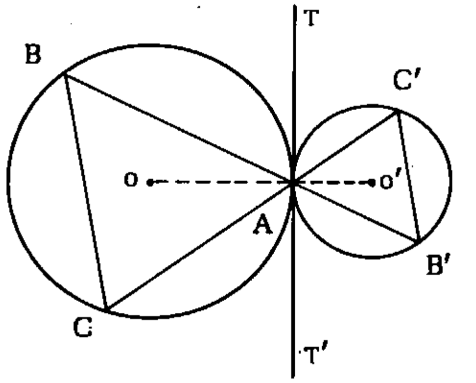
حل. برای حل، کافی است از روابط زیر استفاده کنیم:

$$\cos^{۲}\frac{C}{۲}=\frac{۱}{۲}(۱+\cos C)$$
$$=\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲ab}\right),$$
$$\cos^{۲}\frac{B}{۲}=\frac{۱}{۲}(۱+\cos B)$$
$$=\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{a^{۲}+c^{۲}-b^{۲}}{۲ac}\right). \blacksquare$$

۴ـ دودایرهٔ O و O' در نقطهٔ A مماس خارج‌اند. از A دوقاطع دلخواه رسم می‌کنیم تا دایرهٔ O را در نقاط B و C و دایرهٔ O' را در نقاط B' و C' قطع کند ثابت کنید که $BC \parallel B'C'$.

حل. AT مماس مشترک دودایره را رسم می‌کنیم (چون دودایره در A برهم مماسند، خط مرکزی OO' از A می‌گذرد و برای رسم مماس مشترک AT کافی است از A خطی بر OO' عمود کنیم). دو وتر BC و $B'C'$ را نیز رسم می‌کنیم. داریم

$$A\widehat{B}C=T'\widehat{A}C,$$
$$A\widehat{B'}C'=T\widehat{A}C'.$$



(چون دو زاویهٔ محاطی و ظلی باکمان مشترکند). در این تساوی زاویه‌های طرف دوم متقابل به رأس و مساویند. بنابراین $A\widehat{B}C=A\widehat{B'}C'$، بالنتیجه $BC \parallel B'C'$. $\blacksquare$

۵ـ در زیر جدول جمع، و قسمتی از جدول عمل ضرب یک حلقهٔ چهار عضوی مانند R داده شده است. با استفاده از قانون توزیع‌پذیری، جدول عمل ضرب را تکمیل کنید. آیا این حلقه تعویضپذیر است؟ عضو خنثای عمل ضرب کدام است؟

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	—	—	a
c	a	—	c	—
d	a	b	c	—

حل.

(آ) محاسبهٔ $b\cdot c$. گوئیم چون $b=d+c$،

$$b\cdot c=(d+c)\cdot c=d\cdot c+c\cdot c=c+c=a.$$

(ب) محاسبهٔ $b\cdot b$. با توجهٔ به اینکه $b=d+c$،

$$b\cdot b=b\cdot(d+c)=b\cdot d+b\cdot c=a+a=a.$$

[به موجب قسمت (آ)]

(پ) محاسبهٔ $c\cdot b$. با توجه به اینکه $c=b+d$،

$$c\cdot b=(b+d)\cdot b=b\cdot b+d\cdot b=a+b=b.$$

(ت) محاسبهٔ $c\cdot d$. چون $d=c+b$،

$$c\cdot d=c\cdot(c+b)=c\cdot c+c\cdot b=c+b=d.$$

(ث) محاسبهٔ $d\cdot d$، چون $d=b+c$،

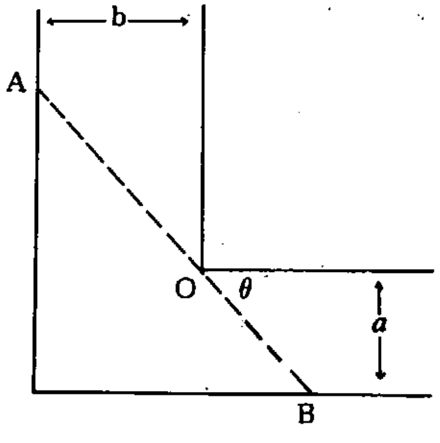
$$d\cdot d=d\cdot(b+c)=d\cdot b+d\cdot c=b+c=d.$$

چون $b\cdot c=a$ و $c\cdot b=b$، حلقهٔ مذکور تعویضپذیر نیست. بعلاوه، ملاحظه می‌کنیم که

$$d\cdot a=a,\ d\cdot b=b,\ d\cdot c=c,\ d\cdot d=d,$$

یعنی d عضو خنثای چپ نسبت به عمل ضرب است. ولی R نسبت به عمل ضرب عضو خنثای راست ندارد. بسادگی معلوم می‌شود که R فاقد عضو خنثا نسبت به عمل ضرب است. $\blacksquare$

۶ـ در شکل زیر، زاویهٔ θ را چنان تعیین کنید که طول AB کمترین مقدار را داشته باشد.



حل. با توجه به شکل داریم:

$$OB=\frac{a}{\sin\theta},\quad OA=\frac{b}{\cos\theta}.$$

از اینجا،

$$AB=\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta}.$$

چنانکه ملاحظه می‌شود با تغییر θ در بازهٔ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$، طول AB هم تغییر خواهد کرد. فرض می‌کنیم که $AB=d(\theta)$. پس،

$$d(\theta)=\frac{a}{\sin\theta}+\frac{b}{\cos\theta}\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right).$$

از اینجا، به ازای هر θ که $0<\theta<\frac{\pi}{2}$،

$$d'(\theta)=\frac{\cos^3\theta\,(b\,\mathrm{tg}^3\theta-a)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

تنها ریشهٔ مشتق در بازهٔ $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$، عبارت است از

$$\theta_0=\mathrm{arc\,tg}\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

بسادگی معلوم می‌شود که تابع $d(\theta)$ به ازای این θ_0 دارای کمترین مقدار است:

θ	0		θ_0		$\frac{\pi}{2}$
$d'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$d(\theta)$		$\searrow$	Min	$\nearrow$	

بعلاوه،

$$d(\theta_0)=\frac{a}{\sin\theta_0}+\frac{b}{\cos\theta_0}.$$

به محاسبه معلوم می‌شود که

$$d(\theta_0)=a\sqrt{1+\sqrt[3]{b^2/a^2}}+b\sqrt{1+\sqrt[3]{a^2/b^2}}=\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}.$$

در حالت خاص که a و b مساویند، خواهیم داشت:

$$\theta_0=\frac{\pi}{4},\ d(\theta_0)=2a\sqrt{2}.$$

تبصره. مسئله اخیررا می‌توان بطریق دیگری‌هم حل کرد. بدین طریق که ابتدا AB را برحسب $HB\,(=x)$ (شکل زیر) تعیین کرد، و سپس مانند راه حل اول به مشتقگیری به کمترین مقدار AB دست یافت. ما ذیلاً این عمل را انجام داده‌ایم، و برای خلاصه نویسی از نوشتن محاسبات لازم خودداری کرده‌ایم. توضیح هر مرحله به عهدهٔ خواننده است.

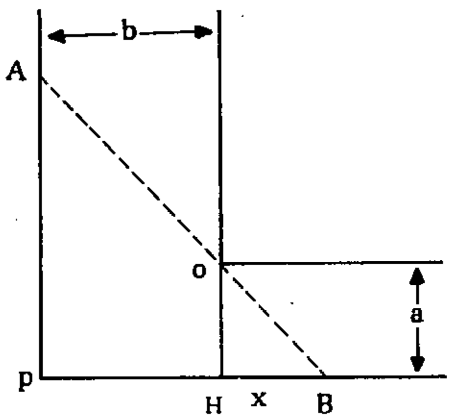
$$AB=\sqrt{(PB)^2+(PA)^2}.$$

از آنجا

$$AB=d(x)=\sqrt{(b+x)^2+\left(\frac{ab}{x}+a\right)^2}.$$

به مشتقگیری خواهیم داشت:

$$d'(x)=\frac{x^3-a^2b}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}.$$



با حل معادلهٔ $d'(x)=0$، به جواب $x_0=\sqrt[3]{a^2b}$ می‌رسیم. به سادگی معلوم می‌شود که تابع $d(x)$ کمترین مقدار را در $x=x_0$ می‌گیرد. بنابراین، کمترین مقدار AB عبارت است از

$$d(x_0)=a(1+\sqrt[3]{b^2/a^2}).\ ■$$

۷. ثابت کنید که معادلهٔ $x^5+x=10$ فقط دارای یک ریشهٔ حقیقی است و این ریشه عددی گنگ است.

حل. برای اثبات تابع $f(x)=x^5+x-10$ را درنظر می‌گیریم $(x\in R)$؛ معلوم است که

$$(1)\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$$

بعلاوه، به ازای هر x حقیقی،

$$f'(x)=5x^4+1.$$

بنا براین تابع f بر بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ اکیداً صعودی است. از اینجا وپیوستگی تابع f، به موجب (۱)، نتیجه می‌شود که معادلهٔ $f(x)=0$ درست دارای یک ریشهٔ حقیقی است. برای اثبات گنگ بودن این ریشه، فرض‌کنیم چنین نباشد (فرض خلف). بنا بر این آن را می‌توان به صورت کسر تحویلناپذیر $\frac{p}{q}$ نوشت (p طبیعی و q صحیح است). داریم

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=0.$$

بنا بر این،

$$(2)\quad p^5+pq^4=10q^5.$$

از اینجا لازم می‌آید که $q \mid p^5$. چون p و q متباین‌اند، $q = \pm 1$ (چرا؟) پس $p^5 + p = 10$. از رابطهٔ اخیر، معلوم می‌شودکه $p \mid 10$؛ یعنی p باید یکی از اعداد ۱، ۲، ۵، و ۱۰ باشد. به امتحان محقق می‌شود که هیچیک از اعداد ± 1، ± 2، ± 5، و ± 10 در رابطهٔ (۲) صدق نمی‌کنند (تناقض). بنا براین تنها ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $x^5 + x = 10$، گنگ است. برای یافتن تقریبی برای ریشه، کافی است ملاحظه کنیم $f(1/5) < 0$ و $f(1/6) > 0$، بنا بر این ریشهٔ گنگ معادلهٔ فوق بین دوعدد ۱/۵ و ۱/۶ قرار داد. ■

۸. ثابت کنید که

$$\int_0^x (t - [t])^2\, dt = \frac{1}{3}[x] + \frac{1}{3}(x - [x])^3.$$

حل. فرض کنیم‌که $x > 0$. بر حسب اینکه $x < 1$ یا $x \geqslant 1$، دو حالت تشخیص می‌دهیم. حالت اول، $x < 1$. در این صورت، با توجه به اینکه در انتگرال طرف اول تساوی فوق، $0 \leqslant t \leqslant x$، خواهیم داشت: $[t] = 0$ و بالنتیجه،

$$\int_0^x (t - [t])^2 dt = \int_0^x t^2\, dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^x$$

$$= \frac{1}{3} x^3$$

$$= \frac{1}{3}[x] + \frac{1}{3}(x - [x])^3,$$

زیرا، $[x] = 0$.

