رشد آموزش ریاضی

سال دهم ـ تابستان ۱۳۷۲ ـ شمارهٔ مسلسل ۳۸   بها: ۳۵۰ ریال

بسم‌الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یکبار از طرف سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی منتشر می‌شود هدف از انتشار این مجله اعتلای دانش ریاضی دانش‌آموزان، دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلّم است. علاوه بر این ایجاد ارتباط متقابل بین معلّمین ریاضی و دفتر برنامه‌ریزی، به‌منظور تبادل تجارب، ارائه روشهای جدید آموزش ریاضی، معرفی جنبه‌های تاریخی، فلسفی، کاربردی ریاضیات در سطح پیش دانشگاهی است. هیأت تحریریه از مشارکت و همکاری همهٔ علاقه‌مندان بویژه دبیران و دانشجویان و دانش‌آموزان در ارائه مقالاتی در زمینه‌های زیر استقبال می‌کند:

الف) آموزش ریاضی (طرح و بررسی آموزش ریاضی، بویژه آموزش ریاضی در دوره‌های پیش دانشگاهی).

ب) تاریخ ریاضی (مشتمل بر سیر تحول مفاهیم ریاضی، شرح و احوال ریاضیدانان و کارهای علمی آنها، بویژه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی).

ج) فلسفه ریاضی (تبیین مفاهیم ریاضی، ریاضیات چیست، بررسی مکاتب ریاضی، بررسی ارتباط تاریخ و فلسفه ریاضی).

ریاضی کاربردی (مشتمل بر مباحثی در زمینه‌های آنالیز عددی، کامپیوتر و برنامه‌ریزی، تحقیق در عملیات، آمار و احتمال).

د) سایر مباحث ریاضی (مشتمل بر مقالات مختلفی در زمینه‌های مختلف، ارائه راه‌حلهای مختلف برای مباحث ریاضی، ارائه مسائل نمونه).

رعایت نکات زیر در مورد مقالات ارسالی ضروری است:

۱) مقالات ارسالی باید در چهارچوب اهداف فوق و با سبکی مشابه با سبک مقالات چاپ شده در رشد ریاضی باشد و در سطحی عرضه شوند که ضمن داشتن محتوی مطلوب دارای کیفیت عرضه مطلوب هم باشند؛

۲) مقالات باید با خط خوانا (یا در صورت امکان ماشین شده) و به صورت یک سطر در میان و با در نظر گرفتن جای کافی در حاشیه تهیه شود و صفحات به طور دقیق شماره‌گذاری شود؛

۳) فهرست مراجع مقاله به طور کامل و در دو قسمت فارسی و خارجی و به ترتیب الفبایی و طبق استاندارد مقالات علمی درج شود؛

۴) مقالات ترجمه شده از زبانهای خارجی همراه با متن اصلی ارسال شود؛

۵) مقالات ارائه شده نباید قبلاً در نشریات کشور به چاپ رسیده باشد؛

۶) رد یا قبول و حک و اصلاح و ویراستاری مقالات به عهدهٔ هیأت تحریریه است.

رشد آموزش ریاضی

سال دهم ـ تابستان ۱۳۷۲ ـ شمارهٔ مسلسل ۳۸

نشریهٔ گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، تلفن ۴ ـ ۸۳۹۲۶۱ داخلی (۴۹)

سردبیر: دکتر علیرضا مدقالچی
مدیر داخلی: میرزا جلیلی
مسئول هماهنگی و تولید: فتح‌ا... فروغی
امورفنی، صفحه‌آرا ورسام: محمد پریسای
دستیار ناظر چاپ: محمد کشمیری

مجله رشد آموزش ریاضی هر سه ماه یک بار به منظور اعتلای دانش دبیران و دانشجویان دانشگاهها و مراکز تربیت معلم و سایر دانش‌پژوهان در این رشته منتشر می‌شود. جهت ارتقاء کیفی آن نظرات ارزنده خود را به صندوق پستی تهران ۳۶۳ ـ ۱۵۸۵۵ ارسال فرمائید.

فهرست

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار

امسال دهمین سال انتشار رشد ریاضی است. شماره پیشین با قلم ریاست محترم سازمان مزین گردید که همواره مشوق ما در انتشار این مجله بوده و هستند و در آن سرمقاله هم رهنمودهای مفید راارائه داده‌اند که مسلماً راهگشای هیأت تحریریه در ادامه انتشار منظم مجله و در جهت اهداف اولیه خواهد بود.به‌ویژه آنکه دانش‌افزایی و آموزش دوبعدی است که در سرمقاله اخیر به آن اشاره شده است و به اهمیت دانش آموزش ریاضی تأکید شده است. همین جا از متخصصین آموزش ریاضی دعوت می‌کنیم که با ارسال مقالاتی در زمینه آموزش ریاضی و موضوعات وابسته بدان ما را یاری دهند. انتظار ما این است که، با توجه به تغییر نظام آموزشی، مقالات بیشتری در راستای آموزش ریاضی، برنامه‌ها، گرایش‌های ریاضی و بالاخره تغییر نظام آموزشی به مجله ارسال گردد.

قصد داشتیم در شمارهٔ گذشته مروری بر مقالات دهسالهٔ گذشته داشته باشیم.متأسفانه این مهم انجام نشد. امّا به کوشش هیأت تحریریه به‌طور آماری و از نظر کمی موضوعات مقالات ۳۵ شماره گذشته رااستخراج کرده‌ایم که به‌طور اجمالی در منظر خوانندگان قرار می‌دهیم تا به این طریق گذشتهٔ خود راارزیابی کنیم تا در تنوع و ترکیب ساختار شماره‌های آتیه تناسب بهتری به مجله بدهیم. جدول مقالات به شرح زیر است:

شماره‌های ۱ تا ۸

آموزش ریاضی و فلسفهٔ ریاضی	۹ مقاله
تاریخ ریاضیات	۸ مقاله
نظریّه اعداد	۹ مقاله

جبر	۶ مقاله
آنالیز	۱۰ مقاله
ریاضی جدید	۴ مقاله
آمار و احتمال	۳ مقاله
هندسه	۱۲ مقاله
مثلثات	۱ مقاله
شگفتانه	۲ مقاله

در این شماره‌ها علاوه‌بر مقالات فوق گزارش کنفرانسهای ریاضی، گزارش مسابقات داخلی و المپیادها معرفی کتب و نشریات منتشره دیده می‌شود. گزارش فعالیتهای گروه ریاضی، ریزمواد ریاضی مقطع راهنمایی و سه مصاحبه با پیشکسوتان ریاضی و مسئولین سازمان سنجش آموزش کشور از محتویات نشریات این دو سال است.

شماره‌های ۹ تا ۱۵

آموزش ریاضی و فلسفهٔ ریاضی	۳ مقاله
تاریخ ریاضیات	۷ مقاله
نظریّه اعداد	۶ مقاله
جبر	۹ مقاله
آمار و احتمال	۱ مقاله
ریاضیات کاربردی	۶ مقاله
هندسه	۱۶ مقاله

در این شماره‌ها هم مسائل المپیادها و سه مورد مصاحبه درج شده است.

شماره‌های ۱۶ تا ۲۳

آموزش ریاضی	۹ مقاله
تاریخ ریاضیات	۶ مقاله
نظریّه اعداد	۱۰ مقاله
جبر	۱۰ مقاله
آمار و احتمال	۳ مقاله

در این شماره‌ها دوازده سری مسائل مسابقات داخلی و خارجی و دو مورد مصاحبه درج شده است. بعلاوه، از شماره ۲۳ به بعد مسائل ویژهٔ دانش‌آموزی هم اضافه شده است.

شماره‌های ۲۴ تا ۳۰

آموزش ریاضی (هندسه)	۴ مقاله
تاریخ ریاضیات	۷ مقاله
نظریّه اعداد	۵ مقاله
جبر	۸ مقاله
آمار و احتمال	-
ریاضیات کاربردی	۳ مقاله
الگوهای عددی (شگفتی‌ها)	۸ مقاله

در این شماره‌ها هم اخبار و گزارش و مسایل المپیادهای داخلی و خارجی و مسابقات دانشجویی درج شده است.

شماره‌های ۳۱ تا ۳۵

آموزش ریاضی و مقالات توصیفی	۶ مقاله
تاریخ ریاضیات	۱ مقاله
نظریّه اعداد	۷ مقاله
جبر	۵ مقاله
آنالیز	۸ مقاله
آمار و احتمال	-
ریاضیات کاربردی	۱ مقاله
هندسه	۱۰ مقاله

در این شماره‌ها هم مقالاتی تحت‌عنوان نقش ریاضیات، اخبار ریاضی، معرفی کتب و نشریات جدید و مقالات متنوع دیگر دیده می‌شود.

علاوه‌بر مقالات، هر شماره مجلات دارای دو بخش مهمّ دیگری نیز هست که یکی بخش مسائل و دیگری بخش نامه‌ها است. مسائل گوناگون از منابع مختلف و معمولاً جدید از مجلات متنوع خارجی انتخاب و بعد از بحث و بررسی دقیق در هیأت تحریریه در یک شماره درج و در دو یا سه شمارهٔ بعدی راه‌حل آنها ارائه می‌گردد. بخش نامه‌ها اختصاص به پاسخ نامه‌ها و سؤالات خوانندگان عزیز دارد. نامه‌های رسیده به‌طور کامل و دقیق توسط اعضای هیأت تحریریه مورد مطالعه قرار می‌گیرد و بعد از بحث در هیأت تحریریه پاسخ آنها در مجله درج می‌شود.

این بود مختصری از نحوهٔ توزیع مقالات ۳۵ شماره رشد آموزش ریاضی. بدیهی است بررسی تحلیلی و کیفی مجالی دیگر می‌طلبد و مسلماً باید در خارج از هیأت تحریریه انجام پذیرد.

امید است براساس اهداف اولیه و نظریات و پیشنهادات دبیران محترم و دانش‌آموزان گرامی و همکاران عزیز و در راستای پیشرفت سریع دانش ریاضی بتوانیم از همکاریهای این عزیزان بهره‌مند شویم والسلام.

نقش ریاضیات در زندگی بشر و شناخت طبیعت (۶)

نقش منطق نمادی در کامپیوتری کردن دانش بشر (I)

دکتر غلامرضا دانش ناروئی

درشماره‌های گذشته ضرورت به‌کارگرفتن منطق نمادی را برای جلوگیری از لغزشهای احتمالی و برطرف کردن ابهامات موجود درزبانهای محاوره‌ای یادآورشدیم. منطق نمادی زبانهائی را مورد بررسی قرار می‌دهد که هدف اساسی آنها نمادی کردن استدلالهائی است که نه‌تنها در ریاضیات به‌کارگرفته مـی‌شود بلکه درسایرموضوعات علمی و اجتماعی و دانشهای بشری نیز مورد استفاده قرارمی‌گیرند.

انگیزه‌های به‌کارگیری زبانهای نمادی تحول زیـادی پیدا کرده است. این زبانها درآغازبه‌وسیلهٔ پثانو و فرگه، دراواخر قرن‌نوزدهم به‌صورت سیستماتیکی معرفی‌شدند وهدف از آنها بهتر کردن برهانهای ریاضی به‌منظور بالا بردن قطعیت بحثهای ریاضی بود. بااین حال تا زمانی‌که تنها انسانها مورد خطاب بودند این هدف برآورده نشد.

درحالی‌که انسانها تنفری برطرف نکردنی اززبانهای‌نمادی دارند[1] پیشرفت کامپیوترها و جهان الکترونیکی به‌آنها بستگی دارد. باپیدایش کامپیوترهای الکترونیکی بعد ازجنگ جهانی زبانهای‌نمادی‌رو به‌رشد گذاشتندومتنهای نوشته‌شده به‌اینزبانها، تحت عنوان « **نرم افزار** »، یکی از شاخصهای هنری فرهنگها شده است.

نمادی کردن فرایندی‌است که باانجام آن ریاضیات (وبطور کلی دانش بشری) برای مکانیکی شدن پذیرفتــه می‌شود. یك برنامه‌کامپیوتری نمونه‌ای است از یك‌متن نمادی که برای‌نوشتن آن باید زبان‌یااطلاعات لغوی‌کامپیوتررا دانست. دستور زبان آن‌را دقیقاً شناخت. حساب وجبر وسایر شاخه‌های ریاضی نیز ازچنین متنهائی تشکیل می‌شوند.

یك متن‌نمادی عبارتست ازیك‌رشته‌علامت (یانماد) که وقتی به‌وسیلهٔ یك ریاضیدان یایك ماشین بکارگرفتــه می‌شوند به‌یك رشتهٔ‌نمادی دیگرتبدیل‌می‌گردند. این‌بکارگرفتنها خودمی‌توانند موضوع یك تئوری ریاضی بشوندکه اگر به‌وسیلهٔ ماشین عمل شود متخصصین کامپیوتر آن‌را «**تئوری اتومات**»[2] نامند و اگر به‌وسیلهٔ منطق‌دانان صورت‌گیردآن را «تئــوری بازگشتی یـا «تئوری تراجعی»گویند واگر بدوسیلهٔ ریاضیدانان انجام شود آن‌را «**تئوری اثبات**»[4]خوانند.

اینك روشن شده است‌که **بامنطق نمادی به‌تنهائی می‌توان قسمتهای بظاهرگوناگون علوم کامپیوتری را تحت بررسی قرار داد. منطق نمادی یك زبان مسئله حل‌کن‌کلی، یك زبان موازی**[5] **برای سیستمهای عــامل ویك‌زبان بنیادی بــرای سیستمهای داده پایه است**[6]. این‌دیدگاه‌کاربردی‌همراه‌باسادگی، **زیبائی‌واثریکسانسازی**، برنامه‌نویسی منطقی آیندهٔ‌نافذومهمی‌را برای منطق نوید می‌دهد.

پروژهٔ ۱۰ سالهٔ نسل‌پنجم کامپیوترژاپن قویاً این نظر راتأیید می‌کند. دراین پروژه برنامه‌نویسی منطقی‌به‌عنوان هستهٔ‌مرکزی زبان برنامه‌نویسی انتخاب شده است. هدف این پروژه تهیهٔ سیستمهای کامپیوتری نوی است برای دههٔ حاضر به‌این امیدکه کامپیوترهائی‌بسازندکه مستقیماًزبان برنامه‌نویسی‌منطقی‌موازی[7] را فراهم‌آورد وآن‌را حمایت کنــد. این خود پایه‌ای بــرای سیستمهای کامپیوتری خواهــد شد که به‌تــواند **نقش‌کارشناسی** را بازی‌کنند **وتوانائی‌حل‌مسئله** داشته‌باشندو **دسترسی‌مستقیم به‌زبان معمولی**ومکالمه‌و... که به‌توان **آنهارادستیارهای باذکاوت** محسوب کرد پیداکنند (درشماره‌های آینده‌دربارهٔ این‌دستگاهها مفصل‌صحبت خواهد شد.)

معنی برنامه‌هائی‌که به‌زبانهای‌قراردادی سنتی‌نوشته‌می‌شوند **برحسب‌رفتاری** که درداخل کامپیوتر فرا خوانی می‌گردند از این‌رو **باراصلی بردوش‌برنامه‌نویس** است‌که نیازدارددداده‌ها را باعباراتی قابل درك برای‌ماشین مورد استفاده بیان‌کند. از **طرف دیگر، معنی برنامه‌هائی راکه بازبان منطق بیان می‌شوند می‌توان مستقل ازماشین‌وباعباراتی‌قابل‌درك انسان‌تعریف‌کرد. دراینجا باراصلی بردوش ماشین است‌که نیاز به‌انجام اعمال مکانیکی دارد (معادل مراحل استنتاج) تا مشخص‌کند کــه آیا داده‌ها دریك برنامه، بطور منطقی، وجود پاسخ لازم را برای مسئله مورد نظر بدست می‌دهــد یانه؟ درنتیجه‌درك، اصلاح و نوشتن‌برنامه‌های منطقی‌ساده‌تر وپذیرش آن‌درهدفها وموقعیتهای دیگرراحت‌تراست.**

تکنولوژی کامپیوتر باچنان سرعت سرسام‌آوری توسعه‌پیدا کرده است که علاوه برمحاسبات پیچیدهٔ ریاضی، کامپیوترهــا کارهائی می‌توانند انجام دهندکه برای انجام‌آنها نیازبه‌هوش وذکاوت است. ازقبیل نوشتن برنامه، پاسخ به‌پرسش و اثبات قضایا. هوش مصنوعی یك حوزهٔ درحــال گسترش و پیشرفت علوم کامپیوتری است که با انجــام چنین فعالیتهائی سر وکار دارد.

در دههٔ ۱۹۷۰، درنتیجهٔ توسعهٔ مستقیم‌کارهای اولیه درزمینهٔ اثباتهای اتوماتیکی وهوش مصنوعی، منطق به عنوان یك زبان برنامه‌نویسی ظاهر شد. لازم به یــادآوری است که ساختن **استنتاج اتوماتیکی هستــهٔ**[8] **مرکزی برای رسیدن به‌هوش مصنوعی** است. این دیدگاه که منطق مرتبــه اول (یعنی منطــق گزاره‌ها وگزاره نماها)، یا دست‌کم زیرمجموعه‌ای ازآن را می‌توان به‌صورت یك زبان برنامه‌نویسی کامپیوتری بکارگرفت یك دیدگاه انقلابی بود. زیرا تا ۱۹۷۲ منطق تنها به‌عنــوان یك زبــان توصیفی و تشریحی در علوم کامپیوتری بکار گرفته می‌شد.

برای‌ساختن **یك سیستم «مسئله حل کن مکانیکی»** لازم‌است اطلاعات **به‌زبانی‌روشن و خالی از ابهام** بیان شود. به‌علاوه برای اینکه این‌سیستم **به‌عنوان یك مدل‌مسئله حل‌کن** انسانــی عمل‌کند زبان مورد نظر باید شباهت زیــادی به‌زبان معمولــی وطبیعی انسان داشته باشد. **زبان منطق‌نمادی هم به‌اندازه‌کافی دقیق است‌که به وسیلهٔ کامپیوتر بکار گرفته شود وقابل درك باشد و هم به‌اندازه کافی صورت طبیعی دارد که به‌تــوان آن را صورت ساده شدهٔ زبان معمولی دانست.**

آغاز رسمی منطق بااندیشهٔ علمــی بشرهمــزاد است، در صورتی که پیدایش کامپیوترها درتاریخ ما نسبتاً جدید است. کامپیوترها، مانندمنطق، هم موضوع مطالعهٔ علمی هستند وهم‌یك

ابزارقوی برای پیشرفت کوششهای علمی. گسترش کامپیوتر، برخلاف منطق که تنها باقدرت اندیشهٔ انسان دور از هر گونه محدودیت مکانی وزمانی گسترش یافته، از همان آغاز تابع محدودیت‌های مهندسی و تکنولوژیکی بوده است. با اینکه کامپیوترها برای استفادهٔ انسانها ساخته شده‌اند، مشکلات ساخت آنها آنقدر بود که به‌ناچار **زبانهای لازم** برای بیان مسائل و فرمان اجرای دستورهای داده شده به‌کامپیوتر **تنها از دیدگاه مهندسی** آفریده شدند. با درك تدریجی مشکلات ومسائل کامپیوترها و برطرف نمودن آنها برمشکلات بکارگیری آنها افزوده شد. کندی کار دیگر به‌دلیل ناتوانی کامپیوتر در انجام دستورهای انسانی نبود بلکه ضعف انسان در دادن دستورها یا برنامه‌نویسی کامپیوتر بود. این ماشینها حافظه نداشتند و با دید امروزی قابل برنامه‌ریزی نبودند.

اولین کسی که پی به‌ارزش پتانسیل محاسباتی‌ماشینی برد Babbage (۱۷۹۲–۱۸۷۱) از اهالی لندن بود. اولین ماشین وی بنام «موتور تفاضل» می‌توانست انواع زیادی جدولهای ریاضی را تولیدکند. ولی وی قبل‌از اینکه آن را بسازد با بازبه‌فکر «Analytical Engine» یا «موتور آنالیتیکی» افتاد. این موتور برخلاف قبلی قرار بود هم حافظه داشته باشد وهم‌واحد محاسبه و تصمیم‌گیری اما به‌دلیل ضعف تکنولوژی‌روز، وی‌موفق به‌ساخت آن‌نیز نشد. دوست با بیج خانم Lovelace دختر لرد بایرون شاعر معروف نیز به‌این‌موضوع علاقمندشدومقالاتی نیز نوشت ولی بی‌نتیجه بود. (غافل از اینکه این آرزوها نیاز به برق‌دارد که سالها بعدمورد استفاده بشر قرارگرفت) این گرفتاریها آغاز یك مرحلهٔ تحقیق دامنه‌دار برای آفرینش زبانهای برنامه نویسی‌شدودرنتیجه نمادسازی‌وصوری سازی‌روبه توسعه گذاشت. اولین این‌زبانهازبانی‌است به نام **«زبان‌ماشین»** که مستقیماً به‌وسیله‌کامپیوترقابل درك‌است. به‌مرورزمان‌زبانهای اسمبلی، فرترن، بیسیك، الگل، پاسکال وایدا(۹) به‌وجود آمدند که بیان مطالب به آنها برای انسان ساده‌تر است ولی بازهم به زبان ماشین ترجمه می‌شوند (این کاردر داخل کامپیوتر صورت می‌گیرد).

عده‌ای براین عقیده‌اندکه برنامه‌نویسی‌کامپیوتری می‌تواند، وباید هم چنین باشد، یك فعالیت پاداش‌دهندهٔ ذهنی باشد. یك زبان برنامه‌نویسی‌خوب یك‌ابزارتوانا برای درك مسائل‌است. است. یك زبان برنامه‌نویسی ابزاری است برای تشکل، بیان وحتی انتقال‌اندیشه‌های یك‌فرد وانجام‌آزمایش باآنها. برخی معتقدندکه برنامه‌نویسی باید بخشی ازفرایند حل‌مسئله باشد، تفکرات، به‌صورت برنامه‌متشکل گردند بطوری‌که نتایج‌بدست آمده‌ازیك‌دستهٔ پیچیده ازمفروضات‌رابه‌توان بااجرای‌برنامه‌ها درکامپیوتر بررسی کرد.

برای رسیدن به‌این‌هدف، کامپیوترها باید راه بس‌دراز ودشواری را طی‌کنند. منطق نمادی به‌عنوان اولین پله برای حرکت موفق دراین‌راه شناخته شده است؛ اگرچه منطق تقریباً ازابتدای کاربه‌عنوان یك ابزاراصلی در طراحی کامپیوترها، استدلال درباره‌آنها ونوشتن برنامه‌های‌آنها بکارگرفته شده است اما بهره‌گیری مستقیم ازمنطق به‌عنوان یك زبان برنامه نویسی تحت اصطلاح **«برنامه نویسی منطقی»** کاملا تازه‌است.

برنامه نویسی منطقی، همینطور روش وابستهٔ به‌آن به‌نام **«برنامه نویسی تابعی»**، اساساً ازمسیر اصلی زبانهای‌کامپیوتری سنتی خارج می‌شود. به‌جای اینکه از مدل «ماشین نیومن» و دستورهای آن‌مشتق‌شود، برنامه‌نویسی منطقی ازیك‌مدل‌انتزاعی که هیچ ارتباط مستقیمی به‌ماشین معینی ندارد پیروی می‌کند. این زبان براین نظراستواراست **که کامپیوتر باید طبق‌دستورهائی عمل‌کندکه ارائه‌آنها برای انسان ساده‌تراست‌ونه‌اینکه انسان اسیررفتار و اعمال یك کامپیوترباشد** آن‌گونه که در برهه‌ای ازازمان بعضی ازدانشمندان ومهندسین به‌خاطر سادگی درساخت کامپیوترمنظورمی‌کردند.

درحد نهائی وشکل محض خود، برنامه نویسی منطقی چنین پیشنهاد می‌کندکه **حتی دستورهای** صریح **برای انجام اعمال** به‌کامپیوتر **داده نشود بلکه دانش لازم دربارهٔ مسئله و مفروضات کافی برای حل‌آن** به‌عنوان **اکسیومهای منطقی** صریح بیان‌گردند.

اولین‌بکارگیری این‌روش‌درمحاسبات عملی‌نتیجهٔ«الگوریتم یکسان‌سازی[10]» و«اصل‌رزلوسیون[11]»رابینسون[12] است‌که در سال ۱۹۶۵ میلادی‌انتشاریافت. چندین تلاش‌مردد برای‌استفاده ازاین اصل، به‌عنوان پایهٔ **یك مکانیزم‌محاسبه‌ای**، صورت گرفت ولی تامدتی هیچ جهشی وپیروزی حاصل نشد. آغاز برنامه‌نویسی‌منطقی‌را می‌توان به‌کوالسکی[13] وکلمرور[14] نسبت کوالسکی‌تعبیر روندی[15] منطق گزاره‌ای‌هرن را فرموله کرد.وی نشان دادکه‌گزارهٔ

A هرگاه B_1، B_2، ...، B_n

را می‌توان به‌عنوان روندی از یك زبان برنامه‌نویسی تراجعی دانست و آن‌را درکامپیوتر اجراء کرد. علاوه بر تفسیر گزارهٔ بالا به‌صورت

A درست است هرگاه B_1 و B_2 و... و B_n درست باشند

می‌توان آن‌را چنین تعبیر کرد:

برای حل (یاانجام) A کافی است B_1 و B_2 و... و B_n را حل‌کنیم (انجام دهیم). ملاحظه می‌شود که این‌تعبیر بیان می‌کند که برای حل یك مسئله آن‌را به‌مسائل جزئی‌ترتجزیه کن یا برای نوشتن یك برنامه آن را به‌**برنامه‌های کوچکتر تقسیم کن** (روش ازبالا به‌پایین)

پس از مقدمه‌ای نسبتاً طولانی می‌پردازیم به تشریح اجمالی منطق نمادی که در برنامه‌نویسی کامپیوتر و حل مسائل بکارمی‌رود. منطق باراست‌ودروغ و یا قابل قبول بودن تك تك جمله‌ها کاری ندارد؛ بلکه با رابطهٔ بین‌آنها سر و کار دارد. مثلاً ازمقدماتی‌اگر نتیجه‌ای درست یا قابل‌قبول بدست آید، آنگاه منطق به‌ما حکم می‌کند‌آن نتیجه‌را بپذیریم؛ ولی اگر نتیجه‌ای‌نادرست یاغیرقابل‌قبول حاصل‌شود منطق به‌ماحکم می‌کند دست‌کم یکی ازمقدمات‌یا مفروضات راکناربگذاریم.

ساده‌ترین جمله‌های بکارگرفته درمنطق جمله‌هائی هستند که ازرابطهٔ بین‌دو شیء یادوفرد (بمعنی اعم) خبرمی‌دهندیا خبری درمورد شیء معینی می‌دهند مانند:

بیژن ریاضیات را **دوست دارد.**

ساسان **دوست** فرهاد **است.**

جمشید **۳ سال** از بهمن **بزرگتر است.**

۲ عددی است اول.

دراینجا کلمات و عباراتی که درشت نوشته شده‌اند بخشی از اسامی رابطه‌ها هستند و کلماتی که معمولی نوشته شده‌انداسم هستند. این‌نوع جملات‌را «**جمله‌های اتمی**» یا مختصراً«**اتم**» می‌نامیم.

ساده‌ترین سیستم منطقی مورد استفاده عبارتست از منطق کلاسیك‌یامنطق‌گزاره‌ای‌که بنام«منطق مرتبه‌صفر» معروف‌است. چون این‌منطق درمدارس‌تدریس‌می‌شود، آن‌را به‌اختصار یاد‌آوری‌می‌کنیم وبرای اطلاعات بیشترمراجعه به‌کتاب‌ریاضیات جدید دبیرستانهارا توصیه می‌کنیم.

اولین فرض درمنطق کلاسیك این است‌که اتمها جملات خبری هستند‌که یاراستند یا دروغ ولی نه‌هردو. مانند **۵ عددی است اول ، ۳>۱ ، ۷ بر ۲ بخش‌پذیراست.** به‌این ترتیب جمله‌هائی ازقبیل«موی بیژن‌بوراست» دراین‌منطق جائی‌ندارد (زیرا بوربودن تعریف دقیقی ندارد وباشرایط مکان و زمان برداشتهای متفاوت از‌آن می‌شود). برای‌هرگزاره (یااتم) یك ارزش راستی قائل‌می‌شویم. اگر گزاره‌ای راست باشد گوییم ارزش راستی‌آن **درست**‌است واگردروغ باشد گوئیم ارزش راستی‌آن **نادرست** است. ارزش درست‌را به t (یا ۱)وارزش نادرست‌را به f (یا ۰) نشان‌می‌دهیم.

برای‌نمایش اتمها ازنمادهای p، q، r ... استفاده‌خواهیم کرد (احتمالا باandیس). معمولا برای ترکیب اتمها وتشکیل گزاره‌های مرکب ازنمادهای

$$\rightarrow \vee, \wedge, \rightarrow . \longleftrightarrow$$

که آنهارا **رابطهای** گزاره‌ای می‌خوانیم‌استفاده‌می‌کنیم. **دومین فرض منطق کلاسیك** این است‌که ارزش راستی **گزاره‌های مرکب** تنها به‌ارزش راستی مؤلفه‌های‌آن بستگی دارد و بس.

یك سیستم منطقی ازسه مؤلفه اصلی تشکیل می‌شود:

۱ــ زبان ویژه: برای نمایش دانش وداده‌ها

۲ــ مجموعهٔ قوانین استدلال: برای نتیجه‌گیری از داده‌ها ودانسته‌ها

۳ــ تعابیرومعانی

زبان منطق‌کلاسیك مشتمل است بر:

الف: مجموعهٔ گزاره‌های اتمی p، q، r، ...

ب: مجموعهٔ رابطها $\neg$، $\vee$، $\wedge$، $\rightarrow$، $\longleftrightarrow$

ج: مجموعهٔ‌علائم و ، (،) برای مشخص‌کردن ترتیب‌اعمال وجداکردن اتمها

د: مجموعهٔ فرمولهای خوشتعریف‌که بطریق استقرائی زیر تعریف می‌شوند:

۱ــ هرگزارهٔ اتمی یك فرمول است.

۲ــ اگر F و G فرمول باشند،

$$\neg F، F\vee G، F\wedge G، F \rightarrow G، F \longleftrightarrow G$$

فرمولند.

۳ـ تنها عباراتی‌که بادستورهای ۱ و ۲ ساخته می‌شوند فرمولند وبس.

پس ازمشخص‌کردن دستورترکیب ونوشتن فرمولها دراین سیستم نوبت تعبیرنمودن ومعنی‌دادن به‌ترکیبها است.

تعریف: فرض‌کنیم F یك فرمول شامل اتمهای p_1، p_2، ...، p_n باشد، منظورازیك **تعبیر** I از F جانشین‌کردن‌ارزش‌هائی ازاین اتم‌ها هستند به‌قسمی‌که یك ارزش راستی برای F بدست آید. اگرارزش F راست باشد گوییم F درست است والا F نادرست است.

توجه: چون هر p_i دوارزش دارد، **تعداد 2^n تعبیرمتمایز برای F وجوددارد.**

تعریف: فرمول F را **معتبر** خوانیم‌هرگاه تحت‌کلیهٔ تعبیرهای ممکنه درست باشد. درغیراین‌صورت F **نامعتبر** است. نماد «■» را برای نمایش فرمول معتبر بکارخواهیم برد.

تعریف: فرمول F را **ناسازگار** خوانیم هرگاه تحت کلیه تعبیرهای ممکنه نادرست باشد.

درغیراین‌صورت F سازگاراست. نماد«□» را برای‌نمایش فرمول ناسازگار بکار خواهیم برد. (و آن را گزاره خالی می‌نامیم.)

مثال ۱: اگر F فرمول $p\wedge(-q)$ باشد، آنگاه چهارتعبیر برای‌آن داریم:

I_1: وقتی p درست و q درست‌باشدیعنی،

$I_1=\{t, t\}=\{۱, ۱\}$ تحت‌این‌تعبیر F نادرست‌است.

I_2: وقتی p درست ولی q نادرست باشد،

$I_2=\{t, f\}=\{۱, ۰\}$ تحت این‌تعبیر F درست‌است.

I_3: وقتی p نادرست ولی q درست‌باشد،

$I_3=\{f, t\}=\{۰, ۱\}$ تحت‌این‌تعبیر F نادرست‌است.

I_4: وقتی p نادرست و q نادرست باشد،

$I_4=\{f, f\}=\{۰ و ۰\}$ تحت این تعبیر F نادرست‌است

ملاحظه می‌شودکه F تنها تحت تعبیر I_2 درست است. F **فرمولی سازگار ولی نامعتبر** است.

مثال ۲: اگر $F\equiv p\wedge(-p)$، آنگاه چون تنها یك اتم p در ساختمان F بکاررفته است، ۲ تعبیرزیر را داریم:

$I_2=\{t\}=\{۱\}$, $I_1=\{f\}=\{۰\}$

ملاحظه می‌شودکه F تحت هردوتعبیر نادرست و بنابراین یك فرمول ناسازگاراست.

تعریف: اگرفرمول F تحت تعبیرI درست باشد I را **یك مدل** برای F نامند.

مثال: در مثال ۱، I_2 یك مدل فرمول $p\wedge(-q)$ است.

تعریف: دوفرمول F وG را **هم‌ارز** (منطقی) خوانیم هرگاه **به‌ازای هر تعبیری هم‌ارزش** باشند.

به‌عبارت دیگر، ازنظرمنطقی، این‌دوفرمول یك چیزرا بیان می‌کنند. این هم‌ارزی‌را بصورت $F\equiv G$ نشان می‌دهیم.

توجه: این هم‌ارزی یك تساوی منطقی است که به‌ما اجازه می‌دهدکه درمواردلازم یکی ازفرمولهارا جانشین‌دومی بکنیم: اگرچه دراین جانشینی ممکن است مقداری از اطلاعات‌را ازدست‌بدهیم ولی‌به‌هدف‌مورد نظرنزدیکتر می‌شویم.

مثال: $-(-p)\equiv p$، $p\to q\equiv -p\vee q$،

$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$, ...

باتوجه به‌نکات بالا یك‌فرمول ممکن‌است صورتهای‌مختلف داشته باشد (که عبارتند ازفرمولهای‌هم‌ارزآن). غالباًمواردی پیش می‌آیدکه لازم است یك فرمول‌را ازصورتی به‌صورت دیگرتبدیل نمایم. صورتهای زیربسیارمهم‌اند:

الف: صورت نرمال عطفی[16]

ب: صورت نرمال فصلی[17]

یك فرمول F وقتی‌صورت **نرمال عطفی** داردکه به‌صورت زیرباشد:

$$F\equiv A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n$$

که درآن A_1، A_2، ...، A_n به‌صورت‌ترکیب فصلی اتم(ها) یا نقیض اتم(ها) باشد.

مثال: فرمول $F\equiv(p\vee q)\wedge(-p)$ به‌صورت‌نرمال‌عطفی‌است. (دراینجا $A_1=p\wedge q$، $A_2=s$ و $A_3=-p$) فرمول F را وقتی‌گویندکه به‌صورت **نرمال فصلی** است‌که داشته باشیم:

$$F\equiv B_1\vee B_2\vee\cdots\vee B_n$$

که درآن B_1، B_2، ...، B_n به‌صورت‌ترکیب عطفی اتم(ها) یانقیض اتم(ها) باشد.

مثال: فرمول $F\equiv(p\wedge(-q))\vee(-r)\vee(q\wedge r)$ به‌صورت نرمال‌فصلی است

$$(B_1=p\wedge(-q),\ B_2=-s,\ B_3=q\wedge r)$$

برای انجام عمل «تبدیل فرمولها» نیاز به‌دراختیارداشتن‌تعداد کافی «فرمولهای هم‌ارز» و یك «دستورالعمل تبدیل» داریم.

هم ارزهای منطقی زیر (که برای سادگی آنها را قانون خواهیم خواند) برای روند تبدیل مفید وکافی هستند.

۱) $F\to G\equiv -F\vee G$

۲) $F\longleftrightarrow G\equiv(-F\wedge G)\wedge(-G\vee F)$

۳) $F\vee G\equiv G\vee F,\ F\wedge G\equiv G\wedge F$

۴) $(F\vee G)\vee H\equiv F\vee(G\vee H)$

$F\wedge G)\wedge H\equiv F\wedge(G\wedge H)$

۵) $F\vee\square\equiv F,\ F\wedge\square\equiv\square$

$F\vee\blacksquare\equiv\blacksquare,\ F\wedge\blacksquare\equiv F$

۶) $F\vee -F\equiv\blacksquare,\ F\wedge -F\equiv\square$

۷) $-(-F)\equiv F$

۸) $-(F\vee G)\equiv(-F)\wedge(-G)$

$-(F\wedge G)\equiv(-F)\vee(-G)$

۹) $F\vee(G\wedge H)\equiv(F\vee G)\wedge(F\vee H)$

$F\wedge(G\vee H)\equiv(F\wedge G)\vee(F\wedge H)$

اثبات این‌هم‌ارزی‌ها بااستفاده ازجدول ارزشها (مراجعه‌شود به‌کتاب‌ریاضیات جدید سال‌چهارم ریاضی-فیزیك) ساده است وبه‌خواننده واگذارمی‌شود.

بااستفاده‌ازاین قوانین ودستورالعمل‌زیرمی‌توان هرفرمولی را به‌صورت نرمال نوشت

دستورالعمل تبدیل

۱ـ بااستفاده از قوانین ۱ و ۲ رابطهای $\to$ و $\longleftrightarrow$ را حذف کنید.

۲ـ بابهره‌گیری ازقوانین ۷ و ۸ رابط $-$ را به‌جلو اتمها منتقل کنید.

۳ـ بکمك قانون۹ وسایرقوانین صورت دلخواه‌را بدست آورید.

مثال: فرمول $(p\to q)\wedge(-r)$ را به‌صورتهای نرمال عطفی وفصلی بنویسید:

الف: صورت نرمال عطفی: اولین قدم حذف رابط $\to$ است. این‌کاررا بااستفاده ازقانون۱ انجام‌می‌دهیم. داریم:

$$(p\to q)\wedge(-r)\equiv(-p\vee q)\wedge(-r)$$

ب: صورت نرمال فصلی:

(بااستفاده از ۱)

$$(p\to q)\wedge(-r)\equiv(-p\vee q)\wedge(-r)$$

(بااستفاده ازقانون‌های ۳ , ۹)

$$\equiv((-p)\wedge(-r))\vee(q\wedge(-r))$$

تااینجا به‌ساختمان حساب گزاره‌ای دست یافتیم. اما برای اینکه این‌حساب مفید واقع‌گردد باید سازنده باشد؛ بدین‌معنی که نیازبه‌قواعدی داریم که به‌ما توانائی استنتاج منطقی را از مفروضات یاداده‌ها بدهد.