حالت دوم، $x \geqslant 1$. در این صورت انتگرال طرف اول تساوی فوق را می‌توان به صورت ذیل نوشت:

$$\int_0^x (t - [t])^2\, dt = \int_0^{[x]} (t - [t])^2\, dt + \int_{[x]}^x (t - [t])^2\, dt$$

$$= \sum_{k=1}^{k=[x]} \int_{k-1}^k (t - [t])^2\, dt + \int_{[x]}^x (t - [t])^2\, dt.$$

اینک می‌پردازیم به محاسبهٔ هر یک از دو عبارت اخیر. ابتدا انتگرال $\int_{[x]}^x (t - [t])^2\, dt$ را محاسبه کنیم. در اینجا $[x] \leqslant t \leqslant x$؛ بنابراین $[t] = [x]$ و

$$(1) \qquad \int_{[x]}^x (t - [t])^2\, dt = \int_{[x]}^x (t - [x])^2\, dt$$

$$= \frac{1}{3}(t - [x])^3 \Big|_{[x]}^x$$

$$= \frac{1}{3}(x - [x])^3.$$

برای محاسبهٔ عبارت

$$\sum_{k=1}^{k=[x]} \int_{k-1}^k (t - [t])^2\, dt,$$

ابتدا هریک از انتگرالهای $\int_{k-1}^k (t - [t])^2\, dt$ را محاسبه می‌کنیم ($k = 1, 2, \dots, [x]$) و سپس حاصلجمع آنها بدست می‌آوریم. گوئیم در انتگرال $\int_{k-1}^k (t - [t])^2\, dt$،

$$k - 1 \leqslant t \leqslant k,$$

بنا براین،

$$t - [t] = \begin{cases} t - k + 1 & (k - 1 \leqslant t < k) \\ 0 & t = k \end{cases}$$

از اینجا،

$$\int_{k-1}^k (t - [t])^2 dt = \int_{k-1}^k (t - k + 1)^2\, dt$$

$$= \frac{1}{3}(t - k + 1)^3 \Big|_{k-1}^k$$

$$= \frac{1}{3}.$$

بالنتیجه،

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{[x]} \int_{k-1}^k (t - [t])^2\, dt = \sum_{k=1}^{[x]} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}[x].$$

از جمع طرفین روابط (۱) و (۲) نتیجهٔ مطلوب حاصل خواهد شد.

باقی می‌ماند حالت $x < 0$ که برعهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم. ■

۹. مطلوبست تعیین عدهٔ جمیع دسته‌های n تائی متشکل از ارقام ۰، ۱ مشروط بر اینکه در هر یک از این دسته‌ها رقم ۱ به طور متوالی نیامده باشد.

حل. اگر تعداد «۱» ها با j نشان دهیم، تعداد «۰» ها در دستهٔ n تائی متشکل از ارقام ۰ و ۱ عبارت از $n - j$ خواهد بود. در صورتی که $n - j$ صفر را در یک ردیف نوشته و j یک‌را به هرطریق ممکن درلابلا وطرفین صفرها قراردهیم (عدهٔ جاها درلابلا وطرفین $n - j$ صفر برابر با $n - j + 1$است)، جمیع دسته‌های n تائی متشکل از ۰ ها و ۱ ها به دست خواهد آمد. بنابراین عدهٔ این دسته‌ها برابر است با تعداد طرق انتخاب j محل از بین $n - j + 1$ محل موجود، یعنی برابر است با

$$F(n) = \sum_j \binom{n - j + 1}{j}.$$

بدیهی است که باید داشته باشیم $0 \leqslant j$ و $j \leqslant n - j + 1$. لذا در حاصلجمع فوق

$$0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{n + 1}{2}\right].$$

توضیح. این مسئله را می‌توان با اعداد فیبوناتچی که در مسئلهٔ زیر به بیان می‌آیند، مرتبط دانست. مسئلهٔ اخیر در کتاب لیبرآباکی (کتاب حساب) فیبوناتچی منتشره به‌سال ۱۲۰۲ مطرح

شده است.

یک جفت خرگوش نر و ماده را در نظر بگیرید. خرگوش ماده هرماه یک جفت خرگوش دیگر (با جنسیتهای متفاوت) به دنیا می‌آورد. خرگوش ماده جدید الولاده دو ماه بعد خود یک جفت‌خرگوش دیگری (آنهم باجنسیتهای متفاوت) به‌دنیا می‌آورد. این کار به همین ترتیب ادامه می‌یابد، خود خرگوشهای ماده موجود سر هرماه و خرگوشهای جدید سر دوماه یک جفت خرگوش دیگر را به دنیا می‌آورند. این کار به همین ترتیب ادامه می‌یابد، خود خرگوشهای ماده موجود سر هر ماه و خرگوشهای جدید سر دوماه یک جفت خرگوش دیگر را به دنیا می‌آورند. تعداد خرگوشها در پایان یک سال چیست؟

ملاحظه می‌کنیم که در پایان ماه اول دو جفت خرگوش وجود خواهد داشت. در پایان ماه دوم فقط یکی از این دوجفت صاحب فرزند خواهند شد و لذا تعداد جفتها در پایان ماه دوم ۳ است. در پایان ماه سوم خرگوشهای اصلی همراه با خرگوشهایی که در ماه اول به دنیا آمده‌اند، تولید بچه می‌کنند و لذا جفت خرگوشها ۵ خواهد بود.

به طور کلی اگر $F(n)$ تعداد جفت خرگوشها را در پایان ماه n ام نشان دهد آنگاه در پایان ماه $(n+1)$ ام، $F(n)$ جفت خرگوش «قدیمی» و به تعداد جفت خرگوشهای ماه $(n-1)$ ام یعنی $F(n-1)$ خرگوش جدید خواهیم داشت. به عبارت دیگر رابطهٔ تراجعی

$$F(n+1)=F(n)+F(n-1)$$

را خواهیم داشت که مقدار $F(12)$ بر مبنای F های قبلی محاسبه و عدد ۳۷۷ به دست خواهد آمد.

اینک برای آنکه این مسئله را با مسئلهٔ تعداد دسته‌های متشکل از ارقام ۰ و ۱، به طوری که «۱» ها پست سرهم ظاهر نشوند، ارتباط دهیم، برای هر خرگوش «شجره نامه»ای در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب که (فعلاً برای ۱۲ ماه) دوازده رقم ۰ و ۱ را به دنبال هم می‌نویسیم به طوری که «۱» ها معرف ماه ولادت خرگوش مورد نظر و نیز ماه ولادت «اجداد» این خرگوش باشد و در سایر ماهها از رقم صفر استفاده می‌شود. چون برای تولید هر جفت خرگوش دو ماه وقت لازم است، لذا در دنبالهٔ اعداد فوق هیچگاه ارقام یک پشت‌سرهم ظاهر نمی‌شوند. به عنوان مثال‌دنبالهٔ ۱۰۰۰۰۰۰۱۰۰۱۰ «شجره نامهٔ» جفت‌خرگوشهایی است که در پایان ماه یازدهم به دنیا آمده‌اند. پدر پدر بزرگ آنها در پایان ماه هشتم متولد شده و اجداد اولیه آنها بچه‌های اولین جفت خرگوش هستند. برای خرگوشهای اصلی «شجره‌نامهٔ» ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ را در نظر می‌گیریم. بنابراین تعداد خرگوشها در پایان ماه دوازدهم عبارت است از

$$F(12)=\sum_{j=0}^{m}\binom{12-j+1}{j}=377$$

که در آن $m=\left[\frac{12+1}{2}\right]$؛ و در پایان ماه n ام همان $F(n)$ مورد بحث در مسئلهٔ اصلی ماست.

۱۱• مطلوبست تعیین جزء صحیح عدد زیر

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots\frac{1}{\sqrt{10000}}$$

راه حل اول. ابتدا ثابت می‌کنیم که به ازای هر n طبیعی،

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$$

برای اثبات ملاحظه می‌کنیم که به ازای هر n طبیعی،

$$\begin{aligned}2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}&=\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}};\end{aligned}$$

و همچنین به ازای هر n طبیعی که $n>1$،

$$\begin{aligned}2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}&=\frac{2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\\&=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

(بدیهی است که نامساوی اخیر به ازای $n=1$ هم بر قرار است).

اینک با توجه به نامساوی فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{10{,}000}}\\&>2[(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})\\&+\dots+(\sqrt{10{,}001}-\sqrt{10{,}000})]\\&=2\sqrt{10{,}001}-2\\&>198.\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{10{,}000}}\\&<1+2[(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\\&+\dots+(\sqrt{10{,}000}-\sqrt{9999})]\\&=1+2(100-1)\\&=199.\end{aligned}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که جزء صحیح عدد مزبور ۱۹۸ است.

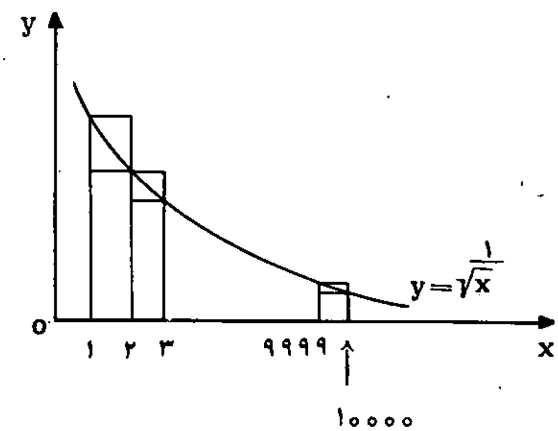
راه حل دوم. تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ را در بازهٔ $[1,10000]$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که

$$S=f(1)+f(2)+\dots+f(10{,}000).$$

در واقع می‌خواهیم جزء صحیح عدد S را بیابیم. گوئیم

$$(*)\quad \sum_{k=2}^{10000} f(k) < \int_{1}^{10000} (1/\sqrt{x})\,dx < \sum_{k=1}^{9999} f(k),$$

زیرا مساحت محصور به منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ و خطوط $y = 0$، $x = 1$، و $x = 10000$ از حاصلجمع مساحات مستطیلهای بزرگ، کوچکتر و از حاصلجمع مساحات مستطیلهای کوچک، بزرگتر است (شکل زیر).



ولی مساحت زیر منحنی مذکور عبارت است از

$$\int_{1}^{10000} (1/\sqrt{x})\,dx = [2\sqrt{x}]_{1}^{10000} = 198.$$

بنابراین نامساوی (*) با توجه به تعریف S چنین خواهد شد:

$$S - f(1) < 198 < S - f(10000),$$

یا

$$S - 1 < 198 < S - \frac{1}{\sqrt{10000}}.$$

از اینجا، $198/01 < S < 199$، و بنابراین جزء صحیح S برابر با ۱۹۸ می‌شود. ■

۱۲. فرض کنیم که a و b دو عدد مثبت و m و n اعدادی طبیعی باشند به طوری که $n > m$. ثابت کنید که

$$(a^m + b^m)^n < (a^n + b^n)^m.$$

حل. فرض می‌کنیم که $u = \frac{a^n}{a^n + b^n}$ و $P = \frac{m}{n}$. در این صورت، $0 < u < 1$ و $P > 1$. بنابراین، $u^P < u$ و $(1 - u)^P < 1 - u$. از جمع طرفین این نامساویها، خواهیم داشت:

$$u^P + (1 - u)^P < 1.$$

اینک طرفین نامساوی فوق را در $(a^n + b^n)^P$ ضرب می‌کنیم؛ نتیجه می‌شود که

$$(a^n)^P + (b^n)^P < (a^n + b^n)^P.$$

اگر طرفین نامساوی اخیر را به توان n برسانیم، نتیجهٔ مطلوب حاصل خواهد شد. ■

۱۳. فرض کنیم که $|a_{ij}|$ دترمینانی از مرتبهٔ n باشد. معلوم است که بسط این دترمینان دارای $n!$ جمله است. اینک اعضای واقع بر قطر اصلی این دترمینان را به صفر تبدیل می‌کنیم. عدهٔ جمل بسط دترمینان جدید را تعیین کنید.

حل. می‌دانیم که مقدار یک دترمینان برابر با مجموع جبری حاصلضربهایی است که عوامل ضرب آن را یکی و فقط یکی از عناصر هرسطر و هر ستون (با علامت مناسب) تشکیل می‌دهند. به عبارت دیگر، مقدار یک دترمینان از مرتبهٔ n برابر با مجموع جبری همهٔ جملاتی به صورت

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n} \qquad (1)$$

است که در آن $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ و $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ جایگشتهایی از مجموعهٔ اعداد $(1, 2, \ldots, n)$ هستند. بدیهی است که تعداد چنین جملاتی $n!$ است، زیرا همچنانکه در (۱) ملاحظه می‌شود برای به دست آوردن این تعداد باید اندیسهای $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ را به هر صورت ممکن در مقابل اندیسهای $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ جایگشت داد. این کار به $n!$ صورت ممکن است (کافی است ترتیب اعضای یکی از این مجموعه‌ها را ثابت گرفته و دیگری را به هرصورت ممکن در مقابل آن جایگشت دهیم). حال برای به دست آوردن تعداد جملات در بسط دترمینانی که اعضای قطر اصلی آن صفرند، توجه می‌کنیم که هر جمله به شکل (۱) که در آن فقط یکی از عوامل ضرب صفر باشد، یعنی در صورتی که اندیسهای هر یک از a ها برابر باشند از بسط دترمینان حذف خواهند شد. بنابراین تعداد جملات در بسط چنین دترمینانی برابر است با

$$\beta = n! - \alpha,$$

که در آن α عدهٔ جملی است که حداقل یکی از عوامل ضرب در آن صفر است.