تعریف: منظوراز **یك بحث**،[18] **ادعائی** است که‌فرد بیان‌می‌کند فرمولی خوش‌تعریف مانند B (که‌آن‌را هدف یا نتیجه نامیم) به‌طورمنطقی از یك دسته فرمول خوش‌تعریف دیگرمانند A_1، A_2، ...، A_n (که داده‌ها یا مفروضات نامیم) بدست می‌آید.

معمولا این ادعارا به‌صورت روبرو نمایش می‌دهیم: مفروضات را بالای خط ونتیجه را درپایین آن می‌نویسیم. یك بحث را **زمانی معتبر** (یا **ادعا را وارد**) نامیم که فرمول

$$\begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ \hline B \end{array}$$

$$A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n\to B$$

معتبر باشد. دراین صورت‌گوییم B نتیجهٔ منطقی A_1، A_2، ... و A_n است.

قضیهٔ زیر که‌آن را بدون اثبات بیان‌می‌کنیم دستوری است بسیارمفید برای نشان‌دادن اینکه B نتیجهٔ منطقی A_1، A_2،...و A_n است.

قضیه: فرض‌کنیم فرمولهای A_1،A_2، ...، A_n و B داده شده باشند. B نتیجهٔ منطقی $A_1, A_2, \dots, A_n$ است فقط و فقط

وقتی که

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge -B$$

ناسازگار باشد.

در زیر فهرستی از بحث‌های معتبر (یا ادعاهای وارد) را ملاحظه می‌کنید. این بحث‌ها آنقدر بنیادی هستند (اگر چه بدیهی بنظر می‌رسند) که ما آنها را «دستور» خواهیم نامید. اینها دستورهائی هستند که ما از آنها در اثبات قضایا یا در استنتاجهای منطقی استفاده می‌کنیم.

۱) $\dfrac{A \wedge B}{A}$ و $\dfrac{A \wedge B}{B}$

۲) $\dfrac{A}{A \wedge B}$ و $\dfrac{B}{A \wedge B}$

$A \to C$

$B \to C$

۳) $\dfrac{A \vee B}{C}$

$B \to C$

۴) $\dfrac{B \to C}{-B}$

A

۵) $\dfrac{A \to B}{B}$

$A \to B$

۶) $\dfrac{B \to C}{A \to C}$

$B \vee C$

۷) $\dfrac{-B}{C}$

اینك برای روشن شدن مطلب به‌ذکر مثالی می‌پردازیم.

مثال: ثابت کنید که بحث

$$A \to B$$
$$\dfrac{-B}{-A}$$

معتبر است.

اثبات: ما وارد بودن این ادعا را به‌چند روش ثابت می‌کنیم:

روش اول ـ با استفاده از جدول: بکمك جدول ارزش، نشان می‌دهیم که هروقت $(A \to B) \wedge (-B)$ درست باشد $-A$ نیز درست است. این امر در جدول زیر نشان داده شده است.

A	B	$-A$	$-B$	$A \to B$	$(A \to B) \wedge (-B)$
۱	۱	۰	۰	۱	۰
۱	۰	۰	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۱	۱

روش دوم ـ با تبدیل به‌صورت نرمال:

بنا بر تعریف وارد بودن ادعا باید نشان دهیم که

$$((A \to B) \wedge (-B)) \to -A$$

معتبر است. ابتدا این فرمول را به صورت نرمال فصلی در - می‌آوریم:

$(A \to B) \wedge (-B) \to -A$ قانون ۱

$\equiv -(A \to B) \wedge (-B)) \vee -A$

$\equiv -((-A \vee B) \wedge (-B)) \vee -A$ قانون ۱

$\equiv -(-A \vee B) \vee -(-B) \vee -A$ قانون ۸

$\equiv (-(-A) \wedge (-B)) \vee B \vee -A$ قانون ۸

$\equiv (A \wedge (-B)) \vee B \vee (-A)$ قانون ۷

(صورت نرمال فصلی)

حال با استفاده مجدد از قوانین هم‌ارزی ارزش آن را تعیین می‌کنیم.

$\equiv (A \vee B \vee (-A)) \wedge ((-B) \vee B \vee (-A))$ قانون ۹

$\equiv (A \vee -A \vee B) \wedge (-B \vee B \vee -A)$ قانون ۳

$\equiv (\blacksquare \vee B) \wedge (\blacksquare \vee -A)$ قانون ۶

$\equiv \blacksquare \wedge \blacksquare$ قانون ۵

$\equiv \blacksquare$

می‌بینیم که حاصل گزاره‌ای است درست. پس حکم ثابت است.

روش سوم ـ روش ناسازگار:

در این روش نشان می‌دهیم که فرمول

$$((A \to B) \wedge -B) \wedge -(-A)$$

ناسازگار است، یعنی هم‌ارز است با $\square$

برای اثبات ناسازگاری این فرمول آن‌را به‌صورت نرمال می‌نویسیم:

قوانین ۱ و ۷	$((A \rightarrow B)\wedge -B)\wedge -(-A)$
	$\equiv ((-A\vee B)\wedge -B)\wedge A$
قانون ۴	$\equiv (-A\vee B)\wedge(-B\wedge A)$
قانون ۹	$\equiv (-A\wedge -B\wedge A)\vee(B\wedge -B\wedge A)$
قانون ۳	$\equiv (-A\wedge A\wedge -B)\vee(B\wedge -B\wedge A)$
قانون ۶	$\equiv (\Box\wedge A)\vee(\Box\wedge A)$
	$\equiv \Box\vee\Box$
قانون۵	$\equiv \Box$

اصل رزلوسیون

از دید محاسباتی ، چه خوب و مفید بود اگر دستورالعملی می‌داشتیم که یك دفعه (در یك‌عمل) انواع فرایندهائی راکه در استدلال با گزاره‌ها سروکار دارند انجام دهد. خوشبختانه رزلوسیون‌چنین دستورالعملی‌است که کارآئی‌آن بر این‌واقعیت استوار است که بر گزاره‌ها عمل‌می‌کند.

اساس رزلوسیون بر **انکار**[25] حکم استوار است؛ بدین معنی که برای اثبات یك‌حکم (یاهدف) رزلوسیون تلاش می‌کند نشان دهد که انکار آن‌حکم تناقض ایجاد می‌کند (روش برهان‌خلف).

گزاره‌هائی‌که رزلوسیون با آنها سروکار دارد به‌صورت

$$A\vee B\vee C\vee \dots$$

می‌باشند که در آنها A، B، C، ... به‌صورت اتم یا نقیض اتم می‌باشند و تنها از رابط «$\vee$» استفاده شده است. ما این نوع گزاره‌ها را **«گزاره‌های فصلی»** خواهیم خواند.

مثال: $-p\vee q$، $p\vee s$، $p\vee -q\vee s$، ... گزاره‌های فاصلی‌هستند.

دستورالعمل رزلوسیون یك‌روند ساده است که درهر مرحله آن دوگزارهٔ فصلی‌انتخاب و باهم مقایسه می‌شوند وازترکیب آنها گزارهٔ فصلی‌دیگری بدست می‌آید که آن را **برآیند** آن دو می‌نامیم. **عمل ترکیب همان رابط «$\vee$»** است. گزارهٔ حاصل‌را به‌ساده‌ترین‌صورت آن‌می‌نویسیم، به‌این‌ترتیب که اگر گزاره‌ای هم‌خودش و هم‌نقیضش موجود باشند هردورا حذف می‌کنیم. مثلاازترکیب $-p\vee q$ و $p\vee s$ حاصل‌می‌شود $q\vee s$ (p و $-p$ همدیگررا خنثی می‌کنند) ما این عمل را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$-p\vee q \qquad p\vee s$$
$$q\vee s \qquad \text{برآیند}$$

این استنتاجی است‌که دستورالعمل رزلوسیون بر آن پایه‌گذاری می‌شود.

تعریف جامع‌تر اصل رزلوسیون ازاین قرار است:

اصل رزلوسیون:

فرض‌کنیم c_1 و c_2 دوگزاره فصلی باشند، اگر گزارهٔ اتمی مانند p در c_1 (یا c_2) وجود داشته باشد‌که نقیض‌آن $-p$ در c_2 (یا c_1) یافت‌شود، آنگاه p ونقیض‌آن را حذف می‌کنیم و گزاره‌های فصلی حاصل‌راکه آنها را c'_1 و c'_2 خواهیم خواند با رابط «$\vee$» ترکیب می‌کنیم. گزارهٔ حاصل‌را برآیند آن دو خوانیم:

$$c_1 \qquad c_2$$
$$c'_1\vee c'_2 \quad \text{برآیند.}$$

این دیاگرام را درخت استنتاج می‌نامیم.

اگر برآیندگزاره‌ای‌خالی، یعنی $\Box$ باشد، آنگاه‌به‌یك‌تناقض می‌رسیم. **برآیندرا به‌داده‌های قبلی اضافه می‌کنیم.** و به‌این ترتیب مجموعهٔ داده‌ها بزرگترمی‌شود. این‌عمل‌را در مجموعهٔ جدید ومجموعه‌های بدست‌آمدهٔ بعدی تکرارمی‌کنیم؛ اگر تناقضی موجود باشد، آنگاه سرانجام به‌آن می‌رسیم ولی اگر تناقضی وجودنداشته‌باشد این عمل‌ممکن است‌هیچوقت‌به‌پایان نرسد.

آنچه را در بالا گفته شد به‌صورت زیرخلاصه می‌کنیم:

فرض‌کنیم S مجموعهٔ داده‌ها (یامفروضات) و B هدف (یا حکم) باشد ومی‌خواهیم بااستفاده ازاصل رزلوسیون ثابت کنیم که B نتیجهٔ منطقی S است. چنین عمل‌می‌کنیم.

۱ــ تمام اعضای S (فرمولهای‌حاصل ازداده‌ها) رابه‌صورت گزاره‌های فصلی درمی‌آوریم. این‌کار باتبدیل به‌صورت نرمال فصلی‌انجام می‌شود.

۲ــ نقیض B (یعنی $-B$) را به گزاره‌های فصلی تبدیل می‌کنیم و به‌مجموعهٔ حاصل از(۱) اضافه می‌نماییم.

۳ـ الف) دوگزاره انتخاب می‌کنیم که دریکی نقیض یك اتم از دومی باشد.

ب) برآیند این دو را بدست می‌آوریم.

ج) اگر برآیند یك گزاره خالی باشد آنگاه به‌تناقض رسیده‌ایم. وگرنه این برآیندرا به‌مجموعهٔ بالا اضافه می‌کنیم.

د) مرحلهٔ ۳را تکرار می‌کنیم تازمانیکه به‌یك تناقض برسیم یا اینکه هیچ پیشرفتی حاصل نشود.

مثال ۱- فرض کنیم

$$s=\{p,\ (p\wedge q)\to r,\ (s\vee t)\to q,\ t\}$$

و $B=r$ باشد (یعنی s مجموعهٔ مفروضات و r حکم باشد).

برای اینکه نشان دهیم r نتیجهٔ منطقی s است چنین عمل می‌کنیم:

۱ــ اول اعضای s را به‌صورت گزاره‌های فصلی درمی‌آوریم. p و t به‌این‌صورت هستند ولی دو عضو دیگر را باید تبدیل کنیم:

$$(p\wedge q)\to r\equiv\neg(p\wedge q)\vee r\equiv(\neg p\vee\neg q)\vee r$$
$$\equiv\neg p\vee\neg q\vee r$$
$$(s\vee t)\to q\equiv\neg(s\vee t)\vee q\equiv(\neg s\wedge\neg t)\vee q$$
$$\equiv(\neg s\vee q)\wedge(\neg t\vee q)$$

می‌بینیم که‌این گزاره ترکیب دو گزاره‌فصلی $\neg s\vee q$ و $\neg t\vee q$ است. ماهر یك ازاینهارا جداگانه اختیارمی‌کنیم و به‌مجموعهٔ s می‌افزاییم. به‌این‌ترتیب مجموعهٔ جدید

$$s_1=\{p,\neg p\vee\neg q\vee r,\neg s\vee q,\neg t\vee q,\ t\}$$

بدست می‌آید. نقیض‌حکم یعنی $\neg r$ خود به‌صورت‌مطلوب‌است وبنابراین آن‌را به‌اعضای s_1 اضافه می‌کنیم. پس داریم:

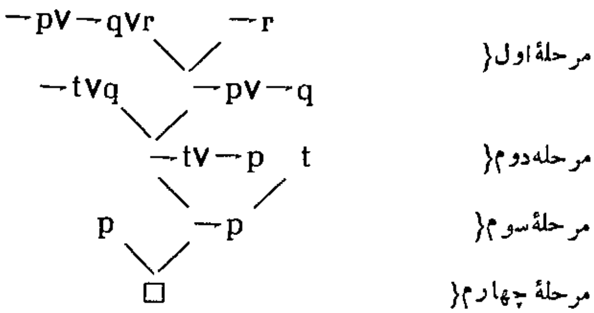
$$s_2=\{p,\neg p\vee\neg q\vee r,\neg s\vee q,\neg t\vee q,\ t,\neg r\}$$

به‌طوری‌که ملاحظه می‌شود انتخاب دو گزارهٔ دلخواه برای شروع دستورالعمل آسان است. بااینکه دست برای انتخاب بازاست وبیش ازیك جفت وجوددارد، بهتراست یکی از دو گزاره‌انتخابی گزارهٔ حاصل ازحکم یعنی $\neg r$ باشد، چون برای رسیدن به‌تناقض باید این‌گزاره بکارگرفته شود.

پس برای‌شروع $\neg r$ را با $\neg p\vee\neg q\vee r$ انتخاب‌می‌کنیم برآیند این دوعبارتست از $\neg p\vee\neg q$ این‌را به مجموعهٔ s_2 می‌افزاییم. مجموعهٔ جدید چنین است.

$$s_3=\{p,\neg p\vee\neg q\vee r,\neg s\vee q,\neg t\vee q,\ t,$$
$$\neg r,\neg p\vee\neg q\}$$

حال $\neg p\vee\neg q$ را می‌توان با $\neg t\vee q$ ترکیب‌کرد. حاصل عبارتست از $\neg t\vee\neg p$. این گزاره به‌داده‌ها اضافه می‌شود و بنابراین درانتخاب بعدی‌می‌توانیم $\neg t\vee\neg p$ را با t انتخاب کنیم. گزارهٔ حاصل $\neg p$ است. وازترکیب $\neg p$ با p به‌گزارهٔ خالی □ یعنی به‌تناقض مورد نظر می‌رسیم. درخت استنتاج به‌صورت زیراست.



تمرین: درختهای استنتاج حاصل از انتخابهای مختلف را در مثال بالا بکشید.

مثال ۲- ثابت کنید $\dfrac{\begin{array}{c}A\to B\\ \neg B\end{array}}{\neg A}$ معتبراست.

قبلا این‌حکم را به‌سه‌طریق حل‌کردیم. اینك به‌کمك اصل رزلوسیون آن‌را حل‌می‌کنیم.

دراینجا فرض، $(A\to B)\wedge\neg B$ وحکم، $\neg A$ است.

۱ــ $(A\to B)\wedge\neg B$ را به‌صورت ترکیب عطفی درمی‌آوریم:

$$(A\to B)\wedge\neg B\equiv(\neg A\vee B)\wedge\neg B$$

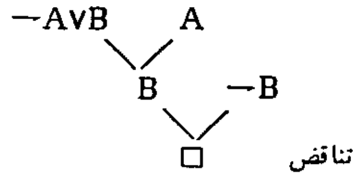
بنابراین دوگزارهٔ فصلی بدست می‌آید: $\neg A\vee B$ و $\neg B$

۲ــ نقیض حکم چنین است:

$$\neg(\neg A)\equiv A$$

۳ــ پس مجموعهٔ داده‌ها ودرخت استنتاج چنین است:

$$S=\{\neg B,\neg A\vee B,\ A\}$$



مثال۳

شخصی ازاطلاعات زیر:

۱ـ پرویز نباید به‌منزل برود درصورتی که به‌قرارملاقاتش نمی‌رسد وناراحت می‌شود؛

۲ـ اگر پرویز شغل‌را نگیرد ناراحت‌می‌شود وباید به‌منزل برود؛

چنین استنتاج کرد که:

۳ـ اگرپرویز به‌قرارملاقاتش نمی‌رسد وباید به‌منزل برود شغل را نمی‌گیرد.

آیا استنتاج وی معتبراست؟

اگرگزارهٔ «پرویز به‌قرار ملاقاتش نمی‌رسد» را به‌ p

و « « «پرویز ناراحت می‌شود» را به‌ q

و « « «پرویز باید به‌منزل برود» را به‌ r

و « « «پرویزشغل‌را می‌گیرد»را به‌ s

نشان دهیم، آنگاه داریم:

۱ـ $p\wedge q \rightarrow \neg r$

۲ـ $\neg s \rightarrow q\wedge r$

۳ـ $p\wedge r \rightarrow \neg s$

نقیض حکم چنین است.

$3'$ـ $\neg((p\wedge r) \rightarrow s)$

اما بااستفاده ازقوانین هم‌ارزی چنین داریم:

$1 \equiv \neg(p\wedge q)\vee\neg r \equiv \neg p\vee\neg q\vee\neg r$

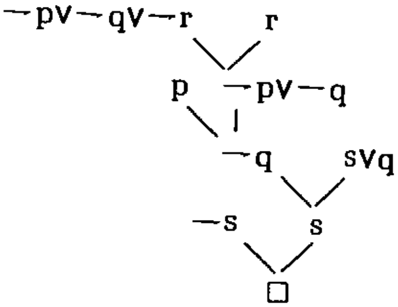
$2 \equiv \neg(\neg s)\vee(q\wedge r) \equiv (s\vee q)\wedge(s\vee r)$

$3' \equiv \neg(\neg(p\wedge r)\vee\neg s) \equiv p\wedge r\wedge s$

ودرنتیجه مجموعهٔ داده‌ها چنین است:

$s = \{\neg p\vee\neg q\vee\neg r,\ s\vee q,\ s\vee r,\ p,\ r,\ s\}$

درخت استنتاج به‌صورت زیرمی‌تواند باشد



بنابراین استنتاج آن شخص معتبراست.

مثال۴ـ یك‌قاضی پس‌ازبررسی‌کامل‌درمورد یك‌قتل‌به‌اطلاعات درست زیررسید.

۱ـ اگرحسین قاتل‌نیست‌آنگاه پرویزقاتل‌است؛

۲ـ پرویزقاتل‌نیست یا مقتول‌مست بوده‌است؛

۳ـ اگرمقتول مست بوده قتل‌درمهمانخانه واقع‌نشده‌است؛

۴ـ قتل درمهمانخانه واقع شده است.

وازآنجا حکم برمحکومیت حسین‌کرد (یعنی حسین قاتل‌است). نشان دهید رأی وی درست بوده است.

برهان: اگرحکم قاضی‌را نادرست بگیریم(یعنی حکم‌را انکار کنیم). باید نشان دهیم‌که اطلاعات بالا همراه بانقیض حکم منجر به‌یك تناقض می‌شود.

اگر«حسین قاتل‌است» را به p و«پرویزقاتل‌است» را به‌ q و«مقتول مست بوده» را به‌ s و «قتل در مهمانخانه واقع شده» را به t نشان دهیم ، اطلاعات بالا به صورت نمادی زیر درمی‌آید.

۱) $\neg p \rightarrow q$ ۲) $\neg q\vee s$

۳) $s \rightarrow \neg t$ ۴) t

۱ و۳ را به‌صورت‌گزاره‌های فصلی می‌نویسیم

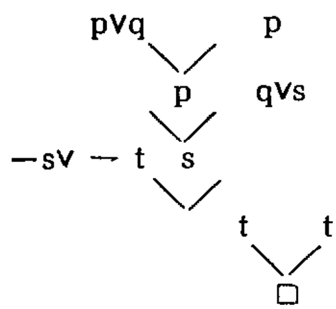
$\neg p\rightarrow q \equiv \neg(\neg p)\vee q \equiv p\vee q$

$s \rightarrow \neg t \equiv \neg s\vee\neg t$

نقیض حکم(رأی قاضی) عبارتست از $\neg p$ وبنابراین مجموعهٔ اطلاعات به‌صورت زیردرمی‌آید

$s = \{p\vee q,\ \neg s\vee\neg t, q\vee s,\ t,\ \neg p\}$

درخت استنتاج زیر نشان می‌دهد که این‌مجموعه منجر به‌تناقض می‌شود و بنابراین رأی قاضی معتبر است.



تمرین:

۱ــ نشان دهیدکه فرمول

$$F\equiv(p\vee q\vee -r)\wedge(p\vee -q)\wedge -p\wedge t\wedge u$$

ناسازگار است.

۲ــ ثابت‌کنید فرمولهای

$$G\equiv(p\vee q)\wedge -q\wedge(-p\vee q\vee -t)$$
$$H\equiv(p\vee -q)\wedge(-p\vee q)\wedge(q\vee -t)\wedge(-q\vee -t)$$

سازگارند

۳ــ باروش‌های مختلف درست بودن دستورهای ۱ تا ۷ را که درفهرست «بحثهای معتبر» آوردیم ثابت‌کنید.

زیرنویسها

۱ ــ یادآوری می‌شودکه به‌صورت غیرسیستماتیك، تا حدودی بول ودمورگان‌پایه‌گذارهای اصلی‌هستند.

۲ــ Automata Theory

۳ــ Recursive Theory

۴ــ Proof Theory

۵ــ Paralell Language ــ دربیشتر زبانهای‌کامپیوتری، انجام اعمال واجراء برنامه تنهابه‌صورت دنباله‌ای‌مقدور است؛ اما منطق به‌کامپیوتر این‌توان را می‌دهدکه چندعمل‌را همزمان (یاموازی) انجام‌دهد.

۶ــ Database Systems ــ يك پايگاه‌اطلاعات (Database) عبارتست ازيك دسته اطلاعات كه‌براى هدفهاى‌متعددى مورد استفاده‌قرارمى‌گيرد.
به عنوان مثال، يك‌داده پايه ممكن است شامل پرونــده‌هاى كاركنان‌يك شركت يامعاملات‌يك بانك‌ياپرونده‌هاى مجرمين در يك اداره‌پليس باشد.چنين‌پايگاه‌اطلاعاتى به‌صورتى‌نمايش داده مى‌شوندكه قابل فرايندى به‌وسيلهٔ كامپيوتر باشند.

۷ــ Paralell Logic Programminy ــ به(۵)مراجعه‌شود.

۸ــ ایدهٔ مــاشینهای محاسباتی مکانیکــی از قرن هفدهــم مطرح بوده‌اند. پاسکال ولایبنتیز ماشینهایی طراحی‌کردند که اعمال جمع‌و ضرب‌را انجام می‌دادند. این ماشینها حافظه نداشتند و با دید امروزی قابل برنامه ریزی نبودند.
اولین کسی کــه پی به‌ارزش‌پتانسیل محاسباتی مــاشینی‌برد Babbage (۱۷۹۲ــ۱۸۷۱) ازاهالی لندن بود؛اولین‌ماشین وی بنام «موتور تفاضل» می‌توانست انواع زیــادی جدولهای ریاضی را تولید کند.
ولــی وی قبل از اینکه آن را بسازد بفکر «Analytical Engine» یا «موتور آنالیتیکی» افتاد. این موتور برخلاف قبلی قــرار بود هم حافظه داشته باشد وهم واحد مــحاسبه و تصمیم‌گیری. امــا به‌دلیل ضعف تکنولــوژی روزی وی موفق به‌ساخت‌آن نیزنشد. دوست بابچ‌خانم Lovelace دختر لرد بایرون شاعر معروف نیز به‌این موضوع علاقمنــدشد و مقالاتی‌نیزنوشت ولی بی‌نتیجه(غافل از اینکه‌این‌آرزوی‌آنها نیاز به‌برق داردکه سالها بعد مورداستفاده‌بشرقرارگرفت).

۹ــ که هریك نسبت به‌قبلی مجردتر است ووابستگی آنهــا به‌ماشین‌کمتر.

۱۰ــ Unification

۱۱ــ Principle Resolution

۱۲ــ Robinson

۱۳ــ Kowalski

۱۴ــ Colmeroer

۱۵ــ Procedural

۱۶ــ Form Normal Conjuuctive

۱۷ــ Form Normal Disjunctive

۱۸ــ Argument

۱۹ــ Valid

۲۰ــ Refutation

تعریف لگاریتم به روش طبیعی

فرضعلی ایزدی
عضوهیأت علمی‌دانشگاه تربیت‌معلم تبریز

۱ـ زمینه تاریخی

مفهوم لگاریتم در اواخر قرن شانزدهم توسط یك شخص اسکاتلندی به‌نام جان‌نپـر (۱۶۱۷ـ۱۵۵۰) ارائه شد. کشف نپرکه بزرگترین پیشرفت درامرمحاسبـه قبل ازظهور کامپیوتر محسوب می‌شود، تنها به‌کمك معادله

$$\log(xy)=\log x+\log y$$

انجام می‌پذیرد. برای ضرب دوعددمثبت x و y، ابتدا ازیك جدول موسوم به جدول لگاریتم، لگاریتمهای x و y را پیدا می‌کنیم، سپس این لگاریتم را با هم جمع‌کرده وحاصلجمع را ازهمان‌جدول می‌یابیم وبالاخره حاصلضرب مطلوب xy را از حاشیه جدول می‌خوانیم. با این روش می‌توان همهٔ محاسبات اعشاری درنجوم، دریانوردی ومثلثات را انجام داد.

مسلماً در دست داشتن جدول کلید کاربود، به‌همین دلیل نپر دو دههٔ آخر زندگی‌اش را صرف تهیه جدولی موسوم به جدول لگاریتم طبیعی[۱] کرد،که هیچگاه نتـوانست آن را تمام کند واین درحالی است‌که تیکوبراهه، ستاره‌شناس‌مشتاقانه در انتظارچنین جدولی بود تا بتواند محاسبات خودش را سرعت بخشد. پس‌از وفات نپر، هنری‌بریگز دوست نپر درلندن‌جدول را کامل‌کرد ومتعاقب‌آن‌کپلر جـدول را درسراسر اروپا منتشر کرد، ولی مدتها قبل ازآن تیکوبراهه درگذشته بود.

هرچند امروزه برای یافتن لگاریتم حاصلضـربهای دو عدد درمعادله بالا به‌جای جدول ازماشین‌حساب استفـاده می‌کنیم، ولی ازاهمیت این معادله‌کم نشده است. اثبـات این معادله‌که یکی ازخواص اصلی‌لگاریتم است، همراه با چند خاصیت‌دیگر درتعریف لگاریتم نهفته است‌که در جـای خود به‌آن خواهیم پرداخت.

۲ـ مقدمه

معمولا در کتابهای دبیرستانـی و حتی بعضـی از کتابهای دانشگاهی لگاریتم را با توسل به‌توانهای یك عدد حقیقی‌مثبت مخالف‌یك، تعریف‌کرده وخواص آن‌را نیزبا استفاده ازخواص توانهای همان عدد ثابت می‌کنند. یعنی اگر a یك عدد حقیقی ثابت مثبت ومخالف با یك باشد و داشته باشیم $a^y=x$ آنگاه y را لگاریتم x درپایه a می‌نامند ومی‌نویسند $y=\log_a^x$.

به‌وضوح، این تعریف یـك اشکـال اساسی دارد وآن این است‌که بدون تعریف وتعبیراعـدادی مثل $2^{\sqrt{2}}$ و $2^{\sqrt{3}}$ و.... به‌طورضمنی ازآنها درتعریف لگاریتم استفاده می‌کنند.

البته برای مطالعه این اعداد وتعبیر دقیق آنها می‌توانیم از مفهوم‌کوچکترین‌کران‌بالایی استفاده‌کنیم، ولی چون این‌روش برای لگاریتم غیرطبیعی است، به‌تعریفی ازلگاریتم می‌پردازیم که ازگسترش تاریخی وفلسفی‌آن ناشی شده‌است.

دراین روش مفهوم لگاریتم بـدون توسل به‌مفهـوم پیچیدهٔ انتگرال وفقـط با استفاده ازمفهوم سادهٔ مساحت تعـریف شده

است. چون مقدارمساحت به نوبهٔ خود به‌حد دنباله‌ای بسیارساده منجرمی‌شود، نظریهٔ لگاریتم دراین‌حالت کاملا ساده بنظرمی‌رسد. شاگردان ضمن اینکه خواص لگاریتم را با توسل به مجموع مساحتها یاد می‌گیرند، در اثبات برخی حقایق و دستورهای جالب دیگر نیز تجربه آموخته و راه را برای تعریف توابع لگاریتمی وتوابع نمایی وارتباط دقیق آنها هموارمی‌سازند.

۳ـ چند نکته ضروری

دراین قسمت ابتدا به بیان چند نکته می‌پردازیم که درتعریف واثبات خواص لگاریتم حائز اهمیت‌اند.

قضیه ۲۰۳ـ فرض کنید p یك عدد ثابت مثبت باشد. دنبالهٔ

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

راکه درآن $a_n=\sqrt[n]{p}$ درنظرمی‌گیریم. حکم این است‌که

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1$$

برای اثبات این‌مطلب به‌چند لم نیازمندیم‌که در زیرآمده‌است.

لم ۲۰۳ قضیهٔ ساندویچ (یا فشار) برای دنباله‌ها: اگرعدد طبیعی وثابت N به‌قسمی‌باشدکه به‌ازای هر $n>N$ دنباله‌های a_n و b_n و c_n درنامساویهای

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$$

صدق‌کنند و داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=L$$

آنگاه

$$\lim_{n\to\infty}b_n=L$$

برهان- به‌یك‌کتاب حساب دیفرانسیل مقدماتی مراجعه کنید.

لم ۳۰۳ـ اگر h یك عدد مثبت و n یك عدد طبیعی باشد، آنگاه

$$(1)\quad (1+h)^n\geqslant 1+nh.$$

این نامساوی نتیجه بدیهی قضیه دو جمله‌ای است، برطبق این قضیه خواهیم داشت

$$(1+h)^n=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\cdots+h^n$$

چون h یك عدد مثبت و n یك عدد طبیعی است لذا همهٔ جمله‌های طرف راست تساوی بالا مثبت‌اند. بنابراین اگراز جمله سوم به‌بعد (در صورت وجود) صرفنظر کنیم، خواهیم داشت

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh.$$

حال می‌توانیم برهان قضیه ۱۰۳ را ارائه دهیم. ابتدا برای‌عدد p سه حالت $p>1$ و $p<1$ و $p=1$ را درنظرمی‌گیریم.

(الف) اگر $p>1$ آنگاه $\sqrt[n]{p}$ از ۱ بزرگتراست، لذا قرار می‌دهیم $\sqrt[n]{p}=1+h_n$ که در آن h_n یك عدد مثبت وابسته به n است، بنابه نامساوی (۱) خواهیم داشت

$$p=(1+h_n)^n\geqslant 1+nh_n$$

که ازآن نتیجه می‌شود

$$0<h_n\leqslant\frac{p-1}{n}$$

وقتی که n افزایش می‌یابد، h_n به صفر میل می‌کند، (قضیه ساندویچ). لذا

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=\lim_{n\to\infty}(1+h_n)=1+0=1$$

(ب) اگر $p=1$ آنگاه $\sqrt[n]{p}=1$ که یك دنباله ثابت است وحدآن نیز برابر ۱ است.

(ج) اگر $p<1$، آنگاه $\frac{1}{p}>1$ و درنتیجه

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/p}=1$$

ولی چون

$$\sqrt[n]{p}=\frac{1}{\sqrt[n]{1/p}}$$

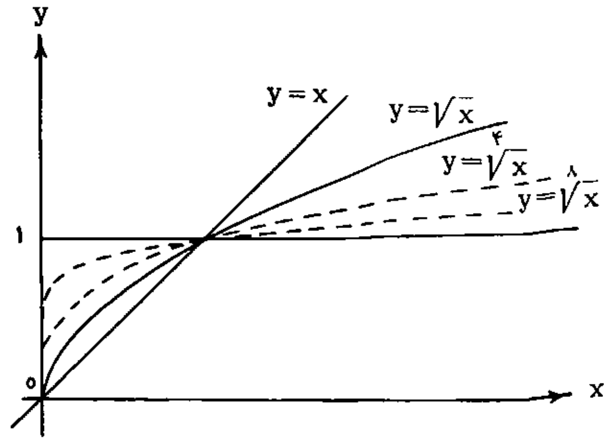
لذا

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=\frac{1}{\sqrt[n]{1/p}}=1$$

۴ـ تعبیر هندسی حد $\sqrt[n]{p}$

اگر نمودارها $y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ را به‌ازای همهٔ اعداد طبیعی n درنظر بگیریم وبرای سهولت خودمان را به‌مقادیر نامنفی x محدود کنیم، حدبالا را می‌توان به‌ازای مقادیرمختلف

P درنمودار زیر نشان داد (شکل ۱).



شکل ۱- تعبیر هندسی حد $\sqrt[n]{P}$.

همانطور که ازشکل ملاحظه می‌کنیم اولا توابع $y=x^{\frac{1}{n}}$ همگی از نقطه‌های (۰,۰) و (۱,۱) عبور می‌کنند، ثانیاً وقتی که n افزایش می‌یابد، نمودار توابع $y=x^{\frac{1}{n}}$ به‌خط $y=1$ نزدیکتر می‌شوند و درحالت حدی منحنی نمایش این توابع به‌خط شکسته‌ای متشکل از دوتکه میل می‌کنند که یکی قسمتی ازمحور yها بین $y=0$ و $y=1$ و دیگری خط $y=1$ است.

بنابراین به‌ازای هرمقدار x، حد $x^{\frac{1}{n}}$ برابر ۱ است.

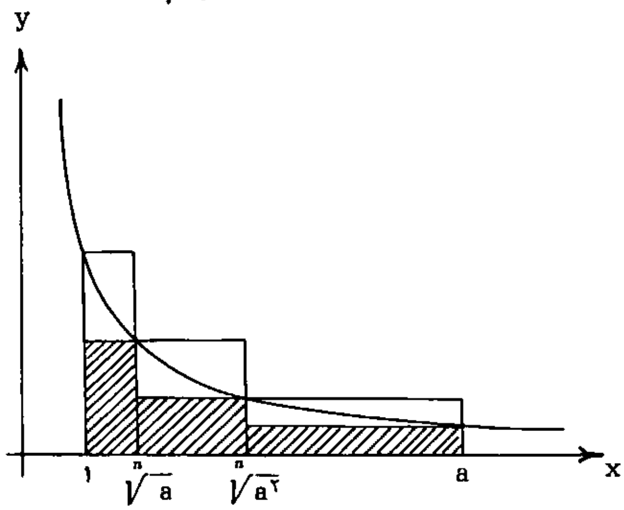
دراین قسمت ازمقاله، لگاریتم هرعدد حقیقی مثبت a را به صورت مساحت زیر منحنی $y=\frac{1}{x}$ محصوربه‌خطوط $y=0$، $x=1$ و $x=a$ تعریف می‌کنیم، ولی به هرحال قبل از بیان آن به‌چند مطلب مهم نیاز داریم که به‌ترتیب در زیر می‌آیند.

۵- لگاریتم به عنوان مساحت زیرمنحنی

قضیه ۱-۵- فرض کنید منحنی نمایش $y=\frac{1}{x}$ در صفحه xoy داده شده است. اگر $a>1$ یک‌عدد حقیقی دلخواه باشد ونقاط

$$1,\ a^{\frac{1}{n}},\ a^{\frac{2}{n}},\ \dots,\ a^{\frac{n-1}{n}},\ a^{\frac{n}{n}}$$

طول رئوس پایینی مستطیلهای نشان داده شده درشکل ۲ باشند آنگاه مجموع کل مساحتهای مستطیل‌های بالای منحنی $y=\frac{1}{x}$ برابراست با $n(\sqrt[n]{a}-1)$ ومجموع کل مساحتهای مستطیلهای پایین منحنی $y=\frac{1}{x}$ برابراست با $\frac{n(\sqrt[n]{a}-1)}{\sqrt[n]{a}}$



شکل ۲- تقریب مساحت زیرمنحنی به کمک مستطیلها

اثبات: ابتدا فرض کنید که نمادهای $U(x_1,x_2)$ و $L(x_1,x_2)$ به ترتیب مساحتهای مستطیلهای بالا و پایین نمودار $y=\frac{1}{x}$ باشند که رئوس پایینی آنها به‌مختصات اول x_1 و x_2 است. ادعا می‌کنیم که

$$(1)\quad U(1,a^{\frac{1}{n}})=U(a^{\frac{1}{n}},a^{\frac{2}{n}})=\dots=U(a^{\frac{n-1}{n}},a^{\frac{n}{n}})=\sqrt[n]{a}-1$$

$$(2)\quad L(1,a^{\frac{1}{n}})=L(a^{\frac{1}{n}},a^{\frac{2}{n}})=\dots=L(a^{\frac{n-1}{n}},a^{\frac{n}{n}})=\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\sqrt[n]{a}}$$

همانطور که ازشکل ملاحظه می‌شود داریم:

$$U(1,a^{\frac{1}{n}})=a^{\frac{1}{n}}-1$$

$$U(a^{\frac{1}{n}},a^{\frac{2}{n}})=\frac{a^{\frac{2}{n}}-a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}=a^{\frac{1}{n}}-1$$

وبه‌طورکلی

$$U(a^{\frac{i}{n}},a^{\frac{i+1}{n}})=\frac{a^{\frac{i+1}{n}}-a^{\frac{i}{n}}}{a^{\frac{i}{n}}}=a^{\frac{1}{n}}-1$$

به‌همین ترتیب

$$L(۱, a^{\frac{۱}{n}}) = \frac{a^{\frac{۱}{n}} - ۱}{a^{\frac{۱}{n}}}$$

$$L(a^{\frac{۱}{n}}, a^{\frac{۲}{n}}) = \frac{a^{۲/n} - a^{\frac{۱}{n}}}{a^{\frac{۲}{n}}} = \frac{a^{\frac{۱}{n}} - ۱}{a^{\frac{۱}{n}}}$$

و به‌طور کلی

$$L(a^{\frac{i}{n}}, a^{\frac{i+۱}{n}}) = \frac{a^{\frac{i+۱}{n}} - a^{\frac{۱}{n}}}{a^{\frac{i+۱}{n}}} = \frac{a^{\frac{۱}{n}} - ۱}{a^{\frac{۱}{n}}}$$

وحکم برقرار است.

حال نتیجه زیر را بدست می‌آوریم.

مجموع کل مساحتهای مستطیلهای بالایی =

$$nU(۱, a^{\frac{۱}{n}}) = n(\sqrt[n]{a} - ۱)$$

مجموع کل مساحتهای مستطیلهای پایینی =

$$nL(۱, a^{\frac{۱}{n}}) = \frac{n(\sqrt[n]{a} - ۱)}{\sqrt[n]{a}}$$

اگر $S(۱, a)$ مساحت زیرمنحنی $y = \frac{۱}{x}$ را از نقطهٔ $x = ۱$ تا $x = a$ نشان دهد واضح است که

$$(۳) \quad \frac{n(\sqrt[n]{a} - ۱)}{\sqrt[n]{a}} \leqslant S(۱, a) \leqslant n(\sqrt[n]{a} - ۱)$$

حال فرض می‌کنیم که n بزرگتر و بزرگتر شود. دراین‌صورت تعداد مستطیلها بیشتر و بیشترشده و در نتیجه طولهای مستطیلهای بالایی و پایینی به‌هم نزدیکتر و نزدیکتر می‌شوند و درحالت‌حدی وقتی‌که مقدار n به‌بینهایت میل کند، مساحتهای کل مستطیلهای بالایی و پایینی به‌طور جداگانه به‌مقدار مساحت زیرمنحنی $y = \frac{۱}{x}$ میل خواهند کرد. به‌عبارت دیگر با استفاده از نامساوی (۳) می‌توانیم بنویسیم[۲]

$$\lim_{n\to\infty} n\,\frac{(\sqrt[n]{a} - ۱)}{\sqrt[n]{a}} \leqslant S(۱, a) \leqslant \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - ۱)$$

لذا

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt[n]{a} - ۱)}{\sqrt[n]{a}} \leqslant S(۱, a) \leqslant \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - ۱)$$

واز آنجا چون قبلا ثابت کرده‌ایم که،

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = ۱$$

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - ۱) \leqslant S(۱, a) \leqslant \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - ۱)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$S(۱, a) = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - ۱)$$

چون این حد به‌مقدار a بستگی دارد، می‌توانیم آن را به‌عنوان تابعی از a درنظر بگیریم برای اینکه این تابع را به‌ازای مقادیر $۰ < a < ۱$ نیز تعریف کنیم، ملاحظه می‌کنیم که چون $۱ < \frac{۱}{a}$ پس

$$S(۱, \tfrac{۱}{a}) = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{\tfrac{۱}{a}} - ۱)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{۱ - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}}\right) = \lim_{n\to\infty} n(۱ - \sqrt[n]{a})$$

$$= -\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - ۱) = -S(۱, a)$$

یعنی

$$S(۱, a) = -S(۱, \tfrac{۱}{a})$$

پس تابع مورد نظر به‌ازای هرعدد حقیقی مثبت a خوشتعریف است. این تابع را به‌نام «لگاریتم طبیعی» عدد a تعریف کرده وآن را با نماد $\log a$ نشان می‌دهیم. حال پس ازتعریف‌تابع لگاریتم اثبات خواص آن‌کاملا ساده خواهد بود.

قضیه ۲.۵- فرض‌کنید a و b دوعدد حقیقی مثبت دلخواه و r یك عددگویای‌دلخواه باشندآنگاه احکام زیررا خواهیم‌داشت.

(۱) $\log ۱ = ۰$

(۲) $\log(ab) = \log a + \log b$

(۳) $\log(a/b) = \log a - \log b$

$$(۴)\quad \log(a^r)=r\log a$$

اثبات:

$$(۱)\quad \log ۱=\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{۱}-۱)=۰$$

$$(۲)\quad \log(ab)=\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{ab}-۱)$$

$$=\lim_{n\to\infty}[n(\sqrt[n]{a}-۱)\sqrt[n]{b}+n(\sqrt[n]{b}-۱)]$$

$$=\lim_{n\to\infty}[n(\sqrt[n]{a}-۱)](\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b})+\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{b}-۱)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-۱)+\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{b}-۱)$$

$$=\log a+\log b$$

$$(۳)\quad ۰=\log ۱=\log(a/a)=\log\left(a\cdot\frac{۱}{a}\right)$$

$$=\log a+\log\left(\frac{۱}{a}\right)$$

لذا

$$\log(۱/a)=-\log a$$

بنابراین،

$$\log(a/b)=\log(a\cdot ۱/b)=$$

$$\log a+\log(۱/b)=\log a-\log b.$$

برای اثبات حکم (۴) فرض کنید $r=p/q$. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\log a^{\frac{۱}{q}}=\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a^{۱/q}}-۱)=\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[nq]{a}-۱)$$

با انتخاب $nq=m$ اگر $n\to\infty$ آنگاه $m\to\infty$ وخواهیم داشت[۳] $n=\frac{m}{q}$ لذا

$$\log a^{\frac{۱}{q}}=\lim_{m\to\infty}\frac{m}{q}(\sqrt[m]{a}-۱)=\frac{۱}{q}\times$$

$$\lim_{n\to\infty} m(\sqrt[m]{a}-۱)=\frac{۱}{q}\log a$$

حال بنابه‌استقراء خواهیم داشت

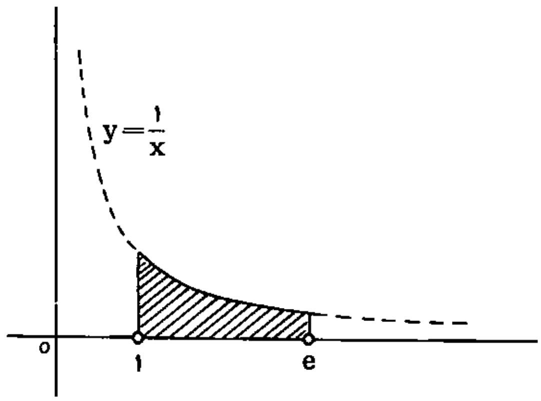
$$\log a^r=\log(a^{\frac{p}{q}})=\log(\underbrace{a^{\frac{۱}{q}}\cdot a^{\frac{۱}{q}}\cdots a^{\frac{۱}{q}}}_{\text{مرتبه}})$$

$$=p\log a^{\frac{۱}{q}}=\frac{p}{q}\log a$$

واثبات قضیه تمام است.

۶- پیدایش عدد e

جالب‌ترین نتیجه این تعریف برای لگاریتم ظهورعدد e به عنوان حد دنباله $\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$ است که همـواره درنوشتجات ازاین دنباله برای تعریف ومعرفی عدد e استفاده می‌کنند.حال می‌خواهیم این عدد را طوری پیداکنیم که لگاریتم آن برابر ۱ باشد



شکل ۳- مساحت شکل هاشورخورده برابریك است.

برای این منظور دنباله $\{(a_n)\}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که به‌ازای هر $n\in N$، خطوط قائم درنقاط

$$۱,\ a_n^{\frac{۱}{n}},\ a_n^{\frac{۲}{n}},\ \cdots,\ a_n^{\frac{n-۱}{n}},\ a_n$$

n مستطیل بالایی با مساحتهای مساوی $۱/n$ را مشخص کنند، یعنی،

به‌ازای $n=۱$، یك مستطیل با مساحت

$$U(۱,a_۱)=۱$$

به‌ازای $n=۲$، دومستطیل بامساحت

$$U(۱,a_۲^{\frac{۱}{۲}})=U(a_۲^{\frac{۱}{۲}},a_۲)=\frac{۱}{۲}$$

به‌ازای $n=n$، n مستطیل بامساحت

$$U(۱, a_n^{\frac{۱}{n}}) = U(a_n^{\frac{۱}{n}}, a_n^{\frac{۲}{n}}) = \dots =$$

$$U(a_n^{\frac{n-۱}{n}}, a_n) = \frac{۱}{n}$$

دراین‌صورت مجموع کل مساحتهای n مستطیل، به‌ازای هر n، برابر یك است $\left(n \times \frac{۱}{n} = ۱\right)$ و چون این مطلب به‌ازای هر n برقراراست، لذا وقتی‌که $n \to \infty$ تعداد مستطیلها به بینهایت میل‌کرده، وعرض مستطیلها به‌صفر میل می‌کند و در نتیجه مجموع کل مساحتهای آنها که همواره برابر ۱ است، به مساحت زیرمنحنی $y = ۱/x$ وخطوط $y = ۰$، $x = ۱$ و $x = e$ میل خواهدکرد پس e باید حد دنباله $\{a_n\}$ باشد. چون به‌ازای هر n، $U(۱, a_n^{\frac{۱}{n}}) = ۱/n$، لذا بنا به مساحت‌مستطیل خواهیم داشت

$$(a_n^{\frac{۱}{n}} - ۱) = ۱/n$$

که ازآن نتیجه می‌شود:

$$a_n = \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n$$

لذا،

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (۱ + ۱/n)^n$$

ثابت می‌کنیم‌که حد این دنباله با حد دنباله $\{S_n\}$ که درآن

$$S_n = ۱ + ۱/۱! + ۱/۲! + \dots + ۱/n!$$

برابراست. ابتدا نشان‌می‌دهیم‌که دنباله $\{S_n\}$ یك‌دنباله‌صعودی وکرانداراست. به‌ازای همه مقادیرn داریم:

$$S_n = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲.۳} + \frac{۱}{۲.۳.۴} + \dots + \frac{۱}{۲.۳.۴\dots n}$$

$$\leqslant + ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \dots + \frac{۱}{۲^{n-۱}}$$

$$= ۱ + \frac{۱ - ۱/۲^n}{۱ - \frac{۱}{۲}} < ۳$$

لذا S_nها دارای‌کران بالای ۳ هستند. ازطرف دیگر به‌ازای هر n،

$$S_n = ۱ + ۱/۱! + ۱/۲! + \dots + \frac{۱}{n!}$$

$$\leqslant ۱ + ۱/۱! + ۱/۲! + \dots + ۱/n! + ۱/(n+۱)! = S_{n+۱}$$

یعنی به‌ازای هر n،

$$S_n \leqslant S_{n+۱}$$

بنابراین، دنباله $\{S_n\}$ حد دارد. (هردنبالهٔ صعودی و ازبالا محدود حد دارد.)

حال می‌ماند نشان دهیم که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

بنابه‌قضیه دوجمله‌ای می‌توان نوشت

$$\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n = ۱ + n\frac{۱}{n} + \frac{n(n-۱)}{۲}\frac{۱}{n^۲} + \dots + \frac{n(n-۱)(n-۲)\dots ۲.۱}{n!}\frac{۱}{n^n}$$

$$= ۱ + ۱ + ۱/۲!\left(۱ - \frac{۱}{n}\right) + \dots + ۱/n!\left(۱ - \frac{۱}{n}\right)\left(۱ - \frac{۲}{n}\right)\dots\left(۱ - \frac{n-۱}{n}\right)$$

ازاین تساوی بلافاصله ملاحظه می‌کنیم‌که $a_n \leqslant S_n < ۳$، یعنی $\{a_n\}$ ازبالاکرانداراست. بعلاوه چون

$$a_{n+۱} = ۱ + ۱ + ۱/۲!\left(۱ - \frac{۱}{n+۱}\right) + \dots + \frac{۱}{n!}\left(۱ - \frac{n}{n+۱}\right)\left(۱ - \frac{۲}{n+۱}\right)\dots\left(۱ - \frac{n-۱}{n+۱}\right) + \frac{۱}{(n+۱)!}\left(۱ - \frac{۱}{n+۱}\right)\left(۱ - \frac{۲}{n+۱}\right)\dots\left(۱ - \frac{n}{n+۱}\right)$$

پس $a_{n+۱}$ با قراردادن عوامل بزرگتر

$\left(۱ - \frac{۲}{n+۱}\right)$، $\left(۱ - \frac{۳}{n+۱}\right)$ و ... $\left(۱ - \frac{n-۱}{n+۱}\right)$

$\left(۱ - \frac{۱}{n+۱}\right)$

به‌جای عوامل

$\left(۱ - \frac{۱}{n}\right)$، $\left(۱ - \frac{۲}{n}\right)$ ... $\left(۱ - \frac{n-۱}{n}\right)$

در a_n وافزودن جمله شامل $1/(n+1)!$ برآن حاصل می‌شود واین مطلب نشان می‌دهد که به‌ازای هر n

$$a_n \leqslant a_{n+1}$$

یعنی $\{a_n\}$ یك دنباله صعودی است.

لذا $\{a_n\}$ یك دنباله صعودی واز بالا کراندار است ولهذا، دارای حد است. پس فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. ثابت می‌کنیم که $a=e$. برای این منظور توجه می‌کنیم که به‌ازای $m>n$

$$a_m = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)+\dots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)$$

$$>1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$$

یعنی

$$a_m>1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)$$

حال اگر n را ثابت نگه‌داشته و m را به بینهایت میل‌دهیم، خواهیم داشت

$$\lim_{m\to\infty} a_m \geqslant \lim_{m\to\infty}\left[1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)\right]$$

لذا

$$a \geqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

یعنی به‌ازای هر n،

$$a \geqslant S_n$$

چون قبلا ثابت کردیم که به‌ازای هر n، $S_n \geqslant a_n$، پس به‌ازای هر n،

$$a_n \leqslant S_n \leqslant a$$

لذا

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} S_n \leqslant a$$

یا

$$a \leqslant e \leqslant a$$

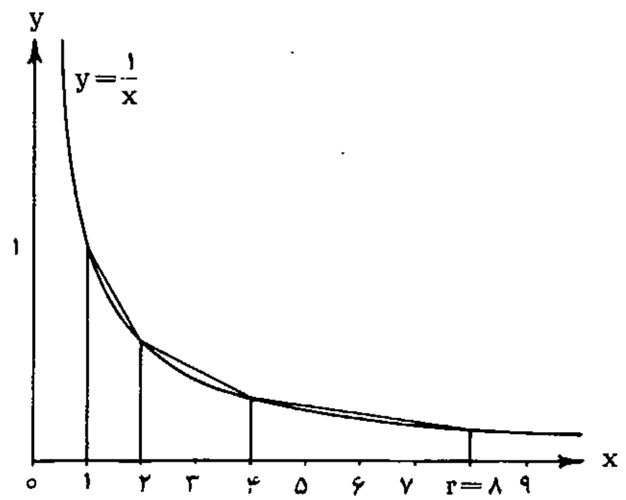
که ازآنجا $a=e$ و حکم تمام است. ثابت می‌شود e عددی اصم است ومقدار آن ...۲/۷۱۸۲۸۱ می‌باشد.

همانطور که قبلا ملاحظه کردیم دنباله $\{a_n\}$ به‌روش طبیعی با استفاده از تقریب مساحت زیرمنحنی $y=1/x$ از روی مساحت مستطیلهای بالایی بدست آمد. ظهور دنباله (S_n) به بسط ماکلورن معکوس تابع لگاریتم یعنی تابع نمائی ارتباط دارد که بعداً این تابع را معرفی خواهیم کرد. دراین قسمت‌از مقاله دنباله سومی با همان حد e را معرفی می‌کنیم که مثل دنباله $\{a_n\}$ به‌روش طبیعی ازمساحت‌زیرمنحنی $y=1/x$ بین $x=1$ و $x=e$ حاصل می‌شود.

برای این منظورابتدا مثل روش مستطیلهای بالایی و پایینی به‌آسانی می‌توان نشان دادکه خطوط قائم

$$1,\ b^{1/n},\ b^{2/n},\ \dots\ b^{\frac{n-1}{n}},\ b,\quad (b>1)$$

ذوزنقه‌هایی با مساحتهای مساوی را مشخص می‌کنند. (شکل۴) سپس به‌ازای هر n، دنباله $\{b_n\}$ را طوری تعریف می‌کنیم که n ذوزنقه با قاعده‌های $2,\ b_n^{\frac{1}{n}},\ b_n^{\frac{2}{n}},\ \dots,\ b_n^{\frac{n-1}{n}},\ b_n$



شکل ۴- تقریب مساحت زیرمنحنی به‌کمك ذوزنقه‌ها

مساحتهای مساوی با $\frac{1}{n}$ را تشکیل دهند. آنگاه بنا به‌دستور مساحت یك ذوزنقه با قاعده‌های $b_n^{\frac{1}{n}}$ خواهیم داشت

$$\frac{1}{2}\left((b_n^{\frac{1}{n}}-1)\right)\left(1+\frac{1}{b_n^{\frac{1}{n}}}\right)=\frac{1}{n}$$

که با حل این معادله برحسب b_n نتیجه می‌شود

$$b_n=\left(\frac{1+\sqrt{1+n^2}}{n}\right)^n$$

نشان می‌دهیم که

$$\lim_{n\to\infty} b_n=e$$

برای این کارابتدا توجه می‌کنیم که به‌ازای هر n،

$$(*)\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant\left(\frac{1+\sqrt{1+n^2}}{n}\right)^n\leqslant \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

نامساوی طرف چپ بدیهی است. برای اثبات درستی نامساوی طرف راست خواهیم داشت

$$\left(\frac{1+\sqrt{1+n^2}}{n}\right)^n\leqslant\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \Longrightarrow$$

$$\frac{1+\sqrt{1+n^2}}{n}\leqslant\frac{n}{n-1}\Longrightarrow 1+\sqrt{1+n^2}\leqslant \frac{n^2}{n-1}\Longrightarrow\sqrt{1+n^2}\leqslant\frac{n^2-n+1}{n-1}$$

$$\Longrightarrow (1+n^2)(n-1)^2\leqslant(n^2-n+1)^2$$

با ساده‌کردن طرفین نامساوی نتیجه $n^2\geqslant 0$ را بدست می‌آوریم که همواره برقراراست به آسانی می‌توان نشان داد که این نامساویها برگشت‌پذیر بوده و نهایتاً نامساوی $(*)$ برقرارخواهد بود.

ازطرف دیگر

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\times \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=e\cdot 1=e$$

لذا، بنابرقضیه فشار، از (۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{1+n^2}}{n}\right)^n=e$$

وجود این دنباله‌ها همگی حاکی ازاین حقیقت‌اندکه عدد e به عنوان جزء لاینفك تابع لگاریتمی معکوس آن یعنی تابع‌نمائی محسوب شده وازاهمیت قابل‌ملاحظه‌ای برخورداراست.

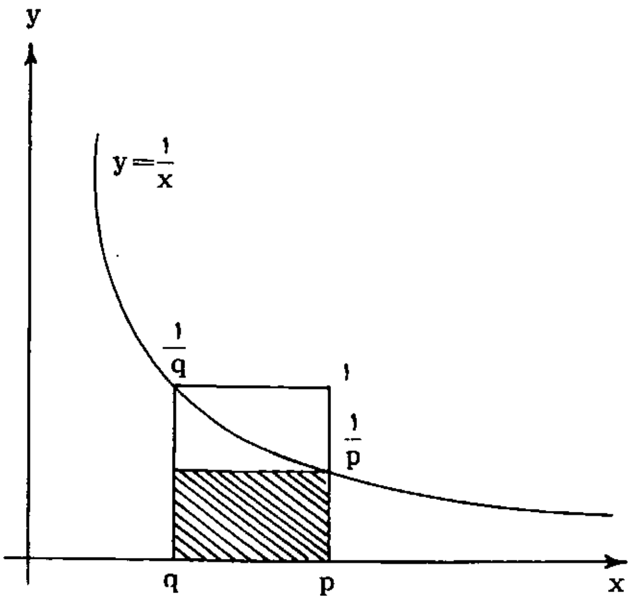
۷- پیوستگی ویکنوائی تابع لگاریتم

اساسی‌ترین مفهومی که بواسطهٔ آن بتوان وارون تابع لگاریتم را پیداکرد، مفهوم پیوستگی است. البته بدیهی‌است که برای وجود تابع وارون اثبات یکنوائی تابع نیزضروری است. این دومطلب که کلید اصلی رسیدن به‌تابع نمائی هستند، توسط دونامساوی ساده موسوم به نامساویهای لگاریتم اثبات می‌شوند.

لم ۷-۱. نامساویهای لگاریتم: اگر p و q دوعدد مثبت حقیقی دلخواهی باشند و $p\geqslant q$، آنگاه

$$(**)\quad \frac{p-q}{p}\leqslant\log\frac{p}{q}\leqslant\frac{p-q}{q}$$

اثبات: فرض‌کنیم منحنی نمایش $y=\frac{1}{x}$ در صفحه xoy داده شده است (شکل ۵) اگرp و q دوعدد حقیقی دلخواه باشند، آنگاه بنا به‌آنچه دربخش اول دیدیم.



شکل ۵- مساحت زیرمنحنی بین دومستطیل بالایی وپایینی

مساحت مستطیل بالایی ⩽ (مساحت زیر منحنی $y=\frac{1}{x}$ از $x=q$ تا $x=p$) ⩽ مساحت مستطیل پایینی

با نماد ریاضی می‌توان نوشت

$$L(q,\ p)\leqslant \log p-\log q\leqslant U(q,\ p)$$

یا

$$\frac{p-q}{p}\leqslant \log\frac{p}{q}\leqslant\frac{p-q}{q}$$

بسادگی می‌توان نشان دادکه اگر $q>p$ بازهم این نامساویها برقرارند. (نامساویها را برای $\log\frac{q}{p}$ بنویسید و آنها را در ۱ جذب کنید).

قضیه ۲.۷- تابع لگاریتم یك تابع یك به‌یك، پیوسته وصعودی است.

اثبات: اثبات یك به‌یك وصعودی بودن با توجه به نامساوی (**) کاملاً بدیهی است. برای اثبات پیوستگی تابع لگاریتم درنقطه دلخواه x_0 توجه می‌کنیم که

$$\frac{x-x_0}{x}\leqslant \log x-\log x_0\leqslant\frac{x-x_0}{x_0}$$

یا به‌عبارت دیگر،

$$\frac{x-x_0}{x}+\log x_0\leqslant \log x\leqslant\frac{x-x_0}{x_0}+\log x_0$$

که با حدگیری ازاین نامساوی‌ها وقتی که $x\to x_0$ خواهیم داشت.

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{x-x_0}{x}+\log x_0\right]\leqslant\lim_{x\to x_0}\log x$$

$$\leqslant\lim_{x\to x_0}\left[\frac{x-x_0}{x}+\log x\right]$$

$$\log x_0\leqslant\lim_{x\to x_0}\log x\leqslant\log x_0$$

یا

$$\lim_{x\to x_0}\log x=\log x_0$$

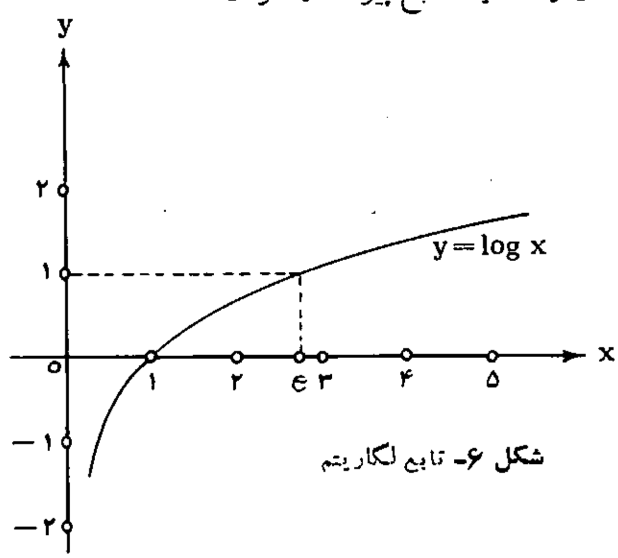
وحکم برقراراست.

۸- تابع معکوس لگاریتم. تابع نمائی

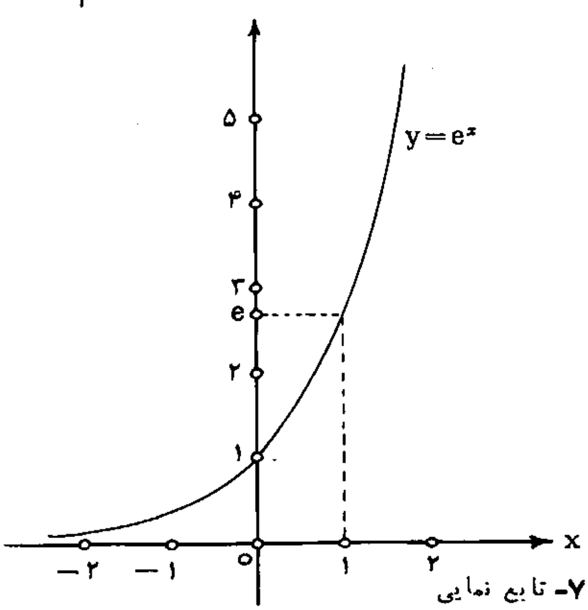
از رابطه $\log e=1$ نتیجه می‌شودکه به‌ازای هر عدد گویای α،

$$(1.8)\quad \log(e^{\alpha})=\alpha\log e=\alpha$$

این مطلب نشان می‌دهدکه هرعددگویای α به‌ازای یك عدد مثبت x، به‌عنوان یك مقدارازتابع $\log x$ ظاهر میشود. چون $\log x$ پیوسته است، لذا هرمقداربین دوعددگویا، یعنی تمام اعداد حقیقی را اختیارمی‌کند. به‌عبارت دیگر وقتی که متغیر x برروی همه اعداد حقیقی مثبت تغییرمیکند، $y=\log x$ روی همه اعداد حقیقی تغییر می‌کند. چون $\log x$ صعودی است، پس به‌ازای هرعدد حقیقی y دقیقاً یك مقدارمثبت x وجود دارد به‌قسمی‌که $\log x=y$. با حل x ازمعادله $y=\log x$ به تابع وارون لگاریتم دست پیدا می‌کنیم‌که می‌توان آن را به صورت $x=E(y)$ نشان داد. حال می‌دانیم‌که $E(y)$ (شکل ۶) به‌ازای همه مقادیر y تعریف شده وهمه مقادیر آن مثبت است وضمناً یك تابع پیوسته وصعودی است.



شکل ۶- تابع لگاریتم



شکل ۷- تابع نمایی

چون معادلات $y=\log x$ و $x=E(y)$ رابطه مشابهی‌را بین x و y نشان می‌دهند، می‌توانیم معادله $\alpha=\log(e^{\alpha})$ را که به‌ازای عددگویای α معتبراست، به‌صورت

$$E(\alpha)=e^{\alpha} \quad (۲۰۸)$$

نیز بنویسیم.

ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هرعددگویای α مقدار $E(\alpha)$ توان αام عدد e است. برای عدد گویای $\alpha=m/n$ توان e^{α} مستقیماً به‌صورت $\sqrt[n]{e^{m}}$ تعریف می‌شود. برای عدد اصم α عبارت e^{α} بطورکاملاطبیعی α را به‌عنوان‌حد یك‌دنباله با جملات گویای α_n نمایش‌میدهد قرار می‌دهیم ($e^{\alpha}=\lim_{n\to\infty}(e^{\alpha_n})$). چون $e^{\alpha_n}=E(\alpha_n)$ وعلاوه براین تابع $E(y)$ بطورپیوسته به y بستگی دارد، می‌توانیم مطمئن شویم که حد e^{α_n} موجود بوده و مستقل از دنباله خاص مورداستفاده برای تقریب α برابر $E(\alpha)$ است. این مطلب ثابت می‌کندکه معادله $E(\alpha)=e^{\alpha}$ به ازای اعداد اصم α نیز برقراراست. حال به‌ازای تمام مقادیر α می‌توانیم به‌جای $E(\alpha)$ بنویسیم e^{α}. دراین‌صورت e^{x} را تابع نمائی می‌گوییم. این تابع به‌ازای تمام مقادیرx تعریف شده، یك تابع پیوسته بوده وهمه جا مثبت است.

چون معادلات $y=\log x$ و $x=e^{y}$ به‌دوطریق مختلف رابطه مشابهی را بین اعداد x و y بیان می‌کنند، ملاحظه می‌کنیم که $\log x$ «لگاریتم‌طبیعی» x. (که دراینجا به‌صورت حد یك دنباله تعریف شد) به‌جای اصطلاح لگاریتم درپایه e به‌کارمی‌رود. یعنی $\log x$ نمای توانی از e است‌که مقدارآن برابر x است یا

$$e^{\log x}=x \quad (۳۰۸)$$

می‌توان نوشت

$$\log x=\log_e^x$$

ـ به‌همین‌ترتیب، $x=e^{y}$ عددی است‌که لگاریتم آن برابرy است. یا

$$\log e^{y}=y \quad (۴۰۸)$$

۹ـ تعریف توانهای دلخواه اعداد مثبت

حال توانهای دلخواه هرعدد مثبت را می‌توان برحسب توابع لگاریتمی وتوابع نمائی بیان‌کرد.

به‌ازای هرعددگویای α وهرعدد مثبت x رابطهٔ زیر

$$\log(x^{\alpha})=\alpha\log x$$

برقراراست. این رابطه را به‌صورت

$$x^{\alpha}=e^{\alpha\log x}$$

می‌نویسیم.

به‌ازای اعداد اصم α بازهم α را به عنوان حد یك دنباله با جملات‌گویای α_n نمایش می‌دهیم وتعریف می‌کنیم:

$$x^{\alpha}=\lim_{n\to\infty}x^{\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\alpha_n\log x}$$

پیوستگی تابع نمائی بازهم وجود حد را ایجاب می‌کندکه مقدارآن برابراست با

$$e^{\alpha\log x}$$

پس معادله

$$x^{\alpha}=e^{\alpha\log x} \quad (۱۰۹)$$

کلا به‌ازای هر α وهرعدد مثبت x برقراراست.

زیرنویسها

۱ـ ممکن است تصورشودکه اصطلاح «لگاریتم طبیعی» برای لگاریتم اعداد درپایه ۱۰ به‌کارمی‌رود. برخلاف تصور، به‌لحاظ تاریخی، اولین جدول لگاریتم‌که توسط شخص نپر درسال۱۶۱۴ منتشر شده است، لگاریتم اعداد را درمبنای e نشان می‌دهد و لگاریتم اعداد درمبنای ۱۰ بعداً توسط بریگز به‌خاطرسهولتهای محاسبه‌ای درپایه ۱۰ محاسبه شده است.

۲ـ واضح است که مجموع مساحتهای بالایی با افزایش n کاهش می‌یابد ومجموع مساحتهای پایینی با افزایش n زیاد می‌شود. به‌عبارت دیگر دنبالهٔ

$$\{n(\sqrt[n]{a}-1)\}$$

نزولی و دنبالهٔ

$$\left\{\frac{n(\sqrt[n]{a}-1)}{\sqrt[n]{a}}\right\}$$

صعودی است اما هردوی اینها به‌ترتیب ازپایین وبالا به$S(1,a)$ محدودند پس حد دارند.

۳ـ دراینجا به‌طورضمنی ازخواص زیردنباله‌ها استفاده شده است اگر $m=nq$ دراین‌صورت دنبالهٔ

$$\{m(\sqrt[m]{a}-1)\}$$

زیردنبالهٔ

$$\{n(\sqrt[n]{a}-1)\}$$

است می‌دانیم اگر دنباله‌ای همگرا به α باشد هر زیردنباله‌آنهم به α همگراست.

منابع

1- A natural approach to e , by ROSEMARY SCHMALZ. The Mathematical Gazette, volume 74 :number 470 Dec. 1990

2- Introduction to Calculus and Analysis Volume 1 1989,byRichard Courant & Fritz John

۳ـ حساب دیفرانسیل وانتگرال وهندسه تحلیلی جلد اول (ویرایش هفتم) جورج. توماس وراس فینی.

«منطق ریاضی» یا «نظریه مجموعه‌ها»؟

دکتر اسفندیار اسلامی
بخش ریاضی-دانشگاه شهید باهنر کرمان

در این مقاله سعی می‌شود دربارهٔ دوموضوع منطق‌ریاضی و نظریه مجموعه‌ها وارتباط تنگاتنگ آنها به‌اختصارمطالبی گفته شود. گرچه اهمیت مطالعه آنها به‌عنوان قسمتهای اصلی مبانی ریاضیات موردتوافق‌همه علاقمندان به‌ریاضی است، ولی‌لزوم یا عدم‌لزوم دانستن هریك از آنها درمطالعهٔ شاخه‌های مختلف ریاضیات ویا تدریس ریاضیات درسطوح گوناگون مورد مناقشه بوده و نتایج حاصل ازاین مناقشات مثبت ارزیابی نمی‌شود. دراین‌جا ابتدا به‌ذکرتاریخچه‌ای کوتاه از وجود و رشدآنها می‌پردازیم.

۱ـ تاریخچه و کلیات

هرزمان که صحبت ازمنطق به‌طورعام پیش‌می‌آید نام ارسطو تداعی می‌گردد. ارسطو (۳۲۲–۳۸۴ ق م) معلم اول، مصنف منطق وکاشف قسمت اعظم قوانین منطق است. البته قبل از ارسطوهم قوانین و ضوابطی دربحث منطق وجود داشته است، چنانکه ارسطو خود می‌گوید:

«پیشینیان، درباب قیاس جزقوانین مجمله و ضوابط غیرمفصله چیزی برای ما به ارث نگذاشتند. استخراج ضروب و شروط وتفصیل احکام آن وبیان وتمیزمنتج وعمیقش امری است‌که براثر رنج فراوان وکوشش بسیارما پیدایش یافته است. پس اگرکسی ازآیندگان زیادتی درآن بیند اصلاح کند.» [۱]

درهمان مرجع درباب تعاریف منطق مثلاً ازابن‌سینا آمده است:

«منطق، علم یا صناعتی است که درآن طرق مختلف انتقال ذهن ازمعلوم به‌مجهول آموخته می‌شود، و انتقالات صحیح از انتقالات غیرصحیح ممتازمی‌گردد. به‌عبارت دیگر منطق علمی است‌که‌کیفیت کشف مجهولات را به‌وسیله معلومات بیان می‌کند وطرق صحیح استخراج مجهول را از معلوم باز می‌نماید وبه‌تعبیرساده‌تر علمی است‌که طریق فکرصحیح (یعنی تعریف صحیح واستدلال صحیح) را می‌آموزد.»

با مطالعهٔ تعاریفی‌که ازمنطق صورت گرفته، می‌توان به ساده‌ترین ومعروفترین آنها دست یافت.

منطق، تجزیه وتحلیل روشهای استدلال است.

یك استدلال دنباله‌ای ازجملات است‌که یکی ازآنها، **حکم** (یا **نتیجه**) گفته می‌شود که ازبقیه (**مفروضات**) **استنتاج** می‌شود یا گفته می‌شود **نتیجه منطقی** از بقیه است. به عنوان مثال:

ارسطویك شاعربود یا سقراط یك داستان‌نویس بود.

ارسطوشاعرنبود.

بنابراین، سقراط یك داستان‌نویس بود.

که این استدلال **معتبر** ولی نتیجه نادرست است. به مثالی دیگر توجه می‌کنیم:

بعضی ازفیلسوفان پیروافلاطون هستند.

بعضی از ریاضیدانان فیلسوف هستند.

بنابراین بعضی از ریاضیدانان پیروافلاطون هستند.

ملاحظه می‌شود که استدلال فوق **نامعتبر** است. درهر صورت اعتباریك استدلال و درست بودن نتیجه، دومقولهٔ جدا ازهم هستند.

منطق ازنظرتاریخی راهی بس طولانی پیموده است. برای شناخت تاریخ پیشرفت وتحول‌منطق باید منطق را دردوره‌های مختلف‌که یك نوع آن تقسیم‌بندی زیراست مطالعه نمود:

۱ـ منطق قدیم ۲ـ منطق هندی ۳ـ منطق چینی ۴ـ منطق عربی-اسلامی ۵ـ منطق قرون وسطی ۶ـ منطق بین قرون وسطی وجدید ۷ـ منطق جدید.

درهر دوره مخالفان و موافقان زیادی وجود داشته‌اند. تعاریف مختلفی ازمنطق ارائه شده‌است واصولا مهمترین بحث منطق این بوده وهست‌که «چه چیز ازچه چیزنتیجه می‌شود؟» بدون اینکه وارد بحث منطق در دوره‌های مختلف شویم، به اصل مطلب می‌پردازیم.

منطق جدیدکه ازآن به‌عنوان منطق نمادی یا منطق‌ریاضی هم نام برده می‌شود،آخرین صحنه از توسعهٔ نظمی است که مبنای‌آن مدیون ارسطواست. این منطق همانند منطقهای قبل، به‌عنوان وسیله‌ای برای‌آزمایش اعتبار استدلالها ومشخصاً استدلهای قیاسی است. شروع منطق نمادی با انتشارمقاله‌ای ازفرگه (۱۹۲۵–۱۸۴۸) درسال ۱۸۷۹ بود. درآن مقاله برای اولین باریك چاره‌اندیشی جامع درمورد نمادی‌کردن ایده‌های عمومیت و وجود صورت گرفت. منطقهای نمادی، زبانهایی را موردبررسی قرارمی‌دهندکه هدف اصلی‌آنها نمادی‌کردن استدلالهایی است‌که نه فقط در ریاضیات بلکه در زندگی‌روزمره باآنها مواجه هستیم. استدلال درریاضیات باآنچه در زندگی روزمره است یکی نیست. معمولا در ریاضیات، منطق دوارزشی‌به‌کاربرده می‌شود، درصورتی‌که‌این منطق برای استدلال در زندگی روزمره کافی نیست. انواع مختلفی ازمنطق برای موردبحث قراردادن استدلالهای انسانی به‌وجودآمده‌اندکه بحث درموردآنها را به‌مقالاتی دیگر وامی‌گذاریم. درهرصورت آنچه‌که منطق مدرن را ازمنطق‌قدیم وسنتی متمایزمی‌کند فقط تأکیدآن برروشهای نمادی‌وروشهای ریاضی نیست، بلکه توان صوری بسیار زیادآن وکاربرد وسیعش می‌باشد.

بد نیست بدانیدکه مباحث‌گوناگون منطق ازلابلای‌مشکلات وکشفیات جدید درجریان تاریخی پیچیده به‌وجودآمده‌اند. کراسلی [۲] این تاریخ را به‌صورت دوجریان مختلف‌که هر دو دوره‌هایی طولانی هستند درنظرمی‌گیرد.

۱ـ تاریخ استنتاج صوری‌که با ارسطو، اقلیدس وافراد دیگری ازآن دوران شروع شد و ۲ـ تاریخ‌آنالیزریاضی‌که زمان‌آغازآن به‌ارشمیدس بازمی‌گردد.