اینک اگر A_i مجموعهٔ جملی از دترمینان باشد که درآنها جملهٔ روی سطر i ام و ستون i ام صفر است $(1 \leqslant i \leqslant n)$ آنگاه

$$\alpha = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|.$$

اما

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

ولی $|A_i| = (n-1)!$. زیرا عدهٔ اعضای A_i با ثابت گرفتن اندیسهای a_{ii} و جایگشت دادن سایر اندیسها در (۱) به هر طریق ممکن، به دست می‌آید. همینطور

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)!, \quad |A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!, \ldots$$

لذا،

$$\alpha = \sum_i (n-1)! - \sum_{i<j} (n-2)! + \sum_{i<j<k} (n-3)! - \ldots + (-1)^{n-1} \times 1$$
$$= n(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \ldots + (-1)^{n-1}$$
$$= n! - \frac{n!}{2} + \frac{n!}{3} - \ldots (-1)^{n-1}.$$

بنابراین

$$\beta = n! - \alpha = \frac{n!}{2} - \frac{n!}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}. \quad ■$$

۱۴. ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح نامنفی مانند k،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1}.$$

راه‌حل اول. اثبات به استقراء قوی (نسبت به k) است. اگر $k = 1$، باید ثابت کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2},$$

که به موجب رابطهٔ $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$، به وضوح برقرار است.

فرض کنیم که رابطهٔ (*) به ازای هر عدد طبیعی l که $l \leqslant k$ بر قرار باشد، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^l} \sum_{i=1}^{n} i^{l-1} = \frac{1}{l} \quad (1 \leqslant l \leqslant k),$$

(فرض استقراء). ثابت می‌کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1}$$

برای این منظور ابتدا می‌کنیم که

$$n^{k+1} = \sum_{i=1}^{n} \left[i^{k+1} - (i-1)^{k+1} \right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left[(k+1) i^k - \binom{k+1}{2} i^{k-1} + \ldots + (-1)^{j-1} \binom{k+1}{j} i^{k+1-j} + \ldots + (-1)^k \right].$$

از آنجا، با تقسیم طرفین رابطهٔ فوق به n^{k+1}،

$$(*) \quad 1 = \frac{k+1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k - \frac{1}{n} \binom{k+1}{2} \frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^{n} i^{k-1} + \ldots + \frac{(-1)^{j-1}}{n^{j-1}} \binom{k+1}{j} \frac{1}{n^{k+2-j}} \sum_{i=1}^{n} i^{k+1-j} + \ldots + \frac{(-1)^k}{n^{k+1}}.$$

اینک‌گوئیم به ازای هر j طبیعی که $2 \leqslant j \leqslant k+1$، داریم $1 \leqslant k+2-j \leqslant k$. بنابراین بـه موجب فرض استقراء،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+2-j}} \sum_{i=1}^{n} i^{k+1-j} = \frac{1}{k+2-j},$$

در نتیجه،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{n^{j-1}} \binom{k+1}{j} \frac{1}{n^{k+2-j}} \sum_{i=1}^{n} i^{k+1-j} = 0.$$

که در آن، $j = 2, 3, \ldots, k+1$. بنابراین بر طبق (*)،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k+1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k = 1,$$

و حکم ثابت می‌شود.

راه‌حل دوم. برای اثبات حکم، کافی است ثابت کنیم که به ازای هر دو عدد طبیعی k و n،

$$\frac{n^{k+1}}{k+1} < \sum_{i=1}^{n} i^k < \frac{(n+1)^{k+1} - 1}{k+1}.$$

زیرا، از تقسیم طرفین رابطهٔ فوق به n^{k+1}، خواهیم داشت:

$$1 < \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k < \frac{(n+1)^{k+1} - 1}{(k+1)\, n^{k+1}},$$

و از آنجا با توجه به اینکه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{k+1} - 1}{(k+1)\, n^{k+1}} = 1,$$

حکم ثابت خواهد شد.

بنابراین می‌پردازیم به اثبات نامساوی مذکور. فـرض کنیم که

$$S = x^k + x^{k-1} + \ldots + x + 1,$$

که در آن k یک عدد طبیعی و x عدد حقیقی مثبتی است. واضح است که اگر $x > 1$ آنگاه بزرگترین جمله در حاصلجمع فوق x^k و کوچکترین جمله ۱ است. بنابراین،

$$k+1 < S < (k+1)\, x^k.$$

با استدلال مشابه، اگر $x < 1$ آنگاه

$$(k+1)\, x^k < S < k+1$$

با ضرب کردن طرفین هریک از دو نامساوی مزبور در $x - 1$،

$$(k+1)(x-1) < S(x-1) < (k+1)\, x^k (x-1)$$

یا

$$(k+1)(x-1) < x^{k+1} - 1 < (k+1)x^k(x-1),$$

که در آن x عدد حقیقی مثبتی است که $x \neq 1$.

اینک در نامساوی $(k+1)(x-1) < x^{k+1} - 1$ بجای x مقدار $\frac{i+1}{i}$ و در نامساوی $x^{k+1} - 1 < (k+1)x^k(x-1)$ بجای x مقدار $\frac{i}{i-1}$ را قرار می‌دهیم (i عدد طبیعی دلخواهی است که $i \geqslant 2$)؛ بترتیب دو نامساوی ذیل بدست خواهد آمد:

$$(k+1)i^k < (i+1)^{k+1} - i^{k+1},$$
$$i^{k+1} - (i-1)^{k+1} < (k+1)i^k.$$

نامساوی اخیر به ازای $i = 1$ هم برقرار است. بنابراین به ازای هر k و i طبیعی،

$$\frac{1}{k+1}\left[i^{k+1} - (i-1)^{k+1}\right] < i^k < \frac{1}{k+1}\left[(i+1)^{k+1} - i^k\right].$$

از اینجا، به ازای هر n طبیعی

$$\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{n}\left[i^{k+1} - (i-1)^{k+1}\right] < \sum_{i=1}^{n} i^k < \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)^{k+1} - i^k\right],$$

یا

$$\frac{1}{k+1}n^{k+1} < \sum_{i=1}^{n} i^k < \frac{1}{k+1}\left[(n+1)^{k+1} - 1\right].$$

و این همان است که می‌خواستیم. □

۱۷ عدد طبیعی n را مطلوب نامیم در صورتی که بتوان آن را به صورت $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ نوشت، که در آن a_1، a_2، ...، a_k اعدادی طبیعی‌اند (نه لزوماً متمایز) به طوری که $1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_k = 1$. بنا بر آنکه بدانیم اعداد طبیعی ۳۳ تا ۷۳ اعدادی مطلوب هستند، ثابت کنید که جمیع اعداد نا کمتر از ۳۳ نیز چنین‌اند.

حل. اثبات به استقراء قوی ابتدا از ۷۴ است. اولاً باید معلوم کنیم که ۷۴ یک عدد مطلوب است. ثانیاً ثابت کنیم که به ازای هرعدد طبیعی n، اگر $n \geqslant 74$ و همهٔ اعداد طبیعی نا کمتر از ۷۴ و نا بیشتر از n مطلوب باشند، $n + 1$ نیز مطلوب است.

برای اثبات مطلوب بودن ۷۴، گوئیم

$$74 = 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 2,$$

و

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = 1.$$

اینک فرض می‌کنیم که n عدد طبیعی دلخواهی باشد که $n \geqslant 74$ و همهٔ اعداد طبیعی نا کمتر از ۷۴ و نا بیشتر از n مطلوب باشند (فرض استقراء). عدد طبیعی $n + 1$ را در نظر می‌گیریم. دو حالت اتفاق می‌افتد:

حالت اول. n زوج است. در این صورت $\frac{n-8}{2}$ عددی است طبیعی و بعلاوه $n > \frac{n-8}{2} \geqslant 33$. بنابراین به‌موجب فرض استقراء و اینکه (طبق فرض مسئله) همهٔ اعداد طبیعی ۳۳ تا ۷۳ اعدادی مطلوب هستند، نتیجه می‌شود که $\frac{n-8}{2}$ هم مطلوب است. پس، می‌توان نوشت:

$$\frac{n-8}{2} = a_1 + a_2 + \ldots + a_k, \qquad (1)$$

که در آن a_1، a_2، ...، و a_k اعدادی طبیعی‌اند به‌طوری که

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} = 1. \qquad (2)$$

از رابطهٔ (۱) معلوم می‌شود که

$$n + 1 = 2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_k + 3 + 6,$$

و از رابطهٔ (۲) نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \ldots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

بنابراین $n + 1$ عددی مطلوب است.

حالت دوم. n فرد است. در این صورت $\frac{n-1}{2}$ عددی است طبیعی و بعلاوه، $n > \frac{n-1}{2} \geqslant 37$. بنابراین به موجب فرض استقراء و اینکه (طبق فرض مسئله) همهٔ اعداد طبیعی ۳۷ تا ۷۳ اعدادی مطلوب هستند، معلوم می‌شود که $\frac{n-1}{2}$ نیز مطلوب است. پس،

$$\frac{n-1}{2} = b_1 + b_2 + \ldots + b_l. \qquad (1)'$$

که در آن b_1، b_2، ...، b_l اعدادی طبیعی‌اند به طوری که

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_l} = 1. \qquad (2)'$$

از رابطهٔ $(1)'$ معلوم می‌شود که

$$n + 1 = 2b_1 + 2b_2 + \ldots + 2b_l + 2,$$

و از رابطهٔ $(2)'$ نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{2b_1} + \frac{1}{2b_2} + \ldots + \frac{1}{2b_l} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

یعنی $n + 1$ عددی مطلوب است. ■

سؤالات تشریحی کنکور ۶۳ و حل برخی از آنها

توضیح. ذیلاً سئوالات تشریحی کنکور سال ۶۳ و حل برخی از آنها خواهد آمد. دانش آموزان عزیزی که خود را برای کنکور سال ۶۴ آماده می‌کنند، ابتدا باید بدون توجه به حل آنها که در صفحات آتیه درج شده است، با توجه به مدت تعیین شده، مبادرت به حل نموده و بدین وسیله خود را آزمایش نمایند. سپس برای آشنائی بیشتر می‌توانند به حل آنها رجوع کنند. لازم به توضیح است که برخی از این مسائل که متضمن نکات چندان مهمی نبودند و راه حلهائی متعارف داشتند، بدون حل یا در صورت لزوم با راهنمائیهای لازم ذکر شده‌اند. ضمناً لازم به تذکر است که برای بعضی از این مسائل چند راه حل ذکر شده است که در میان آنها راه حل اول، همان روش روش مقدماتی معمول است که مورد نظر طراحان سئوالات بوده است. راه حلهای دیگر (بالاخص، دو راه حل دیگر مسئلهٔ ۲ جبر ومثلثات) راه حلهای مرسوم و مناسبی نیستند، زیرا عموماً به وسیلهٔ روشهای پیشرفته تر حل می‌شوند یا اینکه طریقه‌هائی هستند که به ذهن افراد خاصی می‌رسند. چون عدهٔ بسیار کمی از دانش آموزان راه حلهای مذکور را در کنکور سال ۶۳ ارائه داده‌اند، به درج آنها هم مبادرت می‌شود.

(الف) جبر و مثلثات

(وقت: ۸۰ دقیقه)

۱. ثابت کنید که اگر $m > 0$، آنگاه $m + \frac{4}{m^2} \geqslant 3$.

۲. ثابت کنید که اگر یک ریشه از هر یک معادلات $x^2 + mx + n = 0$ و $x^2 + px + q = 0$ بین دو ریشهٔ معادلهٔ دیگر قرار گیرد، آنگاه

$$(n - q)^2 + (m - p)(mq - np) \leqslant 0$$

۳. در بین قطاعهای ممکن که محیطی برابر ۱۰۰ دارند، کدامیک دارای بیشترین مساحت است؟ دلائل خود را ذکر کنید و شعاع و زاویهٔ مرکزی این قطاع را مشخص کنید.