این دوجریان برای زمانی طولانی (۱۷۰۰–۱۶۰۰) جدا

ازهم تکامل یافتند. دراین زمان با نیوتن، لایب‌نیتز و کشف حساب دیفرانسیل وانتگرال توسط آنها مواجه می‌شویم که بالاخره ریاضیات ومنطق را به هم رساندند. این دوجریان در قرن‌نوزدهم (حدود ۱۸۵۹) به‌تدریج به‌یکدیگر نزدیك شدند، یعنی زمانی که منطق‌دانهایی نظیر بول وفرگه کوشیدند تا به آنچه در واقع استنتاج صوری بود، صورتی مشخص ونهایی بدهند، این درحالی بودکه ارسطو تا اندازه‌ای قواعد استنتاج را منتها در زبان‌طبیعی، صریحاً بیان‌کرده بود. بول‌می‌خواست ازاین هم فراتر برود و دستگاهی‌تماماً نمادی وضع‌کرد. فرگه این دستگاه راگسترش داد وبه‌حساب محمولات رسیدکه‌بعدها معلوم شد یك پایه منطقی کافی برای تمام ریاضیات امروزی است.

درهمان حال درمبحث آنالیز برای مدت طولانی، حدود دو قرن، مجادلاتی پیرامون مبانی ومفاهیمی‌که نیوتن معرفی‌کرد مانند مشتق و انتگرال جریان داشت، زیرا او دربارهٔ بینهایت کوچکها سخن‌گفته بود. عده زیادی‌اعتقاد به‌این مفاهیم‌نداشتند وفکرمی‌کردندکه آنها مفاهیمی متناقض هستندکه البته چنین بودند، مع‌ذلك نیوتن جوابهای درستی به دست‌آورده بود و برای آنکه معلوم شود چراجوابها درست‌هستند،کاری‌توضیحی درباره مفاهیم انجام گرفت. از زمره کسانی که وظیفه این روشنگری را به‌عهده داشتند می‌توان ازبولتسانو، ددکیند و کانتورنام برد. این ریاضیدانان متوجه شدندکه بررسی همه جانبهٔ مشتق‌وانتگرال‌مستلزم درنظرگرفتن **مجموعه‌های‌نامتناهی** است وبایدآنها را به‌گونهٔ بسیار دقیقی موردبررسی قرار داد. راهی برای‌اجتناب ازمجموعه‌های‌نامتناهی وجودنداشت. این مطلب سرمنشأ **نظریه مجموعه‌ها** شد.

مفهوم **مجموعه** بسیاراساسی و طبیعی است و از زمانهای قدیم درنوشته‌های ریاضی به کاربرده شده است. اما نظریه مجموعه‌های مجردکه مجموعه‌ها را به‌عنوان اشیاء یك نظریه خاص موردمطالعه قرارمی‌دهد، به‌طورکلی به‌وسیلهٔ جرج‌کانتور (۱۹۱۸-۱۸۴۵)بنیان‌گذاشته شد. او درمدت‌کوتاهی ازسال ۱۸۷۴ تا ۱۸۹۷ میلادی علیرغم مخالفت بعضی ریاضیدانان معاصرش، این نظریه را توسعه داد وتکامل بخشید. باگذشت این قرن نظریه مجموعه‌ها به‌عنوان یك شاخهٔ خاص ومهم از ریاضیات شناخته شد. سرعت توسعه بعدی این نظریه، چه از نظرمبانی وچه ازنظرکاربردی را می‌توان ازجملهٔ زیرکه در ابتدای قابل فهم‌ترین دائرةالمعارف معاصر ریاضی درج شده است، دریافت: «حالا دیگر برای همه کاملاً شناخته‌شده است که تقریباً تمامی ریاضیات رایج می‌تواند ازیك منبع ناشی شود وآن نظریه مجموعه‌هاست.»

نظریه مجموعه‌ها و منطق رابطه‌ای بسیار نزدیك دارند. منطق‌گرایی ازنوع برتراندراسل‌که ریاضیات را به‌عنوان یك توسیع ماهرانهٔ منطق درنظرمی‌گیرد، نظریه مجموعه‌ها را به عنوان‌یك زنجیرپیوند دهنده‌مطرح می‌نماید. نظریه‌مجموعه‌های مجردکه درآن ماهیت اعضاء یك مجموعه مشخص نیست از نظریه مجموعه‌های نقطه‌ای‌که درآن اعضاء مجموعه‌ها اعداد (حقیقی یا مختلط)، نقاط یا دستگاههایی ازآنها هستند فرق دارد. نظریه دوم، اساسی برای نظریه توابع، توپولوژی (از دیدگاه نظریه مجموعه‌ها) وسایر رشته‌های ریاضی‌است.

برخی ازانگیزه‌های اولیه دربسط نظریه مجموعه‌ها از فلسفه‌گرفته شده، خصوصاً ازمسئله نامتناهی واقعی همچنانکه نهایتاً دراثری‌که پس ازمرگ برناردبولتسانو در ۱۸۵۱منتشر شد، آمده است. ولی انگیزه ناگهانی به‌طور قویتر از مسائل خاصی درنظریه توابع حقیقی‌که توسط کانتور، هرمن‌هانکل، ح.ج. س اسمیت و دیگران‌درسالهای ۱۸۷۰ مطرح شده‌ناشی شده است. در واقع‌کانتوربه طریقه کاملاً غیرمستقیم به مطالعه نظریه مجموعه‌ها کشانده شد. او درحال مطالعهٔ سریهای‌مثلثاتی (فوریه) ازنوع

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots$$

بود. این چنین سریهایی درقرن نوزدهم به‌عنوان جوابهای معادلات دیفرانسیلی‌که مسائل‌فیزیکی را به‌نمایش می‌گذاشتند موردمطالعه قرارمی‌گرفتند. کار کانتور روی سریهای فوریه او را به‌بررسی‌مجموعه‌هایی مختلف ازاعداد حقیقی‌هدایت نمود. **درسال۱۸۷۱** اوتشخیص‌دادکه عملگر خاصی روی‌مجموعه‌هایی ازاعداد حقیقی می‌تواند بیشترازتعداد مرتبه‌ای متناهی به‌کار برده شود (عملگرساختن نقاط حدی). چنانچه با مجموعهٔ P_0 شروع‌کنیم می‌توانیم

$$\ldots, P_{\omega+\omega}, \ldots, P_{\omega+1}, P_\omega, \ldots, P_1, P_0$$

را بسازیم. در دسامبر ۱۸۷۳کانتورثابت‌کردکه مجموعهٔ‌اعداد حقیقی نمی‌تواند درتناظریك به‌یك با اعداد صحیح باشد. در این‌جا از ذکرتاریخ بیشتر دراین مورد خودداری‌می‌نمائیم.

ازسال۱۸۸۲ تا ۱۸۹۵ کانتورتعریفهای‌مختلفی برای‌مفهوم یك مجموعه ارائه دادکه آخرین آنها این است: «یك‌مجموعه، گردآیه‌ای دریك‌کل ازاشیاء **مشخص و متمایز** ازنظرشعوری یا فکری است. اشیاء، اعضاء مجموعه نامیده می‌شوند».

اصطلاح مشخص بدین معنی است که برای یک مجموعهٔ داده شده باید حداقل به‌طور صریح تشخیص داده شود که چه اشیائی عضو آن مجموعه هستند و چه اشیائی عضو آن مجموعه نیستند. اصطلاح متمایز یعنی آنکه هر دو عضو از یک مجموعه متفاوت هستند، بر خلاف اعضاء یک دنباله که ممکن است یک عضو مکرراً ظاهر شده باشد. و اما مادهٔ عمدهٔ تشکیل دهندهٔ این تعریف «گردآیه‌ای در یک کل» است که به‌سختی می‌توان آن را تکرار بیهوده‌ای از کلمه «مجموعه» دانست. گرچه تا سال ۱۸۹۵ مجموعه هنوز به‌عنوان مفهومی خود بخود واضح ظاهر می‌شد، ولی چند سال بعد آشکار گشت که این تعریف جای خود را به مترادفهای منطقی از قبیل آنچه سزار بورالی فورتی و برتراند راسل عنوان کرده‌اند می‌دهد. بنابراین توسعه نظریه مجموعه‌ها بر اساس تعریف کانتور معقول به‌نظر نمی‌آید.

به‌طور کلی سه طریق برای علاج این وضعیت پیش‌بینی شده است که همهٔ آنها به‌طور مستقل و تقریباً هم‌زمان (سال ۱۹۰۸) ارائه گشته‌اند. ریشه‌ای‌ترین آنها مربوط به شهودگرایی خصوصاً شهودگرایی جدید از ل. ی. ج. براور و پیروانش می‌باشد که مقدار کمی از نظریه مجموعه‌ها بر این نظر استوار است. طریق دیگر نظریه‌ای است که توسط راسل، و. کوین و عده‌ای دیگر بنام نظریهٔ نوع مطرح شد که این به‌طور کلی با توجه به ماهیت ریاضیات با منطق‌گرایی تلفیق شده است. دیدگاه سوم محدودیت اصل موضوعی مفهوم مجموعه است که جانشین تعریف مستقیم می‌شود.

در حدود اواخر قرن نوزدهم، کوششهایی انجام شد که اصول نظریه مجموعه‌ها را به عنوان اصول منطق که همانا حقایقی خودآشکار از تفکر قیاسی هستند به نمایش بگذارد. بیشترین کارها در این جهت به‌وسیله گوتلاب فرگه انجام گرفت. فرگه یک ریاضیدان تعلیم یافته آلمانی بود که هم در ریاضیات وهم در فلسفه کار می‌کرد. در سالهای ۱۹۰۳-۱۸۹۳ او دو جلد از کارهای خودش را در دست انتشار داشت که در آنها نشان می‌داد چگونه تمام ریاضی می‌تواند از اصولی که او آنها را به عنوان اصول منطقی در نظر گرفته بود نشأت بگیرد. اما درست در زمانی که (حدود ۱۹۰۳) قرار بود جلد دوم کارش منتشر شود، برتراند راسل به فرگه از تناقضی خبرداد که از اصول او قابل استنتاج بود. این تناقض معماگونه به پارادکس راسل مشهور است (به‌شکل نمادی، بر طبق اصول فرگه هرگاه $p(x)$ عبارت از آن باشد که x در خاصیت p صدق می‌کند، آنگاه

$$A=\{x|p(x)\}$$

یک مجموعه است. راسل می‌گفت اگر چنین است پس

$$B=\{X|X\notin X\}$$

باید مجموعه باشد و در نتیجه باید جواب دهیم آیا $B\in B$ یا $B\notin B$. اگر $B\in B$، آنگاه $B\notin B$ و اگر $B\notin B$ آنگاه $B\in B$ که درهرصورت تناقض است).

پارادکس راسل اثر مهیبی روی عقایدی داشت که در آن زمان درمورد مبانی ریاضی مطرح بود. نمی‌توان مطمئن بود که آن اولین پارادکس است که در نظریه مجموعه‌ها به آن توجه شده است. خود کانتور مشاهده کرده بود که بعضی گردایه‌ها از قبیل گردایهٔ تمام مجموعه‌ها، باید به عنوان یک «کلیت ناسازگار» در مقایسه با «کلیتهای سازگار» مهار شدنی از قبیل مجموعهٔ اعداد در نظر گرفته شود. او در این نکته اختلاف بین رده‌های اکید و مجموعه‌ها را از پیش خبرداد و این مطلب توسط وان نویمن درسال ۱۹۲۵ معرفی شد. همچنین درسال ۱۸۹۷ سزار بورالی-فورتی حالت پارادکس گونه‌ای در نظریه کانتور (از اعداد ترتیبی ترانسفینی) مشاهده کرده بود. اما سادگی و مستقیم بودن پارادکس راسل، بنظر می‌رسید که کلاً تمام کوششهایی را که به کار گرفته می‌شد تا ریاضیات بر پایهٔ نوعی نظریه مجموعه‌ها که فرگه پیشنهاد کرده بود قرار گیرد، از بین برده است.

درهرصورت راه سوم یعنی محدودیت اصل موضوعی نظریه مجموعه‌ها به‌عنوان اصلی‌ترین راه‌چاره مورد قبول قرار گرفت و اولین اصل موضوعی کردن نظریه مجموعه‌ها به‌وسیله ارنست تسرملو درسال ۱۹۰۸ انتشار یافت.

۲ـ مفاهیم اولیه و زبان نظریه مجموعه‌ها

اولین مفهوم اساسی در نظریه مجموعه‌ها، رابطهٔ مقدماتی بین یک مجموعه و اعضای آن می‌باشد. این، رابطهٔ **عضویت** نامیده می‌شود و به‌وسیلهٔ $\in$ نشان داده‌می‌شود. بکارگیری علامت $\in$ (اپسیلون یونانی) اولین بار توسط ریاضیدان ایتالیایی گ. پئانو درسال ۱۸۸۹ عنوان شد. این علامت مخفف کلمه $\epsilon'\sigma u'$ به‌معنی «است» است. مثلا اگر A مجموعهٔ تمام اشیاء آبی باشد، وقتی می‌نویسیم $a\in A$ یعنی a آبی است. این در واقع اولین و اصیلترین ارتباط منطق و نظریه مجموعه‌هاست. دومین مفهومی که با آن مواجه هستیم تساوی است که رابطه‌ای بین اشیاء یک نظریه برقرار می‌کند. رابطهٔ تساوی را با $=$ نمایش می‌دهیم و سه حالت ممکن است: اول آنکه رابطهٔ تساوی متعلق به‌منطق زمینه در نظر گرفته شود. دوم، تساوی به‌عنوان دومین رابطهٔ ابتدایی در نظر گرفته شود (بعد از رابطهٔ عضویت) وسوم آنکه

برحسب نیاز واحتیاجی که وجود داردآن را تعریف نمائیم.

برای‌نوشتن و بیان اصول‌موضوعه نظریهٔ مجموعه‌ها به‌زبانی مخصوص نیاز داریم. ساده‌ترین جزء یك زبان، الفبای آنست. **یك الفبا** مجموعه‌ای از نمادهاست مانند مجموعهٔ الفبای زبان فارسی‌یا انگلیسی‌یا مثلاً $A=\{d, f, \int, \gamma, {}^{*}\}, ()$. وهر **عبارت** دنباله‌ای متناهی ازعلامات دریك الفبا است.

الفباء زبان مرتبه اول منطق عبارتست از:

۱ــ نماد متغیرها v_0 و v_1 و...

۲ــ نماد $\sim$ (نقیض) و $\wedge$ (عطف) و $\vee$ (فصل) و $\rightarrow$ (اگر ... آنگاه) و $\iff$ (اگر وفقط اگر).

۳ــ سورهای $\forall$ (برای هر) و $\exists$ (وجود دارد).

۴ــ $=$ تساوی.

۵ــ $(,)$ پرانتزها.

۶ــ (الف) برای هر $1 \leqslant n$ مجموعه‌ای از نمادهای تابعی (در صورت وجود)
(ب) برای هر $1 \leqslant n$ مجموعه‌ای از نمادهای‌رابطه‌ای (درصورت وجود)
(ج) مجموعه‌ای از ثابتها c_0 و c_1 و...

اجتماع نمادهای در (۱) تا (۵) را با A ونمادهای (۶) را با S نمایش می‌دهیم و S را مجموعهٔ نمادی خاص‌آن‌زبان می‌نامیم. بنابراین، می‌توان هرزبان را با مجموعهٔ نمادی آن یعنی S مشخص‌کرده و برای‌آن زبان ترمها وفرمولها را تحت عنوان S- ترم و S- فرمول به‌طریق زیر تعریف نمائیم:

(T_1) هرمتغیر یك S- ترم است.

(T_2) هرثابت یك S- ترم است.

(T_3) اگر $t_0, \dots, t_{n-1}$، S- ترم باشندو f علامت تابعی n-تایی باشد، $ft_0 \dots t_{n-1}$ هم یك ترم است.

S- فرمولها عباراتی روی نمادهای زبان هستندکه با به‌کار گیری تعداد متناهی ازقواعد زیر به‌دست‌می‌آیند.

(F_1) اگر t_0, t_1 ترم باشند، $t_0=t_1$ یك فرمول است.

(F_2) اگر $t_0,\dots,t_{n-1}$ ترم ها باشند، و R یك نماد رابطه‌ای n-تایی باشد، $Rt_0 \dots t_{n-1}$ فرمول است.

(F_3) اگر ϕ فرمول باشد، آنگاه $\neg\phi$ فرمول است.

(F_4) اگر φ, ψ فرمول باشند، آنگاه $\varphi\rightarrow\psi$، $\varphi\wedge\psi$، $\varphi\vee\psi$، $\varphi\longleftrightarrow\psi$ فرمول هستند.

(F_5) اگر φ فرمول و x متغیر باشد، آنگاه $\forall x\varphi$ و $\exists x\varphi$ هم فرمول هستند.

حال ببینیم **زبان** نظریه مجموعه‌ها چیست؟ زبان نظریه مجموعه‌ها یا مجموعهٔ نمادی مربوط به آن S عبارتست از $S=\{\in\}$ که در آن $x\in y$ یعنی x عضو y است. فرمولهای نظریه مجموعه‌ها با استفاده از دوفرمول اتمی $x=y$ و$x\in y$ و دستورالعمل (F_3) تا (F_5) ساخته می‌شوند.

۳ــ اصول موضوعه نظریه مجموعه‌ها

اولین اصل موضوع چگونگی تساوی دومجموعه را بیان می‌دارد. به‌عبارت دیگراین اصل می‌گویدکه یك مجموعه به وسیله عناصر خودش مشخص می‌گردد. به‌شکل نمادی داریم:

(A_1) اصل موضوع‌گسترش.

$$\forall x \forall y (\forall z (z\in x \iff z\in y)) \rightarrow x=y$$

این اصل‌کاربردهای زیادی داردکه در پایان این قسمت بعضی ازآنها را فهرست‌وارخواهیم‌آورد.

(A_2) اصل موضوع مجموعهٔ تهی: مجموعه‌ای وجود دارد که هیچ عضوی ندارد.

$$\exists x \forall y \; y\notin x$$

(A_3) اصل موضوع زوج‌سازی: اگر x و y مجموعه باشند آنگاه $\{x, y\}$ هم مجموعه است یا

$$\forall x \forall y \exists z \forall u (u\in z \iff u=x \vee u=y)$$

(A_4) اصل موضوع اجتماع: اگر X مجموعه‌ای ازمجموعه‌ها باشد، اجتماع‌آنها نیزمجموعه است

$$\forall X \exists Y \forall u (u\in Y \iff \exists z (z\in X \wedge u\in z))$$

(A_5) اصل موضوع توانی: اگر X مجموعه باشد، تمام زیر-مجموعه‌های‌آن نیز تشکیل یك مجموعه می‌دهند.

$$\forall X \exists Y \forall z (z\in Y \iff z\subseteq X)$$

که درآن $z\subseteq X$ خلاصه $\forall u(u\in z \rightarrow u\in X)$ است.

(A_6) اصل موضوع جداسازی: اگر X مجموعه باشد، و$p(x)$ نمایش‌این باشدکه x درخاصیت P صدق می‌کند،آنگاه

$$\{x\in X \mid p(x)\}$$

نیزمجموعه است.

(A_7) اصل موضوع بینهایت: مجموعه‌ای وجود داردکه شامل

مجموعهٔ تهی $\emptyset$ است و اگر x در آن مجموعه باشد آنگاه

$$S(x)=x\cup\{x\}$$

نیز در آن مجموعه است. این چنین مجموعه‌ای را **استقرایی** می‌نامیم و $S(x)$ را تالی x می‌گوئیم. بنابراین اصل موضوع بینهایت می‌گوید که یك مجموعه استقرایی وجود دارد و می‌توان با استفاده از اصل موضوع گسترش ثابت کرد که فقط یك مجموعهٔ استقرایی وجود دارد، این مجموعه را با N نمایش داده و به آن مجموعه اعداد طبیعی می‌گوئیم و تعریف می‌کنیم:

$0=\emptyset$ و $1=s(0)$، $2=s(1)=ss(0)$ و $3=s(2)=ss(1)=sss(0)$ و ...

می‌توان بسادگی ثابت کرد که N، درشرایط زیر که اصول موضوعه پئانو نامیده می‌شوند صدق می‌کند:

(P_1) $0\in N$؛ (P_2) برای هر $k\in N$، $S(k)\in N$؛ (P_3) برای هر $k\in N$، $S(k)\neq 0$؛ (P_4) برای هر $j, k\in N$، $j=k$ اگر وفقط اگر $S(j)=S(k)$؛ (P_5) اگر $X\subseteq N$ و $0\in X$ و اگر برای هر $k\in N$، $k\in X$ ایجاب کند، $S(k)\in X$، آنگاه $X=N$.

با استفاده از واقعیت فوق، ثابت می‌شود:

قضیه (اصل استقراء). اگرحکم $\varphi(k)$ در زبان مرتبه اول
(الف) درمورد ۰ درست باشد،
(ب) وقتی درمورد یك عدد k که $k\in N$ درست است، در مورد $S(k)$ نیز درست باشد،
آنگاه $\varphi(k)$ درمورد هر $k\in N$ درست است.

(A_8) اصل موضوع جایگزینی: اگر F تابع باشد، آنگاه برای هرمجموعهٔ X، مجموعهٔ Y وجود دارد به‌طوری‌که

$$Y=F(X)=\{F(x)|x\in X\}$$

این اصل توسط ابراهام فرانکل درسال ۱۹۲۲ پیشنهاد شد و ۸ اصل موضوعه فوق به اسم اصول موضوعه تسرملو- فرانکل (ZF) معروف است.

(A_9) اصل موضوع نظم: هرمجموعهٔ ناتهی، یك عضو $\in$ کیمین دارد.

$$\forall A\ \exists x\ (x\in A\wedge(y\in x\rightarrow y=x))$$

این معادل است با: درهر مجموعه ناتهی A، عضوی مانند x وجود دارد به‌طوری‌که $x\cap A=\emptyset$.

این اصل به‌طورصریح توسط وان‌نویمن در ۱۹۲۵ در لیست گنجانده شد ولی اولین بار توسط میریمانف در ۱۹۱۷ عنوان شد.

(A_{10}) اصل موضوع انتخاب: برای هر مجموعهٔ a، تابعی روی a وجود داردکه برای هر $\emptyset\neq x\in a$، $f(x)\in x$.

این اصل مستقل از ZF است ومعادلهای زیادی ازقبیل لم زورن- قضیه خوش‌ترتیبی، ... داردکه موردبحث ما نیستند.

حال با استفاده ازاین‌اصول موضوع، می‌توان حقایق‌جالبی را ثابت‌کردکه بعضی ازآنها را دراینجا می‌آوریم:

(۱) فقط یك مجموعهٔ تهی وجود دارد.

(۲) هیچ مجموعه‌ای عضوخودش نیست.

(۳) هیچ دومجموعه‌ای مانند a و b وجود ندارند که $a\in b$ و $b\in a$.

(۴) هیچ تابعی روی مجموعه اعداد طبیعی وجود ندارد که $\cdots\in f(2)\in f(1)\in f(0)$

مراجع

۱ــ خوانساری، محمد. منطق صوری،انتشارات آگاه ۱۳۶۲.

۲ــ ج. ن. کراسلی و دیگران، ترجمهٔ شاپوراعتماد و غلامرضا برادران خسروشاهی. منطق ریاضی چیست؟ نشر روز ۱۳۶۳.

3— H. D. Ebbighaus, J. Flum, W. Thomas. Mathematical Logic, Springer-verlag, 1984.

4- Patrick Suppes. Axiomatic set theory , Dover Publication, Inc., 1972.

5— Paul Edwards, Editor in Chief . The Encyclopedia of Philosophy , Macmillan Publishing Co., Inc., 1967.

ورشکستگی قمارباز

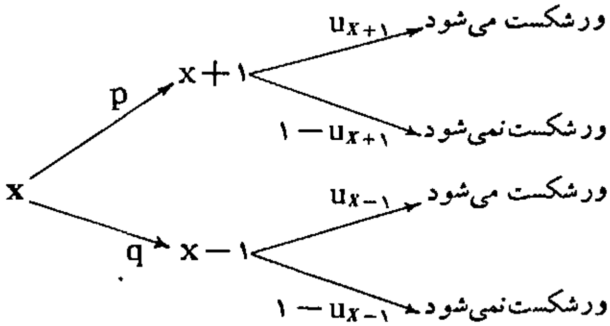
دکتر عین‌اله پاشا
استادیار دانشگاه تربیت‌معلم

مسأله ورشکستگی قمارباز از مسائل بسیار قدیمی احتمال است. دمواور(۱) و لاپلاس(۲) اولین کسانی بودند که مسأله را طرح و به‌حل آن پرداختند. مسأله ورشکستگی قمارباز اساس فرایندزاد و مرگ وقدم‌زدنهای تصادفی درمبحث فرایندهای تصادفی است. به‌علاوه پدیده‌های بسیاری را می‌توان با این مسأله مدلبندی کرد. ازآنجائی که مسأله با همین عنوان، ملموس وقابل‌درک است واز مدلهای استاندارد احتمال‌است، عنوان دیگری برای آن پیشنهاد نشده است.

طرح مسأله

دوبازیکن به‌نامهای A و B و به‌ترتیب با سرمایه‌های a و b ریال با هم بازی می‌کنند. احتمال برد A درهر بازی p و احتمال باخت وی (یعنی برد B) برابر $q=1-p$ است. در هر بازی، برنده مبلغ ۱ ریال از بازنده می‌گیرد. هر وقت سرمایهٔ یکی از بازیکنها ۰ یا $a+b$ شود بازی متوقف می‌شود. مطلوب است احتمال آنکه به‌هنگام توقف بازی، سرمایهٔ A برابر ۰ شده‌باشد. یعنی‌می‌خواهیم احتمال‌ورشکست شدن A را حساب کنیم.

فرض کنیم در مرحله‌ای ازبازی سرمایهٔ A برابر x، $0\leqslant x<a+b$، شده باشد. احتمال ورشکست شدن A با این سرمایه را با نماد u_x نشان می‌دهیم. واضح است که $u_{a+b}=0$ و $u_0=1$، زیرا اگرسرمایه A برابر $a+b$ شود آنگاه سرمایهٔ B برابر ۰ است، یعنی B ورشکست شده است، درنتیجه احتمال ورشکست شدن A، ۰ است. توضیح مشابهی نشان می‌دهدکه $u_0=1$. اگر $0<x<a+b$، آنگاه بازی ادامه دارد. در بازی بعدی با احتمال p سرمایهٔ A برابر $x+1$ خواهد شدکه در این صورت احتمال ورشکست شدن وی برابر u_{x+1} است، یا با احتمال q سرمایهٔ A برابر $x-1$ خواهد شد که دراین صورت احتمال ورشکست شدن A برابر u_{x-1} است. با این توضیحات ونمودار زیر



واستفاده ازقانون جمع احتمالها، ملاحظه می‌شودکه u_x در برابری بازگشتی زیرصدق می‌کند:

$$u_x=pu_{x+1}+qu_{x-1}\ ,\quad 0<x<a+b$$

با شرایط اولیه $u_{a+b}=0$ و $u_0=1$ این برابری بازگشتی‌را حل می‌کنیم. با توجه به $p+q=1$ داریم:

$$(p+q)u_x=pu_{x+1}+qu_{x-1}$$

با دسته‌بندی جمله‌ها به برابری زیرخواهیم رسید:

$$p(u_{x+1}-u_x)=q(u_x-u_{x-1})\ ,\quad 0<x<a+b$$

ویا

$$u_{x+1}-u_x=\frac{q}{p}\ (u_x-u_{x-1})\ ,\quad 0<x<a+b$$

با قرار دادن $x-1$ به‌جای x دربرابری بالا خواهیم داشت

$$u_x-u_{x-1}=\frac{q}{p}\ (u_{x-1}-u_{x-2}).$$

از دوبرابری اخیرنتیجه می‌شودکه

$$u_{x+1}-u_x=\left(\frac{q}{p}\right)^2\ (u_{x-1}-u_{x-2}).$$

با تکرار این روش خواهیم داشت:

$$(*) \quad u_{x+1}-u_x=\left(\frac{q}{p}\right)^x (u_1-u_0)$$

$$0<x<a+b$$

برابریهای بالا را به‌ازای $x=1,\ldots,a+b-1$ با هم جمع می‌کنیم:

$$\sum_{x=1}^{a+b-1}(u_{x+1}-u_x)=(u_1-u_0)\sum_{x=1}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

با استفاده از قاعدهٔ ادغام در $\sum$ها و دستور مجموع n جملهٔ اول تصاعد هندسی خواهیم داشت:

$$u_{a+b}-u_1=\begin{cases}(u_1-u_0)\dfrac{(q/p)^{a+b}-(q/p)}{(q/p)-1} & p\neq q \text{ اگر } \\ (u_1-u_0)(a+b-1)\ , & p=q \text{ اگر }\end{cases}$$

حال باتوجه به‌شرایط اولیهٔ $u_{a+b}=0$ و $u_0=1$، از برابری بالا u_1 به‌دست می‌آید:

$$u_1=\begin{cases}[(q/p)^{a+b}-(q/p)]/[(q/p)^{a+b}-1] \\ \dfrac{a+b-1}{a+b} & ,p=q \text{ اگر }\end{cases}$$

حال مجدداً برابری $(*)$ را از $x=1$ تا $x=y-1$ با هم جمع می‌کنیم:

$$u_y-u_1=\begin{cases}(u_1-u_0)\dfrac{(q/p)^y-(p/p)}{(q/p)-1} \\ (u_1-u_0)_y & ,\ p=q \text{ اگر }\end{cases}$$

با قراردادن مقدار u_1 درعبارت بالا، مقدار u_y به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$u_y=\begin{cases}[(q/p)^{a+b}-(q/p)^y]/[(q/p)^{a+b}-1] \\ \dfrac{(a+b-1)-y}{a+b} & ,\ p=q \text{ اگر }\end{cases}$$

لذا، چون سرمایهٔ آغازین A برابر a فرض شده بود، احتمال ورشکستگی وی برابر

$$u_a=\begin{cases}[(q/p)^{a+b}-(q/p)^a]/[(q/p)^{a+b}-1] \\ \dfrac{b-1}{a+b} & ,\ p=q \text{ اگر }\end{cases}$$

است.

اینك می‌خواهیم A رادرمقابل بازیکن فوق‌العاده‌ثروتمندی قرار دهیم. به‌عبارت دیگرمی‌خواهیم b را به ∞ سوق دهیم. در حالت $p=q$ احتمال ورشکستگی A بنا بر دستور بالا عبارت‌است از

$$u_a=\frac{b-1}{a+b}$$

از اینجا معلوم می‌شود که

$$\lim_{b\to\infty} u_a=1,$$

یعنی دراین حالت ورشکستگی A حتمی است.

حال فرض‌کنیم $q>p$، یعنی A نه‌تنها از لحاظ سرمایه از B پایینتراست، بلکه بدتراز‌اوهم بازی می‌کند. با فرض $\lambda=\frac{q}{p}$ داریم، $\lambda>1$ و

$$\lim_{b\to\infty} u_a=\lim_{b\to\infty}\frac{\lambda^{a+b}-\lambda^a}{\lambda^{a+b}-1}$$

اگرصورت ومخرج را بر λ^{a+b} تقسیم‌کنیم، خواهیم‌داشت:

$$\lim_{b\to\infty} u_a=\lim_{b\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^b}{1-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{a+b}}=1$$

$$\left(\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^b=0 \text{ زیرا }\right)$$

یعنی همان‌طوری‌که انتظارمی‌رفت دراین‌حالت هم ورشکستگی A حتمی است.

اینك فرض‌کنیم A بهتراز B بازی کند، یعنی $p>q$، در این‌صورت داریم $\lambda=\frac{q}{p}<1$ و

$$\lim_{b\to\infty} u_a=\lim_{b\to\infty}\frac{\lambda^{a+b}-\lambda^a}{\lambda^{a+b}-1}=\lambda^a$$

$$(\lim_{b\to\infty}\lambda^{a+b}=0 \text{ زیرا })$$

$$=(q/p)^a<1\ .$$

یعنی در این حالت احتمال ورشکستگی A برابر ۱ نیست، البته صفر هم نیست. ملاحظه می‌شود که در این شرایط هم ورشکستگی A منتفی نیست ولی می‌تواند با احتمال

$$1-\left(\frac{q}{p}\right)^a$$

(که مثبت است) خود را ازشرآن برهاند. البته B هرگز ورشکست نخواهد شد، زیرا سرمایه اوبینهایت است وهربار که ۱ ریال ازسرمایهٔ اوکم شود بازهمان بینهایت باقی‌خواهد ماند.

●

الگوریتمهای کلیدی (۱)

دکتر اسماعیل بابلیان، عضو هیأت علمی دانشگاه تربیت‌معلم

پس از درج مقالاتی تحت عنوان «آشنایی با مبانی انفورماتیک وکامپیوتر» در مجله رشد آموزش ریاضی (شماره‌های ۲۸، ۲۹ و ۳۰)، عده زیادی ازخوانندگان محترم مجله تقاضای ادامهٔ این مقالات را نمودند. همچنین، پس ازدرج حل مسائل مرحله اول المپیادکامپیوتر، که درآذرماه سال ۱۳۷۰ برگزارشد، عده‌ای از نامفهوم بودن وپیچیده بودن بعضی ازراه حلها گلـه داشتند و خواسته بودند بعضی الگوریتمها را توضیح دهیم یامسأله را از راه دیگری حل کنیم. دراین مقاله، ومقاله‌هایی که بدنبال آن خواهدآمد، ضمن یادآوری برنامه‌هایی ازکتاب «مبانی کامپیوتر وانفورماتیک »[۱] به‌حل چندمساله بااستفاده ازآنها می‌پردازیم که یکی ازاین مسائل‌هم مربوط به‌مسائل المپیاد مذکوراست.

یکی از الگوریتمهای ساده ودر برخورد اول سؤال برانگیز، الگوریتم تعیین ارقام عدد طبیعی مفـروض N است. (سؤال برانگیز ازاین جهت که وقتی N را در اختیار کامپیوتر می‌گذاریم ارقام آن‌را یکی یکی تایپ می‌کنیم! پس چه لزومی‌دارد که مجدداً ارقام آن را توسط کامپیوتر بدست آوریم؟!) ولی در مثالهایی که در این مقاله خواهید دیـد ملاحظه می‌کنید که می‌توان ازاین الگوریتم درحل‌مسائل متنوع وبعضاً مشکل استفاده کرد.

الگوریتم ارقام

۱ـ شروع

۲ـ N را بگیر

۳ـ تا وقتی $N>0$ انجام بده:

الف‌ـ $M \leftarrow \left[\frac{N}{10}\right]$

بـ $D \leftarrow N-10M$

ج‌ـ D را بنویس

دـ $N \leftarrow M$

۴ـ پایان

برنامه مربوط به‌تعیین ارقام عدد N، به‌زبان بیسیك، چنین است: (صفحهٔ ۷۰ از [۱] را ملاحظه‌کنید.)

```
5  REM * PROGRAM NO.1*
10 INPUT "N=", N
20 WHILE N>0
30 LET M=INT(N/10)
40 LET D=N-10*M
50 PRINT D
60 LET N=M
70 WEND
80 END
```

باتغییرات بسیارساده‌ای دربرنامهٔ بالا

می‌توان برنامه‌ای نوشت که کارهای زیر را انجام دهد:

۱- تعداد ارقام N را بنویسد.

۲- مجموع ارقام N را بنویسد.

کافی است دستورات زیر را در برنامه بالا بگنجانیم.

```
15 LET ND=0:LETSD=0
50 LET ND=ND+1:
   LET SD=SD+D
80 PRINT "NUMBER OF
   DIGITS=" ND
90 PRINT "SUM OF
   DIGITS=" SD
```

با تبدیل عدد ۱۰ به عدد دلخواه طبیعی M، که $M>1$، در برنامه شماره ۱، بسط N در مبنای M نوشته خواهد شد. البته با ذخیرهٔ ارقام در یک آرایه و چاپ آنها پس از خروج از دستور WHILE می‌توان ارقام را کنار هم نیز نوشت (تمرین ۱، انتهای مقاله).

اینک چند مسأله طرح و به کمک برنامه شمارهٔ ۱ حل می‌کنیم.

برنامه‌ای بنویسید که عدد طبیعی N را بگیرد و معین کند ارقام عدد N^2 صعودی هستند یا نه. (تعریف: ارقام عدد k را صعودی گوئیم در صورتی که اگر $k=a_1a_2\ldots a_M$ آنگاه به ازای $i=1, 2, \ldots, M-1$ داشته باشیم $a_i \leqslant a_{i+1}$. (مثلا اگر $N=13$ آنگاه $N^2=169$ که ارقام آن، طبق تعریف صعودی است.)

حل: کافی است تغییرات زیر در برنامهٔ شمارهٔ ۱ داده شود:

```
15 LET N=N↑2
17 LET A=10
50 IFD<=A THEN LET A=D
   ELSE PRINT "NO": END
75 PRINT "YES"
```

توجه: چون ارقام همه از ۱۰ کوچکتر ند

بنابراین، رقم یکان حتماً از ۱۰، یعنی مقدار اولیه A، کوچکتر است. اگر عدد بیش از یک رقم داشته باشد دستور بعد از THEN سبب می‌شود که یک رقم در A، و رقم بعدی در D قرار گیرد. برنامه جدید را برای چند عدد آزمایش کنید.

برنامه‌ای بنویسید که عدد طبیعی M، که $M<32$، و M نشانهٔ AS(۱) تا AS(M) را بگیرد و تمام زیر مجموعه های یک مجموعهٔ M عضوی (که اعضای آن این نشانه‌ها هستند) را بنویسد.

حل: ابتدا چگونگی استفاده از بسط اعداد درمبنای ۲ را برای حل این مسأله، درحالت $M=2$، شرح می‌دهیم.

فرض کنید، $M=2$ و بخواهیم زیر مجموعه‌های مجموعه $\{a, b\}$ را بنویسیم، دراینجا دونشانه را a و b اختیار کرده‌ایم. هر زیرمجموعهٔ $\{a, b\}$ ممکن است شامل a و b نباشد یا شامل a باشد و شامل b نباشد و بالعکس و یا هم شامل a و هم شامل b باشد. اگر شامل بودن یک نشانه را در یک زیرمجموعه با ۱ و شامل نبودن آن را با ۰ نشان دهیم اعداد متناظر با زیرمجموعه های $\{a, b\}$ عبارت خواهند بود از:

$$\phi=\{\ \} \quad \{a\} \quad \{b\} \quad \{a, b\}$$

$$00 \quad 10 \quad 01 \quad 11$$

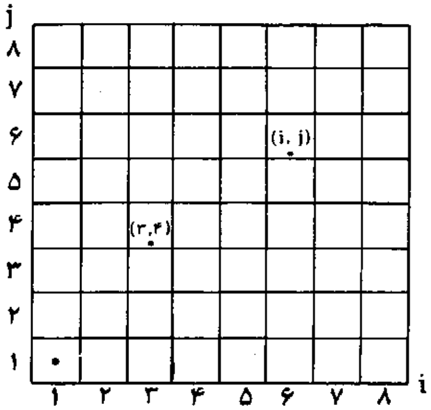
ملاحظه می‌شود که اگر این اعداد را در مبنای ۱۰ بنویسیم اعداد ۰ تا ۳ خواهند شد. درحالت کلی چون 2^M زیر مجموعه برای یک مجموعهٔ M عضوی داریم، این اعداد از ۰ تا 2^M-1 خواهند بود.