۴. تابع f با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} & x > 0 \\[2mm] \dfrac{1+x}{1-x} & x \leqslant 0 \end{cases}$$

مفروض است.

(الف) ثابت کنید که این تابع همه جا پیوسته است.

(ب) ثابت کنید که این تابع در نقطهٔ $x = 0$ دارای مشتق نیست.

۵. فرض کنیم که n زاویهٔ α_1، α_2، ...، و α_n در نامساویهای ذیل صدق کنند:

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$$

ثابت کنید که

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n$$

۶. ثابت کنید که به ازای هر عدد حقیقی x،

$$Arc\operatorname{tg} x + Arc\operatorname{tg}\frac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & x > 0 \\[2mm] \dfrac{-\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

۷. در مثلث ABC، زاویهٔ A برابر ۳۰ درجه است. ثابت کنید که $R^2 + 4\sqrt{3}\,S = b^2 + c^2$
(R شعاع دائرهٔ محیطی و S مساحت مثلث است).

۸. (الف) ثابت کنید که
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx.$$
(ب) با فرض تساوی مذکور مطلوب است محاسبهٔ
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx$$

* * *

حل:

به عنوان نمونه بعضی از مسائل فوق را باختصار حل می‌کنیم و برای برخی از آنها راهنمائیهای مناسب می آوریم. به عهدهٔ خواننده است که مراحل استدلال با توضیحات کافی بیان کند.

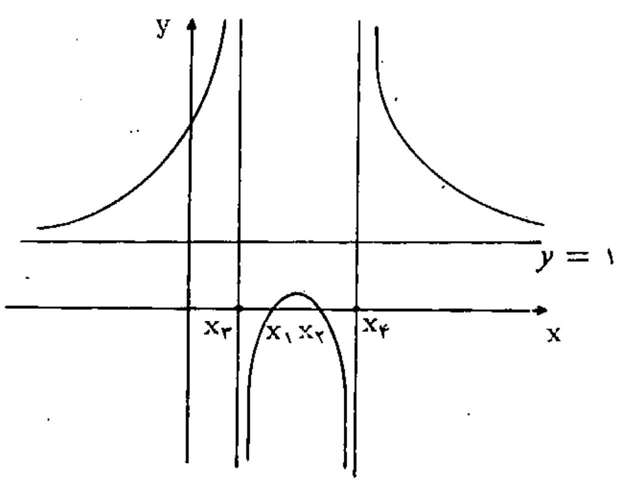
حل مسئلهٔ ۱ (راهنمائی)

کافی است ملاحظه کنیم که نا مساوی فوق معادل است با نامساوی
$$m^3 - 3m^2 + 4 \geq 0$$
با توجه اینکه $m^3 - 3m^2 + 4 = (m+1)(m-2)^2$ و اینکه $m > 0$، حکم محقق می‌شود. ■

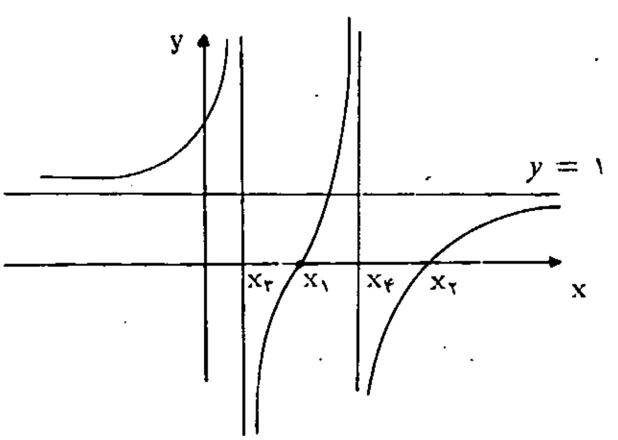
حل مسئلهٔ ۲

راه حل اول. فرض می‌کنیم که x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + mx + n = 0$ و x_3 و x_4 ریشه های معادلهٔ $x^2 + px + q = 0$ باشند، و مثلاً $x_1 \leqslant x_3 \leqslant x_2 \leqslant x_4$، گوئیم چون $x_1 \leqslant x_3 \leqslant x_2$،
$$x_3^2 + m x_3 + n \leqslant 0,$$
و نیز چون $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_4$،
$$x_4^2 + m x_4 + n \geqslant 0.$$
بنابراین،
$$(x_3^2 + m x_3 + n)(x_4^2 + m x_4 + n) \leqslant 0,$$
یا
$$(x_3 x_4)^2 + m x_3 x_4 (x_3 + x_4) + n(x_3^2 + x_4^2) + mn(x_3 + x_4) + m^2 x_3 x_4 + n^2 \leqslant 0.$$
از اینجا
$$q^2 - mpq + n(P^2 - 2q) + m^2 q - mnp + n^2 \leqslant 0,$$
یا $(q-n)^2 + (mq - np)(m - p) \leqslant 0$.

راه حل دوم. تابع f را با ضابطهٔ ذیل در نظر می‌گیریم:
$$f(x) = \frac{x^2 + mx + n}{x + px + n}.$$
فرض می‌کنیم x_1 و x_2 جوابهای معادلهٔ $x^2 + mx + n = 0$ و x_3 و x_4 جوابهای معادلهٔ $x^2 + px + q = 0$ باشد. گوئیم شرط لازم و کافی برای آنکه یک ریشه از هر یک از معادلات فوق بین دو ریشهٔ معادلهٔ دیگر قرار گیرد آنست که $f(x)$ اکیداً یکنواخت (صعودی یا نزولی) باشد [چرا؟]. برای این منظور کافی است که $f'(x) > 0$ یا $f'(x) < 0$ (به ازای هر x حقیقی که $x \neq x_3$ و $x \neq x_4$) و ملاحظه می‌کنیم که
$$f'(x) = \frac{(p-m)x^2 + 2x(q-n) + mq - np}{(x^2 + px + q)^2}.$$
اما برای برقراری شرطهای اخیر، لازم و کافی است که مبین صورت نا مثبت باشد، یعنی
$$(q-n)^2 - (p-m)(mq - np) \leqslant 0.$$
[بدیهی است که در استدلال فوق، فرض شده است که $p - m \neq 0$. در صورتی که $p = m$ اثبات ساده است] برای درک بهتر استدلال فوق به اشکال زیر توجه کنید.



f یکنواخت نیست ($f'(x_0) = 0$)



f اکیداً یکنواخت است ($f'(x) > 0$)

راه حل سوم. فرض کنیم که

$$g(x) = x^2 + mx + n,$$
$$h(x) = x^2 + px + q.$$

نمودار هر یک از توابع فوق یک سهمی است که تحدب آنها به پایین است. بعلاوه هریک از این سهمی‌ها محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کنند. اینک گوئیم شرط لازم و کافی برای آنکه شرط مسئله برقرار باشد آنست که عرض نقطهٔ تلاقی دو منحنی نا مثبت باشد (چرا؟)، برای یافتن عرض نقطهٔ تلاقی این دوسهمی، ابتدا معادلهٔ $g(x) = h(x)$ را حل می‌کنیم. جواب معادلهٔ اخیر عبارتست از $x = \frac{q-n}{m-p}$ (به فرض $m \neq p$). بنابراین $y = \left(\frac{q-n}{m-p}\right)^2 + m\left(\frac{q-p}{m-p}\right)^2 + n$. از $y \leqslant 0$ نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود. ■

حل مسئلهٔ ۳ (راهنمائی)

به فرض اینکه R شعاع و θ زاویهٔ مرکزی قطاع باشد، داریم

$$S = \frac{1}{2} R^2\theta,$$
$$2R + R\theta = 100.$$

(S مساحت قطاع است). بنابراین $S = S(R) = 50R - R^2$. به مشتقگیری (نسبت به R) به سادگی می‌توان بیشترین مقدار S را تعیین کرد (جواب: $R = 25$ و $\theta = 2$). ■

حل مسئلهٔ ۵

راه حل اول. با توجه به

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \frac{\pi}{2},$$

خواهیم داشت:

$$0 < \sin\alpha_1 < \sin\alpha_2 < \dots < \sin\alpha_n < 1,$$
$$0 < \cos\alpha_n < \cos\alpha_{n-1} < \dots < \cos\alpha_1 < 1.$$

بالنتیجه،

$$(1) \quad 0 < n\sin\alpha_1 < \sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i < n\sin\alpha_n,$$
$$0 < n\cos\alpha_n < \sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i < n\cos\alpha_1,$$

از رابطهٔ اخیر نتیجهٔ می‌گیریم که

$$(2) \quad \frac{1}{n\cos\alpha_1} < \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\alpha_i} < \frac{1}{n\cos\alpha_n}$$

از ضرب طرفین تساوی (۱) و (۲) نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود.

راه حل دوم. گوئیم از فرض نتیجه می‌شود که به ازای هر k که $2 \leqslant k \leqslant n$

$$0 < \alpha_k - \alpha_1 < \frac{\pi}{2}.$$

از آنجا $\sin(\alpha_k - \alpha_1) > 0$ (که در آن $2 \leqslant k \leqslant n$). بنابراین،

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(\alpha_k - \alpha_1) > 0,$$

یا

$$\cos\alpha_1 \sum_{k=1}^{n} \sin\alpha_k > \sin\alpha_1 \sum_{k=1}^{n} \cos\alpha_k.$$

از تقسیم طرفین بر عدد مثبت $\cos\alpha_1 \sum\limits_{k=1}^{n} \cos\alpha_k$ خواهیم داشت:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\alpha_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\alpha_k}$$

طرف دیگر نامساوی را بهمین طریق نتیجه بگیرید. ■

حل مسئلهٔ ۶

راه حل اول. فرض می‌کنیم که $Arc\,\operatorname{tg} x = \alpha$ و $Arc\,\operatorname{tg}\frac{1}{x} = \beta$. بنابراین،

$$\operatorname{tg}\alpha = x, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{x}.$$

از اینجا، $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1$، یا $\sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\,\mathrm{cns}\,\beta$. بنابراین،

$$(*) \qquad \cos(\alpha + \beta) = 0.$$

اینک دو حالت تشخیص می‌دهیم:

حالت اول: $x > 0$. در این صورت $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ و $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. بنابراین، از رابطهٔ (*) معلوم می‌شود که $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ یعنی $Arc\,\operatorname{tg} x + Arc\,\operatorname{tg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

حالت دوم: $x < 0$. در این صورت $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ و $\frac{-\pi}{2} < \beta < 0$.

بنابراین از رابطهٔ (*) نتیجه می‌شود که $\alpha + \beta = -\frac{\pi}{2}$. یعنی $Arc\,\operatorname{tg} x + Arc\,\operatorname{tg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

راه حل دوم. تابع f را با ضابطهٔ ذیل در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = Arc\,tg\,x + Arc\,tg\,\frac{1}{x}.$$

این تابع در هر نقطه به جز $x = 0$ مشتق‌پذیر است (زیرا در این نقطه پیوسته نیست). داریم

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

پس به ازای هر x که $x \in (0, +\infty)$ داریم $f(x) = C_1$ و همچنین به ازای هر x که $x \in (-\infty, 0)$ داریم $f(x) = C_2$ (C_1 و C_2 مقادیر ثابتی هستند). برای یافتن C_1 و C_2، کافی است ملاحظه کنیم که

$$C_1 = f(1) = Arc\,tg\,1 + Arc\,tg\,1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

$$C_2 = f(-1) = Arc\,tg\,(-1) + Arc\,tg\,(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}. \blacksquare$$

مسئلهٔ ۸.

با تغییر متغیر $x = \frac{\pi}{2} - t$، خواهیم داشت:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\sin^3 t + \cos^3 t}\,dt.$$

بنابراین،

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin^3 x + \cos^3 x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t}{\sin^3 t + \cos^3 t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

بنابراین $I = \frac{\pi}{4}$. $\blacksquare$

(ب) حساب و ریاضیات جدید

(وقت: ۷۰ دقیقه)

۱. رشتهٔ $\log_{\frac{1}{2}} a, \log_{\frac{1}{4}} a, \log_{\frac{1}{16}} a, \ldots$ را که در آن $a > 0$، در نظر بگیرید.

(الف) ثابت کنید این رشته تشکیل یک تصاعد هندسی می‌دهد.

(ب) حد مجموع این تصاعد هندسی را بیابید.

۲. (الف) ثابت کنید که $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ یک عدد گویا نیست.

(ب) عدد حقیقی b را یک عدد جبری نامیم در صورتی که ریشهٔ یک چند جمله‌ای با ضرایب صحیح باشد، یعنی در معادله‌ای مانند $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ که در آن n یک عدد طبیعی و a_0، ...، a_{n-1}، a_n اعداد صحیح می‌باشند، صدق کند. با توجه به این تعریف ثابت کنید که $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ یک عدد جبری است.

۳. مجموعهٔ اعداد صحیح را با Z نشان می‌دهیم. روی Z عمل $*$ را به صورت $x * y = x + y - 1$ تعریف می‌کنیم، که در آن $+$ و $-$ جمع و تفریق معمولی روی مجموعهٔ اعداد حقیقی است، ثابت کنید که Z با عمل $*$ تشکیل یک گروه جابجائی می‌دهد.

۴. (الف) ثابت کنید که هر ماتریس 2×2 متقارن که تفاضل اعداد روی قطر اصلی آن یا یکی از اعداد خارج از قطر اصلی آن مخالف صفر باشد، دارای دو مقدار ویژهٔ حقیقی متفاوت است.

(ب) مقادیر ویژه و بردار های ویژهٔ نظیر ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} \alpha - 2 & 2 \\ -2 & \alpha + 2 \end{bmatrix}$$

را بدست آورید.

(ج) ثابت کنید که ماتریس A در معادلهٔ سرشتنمائی (مشخصه) خودش صدق می‌کند.

(د) ثابت کنید که رابطهٔ زیر به ازای هر عدد طبیعی n برقرار است:

$$A^n = n\,\alpha^{n-1} A - (n-1)\,\alpha^n.$$

۵ . دانش آموزان کلاس A، ۵ نفر روزانه ۳۰ ریال، ۱۰ نفر روزانه ۱۱ ریال، ۲۸ نفر روزانه ۵ ریال و ۲ نفر روزانه ۲۵ ریال خرج می‌کنند. در کلاس B، ۵ نفر روزانه ۲۰ ریال، ۸ نفر روزانه ۱۵ ریال و ۲ نفر روزانه ۱۰۰ ریال خرج می‌کنند.

(الف) دانش آموزان کدام کلاس به طور متوسط بیشتر خرج می‌کنند.

(ب) اگر دانش آموزان دو کلاس را در یک کلاس جمع کنیم، در کلاس جدید بطور متوسط روزانه هر دانش آموز چقدر خرج می‌کند.

(ج) اگر دانش آموزان کلاس A هر کدام ۲ ریال بیشتر خرج کنند جواب قسمت (ب) چه خواهد شد؟

۶ از ۲۴ محصول کارخانه‌ای ۲ عدد آن از نوع A و ۱۶ عدد آن از نوع B و بقیه از نوع C می‌باشند. سه کالا به تصادف انتخاب می‌کنیم، مطلوبست احتمال آنکه حداقل دو کالا از یک نوع باشد.

* * *

حل

حل مسئلهٔ ۱

بسادگی معلوم می‌شود که به ازای هر دو عدد مثبت مانند a و b،

$$\log_{b^n} a = \frac{1}{2}\log_b a \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

با توجه به رابطهٔ اخیر، رشتهٔ فوق را می‌توان چنین نوشت:

$$\log_{\frac{1}{2}} a, \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} a, \frac{1}{4}\log_{\frac{1}{2}} a, \ldots.$$

معلوم است که جملهٔ عمومی این رشته عبارت است از

$$x_n = \frac{1}{2^{n-1}}\log_{\frac{1}{2}} a \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

از اینجا، به ازای هر n طبیعی،

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2},$$

یعنی، رشتهٔ $x_1, x_2, \ldots$ یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ است.

$$\begin{aligned} S_n &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)\log_{\frac{1}{2}} a \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{2}} a. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2\log_{\frac{1}{2}} a. \blacksquare$$

حل مسئلهٔ ۲

راه حل اول (الف). اگر $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ گویا باشد. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ نیز گویا است. پس $2 + 3 + 2\sqrt{6}$ گویا است و در نتیجه $\sqrt{6}$ گویا است. ثابت می‌کنیم که $\sqrt{6}$ گویا نیست فرض کنیم $\sqrt{6}$ گویا باشد. در این صورت می‌توان نوشت که $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$ که در آن m و n دو عدد طبیعی متباین هستند. از اینجا، $6n^2 = m^2$. گوئیم چون طرف چپ این این تساوی بر ۲ قابل قسمت است، m^2 نیز بر ۲ قابل قسمت خواهد بود. بنا بر این m بر ۲ قابل قسمت است. یعنی $m = 2k$، که در آن k عددی طبیعی است. بنا بر این $(2k)^2 = 6n^2$، یا $3n^2 = 2k^2$. به طریق مشابه، استدلال می‌کنیم که n بر ۲ قابل قسمت است؛ و این ممکن نیست زیرا m و n متباین فرض شده بودند.

راه حل دوم (الف). با توجه به رابطهٔ

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}},$$

گوئیم $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ گویا نیست؛ زیرا هرگاه چنین باشد لازم لازم می‌آید که $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ هم گویاباشد. بنا بر این، عدد $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{3} - \sqrt{2})$ هم‌گویا می‌شود. ولی این عدد همان $2\sqrt{2}$ است که می‌دانیم گویا نیست. (اگر بجای تفاضل دو عدد $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ و $\sqrt{3} - \sqrt{2}$، حاصلجمع آنها را در نظر بگیریم $2\sqrt{3}$ حاصل می‌شود که این هم گویا نیست).

(ب) برای اثبات جبری بودن عدد $\sqrt{2} + \sqrt{3}$، باید ثابت کنیم‌که این عدد ریشهٔ یک چند جمله‌ای با ضرایب صحیح است. فرض کنیم که

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

ازاینجا، $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$؛ وبنابراین $(x^2 - 5)^2 = 24$. معلوم است که عدد $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ در چند جمله‌ای با ضرایب صحیح ذیل صدق می‌کند

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

پس، مطابق تعریف، این عدد یک عدد جبری است. $\blacksquare$

حل مسئلهٔ ۳.

ملاحظه می‌کنیم که

(آ). عمل * بسته است؛ زیرا به ازای هر x و y از Z،

$$x * y = x + y - 1,$$

چون $x + y - 1$ همواره عدد صحیح است، $x * y \in Z$.

(ب). عمل * شرکتپذیر است؛ زیرا به ازای هر x، y و z از Z،

$$x * (y * z) = x * (y + z - 1) = x + y + z - 2,$$
$$(x * y) * z = (x + y - 1) * z = x + y + z - 2.$$

(ب). دستگاه $(Z, *)$ عضو خنثا دارد؛ ۱ عضـو خنثای دستگاه اخیر است زیرا، به ازای هر x از Z،

$$x * ۱ = x + ۱ - ۱ = x,$$
$$۱ * x = ۱ + x - ۱ = x.$$

(پ). هـر عضو Z (نسبت به‌عمل $*$) دارای عکس است. گوئیم عکس هر x از Z، عضو $۲ - x$ از Z است؛ زیرا

$$x * (۲ - x) = x + (۲ - x) - ۱ = ۱,$$
$$(۲ - x) * x = (۲ - x) + x - ۱ = ۱.$$

(ت). عمل $*$ خاصیت جابجائی دارد؛ زیرا به ازای هر x، y، و z از Z،

$$x * y = x + y - ۱,$$
$$y * x = y + x - ۱,$$

یعنی $x * y = y * x$. ■

حل مسئلهٔ ۴.

(الف). فرض کنیم که ماتریس ۲×۲ متقارن مذکـور به صورت ذیل باشد

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}.$$

که درآن $a - d \neq ۰$ یا $b \neq ۰$. می‌دانیم که مقادیر ویژه از معادلهٔ زیر به دست می‌آیند

$$\begin{vmatrix} a - k & b \\ b & d - k \end{vmatrix} = ۰,$$

یا $(a - k)(d - k) - b^۲ = ۰$.

این معادلهٔ درجهٔ دوم (برحسب k) دارای مبین

$$\Delta = (a - d)^۲ + ۴ b^۲$$

است. معلوم است‌که همواره $\Delta \geqslant ۰$. اینک چون $a - d \neq ۰$ یـا $b \neq ۰$، نتیجه می‌شود کـه $\Delta > ۰$. بنا بـر ایـن معادلهٔ سرشتمائی (مشخصهٔ) دارای دو جـواب (مقدار ویـژهٔ) حقیقی متمایز خواهد بود.

(ب). می‌دانیم که مقادیر ویژه نظیر مـاتریس A از معادلهٔ درجهٔ دوم زیر بدست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} (\alpha - ۲) - k & ۲ \\ - ۲ & (\alpha + ۲) - k \end{vmatrix} = ۰,$$

یا $k^۲ - ۲ \alpha k + \alpha^۲ = ۰$.

ولی تنها ریشهٔ این معادله بر(حسب k) عبارت است از $k = \alpha$. اینک برای یافتن بردار ویژه، کافی است معادلهٔ ماتریسی زیـر را حل کنیم.

$$\begin{bmatrix} \alpha - ۲ & ۲ \\ - ۲ & \alpha + ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

یا

$$\begin{cases} (\alpha - ۲) x + ۲ y = \alpha x \\ - ۲x + (\alpha + ۲) y = \alpha y. \end{cases}$$

دستگاه فوق منجر بـه معادلـهٔ $- ۲ x + ۲y = ۰$ می‌شود، بنا بر این $y = x$ و بردار ویژه چنین خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}.$$

(ج). کافی است به امتحان معلوم کنیم که

$$A^۲ - ۲ \alpha A + \alpha^۲ I = ۰. \qquad (*)$$

(بـا محاسبات مقدماتی بـسادگی رابطهٔ فـوق ثـابت مـی‌شود).

(د). اثبات به استقراء است. به ازای $n = ۱$ داریم

$$A = A.$$

(توجه کنید که به ازای $n = ۲$، همان رابطـهٔ $(*)$ در بند (ج) حاصل می‌شود). اینک فرض کنیم حکـم به‌ازای هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ مانند n برقرار است (فرض استقراء)، آن را به‌ازای $n + ۱$ ثابت مـی‌کنیم (حکم استقراء). مـلاحظه می‌شود کـه

$$A^{n+۱} = A \cdot A^n$$
$$= A [n \alpha^{n-۱} A - (n - ۱) \alpha^n I]$$

[به موجب فرض استقراء]

$$= n \alpha^{n-۱} A^۲ - (n - ۱) \alpha^n A$$
$$= n \alpha^{n-۱} (۲ \alpha A - \alpha^۲ I) - (n - ۱) \alpha^n A$$

[به موجب رابطهٔ $(*)$]

$$= (n + ۱) \alpha^n A - n \alpha^{n+۱} I$$

و این همان است که می‌خواستیم. ■

(ج) هندسهٔ مسطحه و فضائی

(وقت: ۶۰ دقیقه)

۱. اگر درچهارضلعی مسطح $ABCD$، $AB = a$، $BC = b$، $CD = c$، $DA = d$ و S مساحت چهـار ضلعی فـرض شود. ثابت کنید

(الف) $۴ S \leqslant (a + c)(b + d)$.

(ب) شرط لازم و کافی بـرای آنکه در رابطـهٔ (الف) تساوی برقرار باشد آنست که چهار ضلعی مستطیل باشد.

۲. فرض می‌کنیم A، B، C، و D تشکیل یک تقسیم توافقی دهند به قسمی کـه $\frac{\overline{CA}}{\overline{CA}} = k$ $(k \neq \pm ۱)$.