بنابراین، یک راه حل این است که بسط اعداد، از صفر تا 2^M-1 را در مبنای ۲ بنویسیم و بعد اگر رقم iام این بسط یک بود حرف (یا نشانه) iام از مجموعه اصلی را بنویسیم و اگر رقم iام صفر بود نشانهٔ iام را ننویسیم. برنامه‌ای که ملاحظه می‌کنید این کار را برای $M \leqslant 10$ انجام می‌دهد. (آزمایش کنید.)

```
5   DATA"a","b","c","d","e" ,
    "f","g", "h", "i","j"
10  INPUT M
20  FOR I=1 TO M
30  READ AS(I)
40  NEXT I : LET K=2↑M−1
50  PRINT "{ }"
60  FOR I=1 TO K
70  PRINT "{"; : LET J=0 :
    LET N=I
80  WHILE N>1
90  LET L=INT(N/2)
100 LET D=N−L*2
110 LET J=J+1
120 IF D=1 THEN PRINT AS
    (J)+",";
130 LET N=L
140 WEND
150 PRINT AS (J+1)+"}"
160 NENT I
```

شرح برنامه: پس از گرفتن تعداد اعضای مجموعه، یعنی M، واعضای مجموعه از دستور DATA، توسط دستورات ۲۰ تا ۴۰، ابتدا مجموعهٔ تهی‌را چاپ می‌کنیم. سپس از $I=1$ تا $I=2^M-1$ را به‌مبنای دو می‌بریم. متغیر J تعداد ارقام I را در مبنای ۲ می‌شمارد. ضمناً دستور ۷۰ آکولاد مربوط به‌مجموعه‌را بازمی‌کند و در دستور ۱۵۰، پس از نوشتن آخرین عضو زیر مجموعه، آکولاد بسته می‌شود.

در شکل زیر تعداد مسیرهای موجود برای رفتن ازمبدأ، خانهٔ شمارهٔ (۱,۱)، به خانهٔ (i, j) را تعیین کنید. (مسأله مرحله اول المپیاد کامپیوتر، آذر ماه ۱۳۷۰) در حرکت کردن فقط به‌راست رفتن (R) و بالا رفتن (U) مجاز است. مسیرها را با نوشتن رشته‌ای از حروف R و U مشخص کنید.



حل: برای رفتن ازمبدأ بهخانه (۴ ,۳)، بدیهی است که کلاً باید دوبار به‌راست و سه بار به‌بالا برویم، منتها ترکیب به‌راست رفتن وبالا رفتنها مهم است. لذا، باید تعداد طرقی که دوحرف R وسه حرف U را می‌توان کنارهم نوشت تعیین کنیم. حال اگر بجای هر R رقم یك وبجای هر U رقم صفر را بگذاریم، یکی ازمسیرها RRUUU است که متناظر با آن عدد ۱۱۰۰۰ را داریم ودیگری UUURR است که متناظر باعدد ۰۰۰۱۱ می‌باشد. بقیه مسیرها اعداد بین ۱۱ و ۱۱۰۰۰ را مشخص خواهند کرد که، باید دو رقم یك داشته باشند. بنابر این، یك راه حل این است که ازعدد ۳ = $(11)_2$ شروع کنیم تا عدد ۲۴ = $(11000)_2$ و آنها را به‌مبنای دو ببریم، اگر مجموع ارقام ۲ بود R و U های متناظر باارقام را بنویسیم. حالا اگر بخواهیم به‌نقطهٔ (i, j) برویم باید (۱ − i) بار به‌راست و (۱ − j) بار به‌بالا برویم. پس باید از $s = \underbrace{00\ldots0}_{(j-1)\ \text{بار}}\overbrace{11\ldots1}^{(i-1)\ \text{بار}}$ شروع کنیم تا عدد $E = \underbrace{11\ldots1}_{(i-1)\ \text{بار}}\overbrace{00\ldots0}^{(j-1)\ \text{بار}}$. به کمك تصاعد هندسی معلوم می‌شود که $s = 2^{i-1} - 1$ و $E = 2^{j-1} \times s$. لذا، باید اعداد از s تا E را به‌مبنای ۲ ببریم ومجموع ارقام آنها را حساب کنیم.

اگر مجموع ارقام (۱ − i) شد R ها و U های متناظر باارقام یك وصفر را بنویسیم. بااین توضیحات برنامه مورد نظر چنین است: (این برنامه کارهای اضافی انجام می‌دهد ولی درعوض منطق روشنی دارد.)

```
10  INPUT I, J
20  IF I=1 THEN FOR K=1
    TO J−1: PRINT "U"; :
    NEXT K: END
30  IF J=1 THEN FOR K=1
    TO I=1 : PRINT "R";
    NEXT K: END
40  LET L=I+J−2: DIM A(L)
50  LET S=2↑(I−1)−1 . LET
    E=S*2↑(J−1)
60  FOR K=S TO E
70  LET N=K : LET SD=0
80  FOR T=1 TO L
90  LET M=INT (N/2) : LET
    D=N−2*M
100 LET SD=SD+D : LET
    A(T)=D
110 LET N=M
120 NEXT T
130 IF SD <> (I−1) THEN
    180
140 FOR T=1 TO L
150 IF A(T)=1 THEN PRINT
    "R"; ELSE PRINT "U";
160 NEXT T
170 PRINT "        ";
180 NEXT K
```

شرح برنامه: پس از گرفتن I و J درصورتی که یکی ازآنها یك باشد دستور ۲۰ تا ۳۰ اجرا ومسیر مشخص می‌شود والا تعداد کل حرکات رفتن به راست و بالا، یعنی L، حساب می‌شود. آرایه‌ای هم برای ارقام اعداد درمبنای ۲، که حتماً L رقم داشته باشند، درنظر می‌گیریم. اعداد S و E طبق توضیحات قبلی حساب می‌شوند ودستورات ۸۰ تا ۱۲۰ ارقام اعداد از S تا E را درمبنای دو، ومجموع ارقام هر یك را حساب می‌کند وخود ارقام را درآرایه A قرار می‌دهد. اگر SD مساوی (۱ − I) نباشد عدد مورد نظر جواب نیست درغیر این صورت درایه‌های A با ۰ و ۱ مقایسه شده وحرف R یا U نوشته می‌شود. این برنامه‌را برای چند عدد آزمایش کنید.

تمرین

(حل این تمرینها درشماره‌های بعدی چاپ خواهد شد تا شما باحل خود مقایسه کنید لطفاً حل آنها را برای مجله **نفرستید**.)

۱ــ برنامه‌ای بنویسید که اعداد طبیعی N و M را بگیرد (M ⩽ ۱۶) و ارقام N را درمبنای M بنویسد (کنارهم). اگر M > ۱۰ برای ۱۰ تا ۱۵ به ترتیب از حروف A تا F استفاده کنید.

۲ــ برنامه‌ای بنویسید که عدد طبیعی N را بگیرد ومعین کند ارقام عدد N^2 نزولی هستند یا نه.

(نزولی بودن ارقام مشابه صعودی بودن آنها تعریف می‌شود.)

۳ــ برنامه‌ای بنویسید که کلیه اعداد دو رقمی را بنویسد که ارقام مربع آنها صعودی باشد.

مرجع

۱ــ مبانی کامپیوتر و انفورماتیك، تألیف دکتر اسماعیل بابلیان. چاپ مهر ۱۳۷۱. انتشارات وزارت آموزش و پرورش.

بازی با اعداد

غلامرضا صفری‌نژاد
دانشجوی پزشکی

دررشد آموزش ریاضی شماره ۳۴ اعداد ۱ تا ۵۰ با استفاده از ارقام عدد ۱۹۹۲ نوشته شد. دراینجا اعداد ۵۱ تا ۱۰۰ با استفاده ازارقام ۱۹۹۲ ارائه می‌شود. اگر فرصت کردید درمورد عدد ۶۹، که فرستنده نیز با زحمت زیاد نتوانسته ترکیبی از ارقام ۱۹۹۲ را بکاربرد، رابطه‌ای بدست آورید.

$۵۱=-۱+۹(\sqrt{۹})!-۲$

$۵۲=۱\times۹\times(\sqrt{۹})!-۲$

$۵۳=-۱+۹\times\sqrt{۹}\times۲$

$۵۴=۱\times۹\times\sqrt{۹}\times۲$

$۵۵=۱+۹\times\sqrt{۹}\times۲$

$۵۶=۱\times۹(\sqrt{۹})!+۲$

$۵۷=۱+۹\times(\sqrt{۹})!+۲$

$۵۸=(۱+۹)(\sqrt{۹})!-۲$

$۵۹=۱۹\times\sqrt{۹}+۲$

$۶۰=(۱+۹)\sqrt{۹}\times۲$

$۶۱=(۱+(\sqrt{۹})!)\times۹-۲$

$۶۲=-۱+۹(۹-۲)$

$۶۳=۱\times۹(۹-۲)$

$۶۴=۱+۹(۹-۲)$

$۶۵=-۱+(\sqrt{۹})!(۹+۲)$

$۶۶=۱\times(\sqrt{۹})!(۹+۲)$

$۶۷=۱+(\sqrt{۹})!\times(۹+۲)$

$۶۸=-(۱+(\sqrt{۹}))!+۹۲$

$۶۹=?$

$۷۰=(-۱+۹)۹-۲$

$۷۱=-۱+(\sqrt{۹})!\times(\sqrt{۹})!\times۲$

$۷۲=۱\times(\sqrt{۹})!\times(\sqrt{۹})!\times۲$

$۷۳=۱+(\sqrt{۹})!\times(\sqrt{۹})!\times۲$

$۷۴=(-۱+۹)۹+۲$

$۷۵=-۱(\sqrt{۹})!+۹^{۲}$

$۷۶=(۱-(\sqrt{۹})!)+۹^{۲}$

$۷۷=(۱+(\sqrt{۹})!)(۹+۲)$

$۷۸=-۱+(۹\times۹)-۲$

$۷۹=(۱-\sqrt{۹})+۹^{۲}$

$۸۰=۱+(۹\times۹)-۲$

$۸۱=۱^{۹}\times۹^{۲}$

$۸۲=-۱+(۹\times۹)+۲$

$۸۳=۱\times۹\times۹+۲$

$۸۴=۱+(۹\times۹)+۲$

$۸۵=۱+\sqrt{۹}+۹^{۲}$

$۸۶=-۱+(\sqrt{۹})!+۹^{۲}$

$۸۷=۱+(\sqrt{۹})!+۹^{۲}$

$۸۸=(۱+۹)۹-۲$

$۸۹=-۱+۹+۹^{۲}$

$۹۰=(۱+۹)(\sqrt{۹})^{۲}$

$۹۱=۱+۹+۹^{۲}$

$۹۲=(۱+۹)۹+۲$

$۹۳=۱^{۹}+۹۲$

$۹۴=(-۱+\sqrt{۹})+۹۲$

$۹۵=۱۹\times((\sqrt{۹})+۲)$

$۹۶=(-۱+۹)\times(\sqrt{۹})!\times۲$

$۹۷=(-۱+(\sqrt{۹})!)+۹۲$

$۹۸=-۱+۹(۹+۲)$

$۹۹=۱\times۹(۹+۲)$

$۱۰۰=۱+۹(۹+۲)$

آموزش آمار در سطوح قبل از دانشگاه در مصر

ترجمه: کامران سپهری
بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران

۱ـ مقدمه

اهمیت علم آمار و استفاده از آن در مصر، از دوران باستان شناخته شده بود. لزوم محاسبه مقدار زمینهای بایر و دایر، نیروی موجود در بخش کشاورزی و بالاخره میزان بازده غلات همیشه مورد توجه حکام وقت این کشور بوده است. همچنین آمارهای مربوط به طغیان رود نیل و میزان زهکشی زمینهای اطراف آن از جمله اطلاعات مورد نیاز بوده است.

پس از آن، آمار شامل ثبت ارقام زاد و ولد، مرگ و میر، ازدواج و طلاق از آمارهای مورد استفاده بوده است.

۲ـ تحول علم آمار

در ابتدا، علم آمار فقط شامل شمارش و سرشماری بود. در قرن نوزدهم میلادی دامنه علم آمار گسترش یافت و شامل مسائل مطرح شده در انواع بازی‌ها و روشهای ریاضی ارائه شده توسط ریاضی‌دانان هم گردید. کشفیات و ابتکارات ریاضی بخصوص در زمینه تبدیل و ترکیب و پیدایش نظریه احتمالات و کاربرد آن باعث گسترش علم آمار چه بصورت تئوری و چه بصورت عملی گردید. در قرن حاضر (قرن بیستم) بسیاری از کشفیات و اختراعات به کمک علم آمار تحقق یافته است، تعداد زیادی توزیع احتمال کشف شده است (نظیر توزیع نرمال، دوجمله‌ای و غیره) و نظریات و روشهای جدیدی ابداع گردید (نظیر به آزمون فرضها، تخمین و غیره). در عمل نیز از علم آمار تقریبا در تمام شاخه‌های علوم، نظیر زیست شناسی، پزشکی، سیاسی، مهندسی، اجتماعی، کشاورزی، نظامی و غیره نیز استفاده شد. بدین ترتیب، درحال حاضر نظریه و کاربرد علم آمار در تمام شاخه‌های علوم مورد نیاز است. ازاین رو، نظریه و کاربرد آمار، دارای اهمیتی چون ریاضیات شده است که درخدمت سایر علوم می باشد.

تسهیلات کامپیوتری در سالهای اخیر باعث شده است که سرعت و سهولت استفاده از آمار افزایش یافته و در نتیجه، کاربرد آن روز افزون گردد. کامپیوتر به ما این امکان را می‌دهد که با متغیرهای بیشتری کار نموده و مسائل پیچیده‌تری را حل نمائیم. به‌جای انجام چهار عمل اصلی روی تعداد معدودی ارقام، می‌توانیم محاسبات پیچیده‌تر نظیر جمع و تفریق و ضرب و معکوس نمودن ماتریسهای آماری را در اسرع وقت با کامپیوتر انجام دهیم و به‌جای انجام پیش بینی بر اساس یک متغیر، می توان به کمک کامپیوتر، پیش‌بینیهای چند متغیره انجام داد.

با توجه به تحولات شدید علوم ریاضی، آمار و کامپیوتر در سالهای اخیر، بسیاری از کشورهای پیشرفته جهان، برنامه آموزش ریاضی را در کشور خود مورد تجدید نظر قرار داده‌اند تا محتوای آن مدرن‌تر شود. بدین جهت، آموزش آمار و کامپیوتر را درمقاطع مختلف تحصیلی مورد توجه قرار داده‌اند.

۳ـ مدرنیزه کردن برنامه‌های آموزشی ریاضیات و آمار در مصر

از اواسط دهه ۱۹۶۰، به‌دنبال کشورهای پیشرو درزمینه مدرنیزه نمودن برنامه های آموزش ریاضی و آمار (نظیر انگلستان، فرانسه، آمریکا و شوروی)، وزارت آموزش و پرورش مصر نیز شروع به تغییر برنامه و محتوای این دروس نمود. این تغییر نخست در برنامه ریاضیات و آمار دوره دوم متوسطه، عملی شد. سپس تغییرات در دوره اول متوسطه (راهنمائی) و همچنین دوره ابتدائی هم انجام گرفت. درحال حاضر، دانش آموزان مقطع ابتدائی باید علاوه بر آموختن چهار عمل اصلی، درزمینه مجموعه‌ها نیز آموزش ببینند و دردوره راهنمائی و دوم متوسطه، دانش آموزان قوانین احتمالات و مفاهیم آماری را خواهند آموخت.

حجم دانش آموزان درمقاطع قبل از دانشگاه درمصر بسیار زیاد بوده و حدود یک پنجم کل جمعیت کشور است (درسال ۱۹۸۸ تعداد این دانش آموزان بالغ بر ۱۰/۴ میلیون نفر می‌شد که حدود ۴۰ تا ۴۵ درصد را دختران تشکیل میدادند).

۴ـ محتوای برنامه درس آمار

محتوای درس آمار بستگی به مقاطع مختلف تحصیلی دارد که خود تابع رشد جسمی و عقلی دانش آموزان است.

درمصر، تحصیل قبل از دانشگاه‌به‌سه مقطع تقسیم شده است:

۱ـ مقطع دبستان (یادوره ابتدائی)در سن۶ سالگی شروع‌می‌شود و۵ سال به‌طول می‌انجامد (قبلااین مقطع شش‌ساله بود).

۲ـمقطع‌راهنمائی(یادوره‌اول‌متوسطه) که شامل سه سال تحصیل بعد ازدوره ابتدائی است.

۳ـمقطع‌دبیرستان(یادوره‌دوم‌متوسطه) که شامل سه سال تحصیل بعد ازدوره راهنمائی است.

درپایان هرمقطع تحصیلی، یك‌امتحان عمومی (نهائی) وجوددارد وکارنامه‌پایان تحصیلات آن مقطع داده می‌شود.امتحان‌و کارنامه دوره دوم متوسطه، پیش‌نیازورود به‌دانشگاه است.

دومقطع ابتدائی وراهنمائی که‌مجموعاً ۸سال به‌طول‌می‌انجامد،دوره‌اصلی‌اجباری آموزش دراین‌کشورمی‌باشد.

دوره دوم متوسطه (دبیرستان) به‌رشته های‌عمومی وفنی‌تقسیم‌شده‌تادانش‌آموزان با توجه به‌استعدادهای‌خدادادی خود،یکی را انتخاب نمایند. دردوره فنی، دانش آموزان در زمینه‌های بازرگانی، صنعت، کشاورزی یا اجتماعی کسب‌مهارت و تخصص می‌کنند.

محتوای‌آماری‌دوره‌های‌مختلف‌با توجه به‌اصول تعلیم وتربیت طوری‌انتخاب‌شده که باسطح‌آموزش ورشته‌تخصصی دانش آموز تطابق داشته‌باشد.

درسالهای آخرمقطع‌ابتدائی، برخی‌از اصول و مفاهیم آمار مقدماتی همراه باریاضیات آموخته‌می‌شود. مفهوم جداول فراوانی، توزیع، برخی از نمودارهای آماری ومفاهیم ساده شاخصهای مرکزی که برای این مقطع مفید و قابل استفاده است، تدریس می‌شود.

درمقطع راهنمایی‌که سه سال به‌طول می‌انجامد، آمار به‌عنوان شاخه‌ای از ریاضیات شمرده می‌شود. طی این سالها دانش‌آموز اطلاعات بیشتری درزمینه نمایش‌اعداد و ارقام درقالب جداول، فراوانی نسبی، فراوانی تراکمی، معیارها و مفاهیم مقادیر مرکزی و همچنین پراش دیگرمعیارهای پراکندگی،کسب می‌کند.

در دوره دوم‌متوسطه (دبیرستان)، دانش‌آموزکه‌ازنظر جسمی‌وعقلی‌رشدپیدا نموده است، بااصول ومنطق احتمالات آشنا می‌شود تا برتوان منطقی او افزوده گردد. مفهوم پیشامدها واحتمال مربوط به‌آن فضای‌نمونه پیشامدهای متمم‌وقانون جمع وضرب ومقدازمورد انتظار و غیره .وهمچنین برخی ازمفاهیم واصول تبدیل‌و ترکیب و توزیع دوجمله‌ای از مفاهیم آماری مورد بحث دراین مقطع تحصیلی است. دراین دوره، مفاهیم شاخصهای مرکزی‌وپراکندگی‌مرور وتکمیل‌می‌شود. همبستگی‌ساده‌وضریب‌همبستگی‌ورگرسیون خطی وپیش‌بینی ساده نیز دراین مقطع تدریس می‌گردد.

دررشته‌های فنی دوره دوم متوسطه، بخشی ازمحتوای نظریه‌آماری، جای‌خود رابه‌آمارهای‌کاربردی رشته مربوطه داده است. به طور مثال برخی از مسائل و خصوصیات‌جمعیتی‌دررشته‌اجتماعی،مفاهیم آماری‌کشاورزی‌دردوره‌کشاورزی و غیره.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات:

۱ـ مطمئناً آموزش ریاضیات مدرن‌و آماردرمقاطع تحصیلی قبل‌ازدانشگاه، از پیشرفتهای مهم آموزش وپرورش مصر محسوب می‌شود.

۲ـ پس ازسالها آموزش ریاضیات و آمارمدرن، وقت‌آن رسیده‌که آن‌رامورد ارزیابی‌قرارداده واصلاحات‌احتمالی‌لازم راکه باعث تحققاهداف این‌تحول‌است، انجام دهیم.

۳ـ انجام اصلاحات ازدوجهت لازم است.

الف)موضوعات آماری‌وکتب‌مورد استفاده دانش‌آموزان.

ب)آموزگارانی‌که برنامه‌مدرن‌را اجرا می‌نمایند.

۴ـ کیفیت‌کتب باید چه از نظر نحوه ارائه‌مطالب، وچه‌ازنظرمحتوا بهبود یابد. نحوه ارائه مطالب باید طوری باشد که نظر و توجه شاگردان را جلب نماید و محتوای‌آن باید جامع بوده وشامل‌مسائل روز وآمار وارقام درسطح ملی نیز باشد. این‌آمار وارقام درنشریات سازمانهای آماری‌کشور، چاپ می‌شود. کمکهای «موسسه آماربین‌المللی»[1] نیزدراین زمینه بسیار مفید است، بخصوص‌کتاب جدید منتشره توسط این موسسه بنام «آموزش آمار در مدارس جهان» دراین زمینه‌سهم بسزائی دارد.

۵ـ آموزگاران ودبیران نیز باید در زمینه شناخت موضوع ودامنه‌وسیع‌کاربرد آماردرعصرحاضر، آموزش ببینند به‌این منظور، وزارت‌آموزش‌وپرورش‌می‌تواند به‌کمك دانشکده‌های تخصصی در این زمینه،کلاسهای‌فشرده‌ای‌برای آنها ترتیب دهد.

نتایج این زحمات می‌تواند برای دانش آموزان و نسل‌آینده کشور، مفید باشد.

زیرنویس

1- International Statistical Institute

مرجع

این مقاله‌توسط Dr. SH Abdel Aty درسومین کنفرانس‌علوم آماری کشورهای اسلامی درشهریور ۷۱ درکشور رباط ایراد شده است.

جدول تقویم هجری‌شمسی

محمدرضا صیاد
کارشناس تحقیقات فیزیك خورشیدی
مؤسسهٔ ژئوفیزیك دانشگاه تهران

۱ـ مقدمه

دراین ۶۰ سال اخیر، محاسبات تقویم هجری‌شمسی، همواره موردتوجهٔ منجمین، تقویم‌شناسان بوده است وبعضی ازآنها با ارائه جدولهایی، برای این امر مهم، کوششها نموده‌اند. متأسفانه، دربسیاری ازاین جدولها، کبیسه‌های تقویم هجری شمسی یا از زیجهای قدیمی گرفته شده است ویا با استفاده از دوره‌های کبیسه و فرمولهای نجومی تقریبی محاسبه شده‌اند که سالهای کبیسهٔ صحیح را بدست نمی‌دهند. درنتیجه، بمیزان قابل‌ملاحظه‌و غیرقابل‌قبولی، خطای یك شبانه روز در تعیین روزهای هفته را سبب می‌شوند. صرفنظر ازنواقص یاد شده، انجام این‌گونه محاسبات برای همگان به سادگی میسر نمی‌باشد.

کمبود دقت جدولهای یاد شده و همچنین عدم کارآیی‌آن برای همگان از یك طرف و عدم ارائه جدولهایی بر پایهٔ فرمولهای نجومی دقیق از طرف دیگر، نگارندهٔ مقاله را بر آن داشت تا نتیجهٔ سالها مطالعه وتحقیق خود را، به صورت جدولی درمقالهٔ حاضر، به‌پژوهندگانی که به‌نحوی با مسایل دقیق تقویم سروکار دارند، ارائه دهد.

درمورد مزیت‌های جدول حاضر نسبت به‌کارهای ارائه شده توسط دیگران، این نکته قابل ملاحظه است که اولاً: نتایج حاصل ازاین جدول، از دقت نجومی‌کافی برخورداراست و ثانیاً: امکان استفاده از جدول، به علت سادگی روش‌آن، برای همگان میسر می‌باشد.

۲ـ سال عادی و کبیسه

سال شمسی شامل عدد صحیحی از شبانه‌روزهای کامل نمی‌شود. حال آنکه،در زندگی‌روزمره، سال باتعداد شبانه‌روزهای کامل‌مورداستفاده قرارمی‌گیرد. ازاین‌رو، برای برطرف نمودن این مشکل، درتقویم شمسی ازکسرشبانه‌روزسال صرفنظرنموده (۳۶۵ شبانه‌روز-سال عادی) وهرچهار و گاهی هرپنج سال یکبار، جمع‌کسور را که بالغ بریك شبانه‌روزمی‌شود به‌آخر سال اضافه می‌کنند و آن سال ۳۶۶ شبانه‌روزی‌را سال‌کبیسه می‌نامند.

۳ـ تقویم هجری شمسی

تقویم هجری‌شمسی، تقویم رسمی‌ایران می‌باشد. مبداء آن اول بهار سال هجرت حضرت رسول اکرم(ص) ازمکه به‌مدینه می‌باشد ونوع سال‌آن شمسی حقیقی‌است. ردیف، نام (با ریشهٔ اوستایی) و معنی ماههای این تقویم، به شرح جدول زیر می‌باشد.

ردیف	نام	معنی
۱	فروردین	نیروی پیش‌برنده
۲	اردیبهشت	راستی وپاکی
۳	خرداد	کمال و رسایی
۴	تیر	باران
۵	امرداد	جاودانگی
۶	شهریور	کشوربرگزیده
۷	مهر	عهد وپیمان
۸	آبان	آب
۹	آذر	آتش
۱۰	دی	آفریدگار
۱۱	بهمن	اندیشهٔ نیك
۱۲	اسفند	فروتنی وبردباری

شش ماه اول سال ۳۱، پنج ماه بعد ۳۰ وماه اسفند سالهای‌عادی۲۹ وسالهای کبیسه ۳۰ شبانه‌روزی است. این تقویم توسط دورهٔ پنجم‌مجلس‌شورای‌ملی‌ایران، درقانون «تبدیل بروج به‌ماههای‌فارسی‌از نوروز۱۳۰۴شمسی»،مصوب ۱۱فروردین ۱۳۰۴ هجری‌شمسی، به‌عنوان تقویم‌رسمی کشورپذیرفته وجانشین‌تقویم هجری‌شمسی برجی شده است.

روزنوروز(اول‌فروردین)وکبیسه‌های تقویم هجری شمسی ازطریق محاسبهٔ لحظهٔ تحویل سال (لحظهٔ رسیدن مرکز قرص خورشیدبه‌نقطهٔ اعتدال فروردین) ومقایسهٔ آن با لحظهٔ ظهرحقیقی درامتداد نصف‌النهاررسمی‌ایران(نصف‌النهار جغرافیایی با طول ۵۲/۵ درجهٔ شرقی) تعیین می‌شود. یکی از دوحالت مشروحهٔ زیر ممکن‌است اتفاق بیفتد.

الف) اگر لحظهٔ تحویل سال بین بعد ازظهر سیصدوشصت‌وپنجمین وقبل ازظهر سیصد وشصت و ششمین روزسال واقع

شود. در این‌حالت، سیصد و شصت‌وششمین روزسال را، نـوروز وسال تمام شده را عادی به‌حساب می‌آورند.

ب) اگر لحظهٔ تحویل سال در بعد از ظهر سیصد و شصت و ششمین روزسال‌واقع شود. در این حالت، سیصـد و شصـت و هفتمین روزسال‌را، نوروز وسال تمام‌شده را کبیسه به‌حساب می‌آورند.

مطالعـات نشان می‌دهندکه کبیسه‌های تقویم هجری شمسی هر چهار وگاهی هر پنج سال یکباراتفاق می‌افتند.

۴ـ تاریخ‌گـذاری یکنـواخـت با تقویم هجری‌شمسی

بررسی آثـار و نشانه‌های موجـود در کتب دورهٔ اسلامی،کتب مذهبی‌زرتشتیان، کتیبه‌ها، همچنین سنن وآیین‌های‌کنونی و روایات موجود درآثار سایـرملل نشان می‌دهندکـه از ۳۶ سال قبـل از واقعـهٔ هجرت تاکنون، حساب روز، ماه وسال‌در ایران ازتنوع خاصی برخوردار بوده ودر طول دوره‌های تاریخ، بتدریـج تحول و تکامل‌یافته است. درمحدودهٔ زمان یادشده، تقویمهای‌گوناگونی با مبدأ تاریخ‌گذاری متفاوت، به نامهای: اوستایی، یـزدگردی، خراجی، جلالی (ملکی)، ترکی ـ مغـولی (اویغوری وختایی)، غازانـی (خـانـی)، هجری شمسی برجی، هجری شمسی وغیره متداول بوده است. البته درکنارتقویمهای یاد شده، تقـویم هجری قمری برای امور مذهبی رواج‌کامل داشته است.

مورخین‌عصرحاضر، برای‌تاریخ‌گذاری وقایع‌تاریخ ایران، به‌جای استفاده ازاین همد تقویمهای‌گوناگـون، وقایـع تاریخ ایران را به‌سه دورهٔ عمده تقسیم نموده و درهر دوره، ازتقویم بخصـوصی استفاده می‌کنند. به‌این ترتیب‌که‌کلیهٔ وقایع قبل‌از اسلام را با تقویم میلادی، بعد ازاسلام تا ۱۳۴۳ هجری‌قمری(مطابق ۱۳۰۳هجری شمسی) را عموماً با تقویم هجری‌قمری و ازسال ۱۳۰۴ هجری شمسی به‌بعـد را با تقویم هجری شمسی تاریخ‌گذاری‌می‌کنند.

جدول تقـویم هجری شمسی، تـوسط نگارنده برمبنای تقویم رسمی ایران‌طرح شده است. ازآنجـاکه خصـوصیات این تقویم، تنهـا به‌سالهـای بعـد از ۱۳۰۴ هجری‌شمسی اختصـاص دارد، بنابراین، برای تاریخهای قبل ازسال ۱۳۰۴هجری شمسی، نتایج حاصل از این جدول، فاقد واقعیت تاریخی می‌باشد وبصورت فرضی درنظرگرفته می‌شود.

۵ـ پایه‌های محاسبـه بـرای طرح جدول

نگارندهٔ مقـاله، جـدول تقویم هجری شمسی را برپایـه‌های محاسبـهٔ زیر طرح نموده است.

الف) کبیسه‌های ۱۰۱۱ سال هجـری شمسی (ازسال ۳۶ــ تا ۹۷۴)، برپـایهٔ کتاب «شرح تقویمهای مختلـف ومسئلـهٔ کبیسه‌های جلالی» (تقی ریاحی، ۱۳۳۵)، استـواراست.کبیسه‌های یاد شده، به نوبهٔ خـود، برپایهٔ جـدولهـای نیـوکمـب (Newcomb) منجم شهیـرامریـکایی، محاسبه شده است. جـدولهای یاد شده، با استفاده ازپارامترهای نجومی‌به‌دست‌آمده از رصـدهای دوقرن اخیـر وبعضـی از اندازه‌گیری قدما تدوین شده‌است. بدیهی است‌که نتایج حاصل‌ازجدولهای یادشده، درمقایسه با فرمولهای نجـومی دقیق‌کـه امروزه موردقبول واستفاده منجمین معاصر می‌باشد، از دقت‌کمتری برخورداراست.

ب)کبیسه‌های ۴۹۱ سال هجری‌شمسی (ازسال ۹۷۵ تا ۱۴۶۵)، برپایـهٔ مقـالهٔ «کبیسه‌های ۵۰۰ سال‌تقویم شمسی»(ایرج ملک‌پورـمحمدرضا صیاد، ۱۳۶۱)،استوار است.کبیسه‌های یاد شده، به‌نوبهٔ خود، بر پایهٔ فرمولهای نجومی دقیق که موردقبول واستفادهٔ منجمین معاصرمـی‌باشد، محاسبه شده است. فرمولهای یاد شده، با استفاده ازپارامترهای نجومی دقیـق‌تر وبـه‌دست آمده از رصدهای چند دههٔ اخیـر (دراثر اختراع و تکمیـل دستگاههای نجـومی پیشرفته‌تر)، تدوین شده است.

۶ـ جدول و روش‌استفاده از آن

درزیر جدول‌قراردادها و روش‌استفاده ازجدول با ذکرمثالهایی به‌اختصار شرح داده می‌شود.

۱.۶ جدول

این جدول شامل پنـج‌قسمت می‌باشد. قسمت بالا و راست‌آن مربـوط به‌ردیف سالهای دوره (تفاضـل عدد سال ابتدای دوره ازعدد سال موردنظر)، قسمت بالا و چـپ‌آن مربـوط به‌روزهـای ماه، قسمت راست‌آن مربوط به حـدود سالهای دوره (اعداد سالهای‌ابتدا وانتهای دوره)،قسمت چپ‌آن مربوط به‌ماههای سال وبـاالاخره قسمت پایین‌آن مربوط به‌نام روزهای‌هفته می‌بـاشد. این جـدول، امکان می‌دهـد تا تقویم ۱۵۰۲ سال هجری شمسی (از سال ۳۶ــ تا ۱۴۶۵)، ازلحـاظ تعییـن سال عادی و کبیسه وتعیین روزهفتـه محاسبـه شود.

۲.۶ قراردادها

علامتهـای قراردادی جـدول به شرح زیراست.

الف) اعداد مربـوط به‌ردیف سالهای دوره، درصورتی‌که دارای علامتهای + و ++ باشند، به‌ترتیب مشخـص‌کنندهٔ سال‌کبیسهٔ چهار وپنج‌سالی است.

ب) اعداد مربوط به ردیـف سالهای دوره، درصورتی‌که فاقد علامتهای یادشده درقسمت (الف) باشند، مشخص‌کنندهٔ‌سال عادی است.

ج) علامت — اعداد سالهای ابتداء وانتهای دوره ومحل‌های خالی جدول را مشخص می‌کند.

د) نام روزهای‌هفته، به‌ترتیب با اعداد ۰ تا ۶ نشان داده شده‌اند. یعنی، شنبه با عدد ۰، یکشنبه با عدد ۱، ... و جمعه با عدد ۶ مشخص شده است.

ه) حروف الفبای فارسی و لاتین به ترتیب مشخص‌کنندهٔ سطرها و ستونهای جدول است.

و) سال صفر هجری شمسی، به‌تبعیت از روش منجمین، به‌عنوان مبنایی برای سالهای قبل (دارای علامت منفی) و بعد ازهجرت، اختیارشده است. از آنجا که مورخین درتاریخ‌گذاری، از سال صفر استفاده نمی‌کنند، بنابراین، قدرمطلق‌عدد سالهای‌قبل ازهجرت طبق روش‌مورخین، یك واحد از روش منجمین بزرگتراست. با این حساب، سالهای ۱ —، ۲ — و... به‌روش مورخین، به‌ترتیب مطابق‌سالهای ۰، ۱ — و... به‌روش منجمین‌است.

۳.۶ روش استفاده ازجدول

روش تعیین سال عادی وکبیسه وتعیین روزهفته بشرح زیراست.

۱.۳.۶ تعیین سال عادی وکبیسه

برای تعیین سال عادی وکبیسه، به ترتیب زیرعمل می‌شود.

الف) حدود سالهای دوره‌ای را که سال موردنظر درآن قرار دارد، ازقسمت راست جدول پیدا می‌کنیم.

ب) عدد ردیف سال دوره را ازطریق حاصل تفریق عدد سال ابتدای دوره از عدد سال موردنظر پیدا می‌کنیم. اگرعدد ردیف سال دوره، دارای علامتهای + یا ++ باشد، دراین‌صورت سال‌موردنظر به‌ترتیب سال‌کبیسهٔ چهاریا پنج‌سالی است، درغیراین‌صورت، سال موردنظر عادی است.

مثال ۱. وضعیت عادی یاکبیسه بودن سالهای ۱۳۲۷، ۱۳۷۰ و ۱۴۰۸ هجری شمسی را تعیین می‌کنیم.

حدود سالهای دوره‌های ۱۳۳۷–۱۳۰۵ (ع-X)، ۱۳۷۰–۱۳۳۸ (ظ-X) و ۱۴۳۶–۱۴۰۴ (ك-Y) که به ترتیب سالهای ۱۳۲۷، ۱۳۷۰ و ۱۴۰۸ هجری شمسی درآن قرار دارند، ازسمت‌راست جدول پیدا می‌کنیم وازآنجا، عدد ردیف سال دوره‌های یاد شده، به‌ترتیب ۲۲ (س-O)، ۳۲ (ز-M) و ۴ (ض-M) تعیین می‌شوند. چون عدد ۲۲ فاقد علامت، عدد ۳۲ دارای علامت + و عدد ۴ دارای علامت ++ می‌باشند، بنابراین، سالهای ۱۳۲۷، ۱۳۷۰ و ۱۴۰۸ هجری شمسی، به‌ترتیب سال عادی، سال کبیسهٔ چهارسالی وسال‌کبیسهٔ پنج‌سالی‌است.

۲.۳.۶ تعیین روزهفته

برای تعیین روزهفته، به‌ترتیب زیر عمل می‌شود.

الف) خانه‌های مربوط به حدود سالهای دوره وعدد ردیف سال دورهٔ مربوط به عدد سال موردنظر را مطابق روشی‌که درقسمت ۱.۳.۶، شرح داده‌شد، پیدا می‌کنیم. از خانهٔ مربوط به حدود سالهای دوره، خطی افقی به‌طرف چپ و ازخانهٔ مربوط به‌عدد ردیف سال دوره، خطی عمودی به‌طرف پائین درنظر می‌گیریم. در راستای خطچینی‌که ازخانهٔ مربوط به‌محل‌تلاقی‌این دوخط باهمدیگر، می‌گذرد، خط‌کشی قرارمی‌دهیم.