اگر O وسط AB و I وسط CD باشد، ثابت کنید

$$\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AI}, \quad \overline{BC} \cdot \overline{BD} = \overline{BA} \cdot \overline{BI}.$$

مقدار $\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}}$ را برحسب k ومقدار $\overline{OI}$ را برحسب $\overline{AB}$ و k بدست آورید.

۳ . دونقطهٔ ثابت $A\left|\begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix}\right.$ و $A'\left|\begin{matrix} -a \\ 0 \end{matrix}\right.$ و نقطهٔ متغیر $m\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ در صفحهٔ مفروضند.

ثابت کنید مکان هندسی نقطهٔ M به قسمی که نیمساز زاویهٔ AMA' موازی یکی از محورهای مختصات باشد، یک هذلوی است. مشخصات مکان را تعیین کنید.

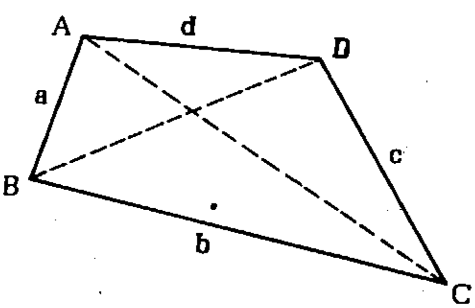
۴ . ماکزیمم حجم مخروطهای محاط در داخل کرهٔ به شعاع واحد را تعیین کنید.

۵ . چهار نقطهٔ A، B، C و D غیر واقع در یک صفحه مفروضند. طرز تعیین مکان نقطه‌ای که از این چهار نقطه به یک فاصله باشد را بیان نمائید (طریق هندسی).

اگر $A(-1, 0, 0)$، $B(0, 1, 0)$، $C(0, 0, 2)$ و $D(1, 1, 0)$، مختصات مکان نقطه‌ای که از این چهار نقطه به یک فاصله باشد را تعیین نمائید (طریق تحلیلی)

حل مسئلهٔ ۱

(الف). با رسم قطر AC چهار ضلعی به دو مثلث تجزیه می‌شود که مساحت آن مساوی مجموع مساحتهای آن دو مثلث است. داریم



$$S = \frac{1}{2} ab \sin B + \frac{1}{2} cd \sin D. \qquad (1)$$

از آنجا،

$$S \leqslant \frac{1}{2} ab + \frac{1}{2} dc. \qquad (2)$$

و بهمین ترتیب از رسم قطر BD،

$$S = \frac{1}{2} bc \sin C + \frac{1}{2} ad \sin A. \qquad (3)$$

بنابراین،

$$S \leqslant \frac{1}{2} bc + \frac{1}{2} ad. \qquad (4)$$

از جمع دو طرف نا مساویهای (۲) و (۴)،

$$4S \leqslant (a+c)(b+d).$$

(ب). شرط لازم است؛ یعنی اگر $ABCD$ مستطیل باشد،

$$4S = (a+c)(b+d)$$

چون در تساویهای (۱) و (۳) بجای A، B، D، C، و A اندازه‌های آنها یعنی $90°$ را قرار دهیم این تساوی حاصل می‌شود.

شرط کافی است؛ یعنی اگر بین اجزاء چهار ضلعی $ABCD$ تساوی اخیر برقرار باشد، چهار ضلعی مستطیل است. از جمع تساویهای (۱) و (۳)، دستور مساحت هر چهار ضلعی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$4S = ab \sin B + bc \sin C + cd \sin D + da \sin A.$$

اینک طرفین تساوی فوق را از طرفین تساوی

$$4S = (a+c)(b+d)$$

کم کنیم تساوی زیر به دست می‌آید:

$$ab(1 - \sin B) + bc(1 - \sin C) + cd(1 - \sin D) + ad(1 - \sin A) = 0.$$

از اینکه هریک از چهار جزء طرف اول این تساوی نامنفی‌اند، برای برقراری تساوی باید داشته باشیم:

$$ab(1 - \sin B) = bc(1 - \sin C) = cd(1 - \sin D) = ad(1 - \sin A) = 0.$$

ولی چون a، b، c، و d مثبت‌اند، خواهیم داشت:

$$\sin A = \sin B = \sin C = \sin D = 1.$$

از اینجا $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90°$. یعنی چهار ضلعی مستطیل است. ■

حل مسئلهٔ ۲.

برای اثبات تساوی $\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AI}$، در رابطهٔ تقسیم توافقی $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$، A را مبدأ قرار می‌دهیم، داریم

$$\frac{-\overline{AC}}{\overline{AB} - \overline{AC}} = -\frac{-\overline{AD}}{\overline{AB} - \overline{AD}}$$

از اینجا،

$$2\,\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB}(\overline{AC} + \overline{AD}).$$

چون I وسط CD است، $\overline{AC} + \overline{AD} = 2\overline{AI}$. از دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که

$$\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \overline{AI}, \qquad (1)$$

و چون در رابطهٔ توافقی مبدأ را B فرض کنیم، به طریق مشابه، تساوی زیر به دست می‌آید:

$$\overline{BC} \cdot \overline{BD} = \overline{BA} \cdot \overline{BI}. \qquad (2)$$

از تقسیم دوطرف تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = -\frac{\overline{AI}}{\overline{BI}},$$

یا

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\cdot\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$

بنا بر این

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = k^2.$$

برای تعیین $\overline{OI}$ بر حسب $\overline{AB}$ و k، گوئیم چون O وسط AB است،

$$\overline{OI} = -\overline{IO} = -\frac{\overline{IA}+\overline{IB}}{2}.$$

ازطرفی از $\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = k^2$ نتیجه می‌شود که

$$\frac{\overline{IB}+\overline{IA}}{\overline{IB}-\overline{IA}} = \frac{k^2+1}{1-k^2},$$

بنا بر این

$$\frac{-2\overline{OI}}{\overline{AB}} = \frac{k^2+1}{1-k^2}.$$

از اینجا،

$$\overline{OI} = \frac{k^2+1}{k^2-1}\cdot\frac{\overline{AB}}{2}. \blacksquare$$

حل مسئلهٔ ۳

فرض کنیم M نقطه‌ای از مکان مطلوب باشد. چون نیمساز زاویهٔ AMA' موازی یکی از محورهاست، اگر روی دو بردار $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{MA'}$ دو بردار $\vec{U}$ و $\vec{U'}$ را با قدر مطلق‌های متساوی جدا کنیم بردارهای $\vec{V} = \vec{U} \pm \vec{U'}$ روی نیمسازهای زاویهٔ AMA' (داخلی و خارج) واقع می‌شوند،

$$\overrightarrow{MA}\,(a-x,\, b-y),$$
$$MA = \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2};$$
$$\overrightarrow{MA'}\,(-a-x,\, -b-y),$$
$$MA' = \sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2}.$$

بردارهای $\vec{U}$ و $\vec{U'}$ را بردارهائی به طول واحد فرض می‌کنیم:

$$\vec{U}\left(\frac{a-x}{MA}, \frac{b-y}{MA}\right),$$

$$\vec{U'}\left(\frac{-a-x}{MA'}, \frac{-b-y}{MA'}\right).$$

بنا بر این،

$$\vec{V} = \vec{U} \pm \vec{U'} = \left(\frac{a-x}{MA} \mp \frac{a+x}{MA'}, \frac{b-y}{MA} \mp \frac{b+y}{MA'}\right).$$

چون بردار $\vec{V}$ موازی یکی ازمحورها (محور y) است، تصویر بردار $\vec{V}$ روی محور xها صفر است:

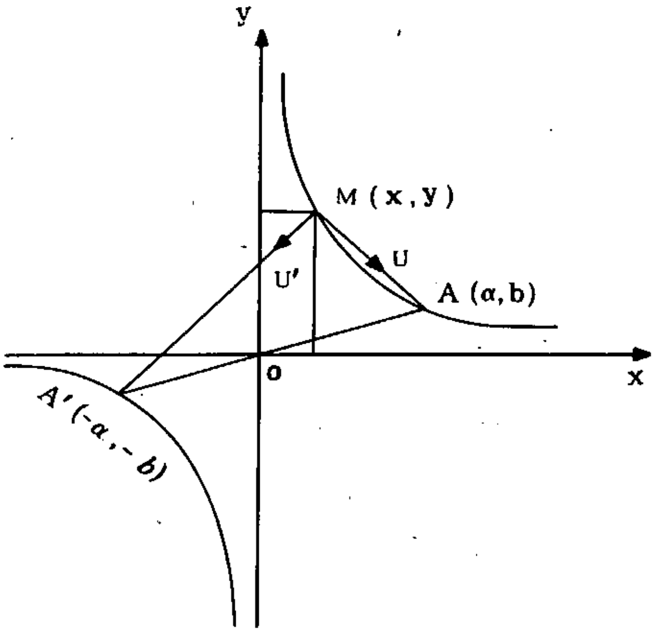
$$\frac{a-x}{MA} \mp \frac{a+x}{MA'} = 0,$$

یا

$$(a-x)\,MA' = \pm(a+x)\,MA.$$

از اینجا، نتیجه می‌شود که

$$(a-x)^2\,MA'^2 = (a+x)\,MA^2.$$



هرگاه به جای MA و MA' اندازه‌های آنها را برحسب مختصاتشان قراردهیم، این معادله چنین می‌شود:

$$(a-x)^2(b+y)^2 = (a+x)^2(b-y)^2,$$

یا

$$(a-x)(b+y) = \pm(a+x)(b-y).$$

بنا بر این، $bx - ay = 0$ یا $xy = ab$. $bx = ay$ معادلهٔ خط AA' است که اگر M روی آن واقع شود، زاویه‌های AMA' اضلاعشان بر یک راستا واقع می‌شود و مسئله معنی ندارد. $xy = ab$ هذلوی متساوی‌الساقینی است که از دو نقطهٔ A و A' می‌گذرد و مجانبهای آن منطبق بر محورهای مختصات است.

تبصرهٔ ۱. اگر بردار $\vec{V}$ را موازی محور xها اختیار کنیم، تصویر آن روی محور yها صفر می‌شود و مکان مطلوب همان هذلوی است که معادلهٔ آن $xy = ab$ است.

تبصرهٔ ۲. خط AA' هذلوی مکان هندسی را به دو بخش تقسیم می‌کند. اگر M نقطه‌ای از بخشی باشد که داخل زاویهٔ یک محور با AA' (یعنی $\angle(xx', AA')$، $\angle(yy', AA')$) است. نیمساز داخلی زاویهٔ $\angle(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M'A})$ با آن محور موازی است. $\blacksquare$

گزارشی از پنجمین کنگرهٔ جهانی آموزش ریاضی (استرالیا) (۲)

خلاصهٔ مطالب بحث شده در کمیسیون بررسی آموزش ریاضی در کشورهای جهان.

۱ــ ریاضیات در دو کتاب جبر و هندسه.

۲ــ تحصیلات اجباری از ابتدائی تا کلاس سوم راهنمائی.

۳ــ دسته‌بندی دانش آموزان در آموزش ریاضی دبیرستان به قوی، متوسطه، ضعیف، وتهیهٔ مطالب برای آنها.

۴ــ حداقل ساعات ریاضی ۵ ساعت در هفته در جلسات ۵۰ دقیقه‌ای.

۵ــ برنامه‌ریزی مرکزی واستانی.

۶ــ امتحان نهائی در پایان تحصیلات دبیرستان.

۷ــ روشهای مختلف آموزش ریاضی در کشورهای جهان.

۸ــ جلوگیری از بی‌میلی دانش‌آموزان در یادگیری ریاضی.

نتایج بحث در مطالب فوق به شرح زیر است:

(۱) چگونه می‌توان به‌علاقهٔ دانش‌آموز درفراگرفتن ریاضی افزود؟ و چگونه می‌توان از حساسیت و ناراحتی او کاست؟ که در این زمینه دسته‌بندی دانش‌آموزان به گروههای ضعیف، قوی، متوسط؛ آموزش خوب معلمین؛ استفاده از وسائل کمك آموزشی؛ توجه به ریاضیات کاربردی و مطالب دیگر بحث شد.