حدود سالهای دوره		Y	X	W	V	U	T	S	R	Q
	ط	—	۱۳۷۱ —۱۴۰۳	۱۱۴۰—۱۱۷۲	—	۸۴۷ —۸۷۹	۷۸۵ —۸۱۷	۵۵۴ —۵۸۶	—	۲۶۱ —۲۹۳
	ظ	—	۱۳۳۸ —۱۳۷۰	۱۱۰۷—۱۱۳۹	۱۰۴۵ —۱۰۷۳	—	۷۵۲ —۷۸۴	۵۲۱ —۵۵۳	—	۲۲۸ —۲۶۰
	ع	—	۱۳۰۵ —۱۳۳۷	۱۰۷۴—۱۱۰۶	۱۰۱۲ —۱۰۴۴	—	۷۱۹ —۷۵۱	۴۸۸ —۵۲۰	—	۱۹۵ —۲۲۷
	غ	—	۱۲۷۲ —۱۳۰۴	—	۹۷۹ —۱۰۱۱	—	۶۸۶ —۷۱۸	۴۵۵ —۴۸۷	۳۹۳ —۴۲۱	۱۶۲ —۱۹۴
	ف	—	۱۲۳۹ —۱۲۷۱	—	۹۴۶ —۹۷۸	—	۶۵۳ —۶۸۵	۴۲۲ —۴۵۴	۳۶۰ —۳۹۲	۱۲۹ —۱۶۱
	ق	۱۴۳۷ —۱۴۶۵	۱۲۰۶ —۱۲۳۸	—	۹۱۳ —۹۴۵	—	۶۲۰ —۶۵۲	—	۳۲۷ —۳۵۹	۹۶ —۱۲۸
	ک	۱۴۰۴ —۱۴۳۶	۱۱۷۳—۱۲۰۵	—	۸۸۰ —۹۱۲	۸۱۸ —۸۴۶	۵۸۷ —۶۱۹	—	۲۹۴ —۳۲۶	۶۳ —۹۵

ب) از خانهٔ مربـوط به ماههای سال، خطی افقی به‌طرف راست و ازخانهٔ‌مربوط به‌روزهای ماه، خطی‌عمودی به‌طرف پائین درنظرمی‌گیریم. در راستای خط چینی که ازخانهٔ مربوط به‌محل تـلاقی این دوخط با همدیگر، می‌گذرد، خـط‌کش دیگری قرارمی‌دهیم.

ج) لبه‌هـای دوخـط‌کش مشروح در بندهای(الف) و(ب) این قسمت،همدیگر را درعددی قطع می‌کنندکه مشخص‌کنندهٔ روزهفتهٔ موردنظراست.

مثـال ۲. روزهـفتـهٔ ۲ آذر ۱۳۲۷ هجری شمسی را تعیین می‌کنیم.

حدود سالهـای دورهٔ ۱۳۳۷ـ۱۳۰۵ (ع-X) وعـدد ردیـــف سال دورهٔ ۲۲ (س-O) را درجدول‌پیدا می‌کنیم ازمحل تلاقی خطوط‌گذرنده ازخانه‌های یادشده، خانهٔ (ع-O) را مشخـص‌می‌کنیـم و در راستای خط‌چینی که ازاین خانه‌می‌گذرد، خط‌کشی قرارمی‌دهیم.

ماه‌آذر (ر-A) و روز ۲ (الف - D) را درجدول پیدا می‌کنیم. ازمحـل تلاقی خطوط‌گذرنده ازخانه‌های یاد شده، خانهٔ (ر-D) را مشخص می‌کنیم و در راستای خط‌چینی‌که ازاین‌خانه می‌گذرد، خط‌کش دیگری قرارمی‌دهیم.

لبه‌های دوخط‌کش یاد شده همدیگر را درعدد (۳) قطع می‌کنند. بنابراین، روز هفتهٔ ۲ آذر ۱۳۲۷ هجری شمسی،سه‌شنبه است.

مراجع:

ریاحی، ت.، شرح تقویمهای مختلف ومسئلهٔ کبیسه‌های‌جلالی،شرکت‌سهامی‌چهر، تهران، ۱۳۳۵ شمسی صیاد، م. ر.. جـدول تقویم دایمی‌هجری شمـی، گـزارش سیـزدهمین کنفرانس ریاضی‌کشور، کرمان، ۱۳۶۱

صیاد، م. ر. ۱، معادلهـای تقویم هجری شمسی برپایه توابـع‌کامپیـوتری FIX و MOD،

نشریه تحقیقاتی فیزیک زمین وفضـا، سالهای هیجدهم و نوزدهم، شماره‌های ۱ و ۲، صفحه ۱۰۹، ۱۳۶۱ ملـک‌پور، ۱. ـــ

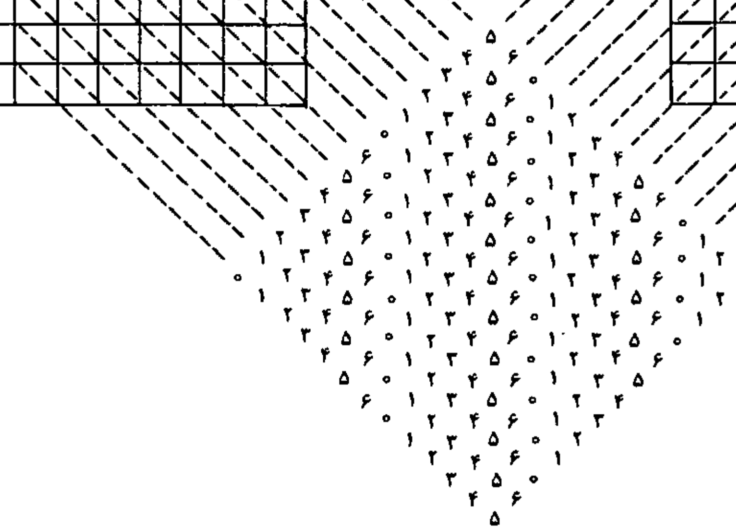
صیــاد، م. ر. کبیسه‌های ۵۰۰ سال تقـویم شمسی، نشریه تحقیقاتی‌فیزیک زمین وفضا، سال یازدهم، شماره‌هـای ۱ و ۲ ، صفحه ۲۵، ۱۳۶۱.

جدول تقویم هجری‌شمسی (ازسال ۳۶ـ تا ۱۴۶۵)

ردیف سالهای دوره							
	O	N	M	L	K	J	I
ز	—	—	۳۲+	۳۱	۳۰	۲۹	—
ژ	۲۸+	۲۷	۲۶	۲۵	—	۲۴+	۲۳
س	۲۲	۲۱	—	۲۰+	۱۹	۱۸	۱۷
ش	—	۱۶+	۱۵	۱۴	۱۳	—	۱۲+
ص	۱۱	۱۰	۹	—	۸+	۷	۶
ض / P	۵	—	۴++	۳	۲	۱	۰
۶۲ـ ۳۰							
۲۹تا ۳ ـ							
۴ـ تا ۳۶ـ							
ـ							
ـ							
ـ							
ـ							

روزهای ماه							
	H	G	F	E	D	C	B
الف	۶	۵	۴	۳	۲	۱	—
ب	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷
پ	۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴
ت	۲۷	۲۶	۲۵	۲۴	۲۳	۲۲	۲۱
ث / A	—	—	—	۳۱	۳۰	۲۹	۲۸

ماههای سال		
ج	فروردین ـ اسفند	
چ	خرداد ـ آبان	
ح	مرداد ـ بهمن	
خ	مهر	
د	اردیبهشت ـ دی	
ذ	تیر	
ر	شهریور ـ آذر	



نام روزهای هفته

درباره‌درس مثلثات

هوشنگ شکرانیان عضوهیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه رازی کرمانشاه

راجع به «درس مثلثات»، اظهارنظرهای بسیاری می‌شود که عموماً با هم تفاوت اساسی ندارند ولی با هدف اصلی درس مغایرت دارند. برخی از این اظهارنظرها را می‌آوریم:

شاگردان دبیرستان به شاگردان دوره راهنمایی می‌گویند:

«مثلثات درسی است دشوار، همه‌اش فرمول است».

وقتی از شاگردی می‌پرسند که در کلاس درس مثلثات چه می‌گذرد می‌گوید:

«معلم سر کلاس درس می‌دهد، فرمول می‌نویسد، آن را داخل کادر قرار می‌دهد، مسأله‌ای حل می‌کند. ماهم مسئله حل می‌کنیم و برای حل مسائل از فرمول استفاده می‌کنیم».

دبیر مثلثات سر کلاس درس به دفعات می‌گوید:

«بچه‌ها باید خوب فرمول‌ها را بدانید، باید آنها را به‌خاطر داشته باشید تا بتوانید مسائل را خوب حل کنید. بدون دانستن فرمول، کاری از پیش نمی‌رود».

شاگرد زرنگ به شاگرد متوسط می‌گوید:

«باید فرمول‌ها را بدانی (خوب از بر باشی)».

شاگرد کلاس کنکور می‌گوید:

«مثلثات درس شگردهاست، آدم باید تا می‌تواند شگرد یاد بگیرد. به غیر از فرمول‌های کتاب، چندین فرمول دیگر نیز باید بداند».

دانشجویان دانشگاه می‌گویند:

«ما با مثلثات چندان کاری نداریم، اگر هم به فرمول احتیاج داشته باشیم آن را از جایی پیدا می‌کنیم. فرمول‌های مثلثات فراوانند و زود به فراموشی سپرده می‌شوند».

درحال حاضر دانش‌آموزان، درس مثلثات را انبوهی از فرمول می‌دانند. اینان فرمول‌های بسیاری را از بر می‌کنند و به‌وسیله آنها به جنگ تمرینات می‌روند. **دانش‌آموزان در فرمول‌ها و تمرینات گم می‌شوند و اساساً توجه‌شان به‌اصل مطلب جلب نمی‌شود**، تا آن‌جاکه مفاهیم اساسی آن را به‌درستی فرا نمی‌گیرند و پس از چندی فرمول‌هایی را که ازبر کرده‌اند به فراموشی می‌سپارند و آن‌قدر توانایی کسب نمی‌کنند که قادر به‌استنتاج فرمول‌های ساده باشند.

خلاصه کلام، درس مثلثات بادشواری‌هایی روبروست و درمدارس با آن برخورد درستی نمی‌شود، چگونگی برگزاری کنکور نیز موجب گسترش «کژ آموزی» این درس می‌شود.

حال ببینیم اصل مطلب چیست؟ «مثلثات» در رابطه با «حل مثلث» پدید آمده است. البته اکنون می‌توان آن را بخشی ازهندسه (تحلیلی) دانست. در این درس ابتدا «دایره مثلثاتی» تعریف می‌شود. «رادیان» به‌عنوان واحد کمان تعریف می‌شود، سپس با استفاده از محورهای متعارف درهندسه محورهای سینوس و کسینوس معرفی می‌شود. آنگاه محورهای تانژانت و کتانژانت تعریف می‌گردد.

با استفاده از این تعاریف قادر خواهیم بود که تمرینات بسیاری را حل کنیم و در عین حال مطالب بنیادی را فراگیریم. مثلاً می‌توانیم ثابت کنیم که:

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\operatorname{cotan}\alpha$$

$$\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

با حل چنین تمریناتی، دایره مثلثاتی و محورهای مربوط به آن در ذهن ما جای می‌گیرد.

با این تعاریف ومطالب مقدماتی هندسه، فرمول‌های زیر را ثابت می‌کنیم:

$$\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱ \qquad (۱)$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad (۲)$$

$$\operatorname{cotan}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (۳)$$

باکمک این سه فرمول می‌توانیم تمرینات جالبی را حل کنیم. هرچند در ابتدای کار، حل این قبیل تمرینات، ما را در به‌خاطر سپردن این فرمول‌ها یاری می‌دهد ولی حل تعداد زیادی از آنها، اولین گام در دور شدن ازهدف اصلی درس است.

کلاس پیش می‌رود، دانش‌آموزان در فرمول غرق می‌شوند، چه تنبل وچه زرنگ، فقط فرمول را می‌شناسند. چندماهی که از درس می‌گذرد فرمول زیر ثابت می‌شود:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (۴)$$

اثبات این فرمول، بسیار جالب و دلنشین است ولی به آن توجه نمی‌شود، بیشتر خود فرمول مطرح است. بلافاصله پس از بیان فرمول(۴)، فرمول‌هایی ازقبیل فرمول‌های زیر را نتیجه می‌گیرند:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

این فرمول‌ها ابزار کارآمدی برای حل بسیاری از تمرینات و ازجمله تمرینات بخش‌های نخستین درس است.

باکمک این فرمول‌ها و با محاسبه‌ای ساده، روابطی چون

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

ثابت می‌شود و $\sin 75^\circ$ و $\cos 15^\circ$ محاسبه می‌شود. دانش‌آموز بافراگرفتن این فرمول‌ها خود را بی‌نیاز از به‌خاطر داشتن مفاهیم بنیادی می‌داند.

پس از اثبات فرمول (۴)، فرمول‌های متعددی ثابت می‌شود و از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که آنها را به‌خاطر بسپارند.

درس با بازی‌کردن با این چهار فرمول ادامه می‌یابد. فرمول‌هایی چون $\sin^2\alpha$، $\sin\alpha$ برحسب $\tan\frac{\alpha}{2}$ و $\cos 4\alpha$ چیزی نیستند جز نتیجه‌ای از این چهار فرمول.

لازم است متذکر شویم که درمثلثات، چهارفرمول اخیر، فرمول‌های اساسی این درس هستند یعنی تمامی فرمول‌های مثلثات از این چهارفرمول نتیجه می‌شوند.

حال ببینیم در کلاس درس چه می‌گذرد. اکثریت قریب به‌اتفاق دانش‌آموزان می‌خواهند خود را برای امتحان آخر سال آماده کنند. توجه آنان به‌سؤالات امتحانی معطوف می‌شود و دبیران نیز از آنان تبعیت کرده یا خود آنان را به‌این راه هدایت می‌کنند. درسؤالات امتحانی، از مفاهیم اولیه خبری نیست و به «حل مثلث» که کاربرد عملی این درس است نیز توجهی نمی‌شود.

دلیلی که برنیامدن سؤالی از مفاهیم بنیادی عنوان می‌شود آن است که مثلاطرح سؤالی چون: «دایره مثلثاتی ومحورهای مثلثاتی را درج کنید ونشان دهید که وقتی کمانی به $\frac{\pi}{2}$ نزدیك شود، تانژانت آن از هرعددی بزرگتر می‌شود.»، دانش‌آموزان را به «ازبرکردن» وادارمی‌سازد. درحالی که اکنون کار حکاکان «سکه» است و با روال کنونی، چنین پاسخی مقبول نیست.

اصولا ما از مقوله «ازبرکردن» تصور روشنی نداریم. دانستن مفاهیم بنیادی، یك امرضروریست **درحالی‌که به‌خاطرسپردن انبوهی‌ازفرمول‌ها و شگردها کاری است عبث وچیزی جز «ازبرکردن» نیست.**

درامتحان، از دادن مسائلی با قید این که «فقط با مفاهیم اساسی حل کنید.»، خودداری می‌کنند. لابد دلیلشان آن است که «گرهی راکه با دست گشوده شودچرا با دندان بگشاییم».

نه‌تنها درامتحان، سؤالی ازحل مثلث نمی‌آید بلکه درکلاس درس نیز نسبت به آن توجهی نمی‌شود شاید دلیل این امر آن است که حل‌مثلث‌با نوشتن‌فرمول‌هایی که به‌صورت «قشنگ» و پشت سرهم بیایند مقدورنیست وکمی دردسرهای محاسباتی دارد.

با مطالبی که‌گفتیم وخاطراتی که‌خود ازکلاس مثلثات دارید نیازی به‌توصیف آن نمی‌بینیم.

دراین‌کلاس، دانش‌آموزان و دبیران بسان کشاورزانی هستند که فقط درتدارك «برداشت» هستند نه «کاشت». البته این مثال، مثال خوبی نیست، چه درکشاورزی چنین چیزی ممکن نیست ولی درکلاس درس مثلثات، وضع چنین است.

آیا با آن چه که گفتیم لازم است که محتوی و روش درس مثلثات تغییر کند؟ ما پاسخ به‌این سؤال را مثبت‌می‌دانیم.

محتوای اصلی درس، مفاهیم بنیادی و حل مثلث است که به‌هیچ‌یك ازاینها توجهی نمی‌شود. شاید تنها موردی که بتوان برای «دفاع» از این درس عنوان کرد این‌باشدکه «دانش‌آموزان را به‌کار مرتب ومنظم عادت می‌دهد و حوصله پرداختن به‌محاسبات ریاضی رادرآنان می‌پروراند. این «دفاع» ظاهراً بجاست، چه عادت به‌محاسبه ونظم وترتیب، یکی از شرایط لازم برای فراگرفتن ریاضی است ولی دراوضاع واحوال‌کنونی که دانش‌آموزان را به‌فراگرفتن شگردها وا می‌دارند ومسائل را با عجله حل می‌کنند، خواست ما برآورده نمی‌شود.

گذشته ازآن به‌تدریج دروس تازه‌ای به‌برنامه مدارس اضافه شده و می‌شود. حل مسائل جبرخطی وماتریس و برنامه‌نویسی کامپیوتر، هرچند مقدماتی، بیش‌از حل مسائل مثلثات، دانش‌آموز را به نظم وانضباط عادت می‌دهد. پرداختن به‌مسائل «تابع اولیه» نیزمی‌تواند همان نظم و ترتیبی را در دانش‌آموز پرورش دهدکه حل مسائل مثلثات.

درخاتمه پیشنهاد می‌کنیم‌که محتوی و روش این درس تغییرکند. بهتراست‌این درس به‌صورت بخشی از هندسه یا جبر ارائه شود، برمفاهیم مقدماتی‌آن تأکید شود و دانش‌آموزان را واداریم که تمریناتی باکمك مفاهیم اولیه وبه روش هندسی‌اثبات‌کنند. انبوه فرمول‌هایی‌که در این درس مطرح می‌شود به‌صورت تمرین داده شود. بااین‌روش‌وقتی‌که دانش‌آموز به‌دانشگاه‌راه‌یافت بهترمی‌تواند به‌استنتاج فرمول‌های موردنیاز بپردازد وتا حدودی به حل مثلث توجه شود. مسائل حل مثلث ازلحاظ محاسباتی وابتکاری جالبند.

البته انجام این‌کارها، کارساده‌ای‌نیست. به تجربه دریافته‌ایم که در تغییر دادن کتابهای درسی‌چندان‌موفق نبودیم. گذشته ازاین باید درنظر داشت که نیروهایی وجود دارندکه درصورت احساس خطر، از «معدن طلا»ی خود دفاع خواهندکرد.

تاثیر آموزش ریاضی در قبولی آزمون سراسری دانشگاههای کشور

• مقاله ارائه شده به: هفتمین کنگره آموزش ریاضی کانادا. کبك ۲۳-۱۷ اوت ۱۹۹۲

دکتر محمد حسین پورکاظمی
عضو هیات علمی دانشگاه شهید بهشتی
معاون فنی و پژوهشی سازمان سنجش آموزش کشور

چکیده:

در جمهوری اسلامی ایران کلیه دانش‌آموزان پس از گذراندن موفقیت آمیز دوره‌های ابتدایی، راهنمایی ومتوسطه طی دوازده سال، به‌اخذ دیپلم در رشته‌های مختلف نائل می‌گردند. در دوره متوسطه مهمترین رشته‌ها عبارتنداز: ریاضی‌فیزیك، تجربی، اقتصاد اجتماعی، فرهنگ ادب و بالغ بر ۳۶ رشته مختلف فنی وحرفه‌ای.

در ایران برای ورود به دانشگاهها و مؤسسات آموزش عالی کلیه دیپلمه‌ها می‌بایست در آزمون سراسری شرکت کنند. این آزمون در دومرحله انجام می‌پذیرد.

کلیه رشته‌های تحصیلی در دانشگاهها وموسسات آموزش عالی در چهار گروه آزمایشی تقسیم شده‌اند. این گروهها عبارتند از: علوم ریاضی وفنی، علوم‌تجربی، علوم انسانی وهنر. هر داوطلب با هر نوع دیپلمی اجازه دارد، تنها در یك گروه آزمایشی شرکت کند.

در سال ۱۳۷۰، ۸۳۱۳۰۵ نفر در آزمون سراسری برای ورود به‌دانشگاهها وموسسات آموزش عالی داوطلب شدند. از این عده، ۸۳۱۲۳ نفر پذیرفته شدند.

تعداد شرکت‌کنندگان و ظرفیت دانشگاهی درهر گروه درجدول زیر نشان داده شده است:

در این تحقیق می‌بینیم دیپلمه‌های ریاضی براساس شاخصهای مختلف نسبت به سایر دیپلمه‌ها موفقترند. این نتیجه، اهمیت آموزش ریاضی را در کلیه مقاطع تحصیلی و رشته‌های دبیرستانی حتی در رشته‌هایی که مستقیماً به‌عنوان ابزار بکار نمی‌رود، تاکید می‌کند.

نام گروه آزمایشی	ریاضی - فنی	تجربی	انسانی	هنر	کل
تعداد داوطلب	۱۴۲۲۰۸	۳۱۳۴۵۶	۳۶۳۱۴۶	۱۲۴۹۵	۸۳۱۳۰۵
ظرفیت دانشگاهی	۲۳۴۱۰	۲۵۸۹۷	۳۲۳۰۶	۵۱۰	۸۳۱۲۳
درصد پذیرش	۱۶/۵	۸/۳	۹/۲	۴/۱	۱۰

مقدمه:

در جمهوری اسلامی ایران، دوره آموزش ابتدایی پنج سال و دوره راهنمایی سه سال می‌باشد، سپس دانش‌آموزان به دبیرستان و هنرستانهای فنی‌حرفه‌ای راه پیدا می‌کنند. دوره‌های دبیرستان و هنرستانها چهارسال است که پس از گذراندن دوره چهارساله به‌اخذ دیپلم کامل متوسطه نائل می‌آیند. در دبیرستان چهار رشته ریاضی فیزیك، تجربی، اقتصاد اجتماعی و فرهنگ ادب دایر است. سال اول دبیرستان رشته‌های ریاضی فیزیك و تجربی وهمچنین اقتصاد اجتماعی و فرهنگ ادب دارای دروس مشترك هستند ولی سه سال بعد در بسیاری از دروس متفاوت می‌باشند. دانش‌آموزان فنی حرفه‌ای با هدف تربیت تکنسین درجه دو تعلیم می‌بینند و دروس نظری مانند ریاضی- فیزیك وشیمی درسطح پایین و برای آنها بیشتر آموزشهای فنی وحرفه‌ای وکارگاهی تدریس می‌گردد. بالغ بر ۳۶ نوع دیپلم فنی وحرفه‌ای وجود دارد. توزیع تقریبی درصد دیپلمه‌های جمهوری اسلامی ایران به قرار جدول شماره ۱ است.

چنانکه ملاحظه می‌شود بیشترین درصد مربوط به دیپلمه‌ها تجربی یعنی ۳۷/۷٪، اقتصاد اجتماعی ۱۹/۷٪، فرهنگ ادب ۱۵/۷٪ و ریاضی‌فیزیك ۹/۶٪ است. سایر دیپلمه‌ها درصدکمتری را به خود اختصاص داده‌اند. [۱]

کلیه دیپلمه‌ها سالی یك بار در آزمون سراسری برای ورود به دانشگاهها و موسسات آموزش عالی درچهار گروه آزمایشی امتحان می‌دهند. درسال ۱۳۷۰ تعداد ۸۳۱۳۰۵ نفر درآزمون سراسری درچهارگروه فنی و ریاضی، علوم‌تجربی، علوم انسانی وهنر شرکت‌کردند.

در این تحقیق می‌بینیم دیپلمه‌های ریاضی براساس شاخصهای مختلف نسبت به‌سایر دیپلمه‌ها موفقترند. این نتیجه، اهمیت آموزش ریاضی درکلیه رشته‌های دبیرستانی را حتی در رشته‌هایی که مستقیماً ریاضیات را به عنوان ابزاری بکار نمی‌برند تاکید می‌کند.

۱- ساعات تدریس ریاضی در دبیرستان وهنرستان ومواد درسی

پیش از آنکه ملاکها وشاخصهای مربوطه را معرفی‌کنم، ضروری است تصویری از وضعیت آموزش‌ریاضیات‌در دبیرستانهای ایران، آزمونهای سراسری که مبنای محاسبه شاخصهای فوق بوده‌اند را ارائه دهم.

تدریس ریاضیات در دبیرستان وهنرستان طی چهارسال بر اساس جدول شماره ۲ است:

چنانکه ملاحظه می‌شود ساعات تدریس ریاضی در دبیرستان وهنرستان به ترتیب ازبیشترین تا کمترین به‌قرار رشته‌های ریاضی، تجربی، فنی و حرفه‌ای، اقتصاد اجتماعی وفرهنگ ادب می‌باشد.

۱-۱- **مواد تدریسی**، در رشته‌های مختلف مواد ریاضی درسی به شرح زیر [۳] است:

۱-۱-۱ **هندسه**. در رشته‌ریاضی‌فیزیك هندسه درهرچهارسال تدریس می‌گردد و

ریاضی‌فیزیك	۹/۶
تجربی	۳۷/۷
فرهنگ وادب	۱۵/۷
اقتصاد اجتماعی	۱۹/۷
فنی (۲۰ نوع دیپلم)	۸/۴
حرفه‌ای‌وسایر دیپلمه‌ها (۱۶ نوع دیپلم)	۸/۸

جدول شماره ۱

نوع دیپلم / سال	سال اول	سال دوم	سال سوم	سال چهارم
ریاضی‌فیزیك	۸ ساعت	۹ ساعت	۹ ساعت	۱۱ ساعت
تجربی	۸ ساعت	۴ ساعت	۴ ساعت	۴ ساعت
اقتصاد اجتماعی	۳ ساعت	۳ریاضی+۲ آمار	۳ آمار	—
فرهنگ وادب	۳ ریاضی	۲ آمار	—	—
فنی	۴ ساعت	۴ ساعت	۴ ساعت	۴ ساعت
حرفه‌ای	۳ ساعت	۲ ساعت	۲ ساعت	۲ ساعت

جدول شماره ۲

شامل:

هندسه مسطحه، هندسه فضایی، هندسه تحلیلی در R^2، هندسه تحلیلی در R^3، مقاطع مخروطی. در رشته تجربی هندسه تحلیلی در R^3 تدریس نمی‌گردد و بقیه مطالب نیز کمتر تدریس می‌شود. در رشته‌های فنی وحرفه‌ای ازتجربی کمتر و در رشته‌های فرهنگ و ادب و اقتصاد از هندسه مطلبی بیان نمی‌شود.

۱-۱-۲ **جبر**. در رشته ریاضی‌فیزیک، جبر مقدماتی طی چهارسال به‌طور کامل بحث می‌شود،

مباحث از مقدمات جبرجدید شامل: گروه، حلقه، میدان ونظریه اعداد تدریس می‌گردد. وجبرخطی نیز بیان می‌شود. در رشته تجربی جبرمقدماتی کمتر بیان شده وجبرجدید و از جبرخطی مطلبی بیان نمی‌شود. در رشته‌های فنی و حرفه‌ای مطالبی کمتر از رشته تجربی تدریس می‌شود و در رشته‌های اقتصاد اجتماعی و فرهنگ ادب طی دوسال اول متوسطه جبرمقدماتی به‌طورخلاصه تدریس‌می‌شود.

۱-۱-۳ **مثلثات**. در رشته ریاضی‌فیزیک طی سه سال کلیه مطالب مثلثات (به‌جز مثلثات کروی) تدریس می‌گردد و کاربرد آن درحل مثلث بیان‌می‌شود. درگروه تجربی همین مطالب‌با عمق وسطح‌کمتری تدریس می‌شود و در رشته‌های فنی کمتر و در رشته‌های حرفه‌ای واقتصاد اجتماعی وفرهنگ ادب اصولا تدریس‌نمی‌شود.

۱-۱-۴ **ریاضیات جدید**. در رشته‌ریاضی فیزیك طی چهارسال‌مطالب متنوعی به‌نام ریاضیات‌جدید تدریس می‌گرددکه شامل: منطق ریاضی، مجموعه‌ها، رابطه، تابع، جبرجدید، ماتریس، دترمینان، نظریه اعداد، آمار واحتمال است. در رشته تجربی تنها درسال اول مختصری ازمنطق ریاضی ومجموعه‌ها به‌نام ریاضی جدید تدریس می‌شود. درسایر رشته‌های دبیرستانی و فنی‌حرفه‌ای ریاضیات جدید تدریس نمی‌شود.

۱-۱-۵ **آمار واحتمال**. در رشته ریاضی مطالبی از آمار وآنالیز ترکیبی و احتمال درکتابهای ریاضیات جدید تدریس می‌شود. در رشته‌های تجربی و فنی و حرفه‌ای این مطالب تدریس نمی‌شود.ولی در رشته اقتصاد اجتماعی طی سال دوم آمار توصیفی و درسال سوم احتمال و اندکی ازآماراستنباطی تدریس می‌گردد. در رشته فرهنگ وادب درسال دوم آمار توصیفی تدریس می‌شود.

۱-۲ سایرمواد درسی تخصصی

درکلیه رشته‌های دبیرستانی وفنی‌حرفه‌ای درایران مطالب درسی به‌مقدار۳۰ساعت در هفته تدریس می‌گردد واهم دروس تخصصی در رشته‌های مختلف به‌شرح زیر است:

۱-۲-۱ در رشته ریاضی وفیزیك علاوه‌بر دروس ریاضی‌فیزیك که بیشترین مطالب را تشکیل می‌دهد مکانیك وشیمی‌طی چهار سال تدریس‌می‌گردد و تنها در سال اول زیست‌شناسی‌تدریس می‌شود.

۱-۲-۲ در رشته تجربی، درس زیست‌شناسی ازاهمیت خاصی برخوردار است درضمن شیمی همانند رشته ریاضی‌فیزیك تدریس می‌شود. ولی‌درس فیزیك‌ومکانیك کمتر از رشته ریاضی فیزیك تدریس می‌شود.

۱-۲-۳ در رشته اقتصاد اجتماعی،دروس تاریخ، جغرافیا، فلسفه منطق، روانشناسی، اقتصاد جامعه‌شناسی تدریس می‌شود.

۱-۲-۴ در رشته فرهنگ ادب، دروس اساسی ادبیات فارسی، تاریخ ادبیات، عربی است. دروس تاریخ، جغرافیا، فلسفه منطق، روانشناسی وجامعه‌شناسی همانند رشته اقتصاد اجتماعی تدریس می‌شود.

۱-۲-۵ در رشته‌های فنی و حرفه‌ای، بستگی به نوع رشته دروس مختلف فنی حرفه‌ای تدریس می‌گردد و دانش‌آموزان درکارگاهها به‌کارعملی نیزمی‌پردازند.

۱-۳ دروس عمومی

به‌کلیه دانش‌آموزان در تمامی رشته‌ها به طورتقریباً مساوی دروس ادبیات‌فارسی، زبان‌عربی، زبان خارجی (غالباًانگلیسی) وفرهنگ و معارف اسلامی (اقلیت‌ها فرهنگ ومعارف‌دین خود) طی چهارسال تدریس می‌شود.

۲- مواد امتحانی در آزمون سراسری

هما‌نطورکه اشاره شد، کلیه رشته‌های دانشگاهی درچهارگروه‌آزمایشی قرار دارند. هر دیپلمی می‌تواند تنها دریك گروه آزمایشی ثبت‌نام کند گروهها عبارتند از گروه ریاضی فنی، که مواد امتحانی براساس دروس چهارساله رشته ریاضی‌فیزیك است. گروه تجربی، که‌مواد امتحانی براساس دروس چهارساله رشته تجربی است. گروه علوم انسانی، که‌مواد امتحانی براساس دروس مشترك‌فرهنگ ادب و اقتصاد اجتماعی است. گروه هنر، که تعداد اندکی‌درمقایسه با سایرگروهها شرکت می‌کنند، مواد امتحانی براساس دیپلمه‌های حرفه‌ای خاصه هنر برگزار می‌شود. درجدول ۳ مواد امتحانی و ضرایب آنهادرهرچهارگروه‌آمده‌است[۴]:

۳- آمارشرکت‌کنندگان‌وپذیرفته شدگان درهرگروه

درسال ۱۳۷۰ آمارشرکت‌کنندگان‌و پذیرفته شدگان به‌قرار جدول شماره ۴ است. [۵]

نام‌گروه	مواد امتحانی براساس دیپلم	نام دروس وضرایب آن
ریاضی‌فنی	فیزیک‌ریاضی	ریاضی(۱۲)، فیزیک (۹)، شیمی (۶)،دروس عمومی*
علوم تجربی	تجربی	ریاضی (۶)، فیزیک (۶)، شیمی (۶)، زیست‌شناسی(۱۲)، زمین‌شناسی(۱)، دروس‌عمومی*
علوم‌انسانی	مشترکات فرهنگ‌ادب‌وانسانی	فلسفه منطق(۹)، روانشناسی(۶)، جامعه‌شناسی (۹) تاریخ (۶)، جغرافیا (۶)، ادبیات‌فارسی (۶)، دروس عمومی
هنر	هنر	دروس مختلف هنری (طراحی، ترسیم فنی، موسیقی نمایش واطلاعات هنری) با ضریب ۴ دروس عمومی*

جدول شماره ۳

* دروس عمومی شامل فارسی با ضریب (۴)، عربی با ضریب (۲)، فرهنگ ومعارف اسلامی با ضریب (۳)، زبان خارجه با ضریب (۲)، درهمه‌گروهها یکسان است.

نام گروه آزمایشی	ریاضی ـ فنی	تجربی	انسانی	هنر	کل
تعداد داوطلب	۱۴۲۲۰۸	۳۱۳۴۵۶	۳۶۳۱۴۶	۱۲۴۹۵	۸۳۱۳۰۵
ظرفیت دانشگاهی	۲۳۴۱۰	۲۵۸۹۷	۳۳۳۰۶	۵۱۰	۸۳۱۲۳
درصد پذیرش	۱۶/۵	۸/۳	۹/۲	۴/۱	۱۰

جدول شماره ۴

ازاین جدول پیداست که تعدادشرکت‌کننده در گروههای علوم انسانی، تجربی، ریاضی وفنی بیشترین و در گروه هنر کمترین تعداد شرکت‌کننده وجود دارد. درصدپذیرش نیز دراین‌جدول آمده است.

۴ـ بررسی وضعیت علمی و درصد قبول‌شدگان

درهرگروه آزمایشی هرنوع دیپلمی شرکت‌می‌کند. باید توجه داشت‌که برای مثال اگر دیپلم ریاضی‌ـفیزیک در گروه تجربی شرکت کند باید امتحان دروس چهارساله دوره متوسطه دیپلم تجربی را که غالباً خود دانش‌آموز آموخته است امتحان دهد. حال دراین بررسی نشان می‌دهیم دیپلمه‌های ریاضی درهرچهار گروه از بقیه دیپلمه‌ها موفقترند.

درجداول پیوست تعداد دیپلمه‌های مختلف شرکت‌کننده هرگروه و تعداد قبولی‌ها در رشته‌های کاردانی (دوره دوساله) و کارشناسی (دوره چهارساله) و کارشناسی‌ارشد (دوره شش‌ساله) ودرصد قبولی درهر نوع دیپلم درکل و همچنین میانگین جامعه شرکت‌کننده و میانگین جامعه پذیرفته شده را نشان می‌دهد.

۴ـ۱ ملاك پذیرش

آزمونها به‌صورت‌تستی و در دومرحله انجام می‌شود، نمرات هر درس نرمالایز [۶] شده ونمره‌ها دارای میانگین ۵۰۰ و انحراف معیار ۱۰۰ [۷] است. اگرنمره درس j‌ام درمرحله اول برای‌داوطلب k‌ام m_i وضریب‌آن a_i ونمره درس j‌ام او درمرحله دوم n_j وضریب آن b_j باشد، نمره‌کل به‌صورت زیراست:

$$N_k = \frac{\Sigma m_i a_i + 2\Sigma n_j b_j}{\Sigma m_i + 2\Sigma n_j}$$

K = ۱ تا تعداد شرکت‌کننده

۴ـ۱ـ۱ شاخص‌ها

نمرات تمامی شرکت‌کنندگان در کامپیوترهای سازمان سنجش وجود دارد. طبق برنامه‌کامپیوتری نوشته شده،میانگین نمرات شرکت‌کنندگان ومیانگین نمرات پذیرفته شدگان وهمچنین درصد پذیرش، هرگروه‌از دیپلمه‌ها، درگروههای‌آزمایشی مختلف استخراج شده‌است. این‌اطلاعات تخمینی نبوده بلکه دقیقاً به‌وسیله کامپیوتر محاسبه‌شده‌است.[۸] لذا میانگین‌ها واقعی است. شاخص میانگین ویا درصدپذیرش ملاك خوبی برای مقایسه برای هرگروه‌از دیپلمه‌ها که در امتحان واحدی شرکت کرده‌اند می‌باشد.

۴ـ۲ وضعیت درگروه‌آزمایشی علوم‌ـ ریاضی فنی

جدول شماره ۵ وضعیت‌گروه ریاضی‌ـ فیزیك را ازلحاظ تعداد شرکت‌کننده از هرنوع دیپلم وتعداد قبولی درمقاطع کاردانی،کارشناسی ارشد ومیانگین‌نمرات هرگروه وهر مقطع و درصد پذیرش را نشان می‌دهد.

ازاین جدول پیداست دیپلمه‌های ریاضی‌فیزیك ازهرلحاظ نسبت به سایر دیپلمه‌ها برتری دارند. توجه شود غالب رشته‌های کاردانی، دیپلم فنی حرفه‌ای می‌گیرند، به‌همین جهت درصد پذیرش این‌نوع دیپلمه‌ها درمقطع‌کاردانی‌بالاست. اگرملاك را میانگین نمره شرکت‌کنندگان

ویا میانگین جامعه قبول‌شدگان و یا درصد پذیرش در نظر بگیریم وضعیت دیپلمه‌ها در این گروه به‌شرح زیر است:

رتبه اول: دیپلم ریاضی‌فیزیك

رتبه دوم: دیپلم تجربی

بقیه دیپلمه‌ها با توجه به نمرات شرکت‌کننده و قبول شده درمراتب بعد قرار می‌گیرند.

نمودار ستونی مربوط به‌این‌گروه را در نمودارهای شماره ۱ ملاحظه کنید.

نکته: وضعیت برتر دیپلمه‌های ریاضی‌فیزیك دراین‌گروه طبیعی است چون آزمون بر اساس دروس این نوع دیپلم برگزار می‌شود.

۴-۳ وضعیت درگروه علوم تجربی

جدول شماره ۶ وضعیت گروه تجربی را همانند جدول ۵ نشان می‌دهد. دراین گروه وضعیت دیپلمه ریاضی‌فیزیك ازهمهٔ گروهها بهتراست. دراین گروه رشته‌های پزشکی، دندانپزشکی، داروسازی و دامپزشکی قرار دارد وقابل‌توجه است که دیپلمه‌های ریاضی‌فیزیك دراین‌رشته‌ها نیز برتر از دیپلمه‌های دیگر می‌باشند. در این‌گروه اگرملاك رامیانگین‌نمره‌شرکت‌کننده و یا میانگین نمره پذیرفته شده و یا درصد پذیرش‌کارشناسی و یا کارشناسی ارشد و یا کل بگیریم وضعیت دیپلمه‌ها به قرار زیراست:

رتبه اول: دیپلم ریاضی‌فیزیك

رتبه دوم: دیپلم تجربی

رتبه سوم: دیپلم هنرستان‌فنی وحرفه‌ای

بقیه دیپلمه‌ها باتوجه‌به‌نمرات‌شرکت‌کننده و قبول شده و درصد پذیرش در مراتب بعدی قرارمی‌گیرند.