(ب) چگونه می‌توان در برنامه‌ریزی وقتی پیدا کرد که بتوان بیشتر در حل مسائل، کاربرد و کارهای مطالعاتی با دانش‌آموز کار کرد؟

ضمناً در پرهیز از فشردگی برنامه، عدم گنجاندن مطالب زیاد در یك‌کلاس، تسلط معلم، وعلاقهٔ دانش‌آموز نیز بحث شد.

(پ) بنظر می‌رسد که هنوز دانش‌آموزان با روشهای سنتی، معمول، و فرمول مطالب را یاد می‌گیرند و به مقدار زیادی از کاربرد این فرمولها عاجز هستند. چگونه می‌توان این مسئله را حل کرد؟ آنچه مطرح شد تحول دربرنامه‌ریزی، تحول درارزشیابی، تحول در ارائهٔ روشها، توجه بیشتر به کاربرد همراه با عرضهٔ فرمول وتسلط وتوجه معلم به‌کاربرد بود.

(ت) چگونه می‌توان وحدت بیشتری بین ریاضی محض و ریاضی کاربردی در برنامه‌ریزی بوجود آورد؟ انجام تحقیق به‌وسیلهٔ کمیسیونهای برنامه‌ریزی؛ استفاده از تجارب معلمین؛ استفاده از کارهای مهندسین وکسانی که با ریاضی کاربردی کار می‌کنند.

(ث) چگونه می‌توان برنامه‌ریزی کرد که‌معلم‌فرصت بیشتری برای بحث با دانش‌آموز داشته باشد؟ و همچنین خود دانش‌آموزان فرصت بحث با هم داشته باشند؟

بحث شد که آموزش منحصر به فرموله کردن مطالب ریاضی نیست؛ بحث معلم ودانش‌آموز وبحث دانش‌آموزان باهم است که می‌تواند قسمتهای آموزش داده شده را روشن‌نماید و برای این فرصت باید دربرنامه‌ریزی فکری کرد. در حال حاضر بیشتر معلمین محدود به برنامه، تمام کردن آن و آماده کردن دانش‌آموز برای امتحان هستند و معلم بایك روش تعلیمی خاص آموزش می‌دهد و این قدرت خلاقیت معلم در آموزش را از بین می‌برد.

(ج) چگونه می‌توان ریاضی را به دانش‌آموزان

متوسطه ضعیف و دیرفهم یاد داد؟

بحث شد که روش آموزش ریاضی به این دانش ــ آموزان بسیار مهم است، مسلماً باید روشهایی پیدا کرد که مطالب را بهتر و روشن‌تر به دانش‌آموز ارائه دهد.

این مطلب زمینهٔ تحقیقاتی جاری است که مرتب مورد سئوال و علاقهٔ معلمین است. آنچه مسلم است بحث و گفتگو در کلاس بین معلم و دانش‌آموز و دانش‌آموزان می‌تواند کمک زیادی به یادگیری بهتردانش‌آموزان بنماید؛ دیگر آنکه از حجم برنامه کاسته گردد تا وقت برای بحث و تبادل‌نظر در کلاس پیدا شود. و در این زمینه «روش آموزش آزاد» بدون قید کتاب و امتحان پیشنهاد شد. در عین حال اهمیت محدودیت به کتاب و برنامه و امتحان نیز یادآوری گردید، چه برداشتن این محدودیتها کار معلمی را ساده می‌کند و هرکس داوطلب آن می‌شود.

مطرح گردید که اگر برای سایر فعالیتهای دانش‌ــ آموز نظیر حل مسائل، کارهای تحقیقاتی، مطالعه کاربردهای ریاضی در طبیعت و جهان واقعی، پروژه‌هاو غیره نیز نمره در نظر گرفته شود به عبارت دیگر نحوهٔ امتحان تغییر کند و در برنامه‌ریزی به این مطالب توجه شود شاید معلم بهتر بتواند خلاق و آموزنده باشد.

در زمینهٔ آموزش در هر ساعت معلم روی نکات زیر صحبت شد:

۱ــ یادآوری نکات مهم درس قبل.

۲ــ مهارت در ارتباط درس قبل با درس جدید.

۳ــ دیدن تمرینات دانش‌آموزان، جواب مسائل و حل مسائل مشکل و توضیح بیشتر روی آنها.

۴ــ نوشتن عنوانهای درس آینده.

۵ــ تعیین تمرین برای جلسهٔ بعد.

کمیسیون آموزش هندسه

در این کمیسیون بحثها فنی و تخصصی بود و آنچه جنبهٔ عمومی داشت در زیر آمده است:

(آ) چه مقدار هندسه باید در دبیرستان درس داد؟

(ب) محتوا و پراکندگی موضوعات.

(پ) روش ارائه.

(ت) آموزش هندسه فقط در یك سال تحصیلی.

(ث) توجه به اینکه هندسه به چه کسی آموزش داده می‌شود؟

انواع هندسه‌هایی که تدریس آنها در دبیرستان توصیه شد (برای ۱۵ تا۱۹ سالگی):

هندسهٔ مختصاتی یا تحلیلی؛ هندسهٔ اقلیدسی؛ هندسهٔ تبدیلاتی؛ هندسهٔ برداری.

این چهارنوع هندسه باید با هم بافته و به‌نسبتهای مختلف ودر زمانهای مختلف تدریس گردد و طوری که جوابگوی چرا، برای چه، چگونه، و چه موقع آموزش بدهیم؟ باشد. برنامه باید برای دانش‌آموزان با اطلاعات مختلف قابل انعطاف باشد. دربرنامه‌ریزی هندسه به‌نکات زیر توجه شود:

برای سه دسته دانش‌آموز هندسه می‌نویسیم:

(۱) کسانی که تا آخر دبیرستان فقط یك دوره هندسه می‌خوانند.

(۲) کسانی که ریاضیات عمومی را در سال آخر دبیرستان می‌خوانند.

(۳) کسانی که هندسه را برای دیدن «ترشیری» (دورهٔ بین دبیرستان و دانشگاه) می‌خوانند.

هر دانش‌آموزی که از دبیرستان فارغ‌التحصیل می‌شود باید به شکلی هندسهٔ اقلیدسی را بخواند. بقیهٔ بحث کمیسیون باز کردن انواع هندسه‌ها، هندسهٔ کروی، هندسهٔ غیر اقلیدسی، توپولوژی، و لزوم یا عدم لزوم آموزش آنها در دبیرستان بود.

روی نحوهٔ ارائهٔ برهان در دبیرستان نیز بحث شد که نحوهٔ ارائهٔ برهان در علاقمند کردن دانش‌آموز به هندسه بسیار مؤثر خواهد بود.

بحثهای فوق تخصصی و بیان گستردهٔ آنها موجب اطناب خواهد بود.

کمیسیون ریاضی کاربردی و مدلسازی

دراین حد گروه مطالب زیر طی چند جلسه عنوان شد و پس از بحث و مبادله نتایج زیر بدست آمد.

به‌طورکلی، مسئله حل کردن(Problem Solving) کاربرد (Application) و مدلسازی(Modling)، مقوله‌های جداگانه‌ای هستند که می‌توان آنها را به طور ناقص چنین تعریف کرد:

(الف) **مسئله حل کردن.** وادارکردن محصل به‌تمرین حل کردن دربارهٔ آنچه که جدیداً آموخته است.

(ب) **کاربرد.** ارائهٔ یك وضعیت و مشخص کردن هدف از طرح آن وکاربرد دانسته‌های ریاضی برای‌تشریح

گزارشی از پنجمین کنگرهٔ جهانی آموزش ریاضی (استرالیا) (۲)

این وضعیت و رسیدن به هدف مورد نظر.

(ج) **مدلسازی.** حرکت از یك مدل واقعی به‌سوی‌یك مدل ریاضی.

آنچه مهم است استفاده از مسئله حل کردن و کاربرد ریاضی در مدلسازی است. به عبارت دیگر مدلسازی مقوله‌ای است که حل مسئله وکاربرد را دربر دارد اما قسمت اعظم مدلسازی، کاربرد و یا مسئله حل کردن نیست.

توصیهٔ شرکت کنندگان این بود که بهتر است در دورهٔ ابتدائی به اختلاف سه مقولهٔ فوق‌الذکر توجهی نگردد ولی در سطوح بالاتر باید به اختلاف آنها توجه لازم مبذول گردد. ضمناً توصیه مهم این بود که در دورهٔ دبیرستان، برخلاف دانشگاه، نباید درسی یا دوره‌ای به اسم «مدلسازی» وجود داشته باشد. مدلسازی را باید در لابلای دروس و به تناسب سن و پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان به آنها آموزش داد و از آنها خواست که روی پروژه‌های ساده کار کنند. علت اصلی این امر محدود بودن پروژه‌های مناسب در این مقطع، کمبود معلمینی که خود مدلسازی بدانند و مشکل ارزشیابی آن است. پروژه‌ها را معمولا می‌توان از مسائل روزمره، جامعه، مجلات، روزنامه‌ها و مقالات و کتب مربوط به مدلسازی گرفت. ضمناً بدون توجه به وضع کشورهای جهان سوم، توصیه شد که‌برای مدلسازی ازکامپیوترهای گرافیك کمك گرفته شود.

یکی از مباحث داغ این گروه بحث روی مشکل ارزشیابی و اختصاص بخشی از نمره به مدلسازی بودکه راه‌حل مناسبی برای آن پیدا نشد. به طور کلی عنوان شد که حتی در دانشگاه هم که درس مدلسازی دایر است معمولا در انتهای ترم امتحان کتبی به عمل می‌آید.

به نظر ما اگر رابطهٔ بین جامعه و ارگانهای آموزشی به گونه‌ای علمی و معقول گسترش یابدمدلسازی را می‌توان بخوبی به دبیرستانها وارد کرد زیرا پروژه‌ها و کارهای زیادی در این رابطه هست که محصلین قادرند روی آنها کار کنند. البته این امر محتاج به برنامه‌ریزی دقیق و تربیت معلم نیز دارد. معهذا می‌توان به مثالها و پروژه‌های ملموس و ساده کار را از هم اکنون شروع نمود.

کمیسیون آموزش ریاضی در مقطع دبستان

بحث روی‌آموزش مفاهیم دردورهٔ ابتدائی، موضوع مطالعهٔ این کمیسیون بود. به این نکته که در ابتدائی چه ریاضیاتی آموزش بدهیم و چگونه آموزش بدهیم توجه شد و بیشتر گفتگوها روی ارائهٔ مطالب مختلف کتابهای ریاضی ابتدائی بود. حتی در یك جلسه یك استاد روش آموزش جمع در کلاس اول ابتدائی را مطرح ساخت. استفاده ازوسائل‌کمك آموزشی درآموزش موردتوجه بود. توصیهٔ این‌کمیسیون وحتی می‌توان‌گفت اغلب کمیسیونها توجه به مسئلهٔ اهمیت تربیت معلم و مسائل رفاهی او بود. مسئلهٔ آموزش معلم چه قبل از شروع خدمت و چه در ضمن خدمت مورد بحث و تبادل نظر جدی قرار گرفت. بخصوص در استرالیا به آموزش معلم به عنوان معلم ریاضی اهمیت خارق‌العاده داده می‌شود، چه‌آنها معتقدند که یکی از مهمترین ارکان اجرای برنامه و کتاب وجود معلمین آشنا به اصول آموزش ریاضی و خود ریاضی است. این مطلب تا آنجا مورد توجه بود که بحث شد که معلم خود باید نقش مؤثر در برنامه‌ریزی و تألیف کتاب داشته و تنها نقش مجری نداشته باشد. همچنین توصیه شد که چون مسائل آموزشی کشورهای جهان سوم متشابه است، خوب است این کشورها به صورتهای مختلف با هم گردهمائی داشته باشند، چه ممکن است راه‌حلهای ارائه شده برای یك مشکل در یك کشور برای کشور دیگر نیز کارساز باشد.

هیئت اعزامی سازمان پژوهش به پنجمین کنگرهٔ آموزش ریاضی

● ● ●

اخبار گروه ریاضی
و
دفتر تحقیقات و برنامه‌ریزی و تألیف

• در بازسازی اخیر کتاب ریاضیات جدید سال سوم متوسطه، بخش آمار بازنویسی و به ابتدای کتاب منتقل و تغییرات عمده‌ای در آن داده شده است. تعریف واریانس هم مشمول این تغییرات شده و به جای فرمول

$$s^{2} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^{2}}{n} \qquad (1)$$

(برای داده‌های دسته‌بندی نشده) در کتاب «قدیم»، فرمول

$$s^{2} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^{2}}{n-1} \qquad (2)$$

به عنوان مقدار واریانس داده شده است. علل انتخاب فرمول اخیر برای واریانس مورد سئوال عده‌ای از دبیران واقع شده و این همکاران طی نامه‌هایی، خواستار توضیح مطلب از گروه ریاضی دفتر تحقیقات شده‌اند. فرمول (۲) که این روزها در اغلب کتابهای آمار مقدماتی به عنوان تعریف واریانس داده می‌شود، در حالی که فرمول (۱) به عنوان ملاک سنجش پراکندگی داده‌ها بسیار «طبیعی‌تر» است. چون بنا به همان توصیه‌هایی که برای انتخاب مقادیر $(x_i - \bar{x})^{2}$ ، به عنوان مجذور انحراف از میانگین داده می‌شود، باید میانگین این مجذور انحرافها را به عنوان واریانس انتخاب نمود یعنی تقسیم مجموع را بر n انجام داد. پس علت انتخاب $n-1$ به جای n در مخرج چیست.

در این خصوص باید گفت که دلیل چنین کاری، یعنی انتخاب فرمول (۲) برای تعریف واریانس توجه به اهداف واقعی مطالعهٔ آماری است. آمار در «آمار توصیفی» خلاصه نمی‌شود و بلکه آمار توصیفی را باید مقدمهٔ کوچکی بر موضوع علم آمار دانست. موضوع علم آمار، استنباط آماری است، یعنی تعمیم نتایج حاصل از نمونه (که مطالعهٔ آن با کیفیت مورد بحث در کتاب ریاضیات جدید، مبحث آمار توصیفی را تشکیل می‌دهد) به جامعه‌ای است که نمونه از آن به دست آمده است. مثلاً اگر نمونه‌ای از جامعه‌ای استخراج و میانگین آن حساب می‌شود، قصد اصلی به دست آوردن اطلاعاتی در مورد میانگین این جامعه و منجمله «تخمین» یا «برآورد» آن به وسیلهٔ میانگین نمونه است. حال اگر نمونه‌های تصادفی متعددی از جامعه استخراج کنیم. بدیهی است که به دلیل تصادفی بودن نمونه، میانگین هر نمونه با میانگین نمونهٔ دیگر متفاوت است. در واقع میانگین نمونهٔ یک «متغیر تصادفی» است. وقتی میانگین این میانگینها را حساب می‌کنیم، به میانگین واقعی (و مجهول) جامعه نزدیکتر و نزدیکتر می‌شویم، که آن را خاصیت «نااریبی» میانگین می‌نامند. در مقابل اگر فرمول (۱) را به عنوان تعریف واریانس انتخاب کنیم، این واریانس نااریب نبوده و بلکه «اریب» است، یعنی میانگین این واریانسها، هر اندازه که دفعات نمونه‌گیری بیشتر شود، به واریانس واقعی جامعه میل نمی‌کند و بلکه از آن کوچکتر است. چارهٔ کار آن است که فرمول (۲) را به عنوان تعریف واریانس انتخاب کنیم تا واریانس خاصیت «نااریبی» داشته باشد. اینها مطالبی است که معمولاً در کتب آمار ریاضی به طور نظری ثابت می‌شود ولی مفاهیم شهودی همان است که در بالا گفته شد.

●●●

• کار کلاسهای کتاب ریاضی آزمایشی سال اول راهنمایی پایان گرفت و کتاب آزمایشی با استفاده از نظرات رسیده از استانها و دبیران بازسازی و به چاپ فرستاده شد تا در سال آینده در سراسر کشور تدریس گردد.

• شورای برنامه‌ریزی ریاضی «در مقطع متوسطه» ریز مواد آمار و احتمال، جبر، آنالیز و هندسه را تقریباً به پایان رسانده و به زودی ریز مواد تنظیم شده به نظرخواهی عموم گذاشته خواهد شد.

• با توجه به روند کنکور، تمرینات متعددی به کتاب حساب و جبر سال سوم رشتهٔ ریاضی و فیزیک و ریاضیات

جدید سال چهارم اضافه شده است، تمرین در این مسائل دانش‌آموزان را برای امتحان ورودی دانشگاهها آماده‌تر خواهد ساخت.

• کتاب «روش آموزش ریاضی دبستان» در مراکز تربیت معلم توسط برادران علی‌اکبر جعفری دبیر ریاضی شهرستان گلپایگان، محمود بهروش دبیر ریاضی شهرستان بروجرد و علی‌اصغر دانشفر دبیر ریاضی دامغان بر مبنای کتب جدید ریاضی دبستان تألیف یافته و به زودی به چاپ فرستاده خواهد شد. برادران مؤلف سالها بعنوان «مدرس راهنمای ریاضی» با همکاران آموزگار کار کرده‌اند و همچنین در مراکز تربیت معلم شهرستان خود به دانشجویان تربیت معلم تدریس کرده‌اند، امید می‌رود که این کتاب که با همکاری برادران مؤلف کتب ابتدایی تألیف یافته است، بتواند خلأ موجود در مراکز تربیت معلم را پر کند.

• کلاسهای بازآموزی «مدرس راهنماهای ریاضی» برای آموزش کتاب جدیدالتألیف ریاضی راهنمایی به دبیران سراسر کشور در مرداد ماه ٦٤ در دو دوره ١٥ روزه و با همکاری دفتر آموزش ضمن خدمت و مؤلفین و کارشناسان گروه ریاضی تشکیل خواهد شد. در این دوره که از هر منطقه آموزشی یک نفر مدرس راهنما شرکت خواهند کرد با هدفها و روش آموزش کتاب ریاضی جدیدالتألیف آشنا ده و هرکدام در طول سال تحصیلی ٦٥—٦٤ روش آموزش کتاب را به دبیران منطقهٔ خود یاد خواهند داد.

• یک دوره کلاسهای بازآموزی ریاضی متوسطه برای دبیران نقاط استانهای محروم کشور با همکاری آموزش ضمن خدمت و گروه ریاضی دفتر تحقیقات از تاریخ ٧ مرداد ماه لغایت آخر مرداد ماه ٦٤ در ارومیه برگزار خواهد شد. در این کلاسها دبیرانی از استانهای هرمزگان— بوشهر— سیستان و بلوچستان— چهارمحال بختیار— کهکیلویه و بویر احمد— کردستان— ایلام شرکت نموده و با کارشناسان و مؤلفین کتابها تبادل‌نظر خواهند داشت و اشکالات خود را برطرف خواهند نمود.

• امتحانات ارزشیابی، دبیران ریاضی کتاب جدیدالتألیف ریاضی سال اول راهنمایی در روز اول تیرماه زیر نظر استادان برگزار خواهد شد.

• در طول سال تحصیلی ٦٤—٦٣ از طرف گروه ریاضی دفتر تحقیقات، نمایندگانی در گردهمایی های استانهای مازندران— گیلان— زنجان و مشهد شرکت نموده و با سر گروههای دبیران ریاضی آن مناطق در مورد آموزش ریاضی به تبادل نظر پرداختند.

• انتشار کتاب

کتاب «متمم جبر و آنالیز» تألیف محمد عابدی توسط انتشارات دفتر امور کمک آموزشی و کتابخانه‌ها (وزارت آموزش و پرورش) منتشر گردید. این کتاب قابل استفادهٔ دانش‌آموزان سال چهارم، رشتهٔ ریاضی فیزیک، و نیز دانش‌آموزان تیزهوش و داوطلبان شرکت در آزمون ورودی دانشگاهها می‌باشد. قضایای این کتاب تقریباً همان قضایای جبر و آنالیز سالهای سوم و چهارم ریاضی است که همراه با اثبات بیان شده است، لذا می‌تواند مورد استفادهٔ همکاران و دبیران ارجمند نیز قرار گیرد.

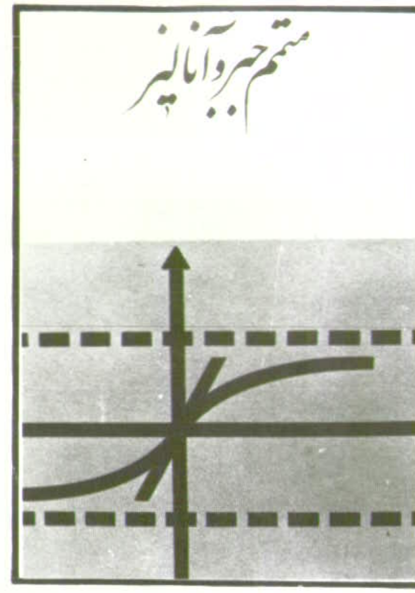
•

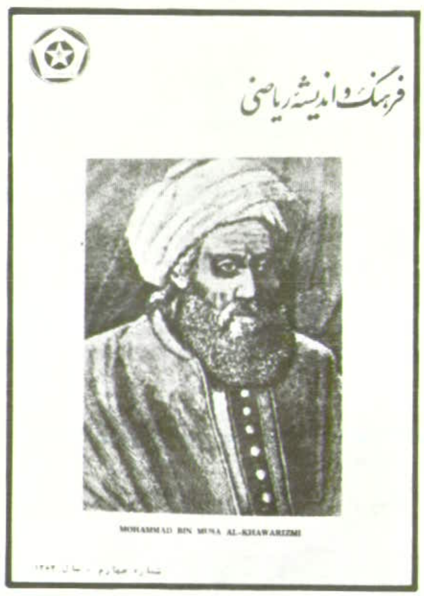
شانزدهمین کنفرانس آموزش ریاضی کشور

شانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور که قرار بود در تاریخ ٨ تا ١١ فروردین ١٣٦٤ در دانشسرایعالی زاهدان برگزار شود، به دلیل حذف پرواز هواپیماها به تأخیر افتاد پیرو نامهٔ شمارهٔ ١٣٥٩، تاریخ ٦٤/٣/١٨ دانشگاه تربیت معلّم اطلاع یافتیم که شانزدهمین کنفرانس ریاضی کشور بیاری خداوند بزرگ از تاریخ ٢٣ لغایت ٢٦ شهریور ماه سال جاری در دانشگاه تربیت معلّم تهران برگزار میگردد و دومین مسابقهٔ ریاضی بین دانش‌آموزان ممتاز همزمان با این کنفرانس برگزار خواهد شد.●

معرفی کتاب

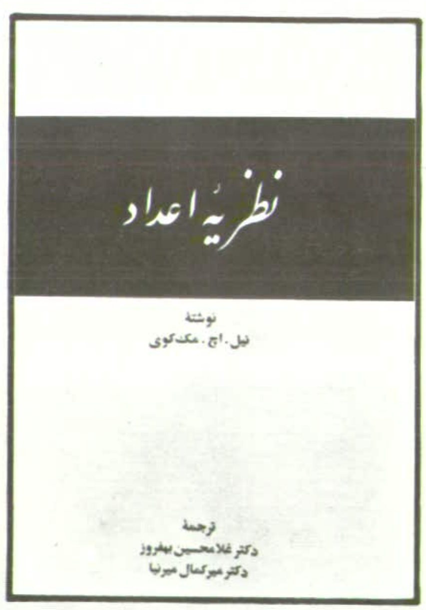

آشنایی با تاریخ ریاضیات
جلد اوّل
ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل


متمم جبر و آنالیز


فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی
MOHAMMAD BIN MUSA AL-KHAWARIZMI
شماره چهارم


ریاضیات مهندسی پیشرفته
جلد اوّل


مایکل اونان
جبر خطی
ترجمهٔ علی اکبر محمدی حسن آبادی


نظریهٔ اعداد
نوشتهٔ
نیل. اچ. مک کوی
ترجمهٔ
دکتر غلامحسین بهفروز
دکتر میرکمال میرنیا

Roshd, Magazine of Mathematical Education. Vol. I. NO. 4' Winter [illegible] Mathematics Section, 274 BLDG No. 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave., Tehran, Iran.
A Publication of Ministry of Education. Islamic Republic of Iran.