نمودارستونی مربوط به‌این‌گروه را درنمودارهای شماره ۲ ملاحظه‌کنید.

نکته: وضعیت برتر دیپلمه‌های ریاضی‌فیزیك دراین گروه از دیپلمه‌های تجربی شگفت‌انگیز است زیرا مواد امتحانی بر اساس دروس چهارساله علوم‌تجربی است. (صفحه دوم جدول ۳)

۴-۴ وضعیت درگروه علوم انسانی

جدول شماره ۷ وضعیت گروه علوم انسانی را برای انواع دیپلمها نشان می‌دهد. دراین‌گروه نیز دیپلمه‌های‌ریاضی فیزیك‌ازهر لحاظ ازهمه دیپلمه‌ها جلوترند. دراین‌گروه اگرملاك میانگین‌نمره شرکت‌کنندگان یا قبول‌شدگان و یا درصد کل پذیرش باشد مراتب به شرح زیر است:

رتبه اول: دیپلم ریاضی‌فیزیك

رتبه دوم: دیپلم تجربی

رتبه سوم: دیپلم فرهنگ‌ادب

بقیه دیپلمه‌ها باتوجه به‌نمرات‌شرکت‌کننده وقبول شده و یا درصد پذیرش در مراتب بعدی قرار دارند.

نمودارستونی مربوط به‌این‌گروه را درنمودارهای شماره ۳، ملاحظه‌کنید.

نکته: وضعیت برتر دیپلمه‌های ریاضی‌فیزیك دراین‌گروه نیز قابل‌توجه است زیرا تمامی دروس تخصصی این‌گروه، بجز ریاضی را دیپلمه‌های ریاضی فیزیك در دوره دبیرستان نخوانده‌اند و باید شخصاً برای‌آزمون سراسری مطالعه‌کنند وآزمون براساس دیپلم فرهنگ ادب و اقتصاد اجتماعی است. برتری‌گروه علوم تجربی نیز دراین‌گروه جالب‌است.

۴-۵ وضعیت درگروه هنر

جدول شماره ۸ وضعیت گروه هنر را نشان می‌دهد. دراین گروه نیز دیپلمه‌های ریاضی‌فیزیك از لحاظ میانگین شرکت‌کنندگان میانگین پذیرفته شدگان ودرصد قبولی ازسایر دیپلمه‌ها جلوترند. مراتب دیپلمه‌ها نیز درگروه به‌شرح زیراست.

رتبه اول: دیپلم ریاضی‌فیزیك

رتبه دوم: دیپلم تجربی

بقیه دیپلمه‌ها با توجه به‌میانگین نمره کل شرکت‌کنندگان، میانگین نمره کل پذیرفته شدگان و درصد پذیرش‌درمراتب بعد قرار دارد.

نمودارستونی مربوط به‌این‌گروه را درنمودارشماره ۴ ملاحظه‌کنید.

نکته: دروس تخصصی‌درآزمون‌سراسری این‌گروه، دروس هنری بوده‌که در رشته‌های هنری تدریس می‌گردد و به‌سایر دیپلمه‌ها تدریس نمی‌شود. وضعیت‌برتر دیپلمه‌های ریاضی نیز دراین‌گروه قابل‌توجه است.

۴-۶ توزیع نرمال نمرات

وضعیت میانگین نمرات شرکت‌کنندگان و پذیرفته‌شدگان در منحنیهای شماره ۵، ۶، ۷، و ۸، نشان داده شده است. این منحنیها (نرمال) دارای میانگین پانصد وانحراف معیار یکصد می‌باشند. با توجه به‌تعداد کل شرکت‌کنندگان وضعیت هریك از دیپلمه‌ها نسبت به‌دیگران مشخص است. با توجه به‌منحنی‌های نرمال شماره ۵ تا ۸ وتعداد کل شرکت‌کنندگان‌می‌توان درصدفواصل را بین دیپلمه‌های مختلف مشخص‌کرد.

۵ نتیجه

۱) دیپلمه‌های ریاضی‌فیزیك در گروه علوم‌ریاضی‌فنی، گروه علوم‌تجربی، گروه علوم‌انسانی وهنر که براساس جدول شماره ۳ امتحان می‌دهند، ازهر لحاظ نسبت به‌سایر دیپلمه‌ها موفقترند. این موفقیت‌در گروههای تجربی، انسانی وهنر کاملاً مشخص و روشن است لذا توصیه می‌شود

گروه آزمایشی ریاضی وفنی

کد	نوع دیپلم		شرکت کننده	قبولی کاردانی	قبولی کارشناسی	قبولی کارشناسی ارشد	قبولی کل
۱۴	ریاضی فیزیک	تعداد	۶۵۸۸۸	۲۰۹۴	۱۲۰۹۷	۱۹۸	۱۴۳۸۹
		میانگین نمره کل	۵۴۴۸	۵۶۷۴	۶۱۰۱	۶۱۳۶	۶۰۳۹
		درصد		٪۳/۲	٪۱۸/۴	٪۰/۳	٪۲۱/۹
۱۲	علوم تجربی	تعداد	۱۰۷۱۵	۱۷۱	۱۱۹۵	۱۵	۱۳۸۱
		میانگین نمره کل	۴۸۵۱	۵۰۴۶	۵۰۸۹	۵۲۰۵	۵۰۸۵
		درصد		٪۱/۵۹	٪۱۱/۲	٪۰/۱۴	٪۱۲/۹
۱۷	اقتصاد اجتماعی	تعداد	۷۹۰	۳۴	۵۶	۲	۹۲
		میانگین نمره کل	۴۴۷۸	۴۳۶۵	۴۸۷۳	۴۹۶۵	۴۶۸۸
		درصد		٪۴/۳	٪۷/۱	٪۰/۲۵	٪۱۱/۷
۱۶	فرهنگ وادب	تعداد	۱۲۲	۵	۹	۰	۱۴
		میانگین نمره کل	۴۵۷۷	۴۲۶۴	۴۷۷۷	۰	۴۵۹۴
		درصد		٪۴/۱	٪۷/۴	۰	٪۱۱/۵
	هنرستانهای فنی	تعداد	۴۸۸۰۹	۵۴۲۶	۱۵۹۷	۴۴	۷۰۶۹
		میانگین نمره کل	۴۵۵۳	۴۵۵۶	۴۸۰۲	۵۰۴۱	۴۶۱۳
		درصد		٪۱۱/۱۱	٪۳/۳	٪۰/۰۹	٪۱۴/۵
	سایر دیپلمها	تعداد	۴۱۸۲	۱۴۵	۳۵۱	۳	۴۹۹
		میانگین نمره کل	۴۴۷۳	۴۳۱۸	۴۸۹۵	۴۷۸۲	۴۷۲۶
		درصد		٪۳/۵	٪۸/۴	٪۰/۰۷	٪۱۲

جدول شماره ۵

گروه آزمایشی علوم تجربی

کد	نوع دیپلم		شرکت کننده	قبولی کاردانی	قبولی کارشناسی	قبولی کارشناسی ارشد	قبولی کل
۱۴	ریاضی فیزیك	تعداد	۵۲۸۶	۱۴۹	۴۰۹	۴۸۲	۱۰۴۰
		میانگین نمره کل	۵۷۱۳	۵۸۵۳	۶۱۷۵	۶۵۷۶	۶۳۱۵
		درصد		٪۲/۸	٪۷/۷	٪۹/۱	٪۱۹/۶
۱۲	علوم تجربی	تعداد	۲۵۰۹۰۹	۵۷۰۴	۱۲۷۳۸	۴۵۸۶	۲۳۰۲۸
		میانگین نمره کل	۵۰۷۰	۵۴۹۹	۵۸۵۶	۶۳۵۷	۵۸۶۸
		درصد		٪۲/۳	٪۵/۱	٪۱/۸	٪۹/۲
۱۷	اقتصاد اجتماعی	تعداد	۱۴۲۱	۵۳	۶۳	۲۰	۱۳۶
		میانگین نمره کل	۴۴۸۷	۴۳۵۵	۵۱۸۲	۵۲۷۴	۴۸۷۳
		درصد		٪۳/۷	٪۴/۵	٪۱/۴	۹/۶
۱۶	فرهنگ و ادب	تعداد	۳۱۹	۱۴	۱۲	۱۱	۳۷
		میانگین نمره کل	۴۴۷۸	۴۲۲۱	۴۸۹۹	۵۳۵۱	۴۷۷۷
		درصد		٪۴/۴	٪۳/۷	٪۳/۵	٪۱۱/۶
	هنرستانهای فنی	تعداد	۱۶۴۹	۵۶	۸۲	۸۳	۲۲۱
		میانگین نمره کل	۴۶۱۵	۴۶۱۹	۴۹۶۶	۵۴۲۰	۵۰۴۸
		درصد		٪۳/۴	٪۵	٪۵	٪۱۳/۴
	سایر دیپلمها	تعداد	۲۸۳۶۷	۵۶۲	۷۳۹	۸۲	۱۳۸۳
		میانگین نمره کل	۴۳۶۲	۴۳۲۰	۴۶۸۷	۵۳۶۹	۴۵۷۸
		درصد		٪۲	٪۰/۳	٪۲/۶	٪۵/۹

جدول شمارهٔ ۶

گروه آزمایشی علوم انسانی

کد	نوع دیپلم		شرکت کننده	قبولی کاردانی	قبولی کارشناسی	قبولی کارشناسی ارشد	قبولی کل
۱۴	ریاضی فیزیک	تعداد	۱۳۵۵	—	۲۳۶	—	۲۳۶
		میانگین نمره کل	۵۲۱۵	—	۵۹۵۲/۹	—	۵۹۵۳
		درصد		—	٪۱۷/۴	—	٪۱۷/۴
۱۲	علوم تجربی	تعداد	۲۱۶۰۶	۳۴۵۳	۲۰	—	۳۴۷۳
		میانگین نمره کل	۵۱۴۹	۵۹۹۸/۶	۵۷۲۶/۸	—	۵۷۲۸
		درصد		٪۰/۰۹	٪۱۵/۹۸	—	٪۱۶/۰۷
۱۷	اقتصاد اجتماعی	تعداد	۱۴۶۰۸۱	۹۰	۱۲۴۷۰	—	۱۲۵۰
		میانگین نمره کل	۵۰۰۰	۵۷۵۰/۱	۵۵۳/۹۵	—	۵۵۲۵
		درصد		٪۰/۰۶	٪۸/۵۳	—	٪۸/۵۹
۱۶	فرهنگ وادب	تعداد	۱۱۸۴۲۴	۵۵	۱۳۰۹۲	—	۱۳۱۴۷
		میانگین نمره کل	۵۱۰۴	۵۶۴۵/۱	۵۸۰۱/۵	—	۵۸۰۱
		درصد		٪۰/۰۴	٪۱۱/۰۵	—	٪۱۱/۱۰
	هنرستانهای فنی	تعداد	۱۲۵۱۲	۳۷۴	۷۳۹	—	۱۱۱۳
		میانگین نمره کل	۴۶۴۵	۵۲۸۱/۵	۵۳۵۷/۲	—	۵۳۳۱
		درصد		٪۲/۹۸	٪۵/۹	—	٪۸/۸
	سایر دیپلمها	تعداد	۳۰۸۹۸	۵	۲۸۲۳	—	۲۸۲۸
		میانگین نمره کل	۴۶۶۴	۵۳۳۰/۶	۵۲۸۸/۶	—	۵۲۸۸
		درصد		٪۰/۰۱	٪۹/۱۳	—	٪۹/۱۵

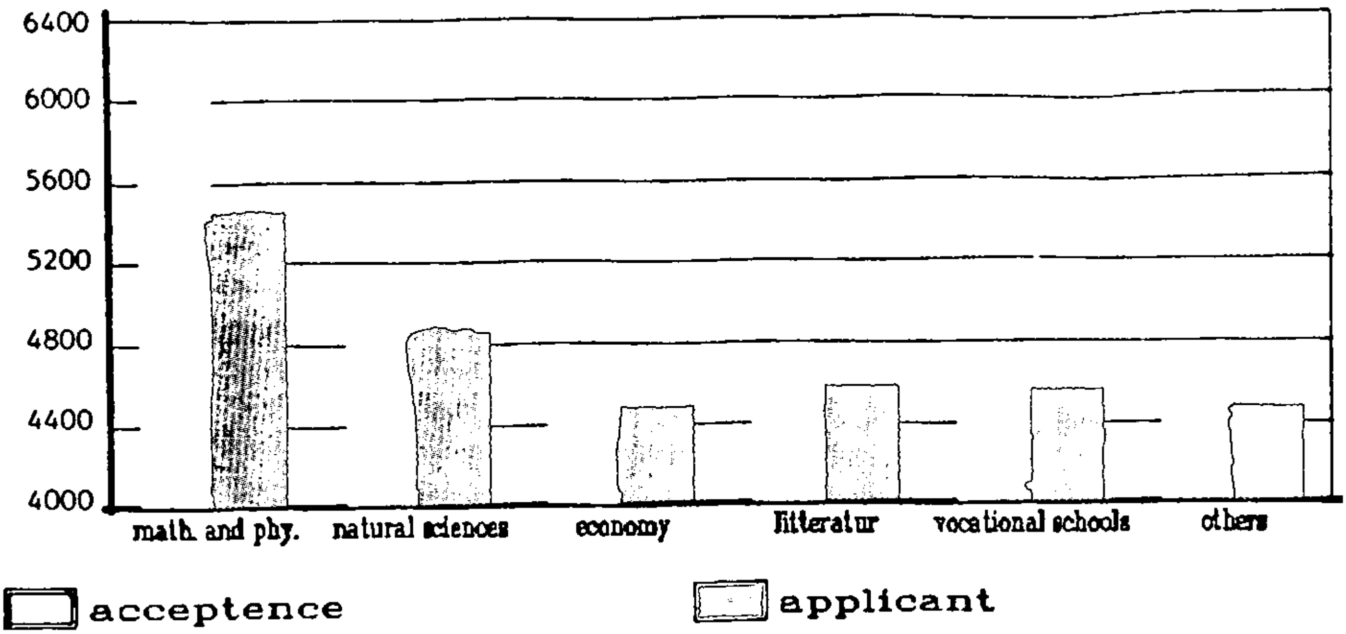
جدول شماره ۷

گروه‌آزمایشی هنر

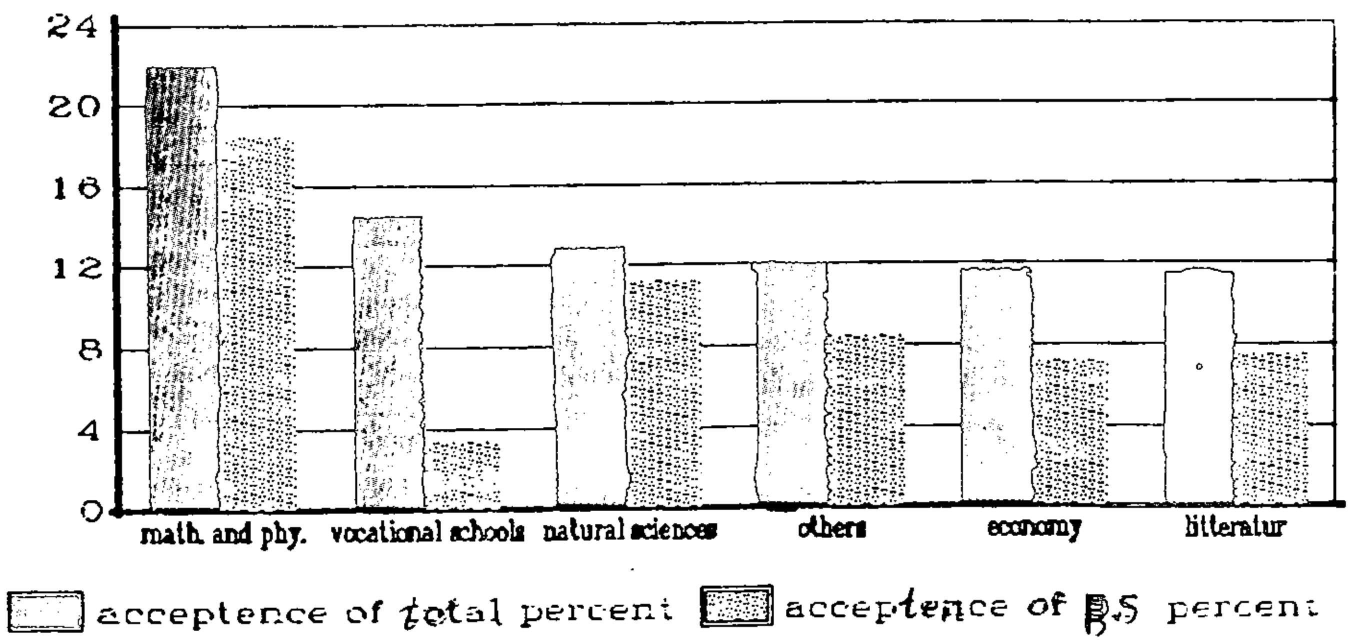
کد	نوع دیپلم		شرکت‌کننده	قبولی‌کاردانی	قبولی‌کارشناسی	قبولی‌کارشناسی‌ارشد	قبولی‌کل
۱۴	ریاضی فیزیک	تعداد	۴۲۳	—	۴۶	—	۴۶
		میانگین نمره کل	۵۶۵۴		۶۲۹	—	۶۲۵۹
		درصد			٪۱۰/۸		٪۱۰/۸
۱۲	علوم تجربی	تعداد	۳۶۹۶	—	۲۴۲	—	۲۴۲
		میانگین نمره کل	۵۳۴۴		۶۱۴۶		۶۱۴۶
		درصد			٪۶/۵		٪۶/۵
۱۷	اقتصاد اجتماعی	تعداد	۱۶۳۰	—	۴۶	—	۴۶
		میانگین نمره کل	۴۹۵۳		۵۶۲۹		۵۶۲۹
		درصد			٪۲/۸		٪۲/۸
۱۶	فرهنگ وادب	تعداد	۶۸۱	—	۲۱	—	۲۱
		میانگین نمره کل	۴۸۷۸		۵۸۲۳		۵۸۲۳
		درصد			٪۳		٪۳
	هنرستانهای فنی	تعداد	۸۵۵	—	۵۱	—	۵۱
		میانگین نمره کل	۵۰۳۲		۵۸۱۳		۵۸۱۳
		درصد			٪۶		٪۶
	سایر دیپلمها	تعداد	۳۸۳۱	۶۲	۷۵		۱۳۷
		میانگین نمره کل	۴۶۳۳	۵۲۰۶	۵۹۸۲		۵۶۳۰
		درصد		٪۱/۶	٪۲		٪۳/۶

جدول شماره۸

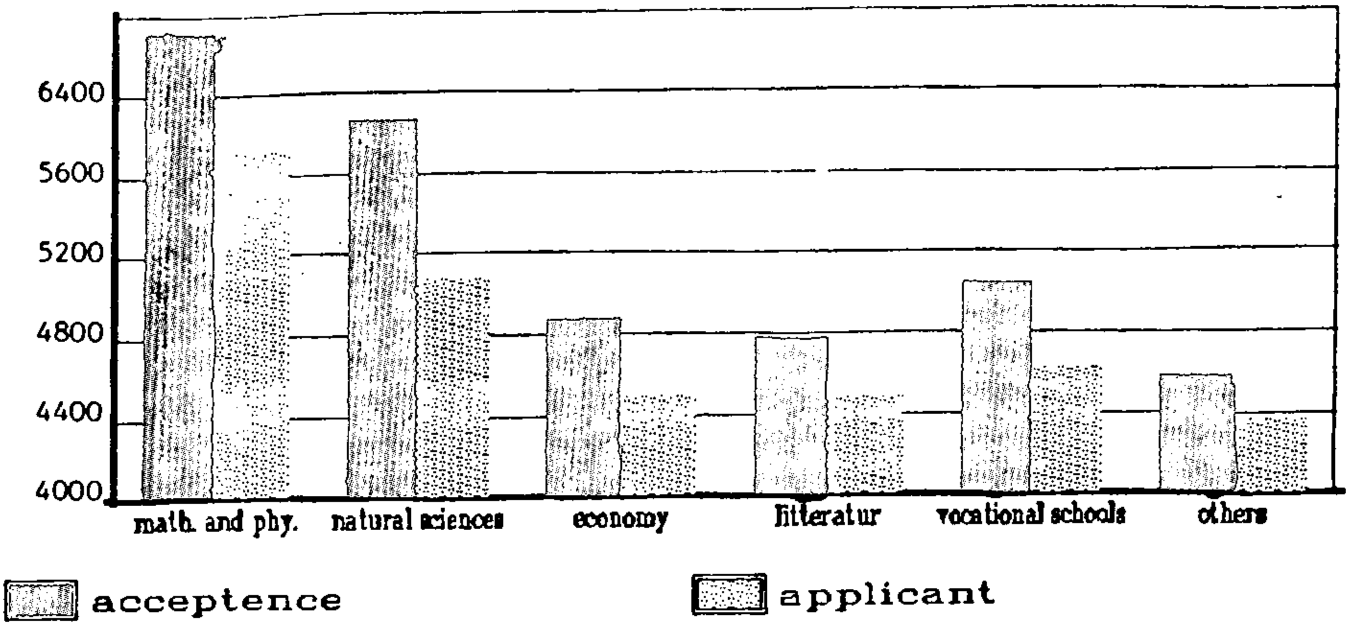
میانگین نمرات دیپلمه‌های مختلف در گروه آزمایشی علوم ریاضی وفنی درسال ۱۳۷۰



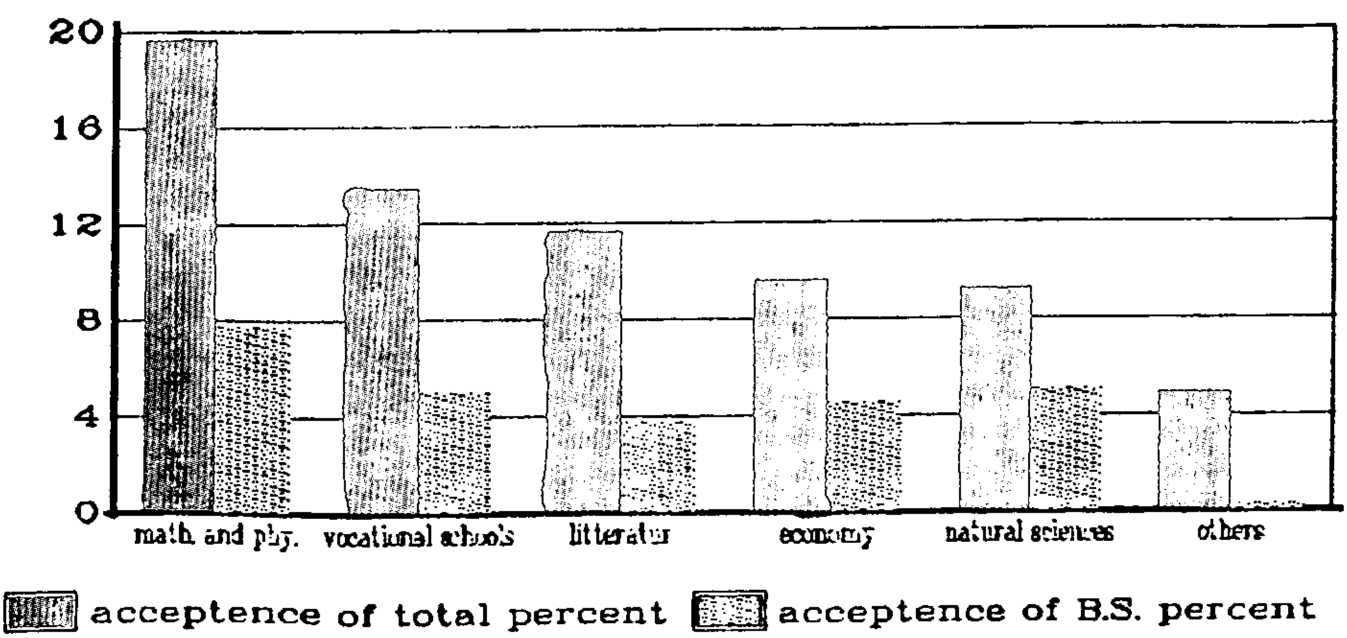
درصد پذیرش دیپلمه‌های مختلف‌گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی در آزمون ورودی سال ۱۳۷۰



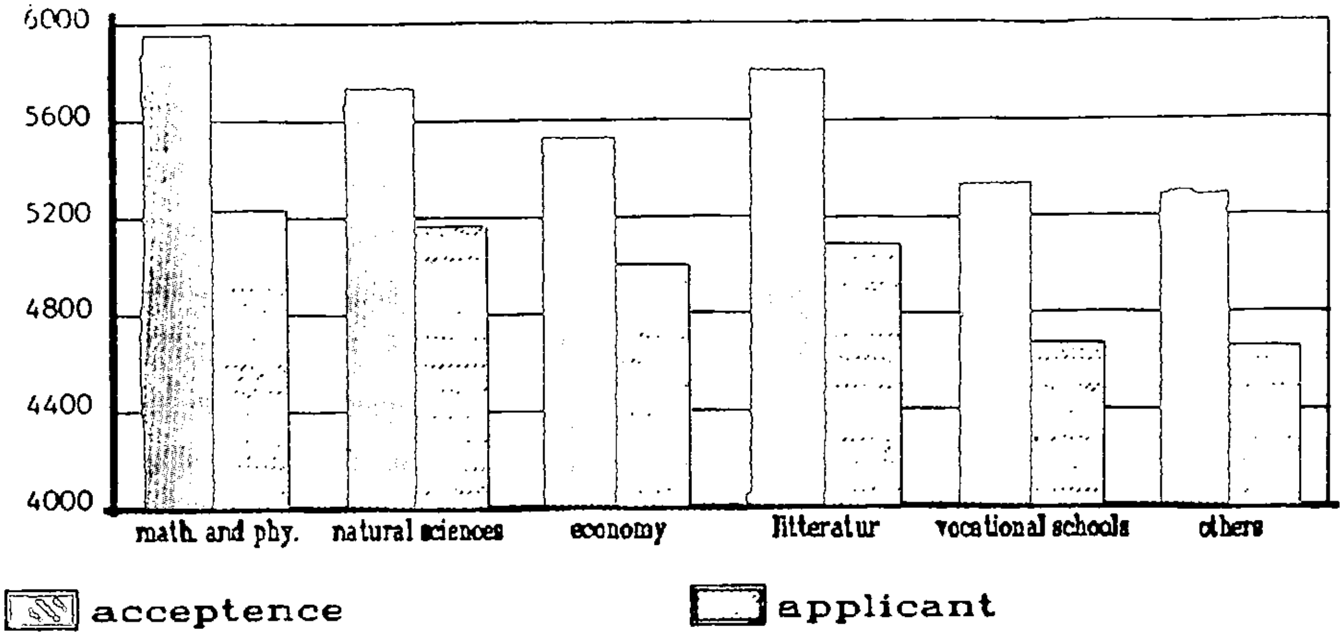
میانگین نمرات دیپلمه‌های مختلف در گروه آزمایشی علوم تجربی درسال ۱۳۷۰



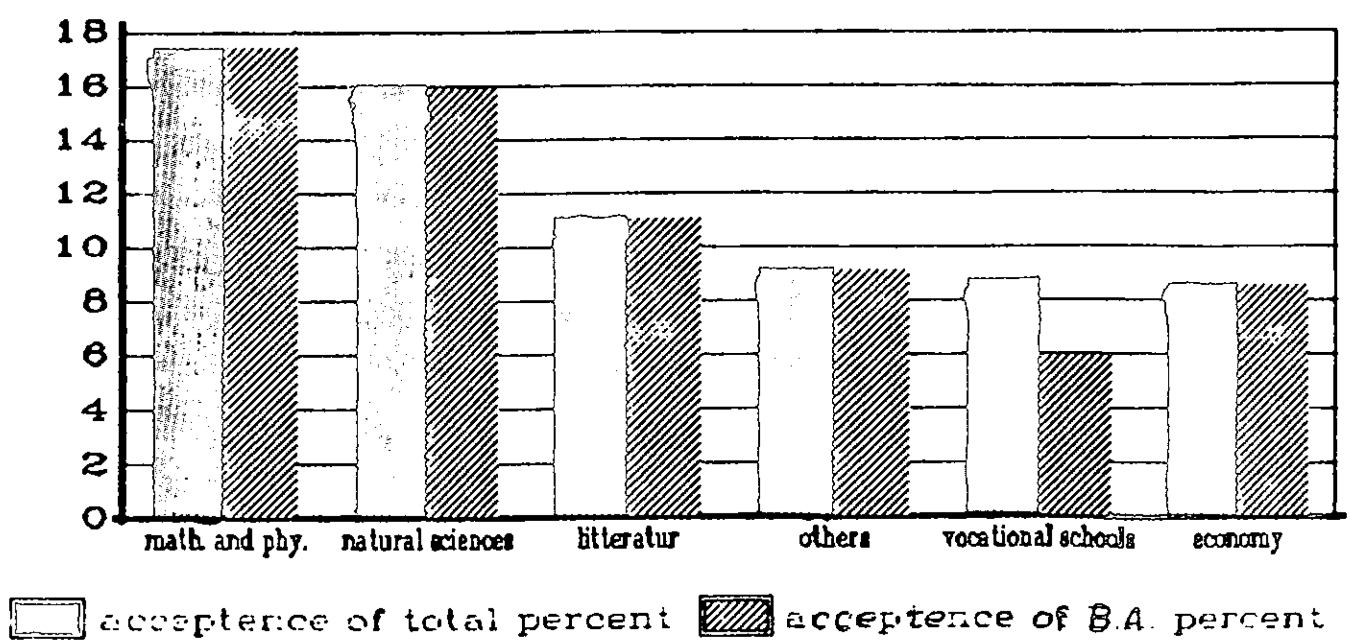
درصد پذیرش دیپلمه‌های مختلف گروه آزمایشی علوم تجربی در آزمون ورودی سال ۱۳۷۰



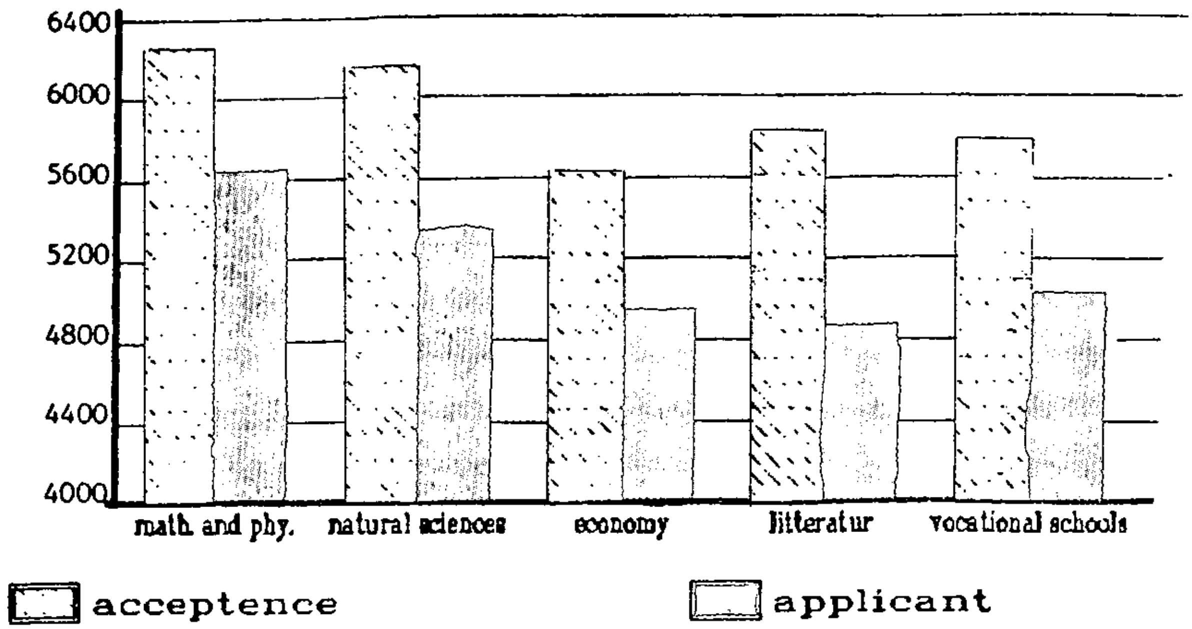
میانگین نمرات دیپلمه‌های مختلف در گروه‌آزمایشی علوم انسانی در سال ۱۳۷۰



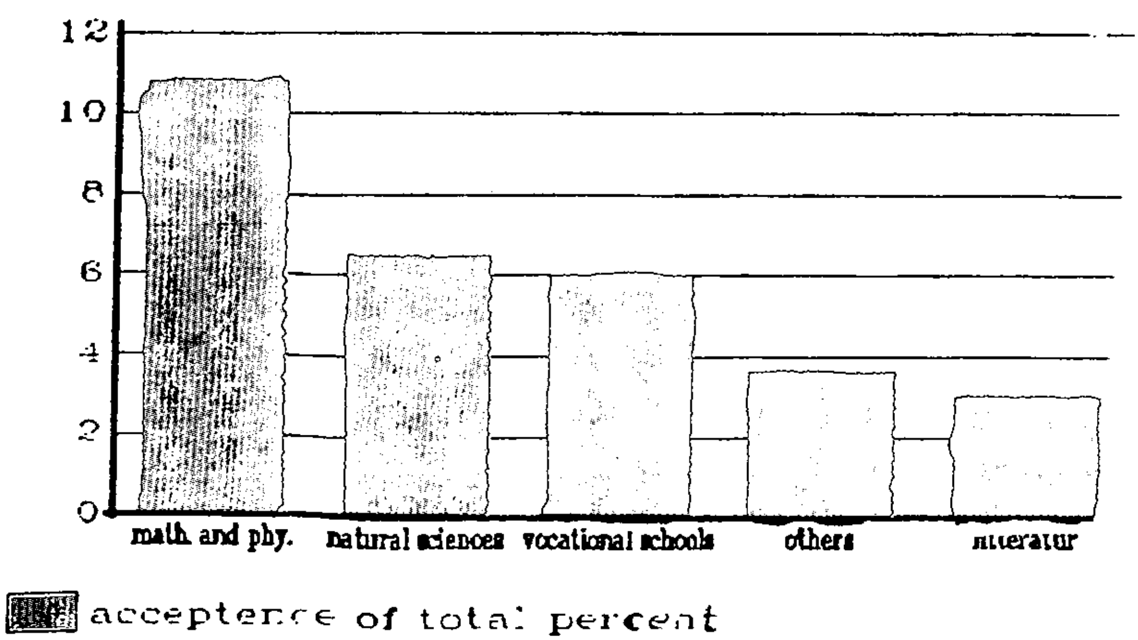
درصد پذیرش دیپلمه‌های مختلف گروه آزمایشی علوم انسانی در آزمون ورودی سال ۱۳۷۰



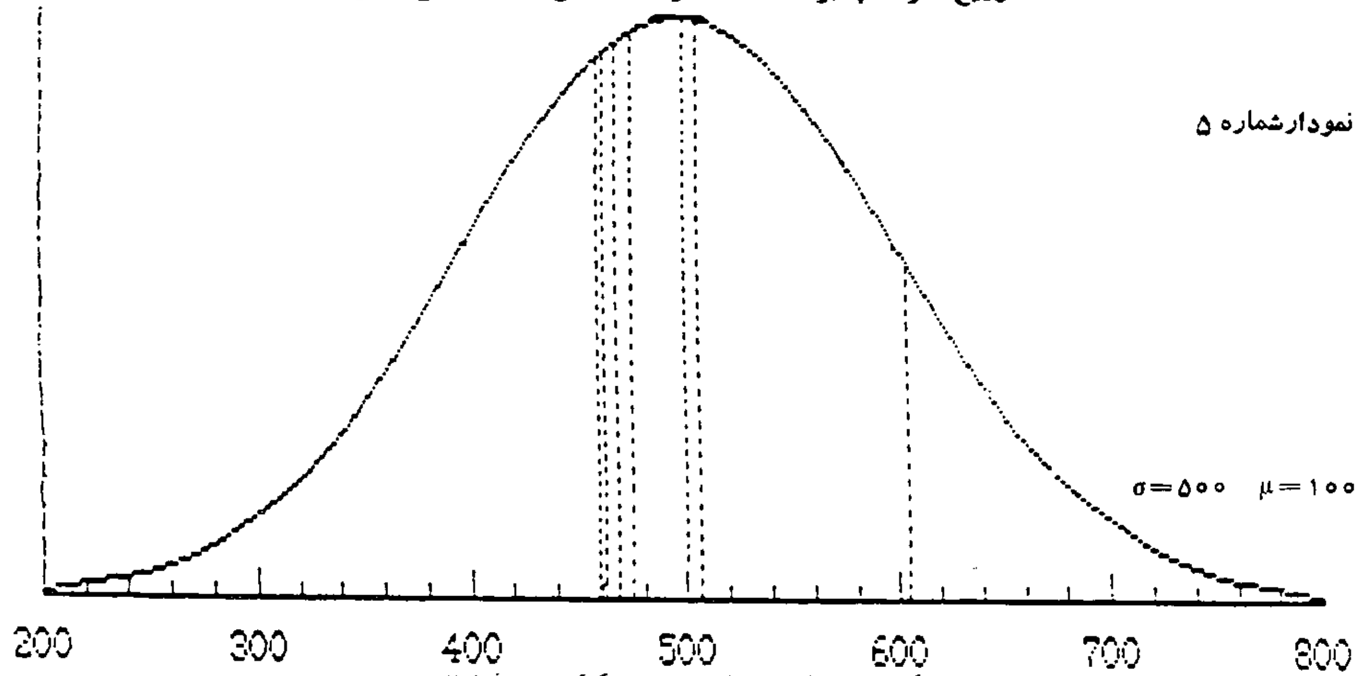
میانگین نمرات دیپلمه‌های مختلف در گروه آزمایشی هنر در سال ۱۳۷۰



پذیرش دیپلمه‌های مختلف گروه آزمایشی هنر در آزمون ورودی سال ۱۳۷۰

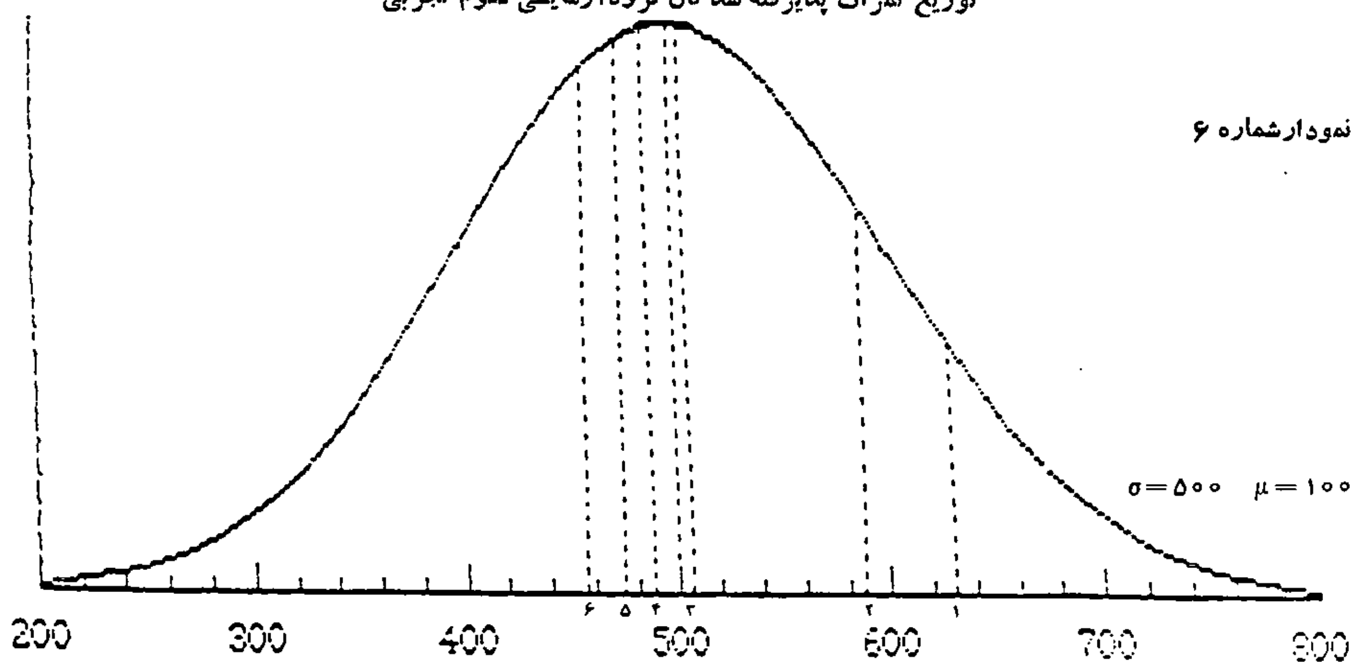


توزیع نمرات پذیرفته‌شدگان گروه آزمایشی علوم ریاضی وفنی



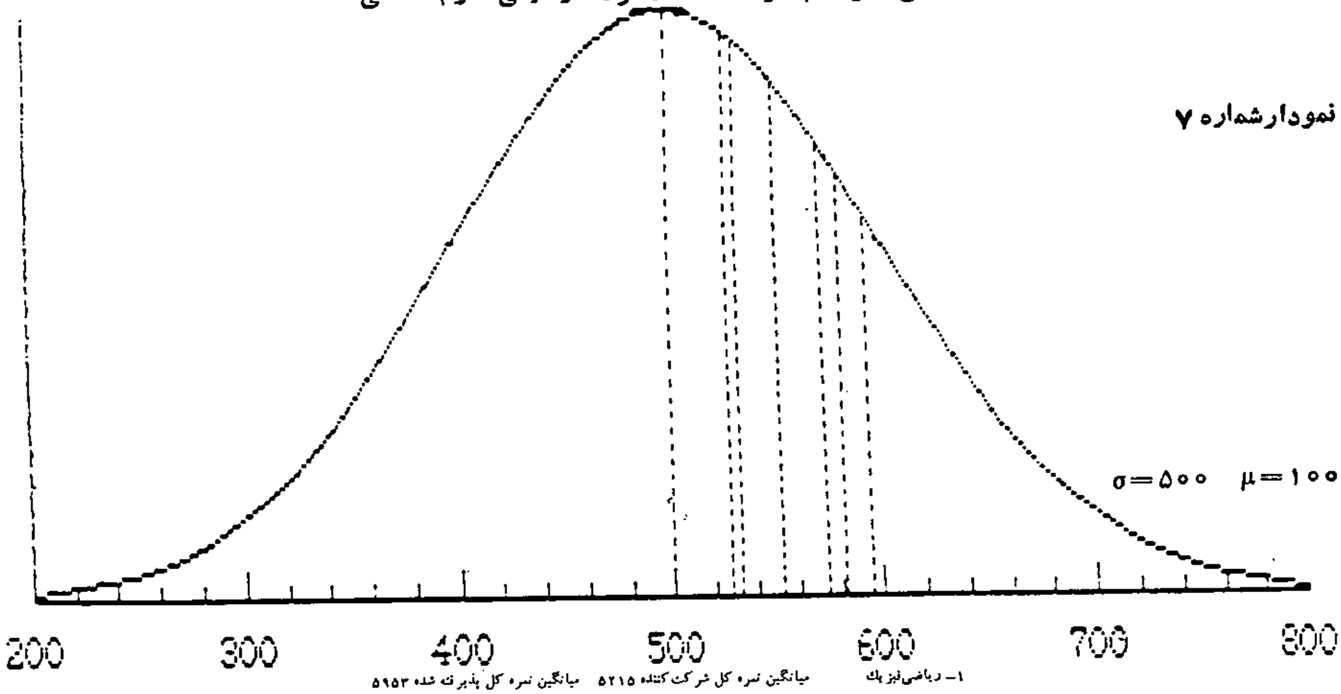
۱ــ میانگین نمرات دیپلمه‌های ریاضی‌فیزیک	شرکت‌کننده ۵۲۲۸	پذیرفته شده ۶۰۲۹
۲ــ میانگین نمرات دیپلمه‌های علوم‌تجربی	شرکت‌کننده ۲۸۵۱	پذیرفته شده ۵۰۸۵
۳ــ میانگین نمرات دیپلمه‌های فرهنگ وادب	شرکت‌کننده ۲۵۷۷	پذیرفته شده ۲۵۹۴
۴ــ میانگین نمرات دیپلمه‌های هنرستانهای فنی	شرکت‌کننده ۲۵۵۳	پذیرفته شده ۲۶۱۳
۵ــ میانگین نمرات دیپلمه‌های اقتصاد اجتماعی	شرکت‌کننده ۲۲۷۸	پذیرفته شده ۲۶۸۸
۶ــ میانگین نمرات سایر دیپلمه‌ها	شرکت‌کننده ۲۲۷۴	پذیرفته شده ۲۷۲۶

توزیع نمرات پذیرفته شدگان گروه آزمایشی علوم تجربی



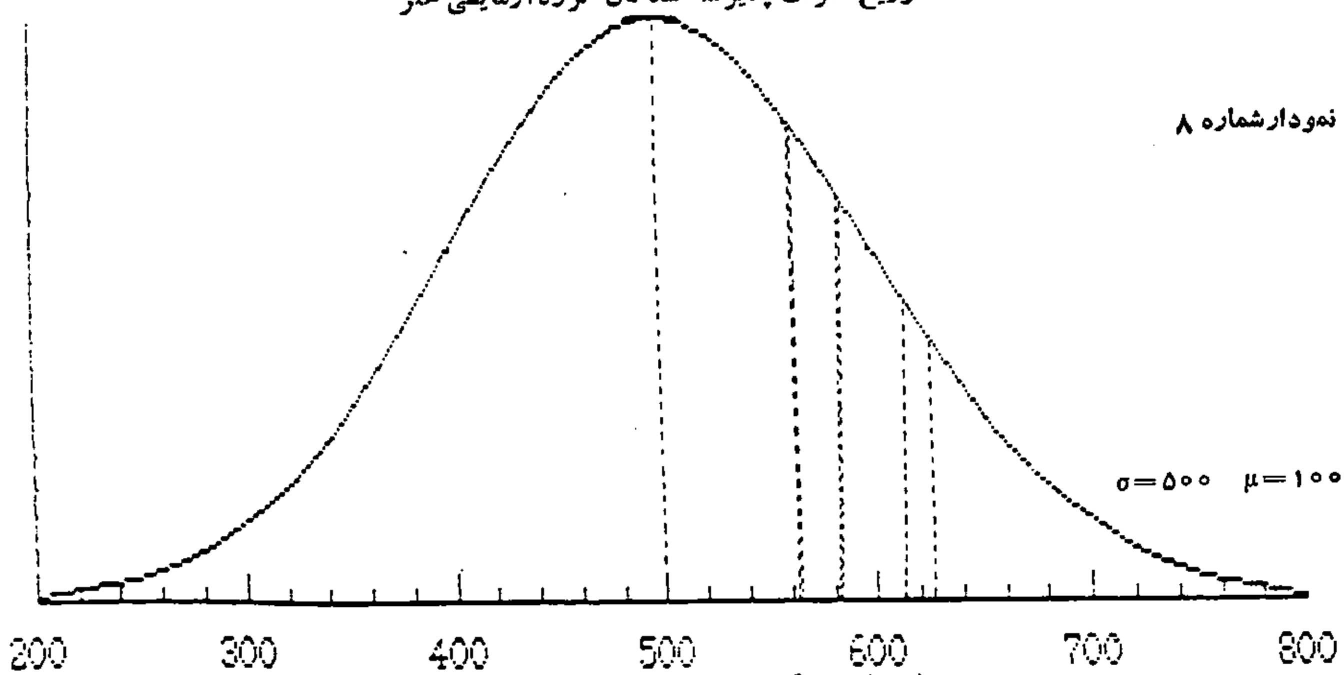
۱ــ ریاضی‌فیزیک	میانگین نمره کل شرکت‌کننده ۵۷۱۳	میانگین نمره کل پذیرفته شده ۶۳۱۵
۲ــ علوم‌تجربی	میانگین نمره کل شرکت‌کننده ۵۰۷۰	میانگین نمره کل پذیرفته شده ۵۸۶۸
۳ــ هنرستانهای فنی	میانگین نمره کل شرکت‌کننده ۴۶۱۵	میانگین نمره کل پذیرفته شده ۵۰۲۸
۴ــ اقتصاد اجتماعی	میانگین نمره کل شرکت‌کننده ۴۲۸۷	میانگین نمره کل پذیرفته شده ۴۸۷۳
۵ــ فرهنگ وادب	میانگین نمره کل شرکت‌کننده ۴۲۷۸	میانگین نمره کل پذیرفته شده ۴۷۷۷
۶ــ سایر دیپلم‌ها	میانگین نمره کل شرکت‌کننده ۴۲۶۲	میانگین نمره کل پذیرفته شده ۴۵۷۸

توزیع نمرات پذیرفته شدگان گروه آزمایشی علوم انسانی



۱ـ ریاضی فیزیک — میانگین نمره کل شرکت کننده ۵۲۱۵ — میانگین نمره کل پذیرفته شده ۵۹۵۳
۲ـ علوم تجربی — میانگین نمره کل شرکت کننده ۵۱۲۹ — میانگین نمره کل پذیرفته شده ۵۷۲۸
۳ـ فرهنگ و ادب — میانگین نمره کل شرکت کننده ۵۱۰۴ — میانگین نمره کل پذیرفته شده ۵۸۰۱
۴ـ اقتصاد اجتماعی — میانگین نمره کل شرکت کننده ۵۰۰۰ — میانگین نمره کل پذیرفته شده ۵۵۲۵
۵ـ سایر دیپلم‌ها — میانگین نمره کل شرکت کننده ۴۶۶۲ — میانگین نمره کل پذیرفته شده ۵۲۸۸
۶ـ هنرستانهای فنی — میانگین نمره کل شرکت کننده ۴۶۲۵ — میانگین نمره کل پذیرفته شده ۵۲۳۱

توزیع نمرات پذیرفته شدگان گروه آزمایشی هنر



۱ـ ریاضی فیزیک — میانگین نمره کل شرکت کننده ۵۶۵۴ — میانگین نمره کل پذیرفته شده ۶۲۵۹
۲ـ علوم تجربی — میانگین نمره کل شرکت کننده ۵۲۴۴ — میانگین نمره کل پذیرفته شده ۶۱۲۶
۳ـ هنرستانهای فنی — میانگین نمره کل شرکت کننده ۵۰۲۲ — میانگین نمره کل پذیرفته شده ۵۸۱۳
۴ـ اقتصاد اجتماعی — میانگین نمره کل شرکت کننده ۴۹۵۳ — میانگین نمره کل پذیرفته شده ۵۶۲۹
۵ـ فرهنگ و ادب — میانگین نمره کل شرکت کننده ۴۸۷۸ — میانگین نمره کل پذیرفته شده ۵۸۲۳
۶ـ سایر دیپلم‌ها — میانگین نمره کل شرکت کننده ۴۶۲۲ — میانگین نمره کل پذیرفته شده ۵۶۲۰

که با روشهای علمی می‌بایست دانش‌آموزان را ازسالهای اول ابتدایی به ریاضیات علاقه‌مندکرد و در دوره ابتدایی و راهنمایی به‌آموزش درس ریاضی توجه مخصوص مبذول نمود و در دوره دبیرستان وهنرستان نیز توجه به آموزش ریاضی موفقیت داوطلبان را بیشترمی‌کند.

۲) این بررسی برای سال ۶۹ نیز به عمل آمد، برتری دیپلمه‌های ریاضی‌فیزیک دراین سال نیز عیناً وجود دارد. نکته مهم دراین آزمونها آنست که دیپلم ریاضی‌فیزیک با آموزش ریاضی بیشتر در هر گروه دیگری که امتحان می‌دهند، (دروس آن‌گروه را باید خود مطالعه کنند) نسبت به‌بقیه موفقترند. لذا توجه به ریاضی در دوره‌های اولیه و تشویق دانش‌آموزان به آموزش ریاضی، باعث موفقیت بیشتر آنها درهمه رشته‌ها نیزمی‌گردد.

منابع

[۱]. براساس آماراستخراجی از نشریه آماری‌وزارت آموزش وپرورش. سال‌تحصیلی ۷۱-۱۳۷۰

[۲]. ساعات استخراجی از برنامه مصوب آموزش وپرورش.

[۳]. استخراجی ازکتب چهارساله دوره متوسطه در رشته‌های مختلف.

[۴]. دفترچه‌های شماره ۱ و ۲ راهنمای آزمون سراسری سال ۱۳۷۰.

[۵]. گزارش فنی شماره ۱۶ سازمان‌سنجش آموزش کشور، جلد اول.

[۶]. توزیع نمرات درهردرس نرمال‌نبوده به‌روش آماری نرمال می‌گردد این روش در کتاب سنجش اندازه‌گیری-تالیف‌تراروند یك آمده است.

[۷]. پس‌ازتبدیل‌نمرات به‌نرمال‌استاندارد-از رابطه $N_i=\sigma z_i+\mu$ نمرات به‌صورت نرمال با میانگین $\mu=۵۰۰$ وانحراف معیار $\sigma=۱۰۰$ برده می‌شود.

[۸]. اطلاعات کامپیوتری استخراجی در سازمان سنجش آموزش کشورموجود است.

اسامی خوانندگانی

که حل مسایل شماره ۳۱ را فرستاده‌اند

آقای آرام خلیل‌پور، دانش‌آموز، آستارا	۱۰
آقای آرش یاوری، دانش‌آموز، بندرعباس	۹-۱۰
آقای داریوش سعیدنیا، دانشجو، تهران	۳-۵-۶-۷-۸-۹-۱۰
آقای حسن کفاش امیری، دانشجو، بابلسر	۱-۲-۳-۴-۵-۶-۸-۹
آقای مهرداد شعاری، تبریز	۵-۸-۹
آقای آیدین پیرزه، دانش‌آموز، تبریز	۳-۶
آقای محمد آذری، دیپلمه، قائمشهر	۵-۹-۱۰
آقای کاوه معین‌فر، دانش‌آموز، سقز	۹
آقای بهزاد بهرامی، دانش‌آموز، تهران	۵-۸-۹
آقای اکبر اصفهانی‌پور، دانشجو، تهران	۸-۱۰
آقای حسین میلانی‌مقدم، دانشجو، مشهد	۱۰
آقای اکبر ایروانی، دانشجو، اصفهان	۵-۱۰
آقای محمداسماعیل خسروی، دانشجو، تهران	۵-۸-۹-۱۰
آقای علی‌اکبر جاویدمهر (همکارمحترم مجله)، ساوه	۱-۳-۴-۵-۶-۹-۱۰
آقای غلامرضا صفرنژاد، دانشجو، تهران	۵-۶-۸
آقای بهروز رئیسی، دانش‌آموز، شهرکرد	۳-۵-۸
آقای فرشید ارجمندی، دانش‌آموز، اهواز	۵-۶-۷-۸-۱۰
آقای محمدمهدی امینی، دانشجو، تهران	۱-۴-۵-۶-۸-۹
آقای امیر صادقی، دانش‌آموز، تهران	۳-۴-۵-۶-۷-۸-۹-۱۰
آقای هادی بخشایش اول، دانش‌آموز، مشهد	۲-۵-۶-۸-۹-۱۰
آقای پویا عباداللهی، تبریز	۵-۷-۱۰
آقای رامین .م. معطری، دانشجو، تهران	۳-۴-۵-۸-۹
آقای علی خدادادی، دیپلم، روستای قوریجان	۱۰
آقای عین‌الله اکبرپور، دانشجو، بابل	۱۰
آقای پویا ولی‌زاده، دانش‌آموز، کرج	۵

مسایل

ویژه دانش آموزان

تهیه و تنظیم از: ابراهیم دارابی

۱ـ دستگاه زیر را دراعداد صحیح حل کنید.

$$\begin{cases} xz-2yt=3 \\ xt+yz=1 \end{cases}$$

(راهنمایی: ازاین دستگاه نتیجه بگیرید

$$(x^2+2y^2)(z^2+2t^2)=11$$

۲ـ معادله زیررا دراعداد صحیح حل کنید.

$$x^5-x^3-x^2+1=y^2$$

(راهنمایی: ثابت کنیدمعادله غیراز $x=0$ و $y=\pm1$ جواب دیگری ندارد)

۳ـ اگر x و y و z اعداد مثبت ودرتساوی زیر صدق کند:

$$xyz(x+y+z)=1$$

می‌نیمم $(x+y)(y+z)$ را پیدا کنید.

$$(x+y)(y+z)=(x+y+z)y+xz$$

۴ـ مطلوب است تعیین شرطی که عبارت

$$a^{m-1}+a^{m-2}+\cdots+a+1$$

بر $a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1$ بخشپذیر باشد.

(راهنمایی: این‌عبارات‌رابه‌صورت $\frac{a^m-1}{a-1}$ و $\frac{a^n-1}{a-1}$ بنویسید.)

۵ـ اگر $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_k}{b_k}$ و c_1, c_2 و c_k اعداد دلخواه باشندکه همزمان صفر نیستند، ثابت کنید (به‌شرطی‌که مخرج صفر نباشد)

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n=\frac{c_1a_1^n+c_2a_2^n+\cdots+c_ka_k^n}{c_1b_1^n+c_2b_2^n+\cdots+c_kb_k^n}$$

۶ـ مجموع n جمله از اعداد

۵, ۵۵, ۵۵۵, ۵۵۵۵, ...

را پیدا کنید.

۷ـ تصاعد عددی $a_1, a_2, a_n, \ldots$

وتصاعد هندسی $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$

که در آنها $a_1=b_1$ و $a_2=b_2$ داده شده‌اند.

هردو تصاعد صعودی وهمهٔ جملات هردوتصاعد مثبت هستند. ثابت کنید جملات تصاعد عددی، باشروع از a_3، کوچکتر از جملات متناظر خود از تصاعد هندسی هستند.

(راهنمایی: چون‌هردوتصاعدصعودی‌اندپس $d=a_2-a_1>0$ و $\left(x=\frac{a_2}{a_1}>1\right.$

۸ـ معادله $\sin^2 2^{\sqrt{-x}}=\frac{1}{2}$ راحل کنید.

(راهنمایی: معادله را به‌صورت $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\cdot2^{\sqrt{-x}}=\frac{1}{2}\right.$ بنویسید.

۹ـ ثابت کنید اگر $0<\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$ آنگاه

$$\alpha-\operatorname{tg}\alpha>\beta-\operatorname{tg}\beta$$

(راهنمایی: $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$ رابسط دهید.)

۱۰ـ ثابت کنید

$$\sqrt{\frac{4+\sqrt{4+\sqrt{4+\cdots+\sqrt{4}}}}{n \text{ تا } 4}}<3$$

(راهنمایی: از استقراء استفاده کنید ونشان دهید که

$$s_{k+1}=\sqrt{4+s_k}$$

۱۱ـ ثابت کنید که اگر یك زاویه وضلع مقابل از مثلثی با زاویه وضلع مقابل به آن درمثلث دیگر قابل انطباق باشد واندازه مجموع دوضلع دیگر این دومثلث‌هم برابر باشد، آنگاه دومثلث قابل انطباقند.

(راهنمایی: یکی ازاضلاع هر دومثلث را امتداد دهید.)

۱۲ـ مجموع زوایای یك کنج سه‌وجهی برابر است با 180°. مجموع کسینوسهای فرجه‌های این کنج را پیدا کنید.

(جواب: ۲)

۱۳ـ بااستفاده ازقضیه بطلمیوس ثابت کنید

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

(راهنمایی: B و D را در طرفین قطر AC از دایره طوری اختیار کنید که $\angle CAD=\alpha$ و $\angle BAC=\beta$ سپس ازقضیه سینوسها درمثلث استفاده کنید.)

۱۴ـ اگریکی ازریشه‌های معادله

$$x^3+21x^2+140x-300=0$$

دوبرابر ریشه دیگرمعادله باشد، معادله را حل کنید.

(راهنمایی: اگر x ریشه معادله باشد، $2x$ هم ریشه آن است. درمعادله به‌جای x، $2x$ قرار دهید وبااستفاده ازمعادله اول مسأله را حل کنید.)

۱۵ـ دنباله اعداد ... , ۱۵ , ۹ , ۵ , ۳ به‌قسمی هستند که تفاضل آنها تشکیل یك تصاعد عددی می‌دهند. nامین جمله این دنباله را پیدا کنید.

(جواب: n^2-n+3)

۱۶ـ اشتباه اثبات زیررا پیداکنید

$$\frac{1}{8}<\frac{1}{4}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^3<\left(\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^3<\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3\log_{10}\frac{1}{2}<2\log_{10}\frac{1}{2}\Rightarrow 3<2$$

۱۷ـ چند عدد پنج رقمی بدون تکرار رقم، می‌توان ازارقام ۵ , ۴ , ۳ , ۲ وا نوشت به‌قسمی که ارقام زوج در کنار هم قرارنگیرند.

(جواب: ۷۲)

۱۸ـ ثابت کنید اگر درمثلثی همه زوایا حاده باشند، آنگاه

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$$

و بالعکس.

(راهنمایی: همه جملات را به‌یك طرف برده آنرا به‌صورت حاصلضرب بنویسید:

$$2\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{A+B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)=0)$$

۱۹ـ به‌ازای چه مقداری از k سه جمله‌ای

$$(2k-1)x^2+(7k+2)x-3k$$

همواره بزرگتر ازسه جمله‌ای

$$(k+3)x^2+5(k+1)x-4(k+1)$$

است

۲۰ـ اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ نامنفی باشند ثابت کنید

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\dots+\sqrt{a_{n-1}a_n}\leqslant\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\dots+a_n)$$

(راهنمایی: از $\frac{m+n}{2}\geqslant\sqrt{mn}$ استفاده کنید.)

مسائل شماره ۳۸

تهیه و تنظیم از: محمود نصیری

۱– اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ مثبت $(n \geqslant 3)$ و

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)^2>(n-1)(a_1^4+a_2^4+\dots+a_n^4)$$

آنگاه به‌ازای هر $i \neq j \neq k$، a_i، a_j، a_k اندازه‌های اضلاع یك مثلث‌اند.

۲– درمثلث متساوی‌الساقین ABC، $(AB=AC)$، اندازه $\angle A$ برحسب درجه برابر 20° است. M روی ضلع AB و N روی ضلع AC واقع‌اند به‌طوری که اندازه $\angle MCB$ برابر 70° و اندازه $\angle NBC$ برابر 60° است، اندازه زاویه $\angle NMC$ را پیدا کنید.

۳– فرض کنید

$$f(x)=\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin t}\,dt}$$

$\lim_{x\to 0} f(x)$ را پیدا کنید.

(فرستنده: ش. ب. دبیرستان نفت کرمانشاه)

۴– اگر امتداد ارتفاعهای مثلث حادالزاویهٔ ABC دایره محیطی مثلث را مجدداً در A'، B' و C' قطع کنند ثابت کنید؛

$$S(ABC) \geqslant S(A'B'C')$$

(S نشان‌دهنده مساحت مثلث است)

۵– اگر $a_i \geqslant 1$، $(i=1,2,3,4)$ ثابت کنید؛

$$\frac{a_1^{27}+a_2^{27}+a_3^{27}+a_4^{27}}{a_1a_2a_3a_4} \geqslant \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}.$$

۶– درمثلث ABC، اندازه $\angle A$ دو برابر اندازه $\angle B$ است و $\angle C$ منفرجه است، و اندازه اضلاع مثلث یعنی a، b، c اعدادی صحیح هستند. کمترین محیط ممکن مثلث را با دلیل تعیین کنید.

۷– برای هرمجموعه ناتهی S از اعداد، فرض کنیم $\sigma(S)$ و $\pi(S)$ به‌ترتیب نشان‌دهنده مجموع و حاصلضرب اعضای S باشند. ثابت کنید

$$\sum\frac{\sigma(S)}{\pi(S)}=(n^2+2n)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)(n+1)$$

که «$\sum$» نشان‌دهنده مجموع روی‌تمام زیرمجموعه‌های ناتهی s از $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ است.

۸– نشان دهیدکه، به‌ازای هر عدد صحیح ثابت $n \geqslant 1$، دنباله

$$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \dots \pmod n$$

نهایتاً ثابت است.

(برج نماها به‌این صورت تعریف می‌شوند، $a_1=2$ و $a_{i+1}=2^{a_i}$. همچنین $a_i \pmod n$ به‌معنی باقیمانده‌ای است که از تقسیم a_i بر n حاصل می‌شود.)

۹– فرض کنیم $a=\frac{m^{m+1}+n^{n+1}}{m^m+n^n}$، که m و n اعداد صحیح ومثبت‌اند. ثابت کنید

$$a^m+a^n \geqslant m^m+n^n.$$

(راهنمائی: از تجزیه نسبت $\frac{a^N-N^N}{a-N}$ می‌توانید استفاده کنید، که $a \geqslant 0$ عددی حقیقی، و $N \geqslant 1$ عددی صحیح است.)

۱۰– فرض کنیم D نقطه‌ای دلخواه روی ضلع AB ازمثلث مفروض ABC باشد، وفرض کنیم نقطهٔ E درون مثلث تلاقی CD با یك مماس مشترك خارجی دایره‌های محاطی درونی مثلثهای ACD و BCD باشد. اگر D بر AB و بین A و B تغییر کند ثابت کنید مکان نقطه E کمانی از یك دایره است.

تذکر: مسائل ۶–۷–۸–۹–۱۰ مسائل بیستمین المپیاد ریاضی آمریکا می‌باشند.

جواب نامه‌ها

آقای مهدی مهدوی‌پور، دانشجو، سبزوار

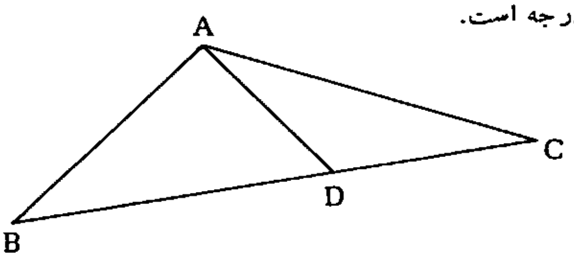
درکتابهای مقدماتی برای بررسی مشتق تابع f در نقطه‌ای مانند x_0 لازم است f دریك همسایگی x_0 تعریف شده باشد. پس درسطح مقدماتی برای تعریف مشتق دوم تابعی مانند f در نقطهٔ x_0 باید درهرنقطه ازیك همسایگی x_0 تابع f دارای مشتق مرتبه اول باشد. درحالی‌که درکتابهای پیشرفته‌تر برای تعریف مشتق تابعf درx_0 لازم‌است تابعf در x_0 تعریف‌شده باشد و x_0 یك نقطهٔ انباشتگی حوزهٔ تعریفf باشد

آقای محمد مهدی امینی، دانشجو، تهران

با تشکر از شما مسایل و نامه گله‌آمیز شما مبنی بر این‌که مسایل ارسالی شما را چاپ نمی‌کنیم،مجله رشد همواره ازمسایل جالب به‌شرط داشتن مأخذ و چاپ نشدن در سایر مجلات علمی، استقبال می‌کند. ازدومسأله اخیرشما هم استفاده خواهیم کرد.درمورد مصاحبه با آقای پرویز شهریاری، به‌اطلاع شما می‌رسانیم‌که مجله‌قصد چنین مصاحبه‌ای‌را داشت اما درج مصاحبه ایشان درمجله دانشمند وانتشارکتابی درباره زندگی‌و کارهای ایشان، جایی برای مصاحبه مجدد درمجله رشدرا باقی نمی‌گذارد. می‌توانید اطلاعات کافی‌را ازمطالعه این مجله و کتاب به‌دست آورید.

آقای محمد زمان، ك، تنکابن

اثبات‌شما برای این‌موضوع‌که مجموع اندازه‌های زوایای هرمثلث برابر با ۱۸۰ درجه است، بدون استفاده از اصل توازی اقلیدس، به‌دست ما رسید. دراثبات شما اشکالی وجود دارد. وآن این که مجموع زوایای همهٔ مثلثها را برابر فرض کرده‌اید. درحالی‌که این شرط بااصل توازی اقلیدس معادل است. در هندسه نتاری (هندسهٔ بدون اصل توازی) ثابت می‌شود که مجموع زوایای هر مثلث کوچکتر یا مساوی ۱۸۰ درجه است.



اگر D بینB وC آنگاه

$$\begin{aligned}&180-[(\angle A)^\circ+(\angle B)^\circ+(\angle C)^\circ]\\&=(180-[(\angle BAD)^\circ+(\angle ADB)^\circ\\&+(\angle B)^\circ])+(180-[(\angle ADC)^\circ\\&+(\angle DAC)^\circ+(\angle C)^\circ])\end{aligned}$$

اگر مجموع زوایای همهٔ مثلثها برابر باشدآنگاه αای‌هست‌که

$$\begin{aligned}\alpha&=180-[(\angle A)^\circ+(\angle B)^\circ+(\angle C)^\circ]\\&=180-[(\angle BAD)^\circ+(\angle ADB)^\circ\\&\qquad+(\angle B)^\circ]\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}&=180-[(\angle ADC)^\circ+(\angle DAC)^\circ\\&\qquad+(\angle C)^\circ]\end{aligned}$$

ودرنتیجه $2\alpha=\alpha$ پس $\alpha=0$ یعنی مجموع زوایای‌هرمثلث مساوی ۱۸۰ درجه است

وبعکس‌اگراصل توازی‌اقلیدس‌را بپذیریم‌بدیهی‌است‌که‌مجموع زوایای هرمثلث مساوی۱۸۰ درجه است.

آقای محمدرضا ضرابی، دانش‌آموز، تهران

باتشکر ازشما، مسایل المپیادارسالی شمارا دریافت‌کردیم. مجله،مسایلی‌را برای‌حل‌درج‌می‌کندکه، حل‌صحیح‌آن‌رادریافت کند. همین‌کتاب‌که شما مسایل‌را از آن استخراج کرده‌اید، در اختیارمجله هم قراردارد.که‌بهتراست برای ماتازه‌ترین مسایل را همراه باحل‌که درکتب و مجلات داخلی چاپ نشده باشد بفرستید. موفقیت شماراآرزومندیم

آقای وحید فرشاد، دانش‌آموز،تبریز

مقاله ارسالی‌شما درهیئت‌تحریریه مجله مورد بررسی‌قرار گرفت چون بیشتر مطالب این مقاله در شماره‌های قبلی مجله درج شده‌است، ازچاپ مجددآنها خودداری‌کردیم. نامه‌دیگر

شما را هم‌که حاوی چند مسأله بود دریافت کردیم، از ارسال حل یك مسأله سپاسگزاریم.

آقای هادی اشرف، دانشجو، شیراز

اگر z^{-1} به‌معنی معکوس اعداد صحیح است، معکوس صفر چی می‌شود؟ همچنین است معنی بزرگترین مقسوم علیه $\frac{1}{a}$ و a خواص‌متمم‌گیری بی‌معنی‌هستند ولذا، بااین دوعمل مجموعهٔ B نمی‌تواند جبر بول باشد.

آقای علی محمودیان، نورآباد، لرستان

فرمول ارسالی شما درباره مشتق kام تابع $f(x)$، مطلب بدیهی‌است. درنوشته شمادرمورد انتقال‌هم، تقریباً همان‌روش کتاب را به‌کاربرده شده است.

آقای محسن نصرتی‌نیا، تبریز

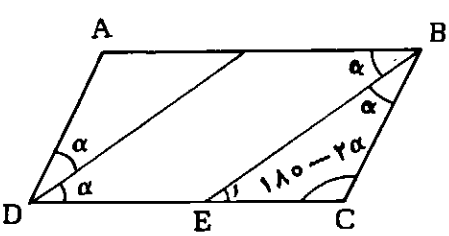
مقاله شما تحت‌عنوان «اعداداول‌کوچکتر ازعددی مفروض» که نشانگرعلاقه شما به‌ریاضی است مطالعه شد. از آنجا که اثباتها کامل ودقیق نیستند برای چاپ درمجله مناسب تشخیص داده نشد. امیدواریم بامطالعه بیشتروجایگزینی استدلال‌به‌جای مثال، موجبات بهبود نوشتجات خودرا فراهم آورید. برای‌شما موفقیت آرزومی‌کنیم.

آقای علیرضا زنجانی، دانش‌آموز.

باتشکر ازنامه محبت‌آمیز شما،راه حل مسأله شمارا دریافت کردیم. البته فرستادن حل مسایل دانش آموزان برای مجله ضرورت ندارد. درمورد مثال مورد نظرشما، قراراست مطلبی درهمین‌زمینه درمجله درج‌گردد. امیدواریم به‌سؤال شماجواب شایسته‌ای داده شود.

خانم شقایق جوادی

اگر اندازه یکی از زوایای متوازی‌الاضلاع را 2α فرض کنیم $m\angle B=2\alpha$ پس $m\angle C=180-2\alpha$ و در مثلث BCE داریم



$$m\angle E_1=180-(180-2\alpha+\alpha)=\alpha$$

پس $DF\|BE$ به‌طریق مشابه حکم درباره دو نیمساز دیگرهم به‌اثبات می‌رسد.

آقای مهدی عباس زارع، دانش‌آموز، کاشمر

رابطه

$$\left(\sum_{k=1}^{p} a_k\right)^n=\sum \frac{n!}{n_1!\cdots n_p!}a_1^{n_1}a_2^{n_2}a_p^{n_p}$$

$$n_1+\cdots+n_p=n$$

$$n_i\geqslant 0$$

برای هر تعداد متناهی عضو a_1 و... و a_p برقراراست. ولی‌اگر تعداد نامتناهی باشد سری‌ها وحاصلضرب سری‌هاوحاصلضرب کوشی سری‌ها $(n=2)$ مطرح می‌شود. اگر علاقمند به‌مطالعه سری‌ها هستید به‌کتاب آنالیز ریاضی۱ تألیف دکتر غلامحسین مصاحب ازانتشارات امیرکبیرمراجعه کنید.

آقای عبدالمحمد محمدینی، دانش‌آموز، خورموج

معادلهٔ $x^2-y^2=64$ جوابهای بیشماردارد. وشما تعداد کمی از آنهـا یعنی جوابهای صحیح را پیداکرده‌اید. درکلاس چهارم خواهید دیدکه $x^2-y^2=64$ معادله‌یك‌هذلولی‌است ومختصات هرنقطه‌آن درمعادله صدق می‌کند.

آقای هادی معصوم‌پور، دانش‌آموز، فریدون‌کنار

ضمن تشکر ازنامه محبت‌آمیز شما خاطرنشان می‌شود که در مورد انتقال‌گراف درامتداد محور yها، چون رأس $y=x^2$ برروی محورطولها قراردارد ودراین حالت $b^2-4ac=0$ است بنابراین به‌هراندازه گراف‌را بالا ویا پائین انتقال‌دهیم $b^2-4ac>0$ ویا $b^2-4ac<0$ می‌شودوبحث همان‌است که درمجله درج شده است.

آقای حسین اصلانی دانش‌آموز، تبریز

باتشکر ازشما چون مسأله ارسالی شما ازمسایل‌حل‌شده‌قدیم می‌باشد ودرکتابها وجود دارد، ازدرج آن معذوریم.

آقای سعید زارعی چاپکندی، دانش‌آموز، تبریز

باآرزوی موفقیت برای شما، نامه شمارا همراه بادو قضیه دریافت کردیم. قضیه اول‌مطلب تازه‌ای‌نیست ودرکتابها وجود دارد اما محاسبه طول‌عمود منصف، گرهی ازکارنمی‌گشاید.در انتظارمقاله ومطالب بهتری از شما هستیم.

آقای محمد قبله، دانش‌آموز، یزد

باسلام، نامهٔ شما درهیأت تحریریه مطرح شد، ضمن تشکر ازتوجه شما، به‌اطلاع می‌رساندکه متأسفانه درمنابع غربی‌همهٔ آثارایرانی واسلامی به‌عنوان‌آثارعربها منتشر می‌شود. معهذا، به‌دلیل ترجمه بودن مقالهٔ آقای قرائی در این مقالـه تصرف نگردید.

Contents

Roshd, Magazine of Mathematical Education. Vol 10 No 38, Summer 1993 Mathematics Section, 274 BILDING No, 4 Ministry of Education Iranshahr Shomali Ave. Tehran-Iran. A. Publication of Ministry of Education; Islamic Republic of Iran.

25th

ANNUAL IRANIAN MATHEMATICS CONFERENCE

بیست و پنجمین کنفرانس ریاضی کشور

SHARIF UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

28-31 MARCH 1994 TEHRAN IRAN

دانشگاه صنعتی شریف ۸ الی ۱۱ فروردین ۱۳۷۳